С. Д. Гапоченко

ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

С. Д. Гапоченко

ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Підручник
для студентів технічних спеціальностей
усіх форм навчання

Затверджено Вченою радою НТУ «ХПІ»

Харків
НТУ «ХПІ»
2025

УДК 537
Г 11

Рецензенти:

О. Я. Оліх, д-р фіз.-мат. наук, проф., Київський національний університет ім. Тараса Шевченка;

В.А. Сіренко, д-р фіз.-мат. наук, проф., Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАНУ;

О.В. Стронський, д-р фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб., Інститут фізики надпровідників ім. В. Є. Лашкарьова НАНУ

Затверджено Вченою радою НТУ «ХПІ» як підручник
для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання,
протокол № 10 від 26.09.2025 року

Гапоченко С. Д.

Г 11 Електромагнетизм: підручник для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання / С. Д. Гапоченко. – Харків : НТУ «ХПІ», 2025. – 394 с.

ISBN 978-617-05-0540-8

Підручник відповідає програмі курсу «Фізика». Складається з теоретичного матеріалу, прикладів розв'язку типових задач та матеріалів для самостійної роботи: питань для самоперевірки і задач за темами: електрика, постійний струм, магнітостатика, електромагнітна індукція, основи теорії Максвелла для електромагнітного поля.

Призначено для студентів денної, заочної та дистанційної форм навчання технічних спеціальностей.

Іл. 296. Табл. 5. Бібліогр. 7 назв.

УДК 537

ISBN 978-617-05-0540-8

© Гапоченко С. Д., 2025
© НТУ «ХПІ», 2025

Вступ

Курс фізики є однією з базових дисциплін фундаментальної наукової підготовки майбутніх інженерів. Це зумовлено тим, що фізика в структурі науково-технічного знання виконує кілька важливих функцій.

По-перше, принципи й закони фізики становлять основу природничо-наукових і технічних дисциплін, які забезпечують науково-технічний прогрес.

По-друге, вивчення фізики формує в майбутнього інженера сучасне наукове розуміння навколишнього світу, яке є пізнавально-інтелектуальним складником світогляду.

По-третє, засвоєння законів фізики та вміння застосовувати їх на практиці сприяють розвитку в студентів логічного мислення й здатності до пізнавальної діяльності.

Кардинальні зміни, що відбуваються в структурі світової економіки, потребують нових методів навчання майбутніх інженерів. Зростає потреба у формуванні навичок до самостійної роботи, які б забезпечили здатність до самоосвіти протягом усього життя.

Електромагнетизм — розділ фізики, в якому вивчаються закони взаємодії заряджених тіл і властивості електромагнітного поля. Закони електромагнетизму становлять основу багатьох технічних дисциплін.

Підручник розроблено відповідно до силабусів дисципліни «Фізика», розроблених на кафедрі фізики НТУ «ХПІ», з урахуванням зазначених функцій фізики та актуальних потреб сьогодення.

Основна мета написання цього підручника — поєднати теорію з практикою: сформулювавши основні закони фізики, показати їх застосування на прикладах розв’язку задач, а також у приладах та пристроях, що використовуються в різних галузях науки та техніки.

Особлива увага приділялась саме будові та принципам роботи різноманітних приладів, що базуються на законах електромагнетизму, бо цей аспект практичного використання фізичного знання зазвичай залишається поза увагою. На наш погляд такий підхід сприятиме підвищенню інтересу та мотивації студентів інженерного профілю до вивчення фізики.

При викладанні матеріалу авторка прагнула уникати надмірної математизації, зосереджуючи основну увагу на фізичній суті явищ.

Задачі, що розглядаються, здебільшого є доповненням і розвитком теоретичного матеріалу, що, вочевидь, сприятиме глибшому розумінню фізичних законів. Наводячи приклади розв’язання від простих до складних задач, авторка мала на меті поступове формування культури системного фізичного й математичного мислення студента — майбутнього інженера. Особливу увагу приділено аналізу фізичних моделей, розмірностям фізичних величин та їхньому використанню для верифікації отриманої відповіді.

Підручник може бути використаний у модульній організації навчального процесу, а також для самостійної роботи студентів очної, заочної та дистанційної форм навчання.

ПОЗНАЧЕННЯ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ

Вектор позначається похилою літерою зі стрілкою над нею: наприклад, $\vec{r}$.

Модуль вектора (наприклад, $\vec{r}$) позначається як $|\vec{r}|$ або похилою літерою без стрілки: r.

Середнє значення величини позначається дужками $\langle\ \rangle$: наприклад, середнє значення сили струму $\langle I \rangle$.

Приріст фізичної величини – різниця між кінцевим значенням і початковим значенням величини; позначається великою грецькою літерою **Δ (дельта)**: наприклад, приріст енергії електричного поля $\Delta W = W_2 - W_1$.

Спад фізичної величини – різниця між початковим і кінцевим значенням величини; позначається великою грецькою літерою **Δ (дельта)** зі знаком «–» (– Δ): наприклад, $-\Delta W = W_1 - W_2$.

Диференціал (нескінченно малий приріст) фізичної величини позначається похилою латинською літерою d: наприклад, dW.

Елементарне (нескінченно мале) значення фізичної величини позначається малою грецькою літерою δ (дельта): наприклад, δA.

Похідна функції $f(t)$ за часом t позначається $\dfrac{df}{dt}$.

Фізична величина може залежати від декількох змінних: наприклад, $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Похідна від функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за однією зі змінних називається **частковою (частинною) похідною** й позначається відповідно $\dfrac{\partial z}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial z}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial z}{\partial x_n} = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$.

Інтеграл будь-якої кратності позначається $\int$ й відрізняється елементом інтегрування: dl – елемент контуру; dS – елемент поверхні; dV – елемент об’єму. Наприклад, інтеграл по контуру l – $\int_l E\cos\alpha dl$, інтеграл по поверхні S – $\int_S \sigma dS$, інтеграл по об’єму V – $\int_V \rho dV$.

Інтеграл по замкненому контуру або замкненій поверхні позначається $\oint$. Наприклад, інтеграл по замкненому контуру Γ – $\oint_\Gamma E\cos\alpha dl$, інтеграл по замкненій поверхні S – $\oint_S B\cos\alpha dS$.

1. ЕЛЕКТРИКА

1.1. ЕЛЕКТРОСТАТИКА У ВАКУУМІ

1.1.1. ПРЕДМЕТ ВЧЕННЯ ПРО ЕЛЕКТРИКУ Й МАГНЕТИЗМ. ЕЛЕКТРИЧНИЙ ЗАРЯД. ВЛАСТИВОСТІ ЕЛЕКТРИЧНОГО ЗАРЯДУ. ЕЛЕКТРИЗАЦІЯ ТІЛ. КОРИСНА ТА ШКІДЛИВА ДІЯ ЕЛЕКТРИЗАЦІЇ ТІЛ

ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ — розділ фізики, в якому вивчається взаємодія *нерухомих і рухомих* електрично заряджених тіл і властивості полів, які вони створюють.

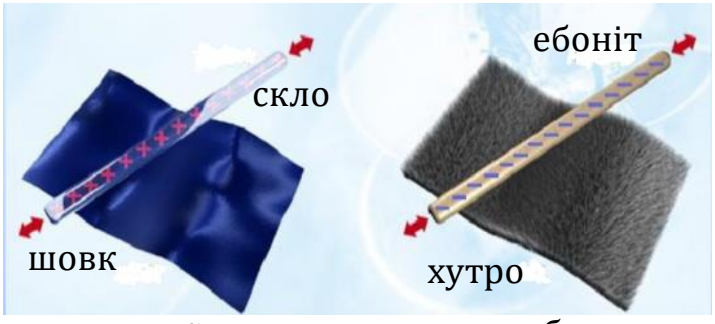
ЕЛЕКТРИКА (ЕЛЕКТРОСТАТИКА) — розділ фізики, в якому вивчається взаємодія *нерухомих електрично заряджених* тіл і властивості полів, які вони створюють.

Електричний заряд q (читаємо як латинську літеру «ку») — фізична величина, яка є мірою електричних властивостей системи (тіла, частинки *тощо*).

В СІ $[q]$ = Кл (кулон). Кл = А·с. Розмірність електричного заряду $\dim q = IT$ (I – сила струму; T – час).

[1]**Знайко** Всі **тіла здатні електризуватися** — отримувати електричний заряд.

Існує два види електричних зарядів: **позитивні** й **негативні.** Як **позитивний** береться *заряд*, подібний заряду скляної палички, що натерта шовком (рисунок 1.1, *а*). Як **негативний** береться *заряд*, подібний до заряду ебонітової палички, що натерта хутром (рисунок 1, *б*).



а *б*

Рисунок 1.1

ВЛАСТИВОСТІ ЕЛЕКТРИЧНОГО ЗАРЯДУ

1. Величина електричного заряду не залежить від системи відліку, отже, не залежить від того рухається він чи знаходиться у стані спокою.

Електричний заряд є релятивістські інваріантним.

[1] Вивчати закони електромагнетизму нам допоможуть Знайко і Незнайко https://dovidka.biz.ua/prigodi-neznayka-ta-yogo-druziv-skorocheno/ https://oir.mobi/656843-neznajka.html

2. Електричний заряд має **властивість адитивності:** повний електричний заряд q системи електрично заряджених n тіл дорівнює алгебраїчній сумі позитивних і негативних зарядів q_i (i = 1, 2, …., N) тіл

$$q = \sum_{i=1}^{N} q_i, \qquad (1.1)$$

де N – кількість заряджених тіл у системі.

3. **Електричний заряд є дискретним:** заряд будь-якого тіла кратний елементарному електричному заряду.

Елементарний електричний заряд дорівнює $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Електрон і протон є відповідно носіями елементарних **негативного** і **позитивного** зарядів: заряд електрона $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл; заряд протона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Заряд q електрично зарядженого тіла $q = Ne$ (N – натуральне число).

В електростатиці досліджується **фізична модель: точковий електричний заряд** — електрично заряджене тіло, формою й розмірами якого можна знехтувати в умовах даної задачі.

ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ЗАРЯДУ: алгебраїчна сума зарядів тіл, що входять до електрично ізольованої системи, не змінюється при будь-яких процесах, які відбуваються в системі,

$$\boxed{q = \sum_{i=1}^{N} q_i = \text{const}}. \qquad (1.2)$$

Електрично ізольованою системою називається система, до якої з зовнішнього середовища крізь її межі не надходять електрично заряджені тіла.

СПОСОБИ ЕЛЕКТРИЗАЦІЇ

Розглянемо найбільш поширені способи електризації тіл.

✓ **Електризація тертям** (див. рис. 1.1). При терті двох тіл із різних матеріалів одне об інше вони отримують однакові за модулем заряди протилежного знаку. Електризація полягає в тому, що негативні заряди — електрони — переходять від одного тіла до іншого. Тіло, яке втрачає електрони, отримує позитивний заряд; тіло, до якого переходять електрони, отримує негативний заряд. Знаки зарядів тіл залежать від того, яка пара матеріалів

використовується. В таблиці 1.1 наведено декілька прикладів. Наведені знаки зарядів, які отримують матеріали, що вказані в стовпчику, при контакті з матеріалами, що вказані в рядку.

Таблиця 1.1

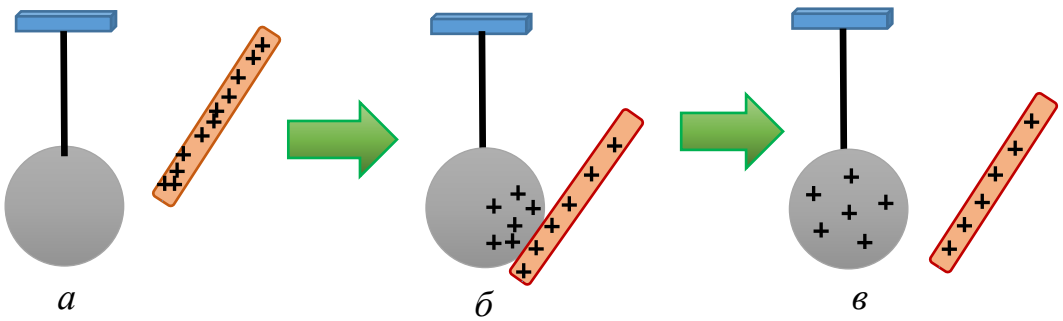
	ХУТРО	ГУМА	ПАПІР	ШОВК
ЕБОНІТ	−	+	+	−
ОРГАНІЧНЕ СКЛО	+	+	+	+
СКЛО	+	+	+	+
СУРГУЧ	−	+	+	+
МЕТАЛ	+	+	+	+

Таблиця 1.2

+	СИЛІКОН
	СКЛО
	ПЛЕКСИГЛАС
	НЕЙЛОН
	СУКНО
	ВОВНА КІШКИ
	ЦЕЛЮЛОЗА
	БАВОВНА
	БУРШТИН
	ПОЛІУРЕТАН
	ПОЛІСТИРОЛ
	ПОЛІВІНІЛ
	ТЕФЛОН
	ЕПОКСИДНА СМОЛА
	НАТУРАЛЬНИЙ КАУЧУК
−	ПОЛІЕТИЛЕН

Існує **шкала**, яка називається **трибоелектричною шкалою** (таблиця 1.2), за якою можна визначити знаки зарядів, що отримують тіла з різних матеріалів при терті одне об інше: той матеріал, що розташований вище за шкалою, заряджається позитивно, а той що нижче – негативно. Отриманий заряд тим більший, чим більше рознесені матеріали за шкалою.

✓ **Електризація дотиком** (рисунок 1.2). При дотику позитивно зарядженою паличкою до нейтральної металевої кулі (див. рис. 1.2, *б*) частина електронів із кулі переходить на паличку. Внаслідок цього заряд палички

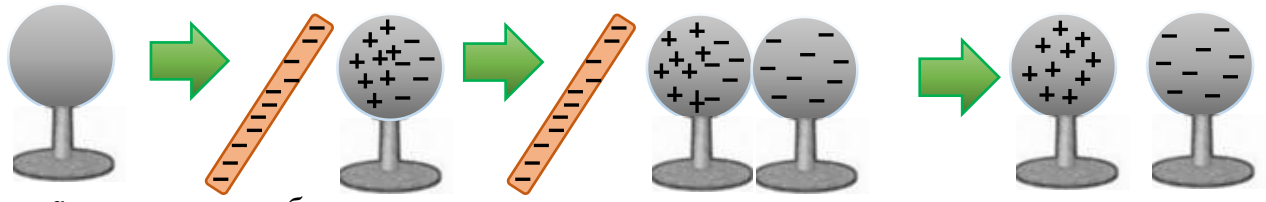


а *б* *в*

Рисунок 1.2

зменшується, а куля отримує позитивний заряд, який потім (рис. 1.2, *в*) рівномірно розподіляється по кулі.

✓ **Електризація впливом (електростатична індукція)** (рисунок 1.3). Коли негативно заряджена паличка підноситься до металевої кулі (див. рис. 1.3, *б*), тоді електрони металу, відштовхуючись від негативних зарядів палички, переміщуються на протилежний (відносно палички) бік кулі. Коли інша нейтральна куля дотикається до першої кулі (див. рис. 1.3 *в*), тоді частина електронів переходить на неї: перша куля отримує позитивний заряд, друга куля – негативний заряд (див. рис. 1.3, *г*).



а *б* *в* *г*

Рисунок 1.3

Коли по-різному наелектризовані тіла (мають заряди протилежного знаку або однакового знаку, але різної величини) наближаються або дотикаються одне до іншого, тоді між ними відбувається електричний розряд — між цими тілами виникає електричний струм.

Явище електризації має як корисний, так і шкідливий аспекти.

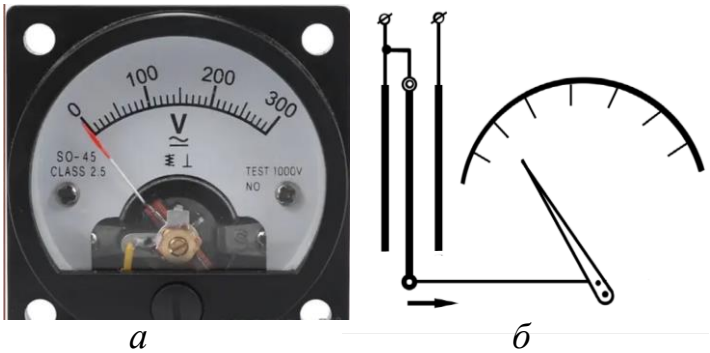
КОРИСНА ДІЯ ЕЛЕКТРИЗАЦІЇ

Наведемо деякі приклади корисної дії електризації тіл.

1. Використання в деяких приладах і пристроях. Явище електризації використовується в різних приладах і апаратах.

Наприклад, **вольтметр електростатичної системи** (рисунок 1.4, *а*), принципова схема якого наведена на рисунку 1.4, *б*.

На невеликій відстані одна від іншої розташовані три пластини. Середня пластина з'єднана зі стрілкою або дзеркальним відбивачем механізму відліку. Вона може відхилятися і переміщувати стрілку або



а *б*

Рисунок 1.4

дзеркальний відбивач. Коли вольтметр підключається до джерела напруги, тоді середня планка буде відштовхуватися від лівої пластини та притягуватися до правої, переміщуючи стрілку вздовж шкали. Переваги вольтметра цієї системи порівняно з вольтметрами інших систем — мізерно мале власне споживання енергії від джерела сигналу, високий вхідний опір, можливість використання в ланцюгах постійного й змінного струму, широкий частотний діапазон.

Рисунок 1.5

2. Фарбування автомобілів. Корпус автомобіля заряджають позитивно, а фарбу — негативно (рисунок 1.5). Частинки фарби відштовхуються одна від іншої, але притягуються до деталей автомобіля, що сприяє щільному та рівномірному фарбуванню.

3. Електрофільтри. Використовуються в димових трубах. Частинки кіптяви електризуються при терті об трубу й осідають на її стінках. На великих птахофермах електрофільтри використовуються для очищення повітря від пилу.

3. Перемішування тіста на хлібозаводах. Мука заряджається позитивно, вода — негативно. Часточки муки притягуються до водяних крапель, що прискорює досягнення однорідності тіста (рисунок 1.6).

Рисунок 1.6

Електризація використовується в пристроях для друку та копіювання тексту — лазерних принтерах і ксероксах, принцип роботи яких буде детально розглянуто в пункті 1.1.2.

ШКІДЛИВА ДІЯ ЕЛЕКТРИЗАЦІЇ

На виробництві статична електрика може створювати різні проблеми: виникнення іскор і небезпеку пожежі, пошкодження електронної та електричної апаратури, а також дискомфорт для працівників.

Багато технологічних процесів зв’язані з утворенням статичної електрики:

- ✓ тертя стрічок і тросів, транспортерів у промисловому обладнанні;
- ✓ транспортування горючих і легкозаймистих рідин трубопроводами;
- ✓ наповнення посудин рідкими нафтопродуктами;

- ✓ рух частинок зі значною швидкістю у вентиляційних каналах;
- ✓ робота з сухими речовинами: процеси дроблення, подрібнення, перемішування;
- ✓ тиск на матеріали різного складу в різних агрегатних станах;
- ✓ механічна обробка пластиків;
- ✓ рух трубопроводом зрідженого газу *тощо*.

Потужність електростатичних розрядів у деяких випадках може бути достатньою для займання пилу, пари, газу, забрудненого повітря *тощо*.

Рисунок 1.7

Розглянемо деякі приклади.

1. Дуже **небезпечна електризація для цистерн, якими перевозиться паливо** (рисунок 1.7). При заповненні цистерни всередині накопичуються заряди. Під час руху автомобіля накопичення зарядів продовжується. При виливі палива з цистерни від найменшої іскри може статися вибух. Тому для перевезення бензину використовуються металічні цистерни, а на заправках його не заливають у пластикову тару.

Рисунок 1.8

Рисунок 1.9

2. У текстильній промисловості від електризації потерпають чесальні машини (рисунок 1.8) та спеціальні ножиці для підстригання ворсу. Електризація викликає заплутування ниток, їхнє обривання й, зрештою, несправність верстата.

3. У працюючих типографських машинах (рисунок 1.9) відбувається електризація паперу, що може спричинити його займання та пожежу. Внаслідок електризації в домашніх принтерах при довгому друкуванні зазвичай відбувається злипання паперу.

4. Людина відчуває на собі негативні наслідки електризації одягу, волосся (рисунок 1.10), синтетичних ковдр і килимів. Це відбувається переважно

Рисунок 1.10

взимку, коли повітря сухе. При терті під час ходи по синтетичному покриттю або при роздяганні, за браком вологи, електрони осідають на шкірі людини, електризуючи її. Зняти заряди можна вологою рукою. Інша причина електризації в неправильному поєднанні одягу. Різні тканини електризуються при терті одна об іншу. Ці заряди передаються людині.

5. Статична електрика небезпечна для електроніки. Електрика накопичується на будь-якому ізоляторі й залишається навіть після відключення джерела живлення. Вона є значною загрозою для мікросхем. Потужність електричного розряду невелика, але достатня для того, щоб електричний струм, який виник при розряді, пошкодив чутливу електроніку або викликав у кристалі інтегральної схеми непомітні пошкодження. Проблема полягає в тому, що визначити конкретний пошкоджений елемент завжди важко. Проте згодом він обов'язково вийде з ладу. Навіть рука людини, яка зазвичай має електричний заряд, може бути загрозою для більшості мікросхем.

ЗАХИСТ ВІД ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ЗАРЯДУ

Як зазначалось вище, статична електрика може викликати порушення всього технологічного процесу, тому необхідний захист усіх ділянок виробництва, де можлива електризація. Всі засоби захисту націлені або на попередження появи та накопичення електричних зарядів, або на їхнє розсіювання.

Зокрема використовується заземлення всіх металевих пристроїв та об'єктів, на яких може виникнути статична електрика: змішувачів, повітряних та газових компресорів, пневматичних сушильних установок, млинів, закритих транспортерних стрічок, пристроїв для наливання та зливу рідини, яка має низьку електропровідність *тощо*. Заземлення виконується в різних місцях.

Примітка: Заземлення — електричне з'єднання металевих частин електричних машин, апаратів, приладів *тощо* зі землею з метою захисту людей від ураження електричним струмом або захисту електроприладів.

Якщо трубопроводи знаходяться на відстані 10 см, їх потрібно з'єднувати металевою перетинкою через кожні 25 см.

Нестаціонарні посудини під час наливання в них рідини, яка легко запалюється, тимчасово заземлюються. Всі автомобільні заправники й автоцистерни заземлюють за допомогою металевого ланцюга певної довжини.

Знизити ймовірність появи електричного заряду можна шляхом вибору певної швидкості руху матеріалів, мінімізації розбризкування та інтенсивного перемішування матеріалів, подрібнення й розпилювання матеріалів *тощо*.

1.1.2. ЛАЗЕРНИЙ ПРИНТЕР. КСЕРОКС

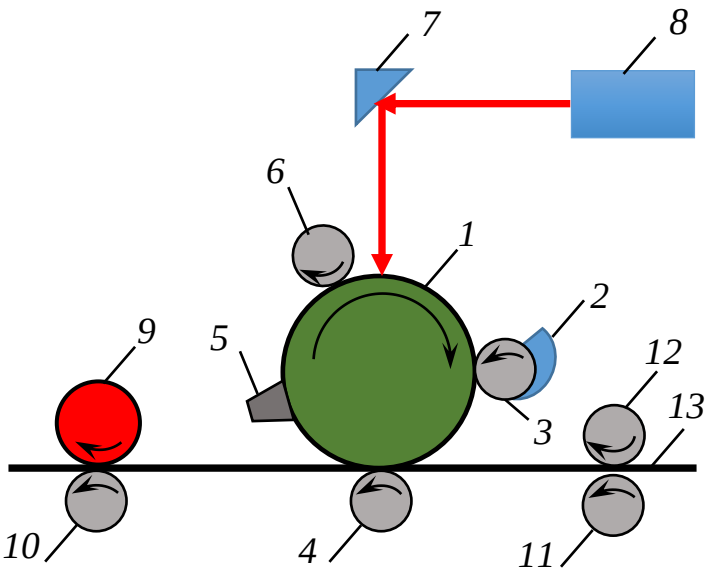
ЛАЗЕРНИЙ ПРИНТЕР

Рисунок 1.11

В основі роботи сучасних лазерних принтерів (рисунок 1.11) і копірувальних апаратів полягає **процес сухого електростатичного перенесення зображення,** який був винайдений *американським інженером Ч. Ф. Карлсоном* у 30-х роках XX ст. Перший лазерний принтер був розроблений фірмою Hewlett Packard.

Основні блоки лазерного принтера:

- ✓ блок лазерного сканування;
- ✓ вузол перенесення зображення;
- ✓ вузол закріплення зображення.



1 – фотобарабан;
2 – ємність (бункер) із тонером;
3 – валик проявлення;
4 – валик перенесення;
5 – збірник відпрацьованого тонера;
6 – вал попереднього заряду;
7 – система дзеркал і лінз;
8 – лазер;
9 – термовалик;
10 – притискний валик;
11, 12 – валики захоплення та подачі паперу
13– папір

Рисунок 1.12

Блок лазерного сканування (рисунок 1.12) складається з *напівпровідникового лазера 8* та *оптико-механічної системи дзеркал і лінз 7*,

які можуть обертатися, переміщуючи лазерний промінь по поверхні фотобарабана *1*. Дзеркала мають складну форму: зазвичай чотиригранну або шестигранну.

Вузол перенесення зображення — *картридж* має такі складові частини (див. рис. 1.12): *фотобарабан 1, валик попереднього заряду 6* і *валик проявлення 3*, які взаємодіють з фотобарабаном. Фотобарабан — невеликий алюмінієвий циліндр із магнітним осердям, покритий тонким шаром напівпровідникового матеріалу, який має великий опір при затемненні. Заряд, що надається фотобарабану в затемненому стані, зберігається надовго. При опроміненні світлом заряд фотобарабана зменшується.

Вузол закріплення зображення складається з нагрівального елемента *9*, температура якого сягає 180°, що достатньо для плавлення тонера, і *притискного валика 10*. Тонер — полімерний порошок (розмір частинок 5 ÷ 30 мкм), яким наноситься текст чи рисунок на папір.

ЕТАПИ РОБОТИ ЛАЗЕРНОГО ПРИНТЕРА

- **Створення заряду на поверхні фотобарабана.** Залежно від конструкції принтера заряд на фотобарабані може бути позитивним чи негативним. З метою однозначності розглянемо варіант негативно зарядженого фотобарабана. Зарядити барабан можна двома способами: коронатором або роликом попереднього заряду. *Коронатор* — вольфрамова нитка з вкрапленнями золота або платини. При визначеному високому потенціалі на нитці біля неї виникає коронний розряд — область іонізованого повітря, внаслідок чого на фотобарабані накопичується статичний електричний заряд. Більш поширеним є *ролик попереднього заряду 6* — металевий валик, на який нанесене гумове покриття, що попередньо заряджається при надходженні сигналу про початок друку тексту. Ролик притискається до фотобарабана і, обертаючись в одному напрямку, рівномірно заряджає барабан, який обертається в протилежному напрямку. Оскільки електричний опір затемненого барабана значний, заряд не проникає в глибину шару напівпровідника, а залишається на поверхні. Потенціал барабана підтримується постійним за допомогою спеціального пристрою.

- **Експонування — створення на фотобарабані попереднього зображення за допомогою лазерного променю.** Головним блоком принтера є *блок керування*. Він відповідає за обробку та виконання команд, що надходять

від комп'ютера. Персональний комп’ютер виконує кодування інформації на сторінці в двійковому коді (позиції «**1»** і «**0»**) та надсилає її в цифровому вигляді до принтера, де вона зберігається в оперативній пам’яті. Наприклад, «**1**» відповідає світлій точці, а «**0**» – чорній точці вихідного зображення. В момент друку блок керування вилучає дані з пам’яті й формує відповідно до них електричні імпульси, які надсилає на вхід мікроконтролера. Мікроконтролер перетворює електричні імпульси в механічні рухи всіх елементів і приводів. Зокрема, мікроконтролер вмикає й вимикає лазер, а також забезпечує необхідне положення відбивальних дзеркал для того, щоб лазерний промінь потрапив у відповідну точку барабана. У випадку чорно-білого друку «**1»** означає сигнал мікроконтролеру «увімкнути лазер» і тонкий лазерний промінь спрямовується системою дзеркал у визначену точку фотобарабана. При опроміненні лазерним світлом внаслідок внутрішнього фотоефекту зростає електропровідність напівпровідника й він розряджається в точці, куди потрапив лазерний промінь. Відповідно «**0»** не передає сигнал і заряд таких ділянок не змінюється. Відтак, ділянки, які повинні бути світлими, розряджаються світлом і на поверхні барабана залишаються негативно зарядженими тільки ті ділянки, на які повинен наноситися тонер. Отже, на поверхні барабана формується приховане *електростатичне зображення*.

- **Нанесення тонера**. Частинки тонера заряджені позитивно. Посудина (бункер) із тонером *2* розташована поблизу барабана (див. рис. 1.11), тому частинки легко притягуються до нього, тобто *електростатично переносяться* на заряджені ділянки. Бункер із тонером зазвичай знаходиться у *вузлі проявлення*, який складається з магнітного вала *3* та леза з магнітного матеріалу. Магнітний вал намагнічує частинки тонера, а лезо є дозатором тонера. Одночасно магнітний вал бере участь в нанесенні тонера на барабан. Магніт фотобарабана притягує тонер із бункера. Сила магнітного притягування частинок тонера до барабана менша за силу електростатичного притягування до нього. Тому частинки тонера наліплюються на нерозряджені ділянки фотобарабана й набувають негативного заряду. Отже, на поверхню барабана тонер наноситься тонким шаром, який формує *дзеркальне негативно заряджене зображення оригіналу*.

- **Перенесення тонерного негативно зарядженого зображення з фотобарабана на чистий аркуш паперу**. Аркуш паперу *13* під час друку

проходить між фотобарабаном, який обертається, й роликом перенесення *4*, який має високий позитивний потенціал і теж обертається. Негативно заряджені частинки тонера переносяться з барабана на аркуш паперу — зображення чи текст переноситься на папір.

- **Відділення паперу.** Папір відокремлюється внаслідок електростатичного притягування між папером і валиком перенесення. Розрядна пластина допомагає відділити папір від фотобарабана.
- На завершальному етапі відбувається **запікання тонера** в нагрівальному елементі: листок із тонером проходить між термовалом *9* і притискним роликом *10*, де підлягає термобаричній (високі температура й тиск) обробці. Остаточно тонер на аркуші закріплюється й стає стійким до зовнішнього механічного впливу.
- **Очищення барабана від тонера** виконується за допомогою спеціального леза: воно зчищає тонер і спрямовує його до бункера *5* для обробки.
- **Видалення прообразу зображення з барабана.** Світло від лазера засвічує фотобарабан і нейтралізує заряд на його поверхні.

КСЕРОКС

Рисунок 1.13

Як зазначалося вище, робота лазерного принтера й ксерокса (рисунок 1.13) базується на однакових принципах.

Різниця полягає тільки в способі створення цифрового сигналу, який надходить до оперативної пам’яті принтера.

В ксероксі для **сканування інформації на сторінці, що копіюється, використовується лампа сканування**. Світло лампи сканування, відбите від оригіналу, потрапляє на ПЗЗ-матрицю (ПЗЗ — прилад із зарядовим зв’язком). Аналоговий сигнал перетворюється в цифровий, обробляється та зберігається в пам’яті копіювального апарату. В момент друку дані вилучаються з пам’яті й передаються до блоку формування зображення.

Подальші етапи аналогічні етапам, що були розглянуті для лазерного принтера.

1.1.3. ЗАКОН КУЛОНА

Закон, який визначає силу взаємодії двох точкових зарядів, був сформульований *французьким фізиком Шарлем Кулоном* у 1785 р.

ЗАКОН КУЛОНА: у вакуумі (повітрі) модуль сили F взаємодії двох нерухомих точкових зарядів q_1 і q_2 прямо пропорційний добутку модулів $|q_1|\cdot|q_2|$ цих зарядів і обернено пропорційний квадрату відстані r між ними

$$F = k \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}, \tag{1.3}$$

де k – коефіцієнт пропорційності, який залежить від системи одиниць.

В СІ $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, отже,

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}}, \tag{1.4}$$

де ε_0 – електрична стала: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м (фарад/метр). Чисельне значення $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф. Розмірність електричної сталої $\dim\varepsilon_0 = I^2T^4M^{-1}L^{-3}$.

Сила $\vec{F}$ *напрямлена вздовж прямої, яка з'єднує заряди* (рисунок 1.14, рисунок 1.15).

Сила, яка визначається законом Кулона, називається *силою Кулона або кулонівською силою.*

Однойменні заряди відштовхуються (див. рис. 1.14, *а*), різнойменні — притягуються (див. рис. 1.14, *б*).

Враховуючи це, напишемо **закон Кулона в векторній формі** (див. рис. 1.15, *а*)

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{21}}{r_{21}^3}, \tag{1.5}$$

де $\vec{F}_1$ – сила, що діє з боку заряду q_2 на заряд q_1; $\vec{r}_{21}$ – радіус-вектор, проведений від заряду q_2 до заряду q_1; $r_{21} = |\vec{r}_{21}| = r$ – відстань між зарядами.

На заряд q_2 (див. рис. 1.15, *б*) діє сила

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}, \qquad (1.6)$$

де $\vec{r}_{12}$ – радіус-вектор, проведений від заряду q_1 до заряду q_2; $r_{12} = |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_{21}| = r_{21} = r$ – відстань між зарядами.

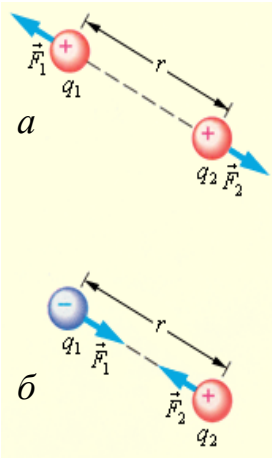


Рисунок 1.14

$\vec{F}_1$ – сила, що діє з боку заряду $+q_2$ на заряд $+q_1$; $\vec{F}_2$ – сила, що діє з боку заряду $+q_1$ на заряд $+q_2$; $\vec{r}_{21}$ – радіус-вектор заряду $+q_1$; $\vec{r}_{12}$ – радіус-вектор заряду $+q_2$

Рисунок 1.15

За *третім законом Ньютона*

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \qquad (1.7)$$

Коли заряди q_1 і q_2 розташовані в діелектричному середовищі, тоді модуль сили Кулона визначається за формулою

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{\varepsilon r^2}}, \qquad (1.8)$$

де ε – *відносна діелектрична проникність речовини. Для вакууму (повітря)* ε = 1.

В СІ $[\varepsilon] = 1.$

Діелектрики, взаємодія електричних зарядів у діелектричному середовищі та відносна діелектрична проникність речовини детально розглядаються в пункті 1.2.3.

1.1.4. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Незнайко

Маємо два заряди $q_1 = 3$ нКл і $q_2 = -5$ нКл, відстань між якими $r = 5$ см. Визначити силу, що діє з боку цих зарядів на заряд $q_3 = 4$ нКл, який знаходиться: посередині між зарядами; на відстані $r_1 = 4$ см від першого заряду й на відстані $r_2 = 3$ см від другого заряду.

Випадок 1 (рисунок 1).

Аналіз

На заряд q_3 діє з боку заряду q_1 сила $\vec{F}_1$, а з боку заряду q_2 – сила $\vec{F}_2$ (див. рис. 1). За принципом суперпозиції сил рівнодіюча сила $\vec{F}$ дорівнює

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \qquad (1)$$

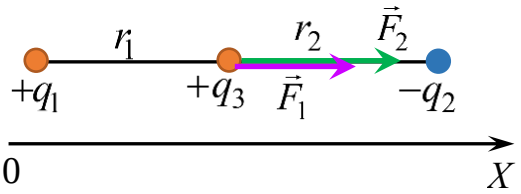


Рисунок 1

Напишемо рівняння (1) в проєкціях на вісь $0X$, яка паралельна лінії, що з'єднує заряди (див. рис. 1)

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 + F_2, \qquad (2)$$

Модуль F

$$F = |F_x| = F_1 + F_2, \qquad (3)$$

де F_1 і F_2 – модулі векторів $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$.

За законом Кулона

модуль сили взаємодії точкових зарядів q_1 і q_3

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_3|}{r_1^2}, \qquad (4)$$

де r_1 – відстань між зарядами q_1 і q_3;

модуль сили взаємодії точкових зарядів q_2 і q_3

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_2| \cdot |q_3|}{r_2^2}. \qquad (5)$$

де r_2 – відстань між зарядами q_2 і q_3; ε_0 – електрична стала.

За умовою задачі $r_1 = r_2 = r/2$ (r – відстань між зарядами q_1 і q_2), тоді

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|q_1|\cdot|q_3|}{r_1^2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|q_2|\cdot|q_3|}{r_2^2}=\frac{4}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|q_1|\cdot|q_3|}{r^2}+\frac{4}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|q_2|\cdot|q_3|}{r^2}=$$

$$=\frac{4|q_3|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot(|q_1|+|q_2|),$$

$$F=\frac{4|q_3|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot(|q_1|+|q_2|). \qquad (6)$$

Перевіримо формулу (6):

$$[F]=\text{Н}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2};\ [q]=\text{Кл}=\text{А}\cdot\text{с};\ [r]=\text{м};\ [\varepsilon_0]=\frac{\Phi}{\text{м}}=\frac{\text{А}^2\cdot\text{с}^4}{\text{кг}\cdot\text{м}^3};$$

$$\left[\frac{q\cdot q}{\varepsilon_0 r^2}\right]=\frac{\text{А}^2\cdot\text{с}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^2\cdot\text{А}^2\cdot\text{с}^4}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Дано:	**СІ**
$q_1=3$ нКл	$3\cdot10^{-9}$ Кл
$q_2=-5$ нКл	$-5\cdot10^{-9}$ Кл
$q_3=4$ нКл	$4\cdot10^{-9}$ Кл
$r=5$ см	$5\cdot10^{-2}$м
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9\cdot10^9\ \frac{\text{м}}{\Phi}$	
$F=?$	

Розв'язок:

$$F=\frac{4\cdot9\cdot10^9\cdot4\cdot10^{-9}}{\left(5\cdot10^{-2}\right)^2}\cdot\left(3\cdot10^{-9}+5\cdot10^{-9}\right)=$$

$$=\frac{4\cdot9\cdot10^9\cdot10^4\cdot4\cdot10^{-18}}{25}\cdot(3+5)=46{,}08\cdot10^{-5}\text{Н}=$$

$$=461\cdot10^{-6}\text{Н}=461\text{ мкН}.$$

Відповідь: $F=461$ мкН.

Випадок 2 (рисунок 2).

Аналіз

На заряд q_3 діє з боку заряду q_1 сила $\vec{F}_1$, а з боку заряду q_2 – сила $\vec{F}_2$ (див. рис. 2). За принципом суперпозиції сил рівнодіюча сила $\vec{F}$ дорівнює

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2. \qquad (1)$$

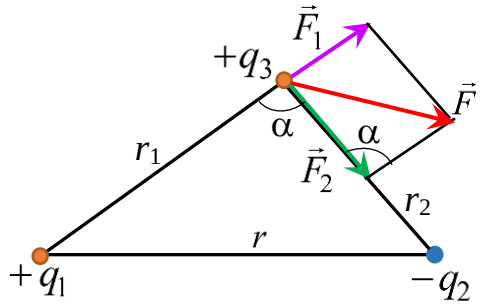


Рисунок 2

З рис. 2 випливає, що модуль сили F можна визначити за теоремою косинусів

$$F=\sqrt{F_1^2+F_2^2-2F_1F_2\cos\alpha}\,. \qquad (2)$$

За законом Кулона

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_3|}{r_1^2}, \tag{3}$$

де r_1 – відстань між зарядами q_1 і q_3;

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_2| \cdot |q_3|}{r_2^2}, \tag{4}$$

де r_2 – відстань між зарядами q_2 і q_3.

З рис. 2 випливає

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\alpha. \tag{5}$$

Звідси

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r^2}{2r_1 r_2}. \tag{6}$$

Напишемо вираз (2), врахувавши (3), (4) і (6),

$$F = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_3|}{r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_2| \cdot |q_3|}{r_2^2}\right)^2 -$$

$$\sqrt{-2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_3|}{r_1^2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_2| \cdot |q_3|}{r_2^2} \cos\alpha} =$$

$$= \frac{|q_3|}{4\pi\varepsilon_0} \sqrt{\left(\frac{|q_1|}{r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{|q_2|}{r_2^2}\right)^2 - 2\frac{|q_1|}{r_1^2} \cdot \frac{|q_2|}{r_2^2} \frac{\left(r_1^2 + r_2^2 - r^2\right)}{2r_1 r_2}} =$$

$$= \frac{|q_3|}{4\pi\varepsilon_0} \sqrt{\left(\frac{|q_1|}{r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{|q_2|}{r_2^2}\right)^2 - |q_1| \cdot |q_2| \cdot \frac{\left(r_1^2 + r_2^2 - r^2\right)}{\left(r_1 r_2\right)^3}},$$

$$F = \frac{|q_3|}{4\pi\varepsilon_0} \sqrt{\left(\frac{|q_1|}{r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{|q_2|}{r_2^2}\right)^2 - |q_1| \cdot |q_2| \cdot \frac{\left(r_1^2 + r_2^2 - r^2\right)}{\left(r_1 r_2\right)^3}}. \tag{7}$$

Формула (7) структурно подібна до формули (5), яка була отримана у Випадку 1.

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$q_1 = 3$ нКл	$3\cdot10^{-9}$ Кл	$F = 9\cdot10^9\cdot4\cdot10^{-9}\cdot\sqrt{\left(\frac{3\cdot10^{-9}}{\left(4\cdot10^{-2}\right)^2}\right)^2+\left(\frac{5\cdot10^{-9}}{\left(3\cdot10^{-2}\right)^2}\right)^2-\sqrt{-3\cdot10^{-9}\cdot5\cdot10^{-9}\cdot\frac{\left(\left(4\cdot10^{-2}\right)^2+\left(3\cdot10^{-2}\right)^2-\left(5\cdot10^{-2}\right)^2\right)}{\left(4\cdot10^{-2}\cdot3\cdot10^{-2}\right)^3}}} =$
$q_2 = -5$ нКл	$-5\cdot10^{-9}$ Кл	
$q_3 = 4$ нКл	$4\cdot10^{-9}$ Кл	
$r = 5$ см	$5\cdot10^{-2}$м	
$r_1 = 4$ см	$4\cdot10^{-2}$м	
$r_2 = 3$ см	$3\cdot10^{-2}$м	
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot10^9\ \frac{\text{м}}{\Phi}$		$= 211\cdot10^{-6}$Н $= 211$ мкН.
F =?		**Відповідь:** $F = 211$ мкН.

1.1.5. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ. НАПРУЖЕНІСТЬ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ. НАПРУЖЕНІСТЬ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ ТОЧКОВОГО ЗАРЯДУ. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ ПОЛІВ

Взаємодія нерухомих зарядів здійснюється за посередництвом електричного поля. *Будь-який електричний заряд змінює певним чином властивості довколишнього простору* — створює **електричне поле.** Це поле виявляє себе в тому, що розташований в будь-якій його точці інший заряд відчуває дію кулонівської сили.

Електричне поле, яке не змінюється з часом, називається **електростатичним.**

Поле, яке створюється нерухомим електричним зарядом, є електростатичним.

Локальною силовою характеристикою електричного поля є напруженість електричного поля.

Для дослідження характеристик і властивостей електричного поля використаємо **«пробний» заряд** q' — **точковий позитивний заряд**, величина якого настільки мала, що він не впливає на електричне поле, що досліджується (не викликає перерозподілу зарядів, які створюють електричне поле).

Напруженістю $\vec{E}$ електричного поля (рисунок 1.16) в даній точці простору називається векторна фізична величина, яка дорівнює відношенню сили $\vec{F}$, що діє на «пробний» заряд, який розташований в цій точці, до величини q' цього заряду

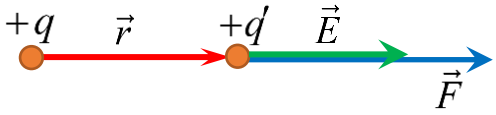


Рисунок 1.16

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'}}. \qquad (1.9)$$

В СІ $[E] = \frac{\text{В}}{\text{м}}$ (вольт/метр). Розмірність напруженості електричного поля $\dim E = LMT^{-3}I^{-1}$.

Для графічного зображення електричного поля використовуються лінії напруженості електричного поля (силові лінії).

Лінією напруженості електричного поля (силовою лінією) називається лінія, в будь-якій точці якої вектор $\vec{E}$ є дотичним до неї (рисунок 1.17).

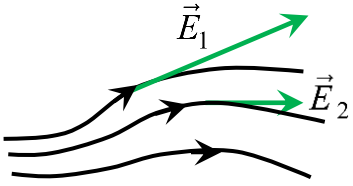


Рисунок 1.17

Силові лінії проводять так, щоб крізь площинку одиничної площі, перпендикулярної до ліній, проходила кількість ліній, яка чисельно дорівнює напруженості електричного поля.

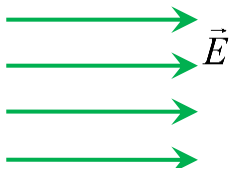


Рисунок 1.18

Однорідне електростатичне поле — поле, в кожній точці якого $\vec{E} = \text{const}$, тобто силові лінії поля паралельні й мають однакову густину (рисунок 1.18).

НАПРУЖЕНІСТЬ $\vec{E}$ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ ТОЧКОВОГО ЗАРЯДУ q

Зі закону Кулона (див. ф-лу 1.5) можна отримати вираз для **напруженості $\vec{E}$ електричного поля точкового заряду *q*** в точці простору на відстані *r* від нього (рисунок 1.19, *а*)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{q'r^3}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}, \qquad (1.10)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від заряду q до точки простору, яка розглядається: $r = |\vec{r}|$.

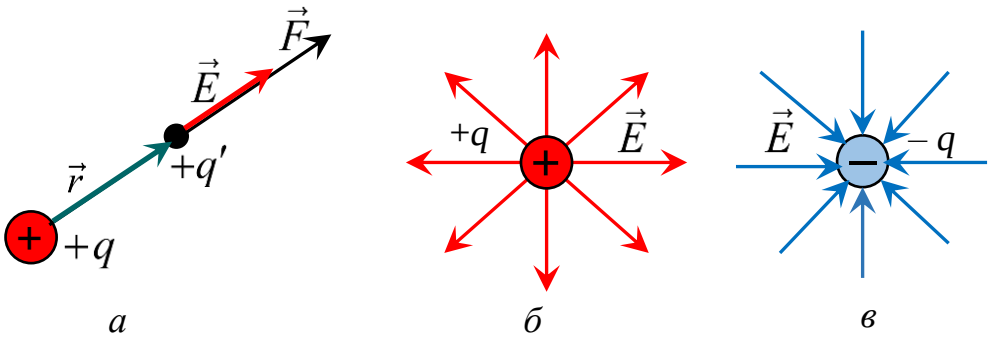
Вектор $\vec{E}$ напрямлений вздовж прямої, що з'єднує заряд q з даною точкою простору.

Модуль $E = |\vec{E}|$ дорівнює

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2}, \qquad (1.11)$$

де $|q|$ – модуль заряду.

Якщо заряд позитивний, то вектор $\vec{E}$ напрямлений від заряду q (рисунок 1.19, *б*), якщо негативний — до заряду q (рисунок 1.19, *в*). Лінії напруженості електричного поля можуть починатися на позитивних зарядах або в нескінченності, а закінчуватися на негативних зарядах або в нескінченності.



а *б* *в*

Рисунок 1.19

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ ПОЛІВ: напруженість електричного поля $\vec{E}$, створеного n нерухомими точковими зарядами $q_1, q_2, ..., q_n$ в деякій точці простору дорівнює векторній сумі напруженостей полів $\vec{E}_1, \vec{E}_2, ..., \vec{E}_n$, які створюються кожним зарядом окремо в цій точці,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i . \qquad (1.12)$$

1.1.6. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 2

Два точкових заряди $q_1 = 5$ нКл і $q_2 = -10$ нКл знаходяться в повітрі на відстані $d = 10$ см один від іншого. Визначити напруженість електричного поля: посередині між зарядами; на відстані 5 см від другого заряду на лінії, що з'єднує заряди; на відстані $r_1 = 9$ см від першого заряду й на відстані $r_2 = 8$ см від другого заряду.

Випадок 1 (рисунок 1)

Аналіз

Кожен із двох зарядів створює електричне поле. За принципом суперпозиції напруженість електричного поля $\vec{E}$ у точці M поля

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \qquad (1)$$

де $\vec{E}_1$ – напруженість електричного поля, що створюється в точці M зарядом q_1; $\vec{E}_2$ – напруженість електричного поля, що створюється в точці M зарядом q_2. Вектори $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ збігаються з прямими, які з'єднують заряди q_1 і q_2 з точкою M, тобто розташовані на прямій, що з'єднує заряди q_1 і q_2.

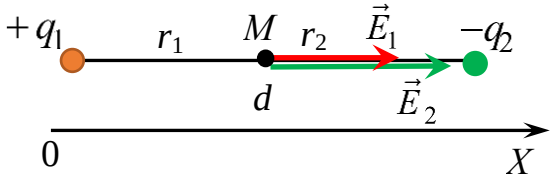


Рисунок 1

Напишемо рівняння (1) в проєкціях на вісь $0X$, яка паралельна лінії, що з'єднує заряди,

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = E_1 + E_2, \qquad (2)$$

модуль результівної напруженості

$$E = |E_x| = E_1 + E_2. \qquad (3)$$

Модуль напруженості E електричного поля на відстані r від заряду q

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2}. \qquad (4)$$

Отже,

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|}{r_1^2}, \qquad (5)$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_2|}{r_2^2}, \qquad (6)$$

де r_1 і r_2 – відстані від зарядів q_1 і q_2 до точки M відповідно.

За умовою задачі $r_1 = r_2 = d/2$ (d – відстань між зарядами).

Тоді

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|}{r_1^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_2|}{r_2^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{|q_1|}{r_1^2} + \frac{|q_2|}{r_2^2}\right) =$$

$$= \frac{4}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{|q_1|}{d^2} + \frac{|q_2|}{d^2}\right) = \frac{4}{4\pi\varepsilon_0 d^2}(|q_1| + |q_2|),$$

$$E = \frac{4}{4\pi\varepsilon_0 d^2}(|q_1| + |q_2|). \qquad (7)$$

В даному випадку кінцева формула має таку ж розмірність як і формула, за якою визначається напруженість електричного поля.

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$q_1 = 5$ нКл	$5\cdot10^{-9}$ Кл	$E = \frac{4\cdot9\cdot10^9}{\left(10^{-1}\right)^2}\left(5\cdot10^{-9} + 10\cdot10^{-9}\right) =$
$q_2 = -10$ нКл	$-10\cdot10^{-9}$ Кл	$= 540\cdot10^2$ В/м $= 54$ кВ/м.
$d = 10$ см	10^{-1}м	
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot10^9 \frac{\text{м}}{\Phi}$		**Відповідь:** $E = 54$ кВ/м.
E =?		

Випадок 2 (рисунок 2)

Аналіз

Кожен із двох зарядів створює електричне поле. За принципом суперпозиції напруженість електричного поля $\vec{E}$ в точці M поля

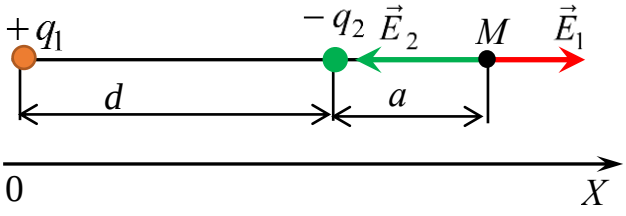


Рисунок 2

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \qquad (1)$$

де $\vec{E}_1$ – напруженість електричного поля, що створюється в точці M зарядом q_1; $\vec{E}_2$ – напруженість електричного поля, що створюється в точці M зарядом q_2.

Вектори $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ збігаються з прямими, що з'єднують заряди q_1 і q_2 з точкою M, тобто розташовані на прямій, яка з'єднує заряди q_1 і q_2.

Напишемо рівняння (1) в проєкціях на вісь $0X$, яка паралельна лінії, що з'єднує заряди,

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = E_1 - E_2, \tag{2}$$

де E_1 і E_2 – модулі векторів $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ відповідно.

Модуль напруженості E електричного поля на відстані r від заряду q

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2}. \tag{3}$$

Отже,

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|}{r_1^2}, \tag{4}$$

де $r_1 = d + a$;

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_2|}{r_2^2}, \tag{5}$$

де $r_2 = a$.

Тоді

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|}{(d+a)^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_2|}{a^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{|q_1|}{(d+a)^2} - \frac{|q_2|}{a^2}\right). \tag{6}$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$q_1 = 5$ нКл	$5\cdot10^{-9}$ Кл	$E_x = 9\cdot10^9\left(\frac{5\cdot10^{-9}}{(10+5)^2\cdot10^{-4}} - \frac{10\cdot10^{-9}}{5^2\cdot10^{-4}}\right) =$
$q_2 = -10$ нКл	$-10\cdot10^{-9}$ Кл	$= -3{,}4\cdot10^4$ В/м $= -34$ кВ/м.
$d = 10$ см	$10\cdot10^{-2}$м	$E = \lvert E_x\rvert = 34$ кВ/м.
$a = 5$ см	$5\cdot10^{-2}$м	
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot10^9\ \frac{\text{м}}{\Phi}$		**Відповідь:** $E = 34$ кВ/м.
E =?		

Проєкція $E_x < 0$, отже вектор $\vec{E}$ напрямлений в бік вектора $\vec{E}_2$.

Випадок 3 (рисунок 3)

Аналіз

Кожен із двох зарядів створює електричне поле. За принципом суперпозиції напруженість електричного поля $\vec{E}$ в точці M поля

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \qquad (1)$$

де $\vec{E}_1$ – напруженість електричного поля, що створюється в точці M зарядом q_1; $\vec{E}_2$ – напруженість електричного поля, що створюється в точці M зарядом q_2. Вектори $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ збігаються з прямими, що з'єднують заряди q_1 і q_2 з точкою M відповідно (рис. 3). Результівний вектор $\vec{E}$ — діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$.

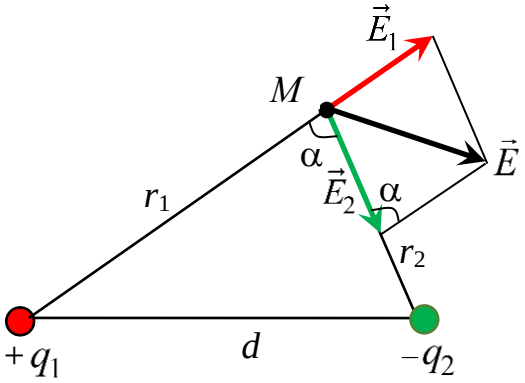


Рисунок 3

Модуль вектора $\vec{E}$ визначаємо за теоремою косинусів

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\alpha}\,. \qquad (2)$$

Модуль напруженості E електричного поля на відстані r від заряду q

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2}. \qquad (3)$$

Отже,

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|}{r_1^2}, \qquad (4)$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_2|}{r_2^2}. \qquad (5)$$

З рис. 3 випливає

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha\,. \qquad (6)$$

Звідси

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}. \qquad (7)$$

Напишемо вираз (2), врахувавши (4), (5) і (7),

$$E=\sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|q_1|}{r_1^2}\right)^2+\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|q_2|}{r_2^2}\right)^2-2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|q_1|}{r_1^2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|q_2|}{r_2^2}\cos\alpha}=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sqrt{\left(\frac{|q_1|}{r_1^2}\right)^2+\left(\frac{|q_2|}{r_2^2}\right)^2-2\frac{|q_1|}{r_1^2}\cdot\frac{|q_2|}{r_2^2}\frac{\left(r_1^2+r_2^2-d^2\right)}{2r_1r_2}}=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sqrt{\left(\frac{|q_1|}{r_1^2}\right)^2+\left(\frac{|q_2|}{r_2^2}\right)^2-|q_1|\cdot|q_2|\cdot\frac{\left(r_1^2+r_2^2-d^2\right)}{\left(r_1r_2\right)^3}},$$

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sqrt{\left(\frac{|q_1|}{r_1^2}\right)^2+\left(\frac{|q_2|}{r_2^2}\right)^2-|q_1|\cdot|q_2|\cdot\frac{\left(r_1^2+r_2^2-d^2\right)}{\left(r_1r_2\right)^3}}. \qquad (8)$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$q_1=5$ нКл	$5\cdot10^{-9}$ Кл	$E=9\cdot10^9\cdot\sqrt{\left(\frac{5\cdot10^{-9}}{9^2\cdot10^{-4}}\right)^2+\left(\frac{10\cdot10^{-9}}{8^2\cdot10^{-4}}\right)^2-$
$q_2=-10$ нКл	$-10\cdot10^{-9}$ Кл	$\sqrt{-5\cdot10^{-9}\cdot10\cdot10^{-9}}\cdot$
$d=10$ см	$10\cdot10^{-2}$м	$\sqrt{\cdot\frac{\left(\left(9\cdot10^{-2}\right)^2+\left(8\cdot10^{-2}\right)^2-\left(10\cdot10^{-2}\right)^2\right)}{\left(9\cdot10^{-2}\cdot8\cdot10^{-2}\right)^3}}=$
$r_1=9$ см	$9\cdot10^{-2}$м	$=13{,}4\cdot10^3$ В/м $=13{,}4$ кВ/м.
$r_2=8$ см	$8\cdot10^{-2}$м	**Відповідь:** $E=13{,}4$ кВ/м.
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9\cdot10^9\ \frac{\text{м}}{\Phi}$		
E =?		

1.1.7. ПОТІК НАПРУЖЕНОСТІ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ. ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ У ВАКУУМІ. ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ ПРОСТИХ СИСТЕМ

Нехай в деякій області простору створене стаціонарне однорідне електричне поле (рисунок 1.20).

Потік $\Delta\Phi_E$ вектора $\vec{E}$ крізь площинку площею ΔS (див. рис. 1.20) визначається співвідношенням

$$\Delta\Phi_E=E\Delta S\cos\alpha=\vec{E}\cdot\Delta\vec{S}, \qquad (1.13)$$

де $\Delta\vec{S}$ – вектор, модуль якого дорівнює ΔS, а напрямок збігається з напрямком нормалі $\vec{n}$ до площинки; α – кут між векторами $\vec{E}$ і $\vec{n}$.

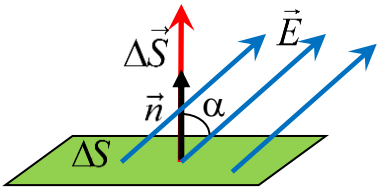


Рисунок 1.20

Примітка: Нормаль $\vec{n}$ до площинки – вектор, перпендикулярний до площинки, довжина якого $|\vec{n}|=1$.

Визначимо потік Φ_E вектора $\vec{E}$ крізь довільну поверхню площею S (рисунок 1.21). Для цього розіб'ємо поверхню на N однакових площинок площею ΔS, в межах кожної з яких будемо вважати $\vec{E}_i = \text{const}$ (i = 1, 2, 3, …, N). Модуль і напрямок вектора $\vec{E}$ змінюється від площинки до площинки, але в межах кожної площинки модуль і напрямок вектора незмінні.

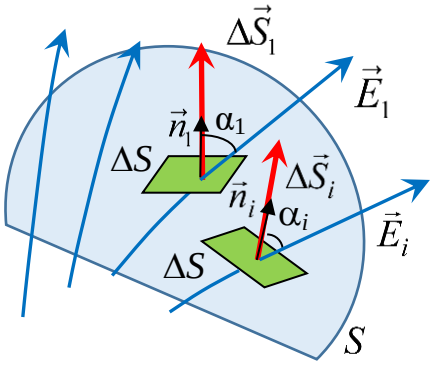


Рисунок 1.21

Потік Φ_E вектора $\vec{E}$ крізь поверхню S

$$\Phi_E = \lim_{\Delta S\to 0}\sum_{i=1}^{N}\Delta\Phi_{Ei} = \lim_{\Delta S\to 0}\sum_{i=1}^{N}E_i\cos\alpha_i\Delta S = \int_S E\cos\alpha dS = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}, \qquad (1.14)$$

де $\Delta\Phi_{Ei}$ – потік крізь i-у площинку.

Потік $\delta\Phi_E$, який визначається співвідношенням

$$\delta\Phi_E = E\cos\alpha dS = \vec{E}\cdot d\vec{S}, \qquad (1.15)$$

називається **елементарним потоком.**

В СІ $[\Phi_E]$ = В·м (вольт·метр). Розмірність потоку $\dim\Phi_E = L^3MT^{-3}I^{-1}$.

У випадку замкненої поверхні нормаль $\vec{n}$ зазвичай береться зовні області, яка обмежена цією поверхнею.

ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ У ВАКУУМІ

Потік вектора $\vec{E}$ електростатичного поля крізь замкнену поверхню дорівнює частці від ділення **алгебраїчної суми зарядів** $\sum q_i$ всередині цієї поверхні на ε_0 (ε_0 – електрична стала)

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}}. \qquad (1.16)$$

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ГАУССА ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ

В деяких випадках дійсний дискретний розподіл зарядів замінюється на фіктивний неперервний. Тоді використовується поняття густини зарядів:

$$\text{об'ємна густина } \rho = \frac{dq}{dV}, \qquad (1.17)$$

$$\text{поверхнева густина } \sigma = \frac{dq}{dS}, \qquad (1.18)$$

$$\text{лінійна густина } \lambda = \frac{dq}{dl}, \qquad (1.19)$$

де dq – заряд, який знаходиться відповідно в об'ємі dV, на поверхні dS і на довжині dl.

В СІ $[\rho] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$; $[\sigma] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$; $[\lambda] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}}$.

ЕЛЕКТРОСТАТИЧНІ ПОЛЯ ДЕЯКИХ ПРОСТИХ СИСТЕМ

1. Поле нескінченної рівномірно зарядженої площини (рисунок 1.22).

Площина рівномірно заряджена з поверхневою густиною заряду σ. Внаслідок рівномірного розподілу заряду по площині вектор $\vec{E}$ перпендикулярний до площини. *Виберемо як замкнену поверхню прямий циліндр, основи якого паралельні площині, а бокова поверхня перпендикулярна до площини.* Позначимо площу основи циліндру ΔS. Циліндр вирізає на поверхні площини заряд $\sigma\Delta S$. Потік вектора $\vec{E}$ крізь вибрану поверхню створюється тільки потоками крізь основи циліндра (див. рис. 1.22, *в*). Застосуємо теорему Гаусса

$$\Phi = E\Delta S + E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}, \qquad (1.20)$$

тоді

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}, \qquad (1.21)$$

де σ – модуль поверхневої густини заряду; ε_0 – електрична стала.

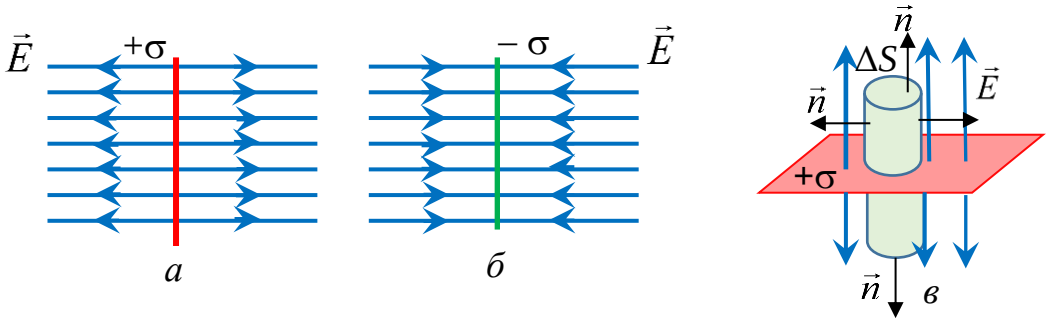


Рисунок 1.22

2. Поле двох паралельних нескінченних різнойменно заряджених площин з однаковою за модулем поверхневою густиною заряду σ (рисунок 1.23).

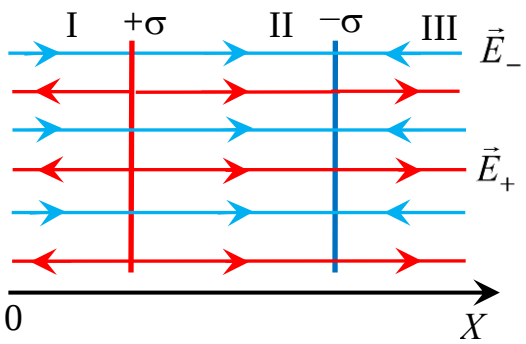


Рисунок 1.23

За принципом суперпозиції напруженість $\vec{E}$ електричного поля, яке створюють обидві пластини,

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-, \qquad (1.22)$$

де $\vec{E}_+$ – напруженість поля, створеного позитивно зарядженою площиною; $\vec{E}_-$ – напруженість поля, створеного негативно зарядженою площиною.

Внаслідок рівномірного розподілу заряду по кожній площині вектори $\vec{E}_+$ і $\vec{E}_-$ перпендикулярні до площин.

Напишемо рівняння (1.22) в проєкціях на вісь $0X$, яка перпендикулярна до площин,

для областей I і III

$$E_x = E_{(+)x} + E_{(-)x} = \pm\left(E_+ - E_-\right) = \pm\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) = 0,$$

де «+» відноситься до області III, «–» – до області I;

модуль результівної напруженості

$$\boxed{E = 0}; \qquad (1.23)$$

для області II

$$E_x = E_{(+)x} + E_{(-)x} = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

модуль результівної напруженості

$$\boxed{E = |E_x| = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}, \qquad (1.24)$$

де E_+ і E_- – модулі відповідних векторів; σ – модуль поверхневої густини заряду; ε_0 – електрична стала.

3. Поле прямої нескінченої однорідно зарядженої нитки з лінійною густиною заряду λ (рисунок 1.24).

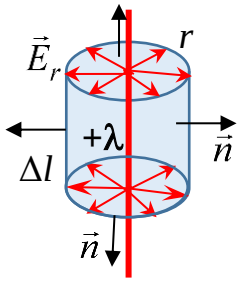


Рисунок 1.24

Внаслідок рівномірного розподілу заряду по нитці вектор $\vec{E}$ перпендикулярний до нитки. *Виберемо як замкнену поверхню прямий циліндр, основи якого перпендикулярні до нитки, а бокова поверхня паралельна нитці*. Позначимо радіус основи циліндра *r*, довжину твірної циліндра Δl. Циліндр охоплює на нитці заряд $\lambda\Delta l$. Потік вектора $\vec{E}$ крізь всю поверхню створюється тільки потоками крізь бокову поверхню. Застосуємо теорему Гаусса

$$E_r \cdot 2\pi r \Delta l = \frac{\lambda \Delta l}{\varepsilon_0}. \qquad (1.25)$$

Звідси модуль напруженості електричного поля на відстані *r* від нитки

$$\boxed{E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}, \qquad (1.26)$$

де λ – модуль лінійної густини заряду; ε_0 – електрична стала.

4. Поле однорідно зарядженої сфери з поверхневою густиною заряду σ (рисунок 1.25)

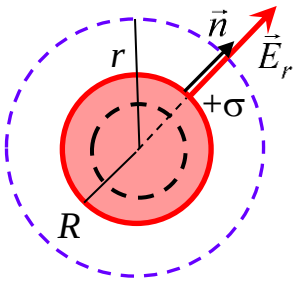


Рисунок 1.25

Внаслідок рівномірного розподілу заряду по поверхні сфери вектор $\vec{E}$ напрямлений вздовж радіуса

сфери. *Вибираємо як замкнену поверхню сферу радіусом r, концентричну до даної сфери.* Застосуємо теорему Гаусса для двох випадків:

1) $r \geq R$

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\varepsilon_0},$$

$$\boxed{E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2}, \qquad (1.27)$$

де R – радіус сфери; r – відстань від центру сфери до даної точки простору; q – модуль заряду на сфері; σ – модуль поверхневої густини заряду; ε_0 – електрична стала;

2) $r < R$

$$\boxed{E_r = 0}. \qquad (1.28)$$

Електричне поле рівномірно зарядженої сфери на відстанях $r \geq R$ еквівалентне полю точкового заряду, що знаходиться в центрі сфери.

1.1.8. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 3

В центрі сфери радіусом $r = 25$ см міститься точковий заряд $q = -10$ мкКл. Визначити потік напруженості електричного поля крізь ділянку сфери площею 40 см^2.

Аналіз

Нерухомий точковий заряд q створює центрально-симетричне електричне поле (рисунок 1), модуль напруженості E_r якого на відстані r від нього визначається за формулою (1.11)

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2}. \qquad (1)$$

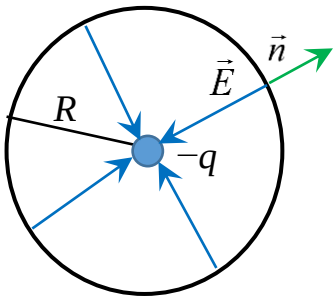


Рисунок 1

Заряд міститься в центрі сфери, тому вектор $\vec{E}$ напрямлений вздовж радіуса сфери.

За теоремою Гаусса (див. ф-лу (1.16)) потік напруженості $\vec{E}$ крізь сферу

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\oint_S E dS = \frac{q}{\varepsilon_0}. \quad (2)$$

Модуль напруженості однаковий в будь-якій точці сферичної поверхні, тому потік Φ_{ES} напруженості $\vec{E}$ крізь ділянку сфери площею S

$$\frac{\Phi_{ES}}{\Phi_E} = \frac{S}{S_{\text{сф}}}, \quad (3)$$

де $S_{\text{сф}}$ – площа сфери.

Звідси

$$\Phi_{ES} = \frac{\Phi_E \cdot S}{S_{\text{сф}}}. \quad (4)$$

Площа сфери

$$S_{\text{сф}} = 4\pi R^2, \quad (5)$$

де R – радіус сфери.

Отже,

$$\Phi_{ES} = \frac{\Phi_E \cdot S}{4\pi R^2} = \frac{q \cdot S}{\varepsilon_0 \cdot 4\pi R^2},$$

$$\Phi_{ES} = \frac{q \cdot S}{\varepsilon_0 \cdot 4\pi R^2}. \quad (6)$$

Перевіримо формулу (6):

$$[\Phi_{ES}] = \text{В} \cdot \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{А} \cdot \text{с}^3}; \; [S] = \text{м}^2; \; [q] = \text{Кл} = \text{А} \cdot \text{с}; \; [R] = \text{м}; \; [\varepsilon_0] = \frac{\Phi}{\text{м}} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3};$$

$$\left[\frac{q \cdot S}{\varepsilon_0 \cdot R^2}\right] = \frac{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4 \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{А} \cdot \text{с}^3}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$q = -10$ мкКл	-10^{-5} Кл	$\Phi_{ES} = -\dfrac{10^{-5} \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot (0{,}25)^2} =$
$R = 25$ см	0,25 м	$= -0{,}58 \cdot 10^4$ В · м $= -5{,}8$ кВ · м.
$S = 40$ см^2	$4 \cdot 10^{-3}$ м^2	
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \dfrac{\Ф}{\text{м}}$		**Відповідь:** $\Phi_{ES} = -5{,}8$ кВ · м.
$\Phi_{ES} - ?$		

Задача 4

Велика металева пластина рівномірно заряджена з поверхневою густиною заряду $\sigma = 20$ нКл/м^2. На малій відстані від пластини міститься заряд $q = 50$ мкКл. Визначити силу, що діє на заряд.

Аналіз

З умови задачі (відстань від заряду до пластини набагато менша за розміри пластини) випливає, що пластину можна вважати нескінченною стосовно заряду (рисунок 1).

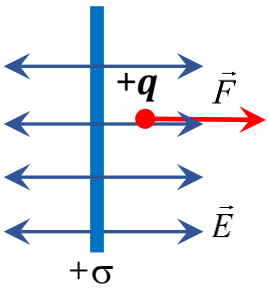


Рисунок 1

Тоді модуль напруженості електричного поля E, що створене пластиною (див. ф-лу (1.21)),

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \qquad (1)$$

де ε_0 – електрична стала; σ – модуль поверхневої густини заряду.

Сила $\vec{F}$, що діє з боку електричного поля на заряд q (див. рис. 1),

$$\vec{F} = q\vec{E}. \qquad (2)$$

Модуль сили

$$F = qE = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (3)$$

Перевіримо формулу (3):

$$[F]=\text{Н}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2};\ [q]=\text{Кл}=\text{А}\cdot\text{с};\ [\sigma]=\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}=\frac{\text{А}\cdot\text{с}}{\text{м}^2};\ [\varepsilon_0]=\frac{\Phi}{\text{м}}=\frac{\text{А}^2\cdot\text{с}^4}{\text{кг}\cdot\text{м}^3};$$

$$\left[\frac{q\sigma}{\varepsilon_0}\right]=\frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^2\cdot\text{А}^2\cdot\text{с}^4}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$q=$ 50 мкКл	$5\cdot10^{-5}$ Кл	$F=\frac{5\cdot10^{-5}\cdot2\cdot10^{-8}}{2\cdot8{,}85\cdot10^{-12}}=$
$\sigma=20\ \frac{\text{нКл}}{\text{м}^2}$	$2\cdot10^{-8}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$	$=0{,}56\cdot10^{-1}\text{Н}=56\ \text{мН}.$
$\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}\ \frac{\Phi}{\text{м}}$		**Відповідь:** $F=56$ мН.
F –?		

Задача 5

Електричне поле створене двома нескінченними паралельними пластинами, які рівномірно заряджені з поверхневими густинами заряду $\sigma_1 = 5$ мкКл/м^2 і $\sigma_2 = 8$ мкКл/м^2. Визначити модуль напруженості електричного поля: між пластинами; поза пластинами. Побудувати графік зміни модуля й проєкції напруженості електричного поля вздовж осі, перпендикулярної до пластин.

Аналіз

Пластини створюють електричні поля, силові лінії яких зображені на рисунку 1. За принципом суперпозиції електричних полів результівна напруженість $\vec{E}$

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2, \qquad (1)$$

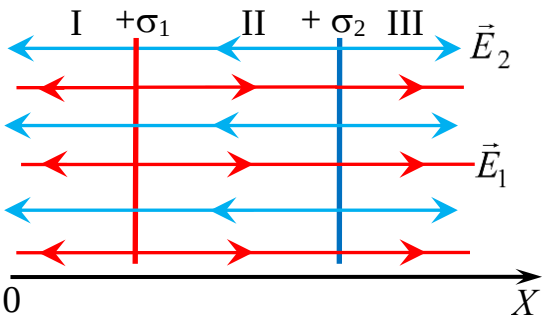


Рисунок 1

де $\vec{E}_1$ – напруженість електричного поля, що створене пластиною з поверхневою густиною заряду σ_1; $\vec{E}_2$ – напруженість електричного поля, що створене пластиною з поверхневою густиною заряду σ_2.

Напишемо співвідношення (1) в проєкціях на вісь $0X$, яка перпендикулярна до пластин,

для області I

$$E'_x = E_{1x} + E_{2x} = -E_1 - E_2 = -\left(E_1 + E_2\right), \tag{2}$$

для області II

$$E''_x = E_{1x} + E_{2x} = E_1 - E_2, \tag{3}$$

для області III

$$E'''_x = E_{1x} + E_{2x} = E_1 + E_2. \tag{4}$$

Модуль напруженості

в області I

$$E' = \left|E'_x\right| = E_1 + E_2; \tag{5}$$

в області II

$$E'' = \left|E''_x\right| = \left|E_1 - E_2\right|; \tag{6}$$

в області III

$$E''' = \left|E'''_x\right| = E_1 + E_2. \tag{7}$$

Модуль напруженості E поля, створеного пластиною з поверхневою густиною заряду σ (див. формулу (1.21))

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \tag{8}$$

де ε_0 – електрична стала.

Тоді

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}, \tag{9}$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}. \tag{10}$$

Отже,

$$E'_x = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}, \tag{11}$$

$$E''_x = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}, \tag{12}$$

$$E_x''' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}, \tag{13}$$

$$E' = E''' = |E_x'| = |E_x'''| = \left| -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} \right| = \left| \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} \right| = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}, \tag{14}$$

$$E'' = |E_x''| = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0} \right|. \tag{15}$$

До формул (9) – (15) входять модулі густин поверхневих зарядів на пластинах.

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$\sigma_1 =$ 5 мкКл/м^2	$5 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2	$E_x' = -\frac{5 \cdot 10^{-6} + 8 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = -0{,}73 \cdot 10^6$ В/м =
$\sigma_2 =$ 8 мкКл/м^2	$8 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2	$= -0{,}73$ МВ/м;
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м		$E_x''' = \frac{5 \cdot 10^{-6} + 8 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 0{,}73$ МВ/м;
$E_x', E_x'', E_x''' - ?$		$E_x'' = \frac{5 \cdot 10^{-6} - 8 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = -0{,}17$ МВ/м;
$E', E'', E''' - ?$		$E' = E''' = \lvert E_x' \rvert = \lvert E_x''' \rvert = 0{,}73$ МВ/м;

Відповідь: $E_x' = -0{,}73$ МВ/м; $E_x''' = 0{,}73$ МВ/м; $E_x'' = -0{,}17$ МВ/м;
$E' = E''' = 0{,}73$ МВ/м; $E'' = 0{,}17$ МВ/м.

Графіки залежностей $E = f(x)$ і $E_x = f(x)$ надані на рисунках 2, *а* і 2, *б* відповідно.

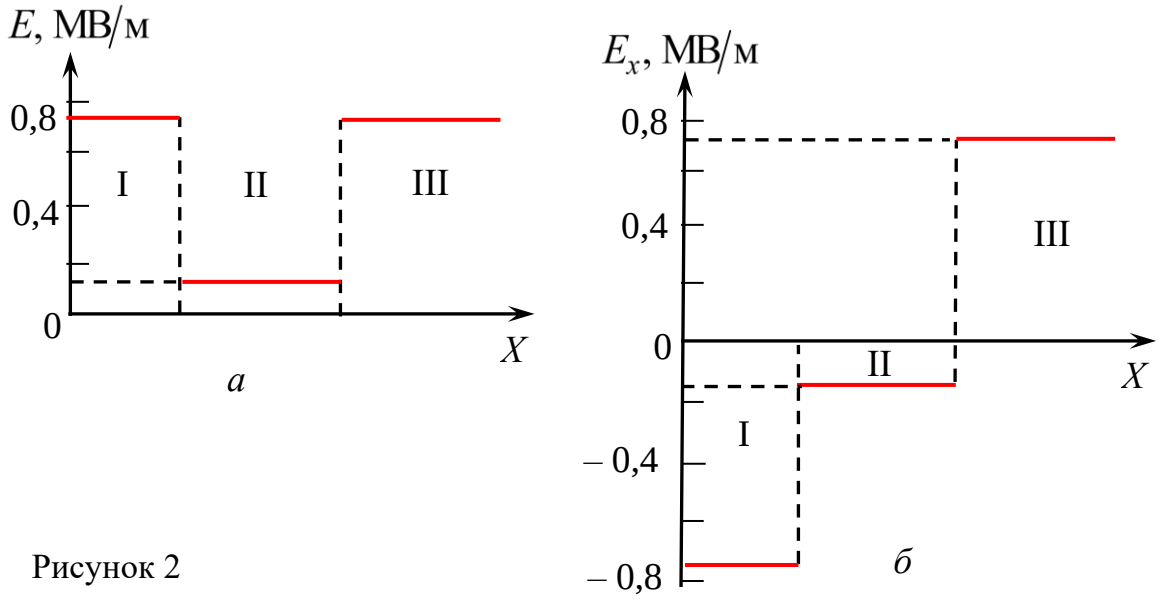


Рисунок 2

Задача 6

Дві концентричні металеві заряджені сфери радіусами $R_1 = 6$ см і $R_2 = 10$ см мають відповідно заряди $q_1 = 10$ нКл і $q_2 = -15$ нКл. Визначити напруженість E поля в точках, які знаходяться на відстанях $r_1 = 15$ см и $r_2 = 9$ см від центру сфер.

Аналіз

Концентричні сфери створюють електричні поля, силові лінії яких зображені на рисунку 1. За принципом суперпозиції електричних полів напруженість $\vec{E}$ результівного поля

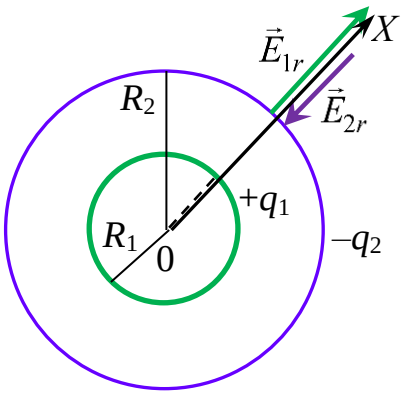


Рисунок 1

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{1r} + \vec{E}_{2r}, \qquad (1)$$

де $\vec{E}_{1r}$ – напруженість електричного поля, створеного на відстані r від центра сферою зі зарядом q_1; $\vec{E}_{2r}$ – напруженість електричного поля, створеного на відстані r від центра сферою зі зарядом q_2.

Модуль напруженості E_r за межами сфери: $r \geq R$ (див. формулу (1.27))

$$E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad (2)$$

де q – модуль заряду сфери;

в межах сфери $r < R$ (див. формулу (1.28))

$$E_r = 0. \qquad (3)$$

Напишемо вираз (1) у проєкціях на вісь $0X$, яка напрямлена вздовж радіуса сфери,

для $r_1 \geq R_2$

$$E'_{rx} = E_{1rx} + E_{2rx} = E_{1r} - E_{2r} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} - \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{q_1 - q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}, \qquad (4)$$

де E_{1r} і E_{2r} – модулі векторів $\vec{E}_{1r}$ і $\vec{E}_{2r}$ відповідно; q_1 і q_2 – модулі зарядів;

для $R_2 \geq r_2 \geq R_1$

$$E''_{rx} = E_{1rx} = E_{1r} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}, \qquad (5)$$

де q_1 – модуль заряду.

Модулі напруженостей

$$E'_r = \left|E'_{rx}\right| = \left|\frac{q_1 - q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\right|, \tag{6}$$

$$E''_r = \left|E''_{rx}\right| = \left|\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\right|. \tag{7}$$

Дано:	**СІ**
$q_1 = 10$ нКл	$10\cdot10^{-9}$ Кл
$q_2 = -15$ нКл	$-15\cdot10^{-9}$ Кл
$R_1 = 6$ см	
$R_2 = 10$ см	
$r_1 = 15$ см	$15\cdot10^{-2}$ м
$r_2 = 9$ см	$9\cdot10^{-2}$ м
$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\ \frac{\Ф}{\text{м}}$	
$E'_r, E''_r - ?$	

Розв'язок:

$$E'_r = \left|\frac{10\cdot10^{-9} - 15\cdot10^{-9}}{4\pi\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot\left(15\cdot10^{-2}\right)^2}\right| =$$

$$= 2\cdot10^3\ \text{В/м} = 2\ \text{кВ/м};$$

$$E''_r = \left|\frac{10\cdot10^{-9}}{4\pi\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot\left(9\cdot10^{-2}\right)^2}\right| =$$

$$= 11\cdot10^3\ \text{В/м} = 11\ \text{кВ/м}.$$

Відповідь:

$E'_r = 2\ \text{кВ/м}$; $E''_r = 11\ \text{кВ/м}$.

Задача 7

Напруженість електричного поля поблизу поверхні Землі дорівнює 130 В/м. Визначити заряд Землі, якщо її радіус 6400 км. Прийняти, що Земля має сферичну форму та її заряд рівномірно розподілений по поверхні.

Аналіз

Модуль напруженості E електричного поля, що створюється рівномірно зарядженою сферою на відстані $r > R$ (R – радіус сфери),

$$E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \tag{1}$$

де q – модуль заряду сфери; ε_0 – електрична стала.

За умовою задачі відома напруженість електричного поля поблизу поверхні Землі, тому в формулі (1) можна взяти $r = R$, де R – радіус Землі.

Отже, заряд q на поверхні Землі

$$q = E_r 4\pi\varepsilon_0 R^2 . \qquad (2)$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$E = 130$ В/м $R = 6400$ км $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\ \frac{\Phi}{\text{м}}$ $q - ?$	$6{,}4\cdot10^6$ м	$q = 130\cdot4\pi\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\left(6{,}4\cdot10^6\right)^2 =$ $= 5{,}9\cdot10^5$ Кл. **Відповідь:** $q = 5{,}9\cdot10^5$ Кл.

1.1.9. РОБОТА СИЛ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ ПРИ ПЕРЕМІЩЕННІ ЕЛЕКТРИЧНИХ ЗАРЯДІВ

Нехай «пробний» заряд q' рухається в полі нерухомого заряду $+q$ (рисунок 1.26).

Сила, що діє на заряд q',

$$\vec{F} = q'\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q}{r^3}\vec{r}\,, \qquad (1.29)$$

модуль сили

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q'q|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q}{r^2}. \qquad (1.30)$$

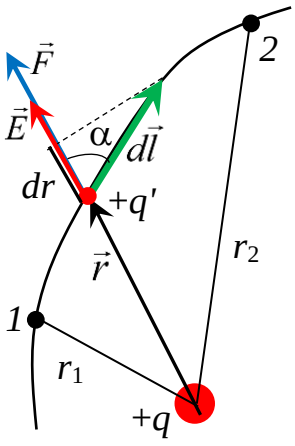


Рисунок 1.26

До визначення роботи сил електростатичного поля при переміщенні «пробного» заряду q': $+q$ – нерухомий заряд, який створює електричне поле; $\vec{E}$ – напруженість електричного поля заряду $+q$; $\vec{F}$ – сила, що діє на заряд q'; $d\vec{l}$ – переміщення заряду q'; dr – приріст модуля радіуса-вектора $\vec{r}$ заряду q' на переміщенні $d\vec{l}$; r_1 – початкова відстань між зарядами; r_2 – кінцева відстань між зарядами

Елементарна робота δA сили $\vec{F}$ — робота сили на нескінченно малому переміщенні $d\vec{l}$ — дорівнює

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q'\vec{E} \cdot d\vec{l} = Fdl\cos\alpha = Fdr, \qquad (1.31)$$

де $dr = dl\cos\alpha$ – приріст модуля радіуса-вектора $\vec{r}$ заряду q' на переміщенні $d\vec{l}$.

Робота A_{12} сил електростатичного поля при переміщенні заряду q' зі точки *1* в точку *2* визначається як

$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} Fdr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -\frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0 r_2},$$

$$\boxed{A_{12} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}}. \qquad (1.32)$$

З формули (1.32) випливає, що *робота сил електростатичного поля заряду q при переміщенні «пробного» заряду q' не залежить від форми його траєкторії*, а залежить тільки від початкової r_1 і кінцевої r_2 відстаней між зарядами. Отже, робота сил електростатичного поля при переміщенні «пробного» заряду q' по замкненій траєкторії дорівнює нулю.

Відомо, що силове поле, яке має таку властивість, є потенціальним.

Електростатичне поле — потенціальне поле.

Цій властивості електростатичного поля можна надати більш загальне формулювання, якщо використати фізичну величину — циркуляцію вектора $\vec{E}$.

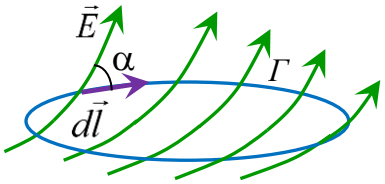


Рисунок 1.27

Циркуляцією вектора $\vec{E}$ називається інтеграл від скалярного добутку $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ по замкненому контуру Γ (рисунок 1.27)

$$\boxed{\oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_\Gamma Edl\cos\alpha}. \qquad (1.33)$$

Врахувавши (1.31 – 1.33), можна написати роботу сили $\vec{F}$ як

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = q' \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \,.$$

Тепер можемо сформулювати **теорему про циркуляцію вектора $\vec{E}$ для електростатичного поля:** циркуляція вектора $\vec{E}$ по замкненому контуру Γ дорівнює нулю

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0} \,. \qquad (1.34)$$

1.1.10. ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ЗАРЯДУ. ЕЛЕКТРИЧНИЙ ПОТЕНЦІАЛ. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ. ЕКВІПОТЕНЦІАЛЬНІ ПОВЕРХНІ

Електростатичне поле є *потенціальним полем*. Тоді для нього можна ввести фізичну величину — **потенціальну енергію** W_p взаємодії зарядів q' і q, *спад* якої при переміщенні заряду q' між точками *1* і *2* дорівнює роботі сил електростатичного поля на цьому переміщенні

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2}\,, \qquad (1.35)$$

де згідно з формулою (1.32) $W_{p1} = \dfrac{q'q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$ – потенціальна енергія взаємодії зарядів q й q', розташованих на відстані r_1 один від іншого; $W_{p2} = \dfrac{q'q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$ – потенціальна енергія взаємодії зарядів q й q', розташованих на відстані r_2 один від іншого.

Величина W_p може розглядатись як ***потенціальна енергія заряду*** q' *в електричному полі нерухомого заряду q.*

Значення потенціальної енергії W_p залежить від вибору точки (або геометричного місця точок) електростатичного поля, відносно якої вона визначається. Отже, потенціальна енергія визначається з точністю до адитивної постійної величини *C*.

Тоді потенціальна енергія взаємодії точкових зарядів q і q'

$$W_p = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C,$$

де r – відстань між зарядами.

Фізичний зміст має ***різниця*** *потенціальних енергій заряду* q' *в початковому 1 і кінцевому 2 положеннях (див. ф-лу (1.35)), бо саме вона визначає роботу, яку виконують сили електростатичного поля при переміщенні заряду між цими положеннями.*

Від значення адитивної постійної величини різниця $W_{p1} - W_{p2}$, а отже, і робота поля не залежать.

У випадку точкового заряду приймається, що $W_p = 0$ коли $r \to \infty$, тоді адитивна постійна величина $C = 0$.

Потенціальна енергія взаємодії точкових зарядів q **і** q'

$$\boxed{W_p = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0 r}}, \qquad (1.36)$$

де r – відстань між зарядами

Якщо поле створюється системою точкових зарядів $q_1, q_2, \ldots q_n$, то потенціальна енергія заряду q'

$$W_p = \sum_{i=1}^{n} W_{pi} = q' \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}, \qquad (1.37)$$

де W_{pi} – потенціальна енергія заряду q' в полі заряду q_i.

В формулу (1.37) входять алгебраїчні величини зарядів.

З потенціальною енергією заряду в електростатичному полі зв'язана скалярна характеристика поля: потенціал електричного поля.

Потенціал електричного поля — локальна енергетична характеристика електричного поля.

Потенціал φ **електростатичного поля** — фізична величина, яка визначається співвідношенням

$$\boxed{\varphi = \frac{W_p}{q'}}, \qquad (1.38)$$

де W_p – потенціальна енергія «пробного» заряду q', який знаходиться в даній точці поля; q' – величина заряду.

В СІ $[\varphi]$ = В (вольт). Розмірність потенціалу $\dim\varphi = L^2MT^{-3}I^{-1}$.

Значення потенціалу електричного поля також залежить від вибору точки (або геометричного місця точок) поля, відносно якої він визначається. Потенціалу довільної точки поля можна умовно приписати будь-яке значення потенціалу φ_0. Тоді потенціали всіх інших точок будуть однозначно визначені. Отже, потенціал теж визначається з точністю до адитивної постійної величини. Значення цієї постійної величини не відіграє ніякої ролі, бо фізичні явища залежать від напруженостей електричних полів. Електричні поля зв'язані не з абсолютними значеннями потенціалів, а з їхньою різницею між різними точками простору. В теоретичній фізиці *за нульовий потенціал зазвичай приймається потенціал нескінченно віддаленої точки простору*. На практиці *за нульовий потенціал зазвичай приймають потенціал Землі*.

З формул (1.36) і (1.38) визначимо

потенціал електростатичного поля, яке створене нерухомим точковим зарядом *q*, на відстані *r* від нього

$$\boxed{\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}. \qquad (1.39)$$

Потенціал електричного поля — величина алгебраїчна.

Враховуючи визначення потенціалу, **робота сил електростатичного поля при переміщенні заряду** q' з точки *1* в точку *2* може бути написана як

$$\boxed{A_{12} = q'\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = q'U_{12}}, \qquad (1.40)$$

де $\varphi_1 - \varphi_2$ – різниця потенціалів між точками *1* і *2*; величина $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ називається **електричною напругою** між точками *1* і *2*.

Беручи до уваги формулу (1.40), можна надати *ще одне визначення потенціалу*

$$\boxed{\varphi = \frac{A_\infty}{q'}}, \qquad (1.41)$$

де A_∞ – робота, яку виконують сили електростатичного поля при перенесенні «пробного» заряду q' з даної точки поля на нескінченність.

У фізиці широко використовується позасистемна одиниця енергії й роботи, яка має назву **електрон-вольт (еВ).**

1 електрон-вольт *дорівнює роботі, яку виконують сили електричного поля при проходженні електроном різниці потенціалів* 1 В

$$1 \text{ еВ} = 1{,}6\cdot10^{-19} \text{ Кл}\cdot 1 \text{ В} = 1{,}6\cdot10^{-19} \text{ Дж}.$$

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦІЇ ПОТЕНЦІАЛІВ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ:

потенціал φ електричного поля, створеного системою n нерухомих точкових зарядів q_1, q_2,..., q_n у деякій точці простору, дорівнює **алгебраїчній сумі** потенціалів полів $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, які створюються в цій точці кожним зарядом окремо,

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i}, \qquad (1.42)$$

де r_i – відстань від заряду q_i до точки простору, де визначається потенціал; ε_0 – електрична стала.

Еквіпотенціальна поверхня — *поверхня, в усіх точках якої потенціал електростатичного поля має однакові значення.*

Між двома будь-якими точками на еквіпотенціальній поверхні різниця потенціалів дорівнює нулю, тому робота сил електричного поля при переміщенні заряду по еквіпотенціальній поверхні дорівнює нулю. Це означає, що сила $\vec{F}$ у будь-якій точці траєкторії при рухові заряду по еквіпотенціальній поверхні перпендикулярна до переміщення.

Отже, лінії напруженості $\vec{E}$ електростатичного поля перпендикулярні до еквіпотенціальної поверхні.

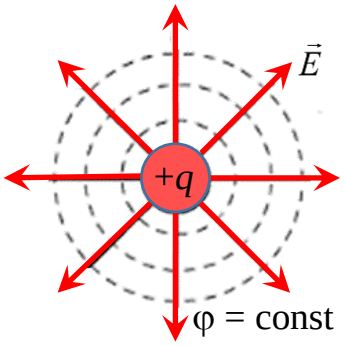


Рисунок 1.28

Еквіпотенціальними поверхнями поля точкового заряду є коаксіальні сфери, в центрі яких міститься заряд (рисунок 1.28).

Еквіпотенціальні поверхні однорідного електричного поля — площини, перпендикулярні до ліній напруженості (рисунок 1.29).

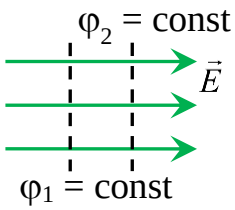


Рисунок 1.29

1.1.11. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ПОТЕНЦІАЛОМ І НАПРУЖЕНІСТЮ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ

З формули (1.31) випливає, що елементарна робота поля при переміщенні заряду q' на $d\vec{l}$ (рисунок 1.30, *а*)

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q'\vec{E} \cdot d\vec{l} = q'E\cos\alpha dl = q'E_l dl\,, \qquad (1.43)$$

де E_l – проєкція вектора $\vec{E}$ на переміщення $d\vec{l}$.

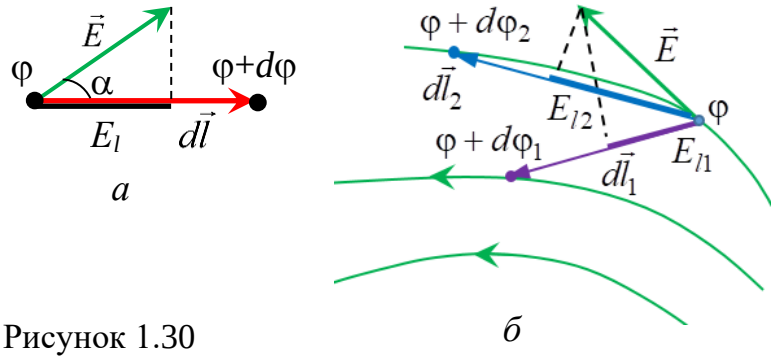


Рисунок 1.30

З іншого боку, зі співвідношення (1.40) випливає

$$\delta A = -q'd\varphi\,, \qquad (1.44)$$

де $d\varphi$ – приріст потенціалу на переміщенні $d\vec{l}$.

Врахувавши, що можливі проєкції вектора $\vec{E}$ на різні напрямки (рисунок 1.30, *б*), з (1.43) та (1.44) отримуємо

$$\boxed{E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}}\,, \qquad (1.45)$$

тобто проєкція E_l вектора $\vec{E}$ на довільний напрямок $\vec{l}$ дорівнює похідній потенціалу по даному напрямку, взятій зі знаком «–». Символ частинної похідної підкреслює, що диференціювання виконується тільки по l .

Отже, напруженість електростатичного поля напрямлена в бік зменшення потенціалу.

Для однорідного електростатичного поля

$$\boxed{E = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = \frac{U_{12}}{d}}, \qquad (1.46)$$

де d – відстань між точками з потенціалами φ_1 і φ_2; U_{12} – напруга між цими точками.

Формула (1.45) надає можливість за відомими значеннями φ визначити напруженість поля в кожній точці. Можна вирішити й зворотну задачу, тобто за заданими значеннями $\vec{E}$ у кожній точці визначити різницю потенціалів між двома довільними точками поля

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \,. \qquad (1.47)$$

1.1.12. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 8

До якої відстані можуть зблизитися електрони, якщо вони рухаються назустріч один іншому з відносною швидкістю $5 \cdot 10^5$ м/с?

Аналіз

Розглянемо більш загальний випадок: назустріч рухаються будь-які однойменно заряджені частинки. За умовою задачі надана відносна швидкість частинок. Зв'яжемо з частинкою, що має заряд q_1, систему відліку (рисунок 1). У цій системі відліку вона нерухома. Тоді частинка зі зарядом q_2 рухається відносно неї зі швидкістю $\vec{v}$. Між однойменно зарядженими частинками діє сила відштовхування. За *теоремою про зміну кінетичної енергії* частинка q_2 буде наближатися до частинки q_1 доки не витратить кінетичну енергію на роботу проти сили відштовхування — кулонівської сили, тобто

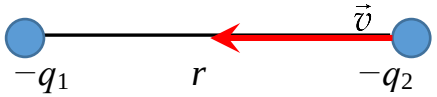


Рисунок 1

$$A = W_{k2} - W_{k1} = -W_{k1}, \qquad (1)$$

де W_{k1} і W_{k2} – відповідно початкова й кінцева кінетичні енергії другої частинки; в даному випадку $W_{k2} = 0$.

Оскільки швидкість частинки $v << c$ (c – швидкість світла у вакуумі), тому її кінетичну енергію можна написати як

$$W_k = \frac{mv^2}{2}, \tag{2}$$

де m – маса, v – швидкість частинки.

Отже,

$$A = -\frac{mv_1^2}{2}. \tag{3}$$

З іншого боку, робота сил електричного поля може бути надана як спад потенціальної енергії взаємодії частинок

$$A = W_{p1} - W_{p2}, \tag{4}$$

де W_{p1} і W_{p2} – відповідно початкова й кінцева потенціальні енергії взаємодії частинок.

Потенціальна енергія взаємодії частинок зі зарядами q_1 і q_2, розташованих на відстані r одна від іншої,

$$W_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{5}$$

У випадку, що розглядається, спочатку частинки були на нескінченній відстані одна від іншої, тобто $r \to \infty$, тому $W_{p1} = 0$.

Отже,

$$A = -W_{p2} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{6}$$

де r – кінцева відстань між частинками.

З (3) й (6) випливає

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{7}$$

Звідси

$$r = \frac{2q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 mv_1^2}. \tag{8}$$

Перевіримо формулу (8):

$[r] = \text{м};\ [q] = \text{Кл} = \text{А} \cdot \text{с};\ [m] = \text{кг};\ [v] = \text{м/с};\ [\varepsilon_0] = \Phi/\text{м} = \text{А}^2 \cdot \text{с}^4 \Big/ \left(\text{кг} \cdot \text{м}^3\right);$

$$\left[\frac{q_1 q_2}{\varepsilon_0 m v_1^2}\right] = \frac{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{с}^4} = \text{м}.$$

Дано:

$q_1 = q_2 = e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$m_1 = m_2 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг

$v = 5 \cdot 10^5$ м/с

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{м}}{\Phi}$

$r - ?$

Розв'язок:

$$r = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot \left(5 \cdot 10^5\right)^2} =$$

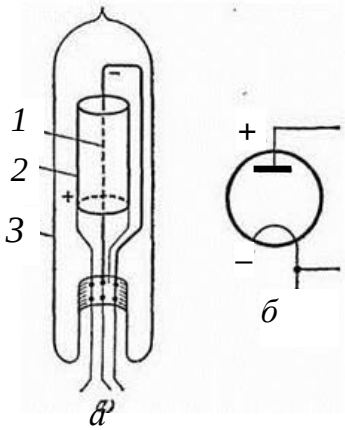
$$= 0{,}2 \cdot 10^{-8} \text{ м} = 2 \text{ нм}.$$

Відповідь: $r = 2$ нм.

Задача 9

В електронній лампі — вакуумному діоді (рисунок 1) — електрони прискорюються різницею потенціалів 220 В. Визначити швидкість електронів при потраплянні на анод, приймаючи, що термоелектрони поблизу катода мають однакову енергію, яка дорівнює середній енергії електрона.

Примітка: катод є барієвим катодом прямого напруження. Катод прямого напруження — металева нитка або стрічка, по якій проходить струм. У такій лампі катодом слугує вольфрамовий дріт, покритий окисом міді. Зверху нанесений шар барію. Робоча температура катода 600 К.



Вакуумний діод:

а) схематичне зображення вакуумного діода: *1* – катод; *2* – анод; *3* – корпус лампи (металевий або скляний); *б*) умовне зображення вакуумного діода

Рисунок 1

Аналіз

Електронна лампа — вакуумний електронний прилад, в якому регулюється інтенсивність потоку електронів. Найпростіша електронна лампа — вакуумний діод (див. рис. 1) — складається з двох електродів, між якими

створюється електричне поле. Один з електродів — катод — має від'ємний потенціал, другий електрод — анод — має додатний потенціал. В електронній лампі використовується *явище термоелектронної емісії* з катода. При проходженні струму по катоду він нагрівається. При нагріванні катода електрони отримують енергію, яка є достатньою для того, щоб подолати сили, що утримують їх у металі, і вилітають за його межі. Робота, яку потрібно виконати для вильоту електрона з металу, називається *роботою виходу електрона з металу*. Для багатьох металів робота виходу електрона відома. Розподіл електронів за швидкостями поблизу катода є розподілом Максвелла. Тому середня енергія електронів, які вилетіли з металу,

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT , \tag{1}$$

де k – стала Больцмана; T – термодинамічна температура.

Сили електричного поля при переміщенні електронів між катодом і анодом виконують роботу

$$A_{12} = e(\varphi_1 - \varphi_2) = eU_{12} , \tag{2}$$

де U_{12} – напруга між електродами; e – модуль заряду електрона.

За теоремою про зміну кінетичної енергії

$$A_{12} = \Delta W_k = W_{k2} - W_{k1} , \tag{3}$$

де W_{k2} і W_{k1} – відповідно кінетична енергія електрона в кінцевому й початковому станах.

Припустимо, що швидкість електрона $v << c$ (c – швидкість світла у вакуумі), тоді його кінетична енергія може бути визначена за формулою

$$W_k = \frac{mv^2}{2} , \tag{4}$$

де m – маса, v – швидкість електрона.

Початкова кінетична енергія визначається за формулою (1), кінцева за формулою

$$W_{k2} = \frac{mv_2^2}{2} . \tag{5}$$

Отже, з (3), (2), (1) і (5) випливає

$$eU_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{3}{2}kT\,. \qquad (6)$$

Звідси

$$v_2 = \sqrt{\frac{1}{m}\left(2eU_{12} + 3kT\right)}\,. \qquad (7)$$

Перевіримо формулу (7):

$$[v] = \text{м/с};\ [m] = \text{кг};\ [e] = \text{Кл} = \text{А}\cdot\text{с};\ [U_{12}] = \text{В} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}};\ [k] = \text{Дж/К} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{К}};\ [T] = \text{К};$$

$$\left[\sqrt{\frac{1}{m}\cdot(eU + kT)}\right] = \sqrt{\frac{1}{\text{кг}}\cdot(\text{Кл}\cdot\text{В} + \text{Дж}\cdot\text{К/К})} = \sqrt{\frac{1}{\text{кг}}\cdot\left(\frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}} + \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{К}}{\text{с}^2\cdot\text{К}}\right)} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Дано:

$e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл

$m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг

$U =$ 220 В

$T =$ 600 К

$k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К

$v_2 - ?$

Розв'язок:

$$v_2 = \sqrt{\frac{1}{9{,}1\cdot10^{-31}}\cdot\left(2\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\cdot220 + 3\cdot1{,}38\cdot10^{-23}\cdot600\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9{,}1\cdot10^{-31}}\cdot\left(7{,}04\cdot10^{-17} + 0{,}002484\cdot10^{-17}\right)} = \sqrt{\frac{7{,}04\cdot10^{-17}}{9{,}1\cdot10^{-31}}} =$$

$$= \sqrt{0{,}77\cdot10^{14}} = 0{,}88\cdot10^{7}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 8{,}8\cdot10^{6}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь: $v_2 = 8{,}8\cdot10^{6}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Отримане значення швидкості $8{,}8\cdot10^{6}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} << 3\cdot10^{8}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ Зроблене раніше припущення справедливе.

Задача 10

В трьох вершинах квадрата зі стороною 10 см знаходяться заряди $q_1 = q_2 = 10$ нКл, $q_3 = -10$ нКл (рисунок 1). Визначити потенціал поля в четвертій вершині квадрата.

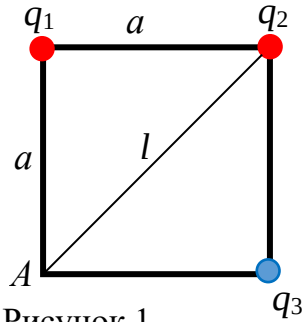


Рисунок 1

Аналіз

Кожний точковий заряд q створює електричне поле, потенціал φ якого на відстані r від заряду визначається за формулою (1.39)

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \qquad (1)$$

де ε_0 – електрична стала.

За принципом суперпозиції потенціалів електричних полів потенціал поля в четвертій вершині квадрата (точка A)

$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 a}, \qquad (2)$$

де заряд q_i (i = 1, 2, 3) – алгебраїчна величина.

З рис. 1 випливає

$$l = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}. \qquad (3)$$

Отже,

$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(q_1 + q_3 + \frac{q_2}{\sqrt{2}}\right). \qquad (4)$$

Дано:	**СІ**
$q_1 = q_2 = 10$ нКл	$10\cdot10^{-9}$ Кл
$q_3 = -10$ нКл	$-10\cdot10^{-9}$ Кл
$a = 10$ см	10^{-1} м
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot10^9 \frac{\text{м}}{\Phi}$	
$\varphi - ?$	

Розв'язок:

$$\varphi = \frac{9\cdot10^9}{10^{-1}}\left(10\cdot10^{-9} - 10\cdot10^{-9} + \frac{10\cdot10^{-9}}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{9\cdot10^{10}\cdot10\cdot10^{-9}}{\sqrt{2}} = 636 \text{ В}.$$

Відповідь: $\varphi = 636$ В.

Задача 11

Визначити потенціал і напруженість поля в точці A, яка знаходиться на відстані 10 см від зарядженої сфери радіусом 10 см, якщо потенціал сфери дорівнює 100 В.

Аналіз

Заряджена сфера на відстані $r \geq R$ (R – радіус сфери) створює електричне поле, подібне до поля точкового заряду q, розташованого в центрі сфери (див. ф-лу 1.27). Модуль напруженості E_r на відстані r від центра сфери

$$E_r = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \tag{1}$$

де ε_0 – електрична стала.

За умовою задачі

$$r = R + l, \tag{2}$$

де l – відстань від поверхні сфери до даної точки.

Тоді

$$E_A = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 (R+l)^2}. \tag{3}$$

Потенціал електричного поля зарядженої сфери на відстані $r \geq R$

$$\varphi_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{4}$$

Тоді

$$\varphi_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (R+l)}. \tag{5}$$

Потенціал на поверхні сфери

$$\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}. \tag{6}$$

Звідси

$$q = \varphi_0 4\pi\varepsilon_0 R. \tag{7}$$

Тоді

$$E_A = \frac{|\varphi_0| 4\pi\varepsilon_0 R}{4\pi\varepsilon_0 (R+l)^2} = \frac{|\varphi_0| R}{(R+l)^2}, \tag{8}$$

$$\varphi_A = \frac{\varphi_0 4\pi\varepsilon_0 R}{4\pi\varepsilon_0 (R+l)} = \frac{\varphi_0 R}{R+l}. \tag{9}$$

Перевіримо формули (8) і (9):

(8) $[E] = \text{В/м}; [\varphi] = \text{В}; [R] = \text{м}; \left[\frac{|\varphi_0| R}{(R+l)^2}\right] = \frac{\text{В}\cdot\text{м}}{\text{м}^2} = \frac{\text{В}}{\text{м}};$

(9) $[\varphi]=\text{В};[R]=[l]=\text{м};\left[\dfrac{\varphi_0 R}{R+l}\right]=\dfrac{\text{В}\cdot\text{м}}{\text{м}}=\text{В}.$

Дано:	**СІ**
$\varphi_0=100$ В	
$R=10$ см	10^{-1} м
$l=10$ см	10^{-1} м
E_A – ?	
φ_A – ?	

Розв'язок:

$$E_A=\frac{10^2\cdot10^{-1}}{\left(10^{-1}+10^{-1}\right)^2}=\frac{10^1}{\left(2\cdot10^{-1}\right)^2}=250\,\frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$\varphi_A=\frac{10^2\cdot10^{-1}}{10^{-1}+10^{-1}}=\frac{10^1}{2\cdot10^{-1}}=50\text{ В}.$$

Відповідь: $E_A=250\,\dfrac{\text{В}}{\text{м}};\ \varphi_A=50$ В.

Задача 12

Електрон рухається в однорідному електричному полі напруженістю E = 200 В/м вздовж силової лінії. Швидкість електрона в деякій точці A $v=3\cdot10^6$ м/с. Визначити швидкість електрона в точці *Б*, яка знаходиться від точки A на відстані 10 см за напрямком напруженості електричного поля (за електричним полем).

Аналіз

З боку електричного поля на електрон діє сила $\vec{F}$ (рисунок 1)

$$\vec{F}=-e\vec{E},\qquad (1)$$

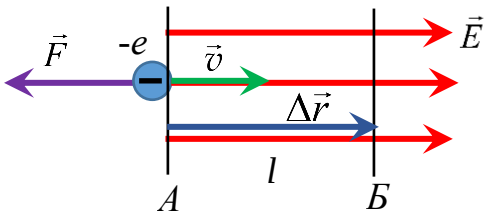


Рисунок 1

де e – модуль заряду електрона;

$\vec{E}$ – напруженість електричного поля.

За *теоремою про зміну кінетичної енергії тіла* (електрона) робота A сили $\vec{F}$

$$A=W_{k2}-W_{k1},\qquad (2)$$

де W_{k1} і W_{k2} – відповідно початкова й кінцева кінетичні енергії електрона.

Робота сили $\vec{F}$ на переміщенні $\Delta\vec{r}$

$$A=F\cdot\Delta r\cos180^\circ=-F\cdot\Delta r=-eE\Delta r=-eEl,\qquad (3)$$

де F – модуль сили; e – модуль заряду електрона; E – модуль напруженості електричного поля; $\Delta r=l$ – модуль переміщення електрона (l – відстань між точками A і *Б*).

За умовою задачі швидкість електрона $v << c$ (c – швидкість світла в вакуумі), тоді його кінетична енергія може бути визначена за формулою

$$W_k = \frac{mv^2}{2}, \tag{4}$$

де m – маса, v – швидкість електрона.

З (2), (3), (4) випливає

$$-eEl = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \tag{5}$$

де v_1 і v_2 – відповідно початкова і кінцева швидкості електрона.

Звідси

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} - eEl, \tag{6}$$

кінцева швидкість

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2eEl}{m}}. \tag{7}$$

Перевіримо формулу (7):

$$[v] = \frac{\text{м}}{\text{с}};\ [e] = \text{Кл} = \text{А} \cdot \text{с};\ [E] = \frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^3 \cdot \text{А}};\ [l] = \text{м};\ [m] = \text{кг};$$

$$\left[\sqrt{v_1^2 - \frac{eEl}{m}}\right] = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} - \frac{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{А}}} = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} - \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$E = 200$ В/м		$v_2 = \sqrt{\left(3 \cdot 10^6\right)^2 - \frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot 10^{-1}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} =$
$v_1 = 3 \cdot 10^6$ м/с		
$l = 10$ см	10^{-1} м	$= \sqrt{9 \cdot 10^{12} - 7 \cdot 10^{12}} = 1{,}4 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл		
$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг		**Відповідь:** $v_2 = 1{,}4 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$
v_2 – ?		

Задача 13

Визначити енергію взаємодії трьох зарядів q, q і $-q$, які розташовані в вершинах рівнобічного трикутника з довжиною сторони d.

Аналіз

Визначимо спочатку потенціальну енергію двох позитивних точкових зарядів q_1 і q_2, які знаходяться на відстані r_{12} один від іншого.

Коли відстань між зарядами нескінченна, тоді вони не взаємодіють між собою й потенціальна енергія взаємодії дорівнює нулю. Наблизимо заряди один до іншого на відстань r_{12}. В цьому випадку ми виконуємо роботу проти електричних сил, отже, потенціальна енергія системи збільшується. Наближення зарядів один до іншого можна здійснити двома способами: наближаючи заряд q_1 до нерухомого заряду q_2, або наближаючи заряд q_2 до нерухомого заряду q_1. Робота перенесення заряду q_1 із нескінченності в точку на відстані r_{12} від заряду q_2 (див. ф-лу 1.41)

$$A_1 = q_1\varphi_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}, \tag{1}$$

де φ_1 – потенціал, який створює заряд q_2 в точці, куди переміщується заряд q_1.

Аналогічно робота перенесення заряду q_2 з нескінченності в точку на відстані r_{12} від заряду q_1

$$A_2 = q_2\varphi_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}, \tag{2}$$

де φ_2 – потенціал, який створює заряд q_1 в точці, куди переміщується заряд q_2.

Як бачимо, роботи в обох випадках однакові й визначають потенціальну енергію системи

$$W_p = q_2\varphi_2 = q_1\varphi_1. \tag{3}$$

Цей вираз можна написати так, щоб до нього обидва заряди входили симетрично,

$$W_p = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2\right). \tag{4}$$

Формула (4) визначає потенціальну енергію двох зарядів.

Додамо ще один позитивний заряд q_3. Перенесемо його з нескінченності в точку, яка знаходиться на відстані r_{13} від заряду q_1 і на відстані r_{23} від заряду q_2. Робота, яка виконується в цьому випадку,

$$A_3 = q_3\varphi_3 = q_3\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\right), \tag{5}$$

де φ_3 – потенціал, який створюють заряди q_1 і q_2 в точці, куди переміщується заряд q_3.

Тоді потенціальна енергія системи зарядів є сумою робіт $A_1 + A_3$ або $A_2 + A_3$

$$W_p = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + q_3\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\right) = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}} = \frac{1}{2}q_1\left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}\right) + \frac{1}{2}q_2\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}q_3\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\right) = \frac{1}{2}q_1\varphi_1 + \frac{1}{2}q_2\varphi_2 + \frac{1}{2}q_3\varphi_3 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} q_i\varphi_i, \tag{6}$$

де φ_i – потенціал, який створюють у точці, де знаходиться заряд q_i, всі заряди окрім заряду q_i (i = 1, 2, 3 – номер заряду).

Додаючи заряди q_4, q_5, …., q_n, можна показати, що потенціальна енергія взаємодії n зарядів

$$W_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i, \tag{7}$$

де φ_i – потенціал, який створюють в точці, де знаходиться заряд q_i, всі заряди крім заряду q_i.

В даній задачі маємо конфігурацію зарядів, яка надана на рисунку 1. Позначимо заряди: $q_1 = q$; $q_2 = q$; $q_3 = -q$.

Потенціальна енергія системи

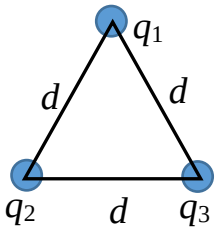


Рисунок 1

$$W_p = \frac{1}{2}q_1\left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 d}\right)+\frac{1}{2}q_2\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 d}\right)+\frac{1}{2}q_3\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}\left[q_1(q_2+q_3)+q_2(q_1+q_3)+q_3(q_1+q_2)\right],$$

$$W_p = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}\left[q_1(q_2+q_3)+q_2(q_1+q_3)+q_3(q_1+q_2)\right]. \quad (8)$$

Перевіримо формулу (8):

$$\left[W_p\right] = \text{Дж} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2};\ \left[d\right] = \text{м};\ \left[q\right] = \text{Кл} = \text{А}\cdot\text{с};\ \left[\varepsilon_0\right] = \Phi/\text{м} = \text{А}^2\cdot\text{с}^4\Big/\left(\text{кг}\cdot\text{м}^3\right);$$

$$\left[\frac{q\cdot q}{\varepsilon_0 d}\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^3\cdot\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{А}\cdot\text{с}}{\text{А}^2\cdot\text{с}^4\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2}.$$

Дано:	**Розв'язок:**
$q_1 = q$ $q_2 = q$ $q_3 = -q$	$W_p = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}\left[q(q-q)+q(q-q)-q(q+q)\right] = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}.$
W_p — ?	**Відповідь:** $W_p = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}.$

1.2. ПРОВІДНИКИ Й ДІЕЛЕКТРИКИ В ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОМУ ПОЛІ

1.2.1. ПРОВІДНИК В ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОМУ ПОЛІ. ЯВИЩЕ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ. ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИЙ ЗАХИСТ

Провідником називається тіло, в якому є електричні заряди, що здатні вільно переміщуватися в межах його об'єму. Такі електричні заряди називаються **вільними.** Провідниками є **метали** (вільні заряди — електрони), **електроліти** (вільні заряди — позитивно й негативно заряджені іони), **іонізовані гази** (вільні заряди — електрони й позитивно заряджені іони (інколи також негативно заряджені іони)).

Коли провідник вноситься в електричне поле, електричні заряди починають впорядковано рухатись вздовж його силових ліній так, що біля його поверхні утворюються нескомпенсовані заряди різних знаків — **індуковані заряди.** Заряди будуть переміщуватися доки створене ними в провіднику

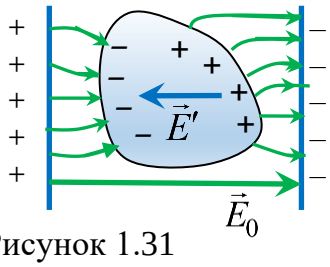


Рисунок 1.31

електричне поле напруженістю $\vec{E}'$ не компенсуватиме зовнішнє електричне поле напруженістю $\vec{E}_0$ (рисунок 1.31). Це явище називається **електростатичною індукцією.**

Індуковані заряди локалізуються в тонкому приповерхневому шарі товщиною декілька мікрометрів.

Напруженість електричного поля в провіднику

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0, \qquad (1.48)$$

де $\vec{E}_0$ – напруженість зовнішнього електричного поля; $\vec{E}'$ – напруженість електричного поля, створеного індукованими зарядами.

На межі провідник-вакуум силові лінії перпендикулярні до поверхні провідника, тобто тангенціальна складова $\vec{E}_\tau$ вектора $\vec{E}$ (складова, яка дотична до поверхні провідника) дорівнює нулю

$$\vec{E}_\tau = 0, \qquad (1.49)$$

а нормальна складова $\vec{E}_n$ за теоремою Гаусса дорівнює

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad (1.50)$$

де σ – поверхнева густина зарядів, яка залежить від кривизни поверхні.

Зі співвідношень (1.49) і (1.50) випливає, що потенціал у всіх точках провідника однаковий, тобто **поверхня провідника — еквіпотенціальна поверхня.**

Розподіл індукованих зарядів однаковий як в суцільному шматі металу, так і в замкненій металевій порожнині. Отже, в замкненій металевій порожнині відсутнє електростатичне поле.

Рисунок 1.32

Замкнена металева порожнина використовується для електростатичного захисту.

Рисунок 1.33

Для електростатичного захисту можна використовувати не тільки суцільний провідник: наприклад, металевий корпус приладів (рисунок 1.32), а навіть металеву сітку (рисунок 1.33). Така металева клітка отримала назву клітки Фарадея. Металевий корпус чи сітку з'єднують з нульовим потенціалом Землі — заземлюють.

1.2.2 ЕЛЕКТРИЧНИЙ ДИПОЛЬ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ

Електричним диполем називається система з двох жорстко зв'язаних однакових за модулем різнойменних зарядів (рисунок 1.34).

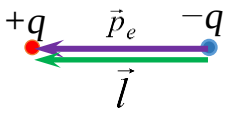


Рисунок 1.34

Коли мова йде про поле диполя, то припускають, що диполь є точковим, тобто вважають, що відстань r до точок поля, які розглядаються, значно більша за довжину диполя l ($r >> l$).

Характеристикою диполя є дипольний момент $\vec{p}_e$. Введемо вектор $\vec{l}$, напрямлений від заряду $-q$ до заряду $+q$, модуль якого дорівнює відстані l між зарядами.

Тоді **дипольний момент**

$$\boxed{\vec{p}_e = q\vec{l}}, \qquad (1.51)$$

де q – позитивний заряд диполя.

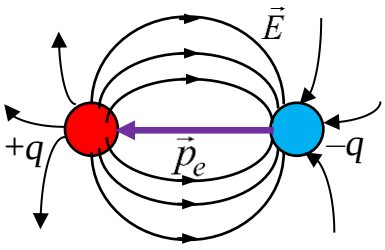


Рисунок 1.35

В СІ $[p_e] = \text{Кл} \cdot \text{м}$ (кулон·метр). Розмірність дипольного моменту $\dim p_e = ITL$.

Електричний диполь створює електричне поле (рисунок 1.35), напруженість якого можна визначити, скориставшись співвідношенням

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}. \qquad (1.52)$$

Нехай диполь знаходиться в однорідному електричному полі напруженістю $\vec{E}$ (рисунок 1.36). На диполь діє пара сил $\vec{F}_+ = +q\vec{E}$ і $\vec{F}_- = -q\vec{E}$.

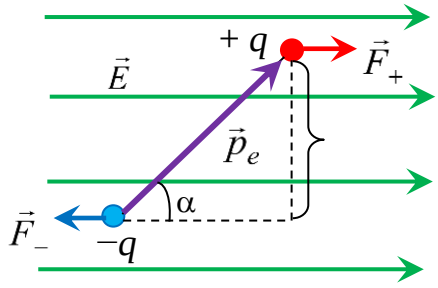


Рисунок 1.36

Момент $\vec{M}$ цієї пари сил дорівнює

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_e, \vec{E}\right], \qquad (1.53)$$

його модуль

$$M = p_e E \sin\alpha, \qquad (1.54)$$

де p_e – модуль дипольного моменту; E – модуль напруженості електричного поля; α – кут між векторами $\vec{p}_e$ і $\vec{E}$.

Потенціальна енергія диполя в електричному полі

$$\boxed{W_p = -\vec{p}_e \cdot \vec{E}}. \qquad (1.55)$$

Момент сил намагається повернути диполь так, щоб збігались напрямки векторів $\vec{p}_e$ і $\vec{E}$. В такому положенні диполь має найменшу потенціальну енергію.

1.2.3. ДІЕЛЕКТРИКИ. ПОЛЯРИЗАЦІЯ ДІЕЛЕКТРИКІВ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ. ЗВ'ЯЗАНІ ЕЛЕКТРИЧНІ ЗАРЯДИ (ПОЛЯРИЗАЦІЙНІ ЗАРЯДИ). ЕЛЕКТРИЧНА ПОЛЯРИЗОВАНІСТЬ (ВЕКТОР ПОЛЯРИЗАЦІЇ). СЕГНЕТОЕЛЕКТРИКИ

Діелектриком називається тіло, яке не містить зарядів, здатних вільно рухатись в межах його об'єму, тобто не містить вільних зарядів.

Під дією зовнішнього електричного поля відбувається поляризація діелектрика. Конкретний механізм поляризації залежить від будови діелектрика, але є деякі загальні закономірності. Позначимо напруженість зовнішнього електричного поля $\vec{E}_0$. Незалежно від механізму поляризації в цьому процесі всі позитивні заряди переміщуються по полю (в напрямку вектора $\vec{E}_0$), а негативні заряди — проти поля (в напрямку, протилежному вектору $\vec{E}_0$), залишаючись в межах молекули (рисунок 1.37). **Така молекула є електричним диполем.** В зовнішньому електричному полі відбувається переважне орієнтування дипольних моментів вздовж вектора напруженості $\vec{E}_0$ зовнішнього електричного поля.

Поляризація діелектрика полягає в тому, що в будь-якому малому його об'ємі ΔV виникає сумарний дипольний момент, відмінний від нуля.

Діелектрики поділяються на полярні й неполярні. *Неполярними* називаються діелектрики, молекули яких за відсутності електричного поля не мають дипольного моменту (наприклад, вуглекислий газ, молекула якого CO_2 має лінійну структуру й внаслідок цього не має дипольного моменту). В неполярних молекулах зовнішнє електричне поле індукує дипольні моменти, які орієнтуються вздовж вектора $\vec{E}_0$. До *полярних* діелектриків відносяться речовини, молекули яких мають дипольний момент за відсутності зовнішнього електричного поля (наприклад, вода, молекула H_2O якої має нелінійну структуру і внаслідок цього має дипольний момент). У зовнішньому електричному полі дипольні моменти орієнтуються вздовж $\vec{E}_0$ (див. пункт 1.2.2). Молекула також витягується вздовж $\vec{E}_0$.

Всередині однорідного діелектрика заряди, які виникли внаслідок поляризації, компенсують один іншого (див., наприклад, рисунок 1.36, *г*), а *на поверхні діелектрика утворюються нескомпенсовані заряди* $+q_{зв}$ і $-q_{зв}$, *які називаються* **зв'язаними.** Ці заряди створюють всередині діелектрика поле напруженістю $\vec{E}'$: $\vec{E}' \uparrow\downarrow \vec{E}_0$, $E' < E_0$.

Напруженість $\vec{E}$ електричного поля в діелектрику

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}_0, \tag{1.56}$$

Модуль напруженості

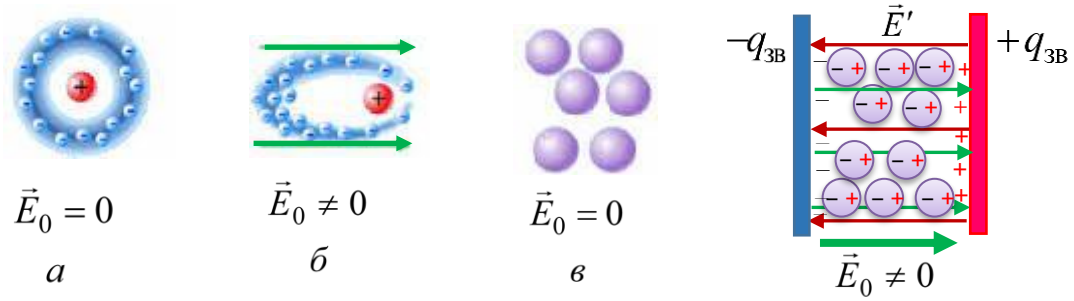
$$E = E_0 - E'. \tag{1.57}$$

Для кількісного опису поляризації діелектрика вводиться **електрична поляризованість (вектор поляризації)** $\vec{P}$ — векторна фізична величина, яка визначається співвідношенням

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{ei}, \tag{1.58}$$

де N – кількість молекул в об'ємі ΔV; $\vec{p}_{ei}$ – електричний дипольний момент i-ї молекули.

В СІ $[P]=\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$ (кулон/метр^2) Розмірність електричної поляризованості $\dim P = ITL^{-2}$.



Поляризація неполярного діелектрика:

$\vec{E}_0$ – напруженість зовнішнього електричного поля: *а*) неполяризована молекула діелектрика: ⊖ – негативний заряд, ⊕ – позитивний заряд; *б*) поляризована молекула діелектрика; *в*) ○ – молекула неполяризованого діелектрика, *г*) ⊖⊕ – молекула поляризованого діелектрика; $\vec{E}'$ – напруженість електричного поля в діелектрику, яке створене зв'язаними зарядами $q_{зв}$

Рисунок 1.37

Для ізотропного діелектрика будь-якого типу (крім сегнетоелектриків) **електрична поляризованість** зв'язана з напруженістю електричного поля в діелектрику (в не дуже сильних електричних полях) співвідношенням

$$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}}, \qquad (1.59)$$

де χ_e – **діелектрична сприйнятливість речовини;** ε_0 – електрична стала.

В СІ $[\chi_e]=1$.

ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ПОЛЯ ВЕКТОРА $\vec{P}$

Потік вектора $\vec{P}$ крізь замкнену поверхню S дорівнює взятому зі знаком «–» надлишковому зв'язаному заряду $q_{зв}$, який охоплений поверхнею S,

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -q_{зв}. \qquad (1.60)$$

Сегнетоелектрики — діелектрики зі спонтанною поляризованістю, тобто їх поляризація виникає без зовнішнього електричного поля. Проте, вона може змінюватися під дією зовнішнього поля.

1.2.4. ЕЛЕКТРИЧНЕ ЗМІЩЕННЯ

Електричне поле $\vec{E}$ в діелектрику створюють всі заряди: зв'язані заряди (заряди, які входять до складу молекули) $q_{зв}$ і сторонні заряди (заряди, які не входять до складу молекули) q. Зазначимо, що розрахунок величини $q_{зв}$ у загальному випадку практично неможливий, що утруднює розрахунок електричного поля в діелектрику. Уникнути цієї проблеми можна, якщо ввести допоміжну векторну величину — *електричне зміщення*.

Напишемо теорему Гаусса для вектора $\vec{E}$ в речовині

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q + q_{зв}}{\varepsilon_0}, \tag{1.61}$$

де $q_{зв}$ і q – зв'язані й сторонні заряди, які охоплені замкненою поверхнею S, відповідно.

Напишемо вираз (1.61), врахувавши формулу (1.60),

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = q + q_{зв} = q - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}. \tag{1.62}$$

Звідси

$$\oint_S \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) \cdot d\vec{S} = q. \tag{1.63}$$

Векторна фізична величина, яка визначається співвідношенням

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}, \tag{1.64}$$

називається **електричним зміщенням.**

В СІ $[D] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$ (кулон/метр^2). Розмірність електричного зміщення $\dim D = ITL^{-2}$.

Тоді

ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ В РЕЧОВИНІ

набуває вигляду

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q}, \tag{1.65}$$

тобто *потік вектора* $\vec{D}$ *крізь замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній*

сумі сторонніх зарядів, які охоплені цією поверхнею.

Джерелами поля вектора $\vec{D}$ є сторонні заряди, величини й конфігурація яких у більшості випадків відомі. Тому введення вектора $\vec{D}$ значно спрощує вивчення електричного поля в діелектрику.

Врахувавши формулу (1.59), перепишемо формулу (1.64)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \qquad (1.66)$$

де $\boxed{\varepsilon = 1 + \chi_e}$ – **відносна діелектрична проникність речовини.**

В СІ $[\varepsilon] = 1$. Величина ε – основна характеристика діелектрика.

Для ізотропного однорідного діелектрика відносна діелектрична проникність показує, у скільки разів модуль напруженості E електричного поля в речовині менший за модуль напруженості E_0 електричного поля у вакуумі.

$$\boxed{\varepsilon = \frac{E_0}{E}}. \qquad (1.67)$$

1.2.5. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ ДЛЯ ДІЕЛЕКТРИЧНОГО СЕРЕДОВИЩА

Закон Кулона: модуль сили F взаємодії двох нерухомих точкових зарядів q_1 і q_2, розташованих у діелектричному середовищі,

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}, \qquad (1.68)$$

де $|q_1|$ і $|q_2|$ – модулі цих зарядів; r – відстань між зарядами; ε_0 – електрична стала: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; ε – відносна діелектрична проникність середовища.

Сила напрямлена вздовж лінії, що з'єднує заряди.

Напруженість $\vec{E}$ електростатичного поля в даній точці діелектрика

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'},$$

де $\vec{F}$ – сила, яка діє на «пробний» заряд q', що знаходиться в цій точці.

Модуль напруженості *E* електричного поля точкового заряду q на відстані r від нього

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{|q|}{r^2}, \qquad (1.69)$$

де $|q|$ – модуль заряду; ε_0 – електрична стала; ε – відносна діелектрична проникність середовища.

Потенціальна енергія взаємодії двох точкових зарядів q_1 і q_2, розташованих на відстані r один від іншого,

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r}, \qquad (1.70)$$

де q_1 і q_2 – алгебраїчні величини зарядів; ε_0 – електрична стала; ε – відносна діелектрична проникність середовища.

Потенціал φ електростатичного поля в діелектрику

$$\varphi = \frac{W_p}{q'},$$

де W_p – потенціальна енергія «пробного» заряду q', який розміщений в даній точці діелектрика.

Потенціал поля точкового заряду q на відстані r від нього

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}, \qquad (1.71)$$

де q – алгебраїчна величина заряду; ε_0 – електрична стала; ε – відносна діелектрична проникність середовища.

1.2.6. ЕЛЕКТРИЧНА ЄМНІСТЬ (ЕЛЕКТРОЄМНІСТЬ) ПРОВІДНИКА. КОНДЕНСАТОРИ. ЕЛЕКТРОЄМНІСТЬ КОНДЕНСАТОРІВ РІЗНОЇ ФОРМИ. СИСТЕМИ КОНДЕНСАТОРІВ

Електрична ємність (електроємність) C провідника — фізична величина, яка є електричною характеристикою провідника, що знаходиться в діелектричному середовищі. **Електроємність** провідника залежить від його форми, розмірів, місця розташування, відносної діелектричної проникності середовища й визначається співвідношенням

$$\boxed{C = \frac{q}{\varphi}}, \qquad (1.72)$$

де q – заряд, який потрібно надати провіднику, щоб збільшити його потенціал від 0 до φ.

В СІ $[C] = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \Ф$ (фарад). Розмірність електричної ємності $\dim C = I^2 T^4 L^{-2} M^{-1}$.

Конденсатор — *система з двох різнойменно заряджених провідників (обкладок), розташованих на невеликій відстані один від іншого й розділених тонким шаром діелектрика.*

Позначення конденсатора на електричних схемах надано на рисунку 1.38.

Рисунок 1.38

Електроємність конденсатора

$$\boxed{C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U_{12}}}, \qquad (1.73)$$

де q – заряд позитивно зарядженої обкладки; $\varphi_1 - \varphi_2$ – різниця потенціалів на обкладках конденсатора; U_{12} – напруга на обкладках конденсатора.

Лінії $\vec{D}$ починаються й закінчуються на сторонніх зарядах, тому заряди на обкладках конденсатора рівні за модулем і протилежні за знаком.

Зарядом конденсатора *називається заряд q позитивно зарядженої обкладки конденсатора.*

Напруженість $\vec{E}$ поля між обкладками конденсатора пропорційна заряду q обкладок.

Оскільки

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l},$$

то напруга U між обкладками також пропорційна q

$$q = CU. \qquad (1.74)$$

ЕЛЕКТРИЧНА ЄМНІСТЬ КОНДЕНСАТОРІВ РІЗНОЇ ФОРМИ

1. Плоский конденсатор: обкладки — плоскопаралельні пластини (рисунок 1.39).

Електроємність конденсатора

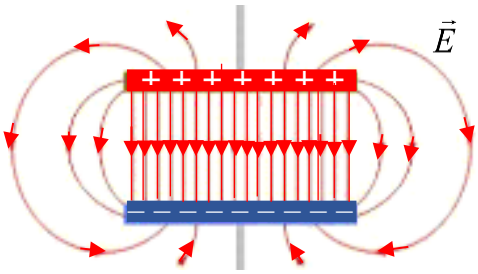


Рисунок 1.39

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \qquad (1.75)$$

де S – площа обкладки; d – відстань між обкладками; ε – відносна діелектрична проникність середовища між обкладками; ε_0 – електрична стала.

Примітка: Якщо конструкція конденсатора надає можливість змінювати ємність конденсатора шляхом повороту однієї обкладки відносно іншої, то в формулі (1.75) S – площа області, загальної для обох обкладок (площа перекриття обкладок) (рисунок 1.40).

Рисунок 1.40

Електричне поле в плоскому конденсаторі можна вважати однорідним, якщо знехтувати крайовими ефектами (див. рис. 1.39). Тоді зв'язок між напругою U на конденсаторі й модулем напруженості E електричного поля всередині конденсатора

$$E = \frac{U}{d}, \qquad (1.76)$$

де d – товщина проміжку між обкладками конденсатора.

2. Сферичний конденсатор: обкладки — концентричні сфери (рисунок 1.41).

Електроємність конденсатора

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \qquad (1.77)$$

де R_1 і R_2 – радіуси внутрішньої й зовнішньої обкладок відповідно; ε – відносна діелектрична проникність середовища між обкладками; ε_0 – електрична стала.

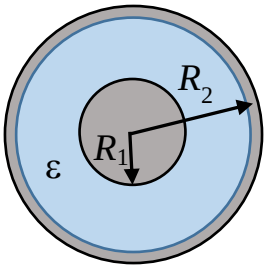


Рисунок 1.41

3. Циліндричний конденсатор: обкладки — коаксіальні циліндри (рисунок 1.42).

Електроємність конденсатора

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\left(R_2/R_1\right)}, \qquad (1.78)$$

де l – довжина циліндрів; R_1 і R_2 – відповідно радіуси внутрішньої й зовнішньої обкладок; ε – відносна діелектрична проникність середовища між обкладками; ε_0 – електрична стала.

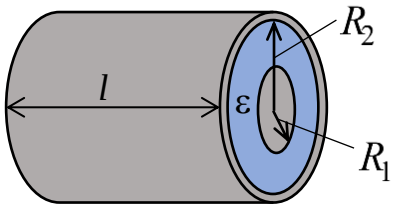


Рисунок 1.42

СИСТЕМИ КОНДЕНСАТОРІВ

1. Послідовне з'єднання *n* конденсаторів (рисунок 1.43).

Внаслідок явища електростатичної індукції обкладки двох сусідніх конденсаторів, з'єднаних провідником, мають заряди $+q$ й $-q$ та однакові потенціали.

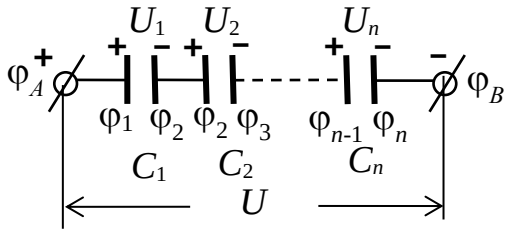


Рисунок 1.43

Отже, заряди $q_1, q_2, ..., q_n$ на відповідних конденсаторах: $q_1 = q_2 = ... = q_n = q,$ де q – повний заряд батареї.

Напруга на батареї конденсаторів (див. рис. 1.43)

$$U = \varphi_A - \varphi_B = \varphi_1 - \varphi_n, \qquad (1.79)$$

напруга на i-ому (i = 1, 2, …., n) конденсаторі

$$U_1 = \varphi_1 - \varphi_2;\ U_2 = \varphi_2 - \varphi_3;\ U_3 = \varphi_3 - \varphi_4, \ldots..,\ U_n = \varphi_{n-1} - \varphi_n. \qquad (1.80)$$

Додамо ліві й праві частини співвідношень (1.80) і врахуємо (1.79)

$$U_1 + U_2 + ... + U_n = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_3 - \varphi_4 + ... + \varphi_{n-1} - \varphi_n = \varphi_1 - \varphi_n = \varphi_A - \varphi_B = U.$$

Отже, напруга U на батареї конденсаторів

$$U = U_1 + U_2 + ... + U_n = \sum_{i=1}^{n} U_i, \qquad (1.81)$$

де U_i (i = 1, 2, 3, ….., n) – напруга на i-ому конденсаторі.

Тоді можна визначити

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{U_1 + U_2 + ... + U_n}{q} = \frac{U_1}{q_1} + \frac{U_2}{q_2} + ... + \frac{U_n}{q_n} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n}, \qquad (1.82)$$

де C – електроємність батареї конденсаторів.

Електроємність C батареї n послідовно з'єднаних конденсаторів визначається зі співвідношення

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+...+\frac{1}{C_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}. \qquad (1.83)$$

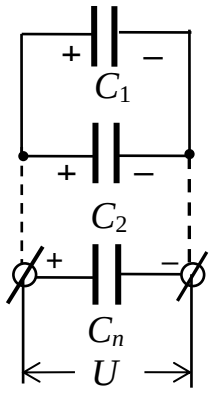


Рисунок 1.44

2. Паралельне з'єднання n конденсаторів (рисунок 1.44)

Напруги $U_1, U_2, ..., U_n$ на відповідних конденсаторах дорівнюють напрузі U на батареї конденсаторів

$$U_1 = U_2 = ... = U_n = U .$$

Сумарний заряд батареї конденсаторів: $q = q_1 + q_2 + ... + q_n$,

де q_i – заряд на i-ому (i = 1, 2, …., n) конденсаторі.

Тоді електроємність C батареї конденсаторів

$$C=\frac{q}{U}=\frac{q_1+q_2+...+q_n}{U}=\frac{q_1}{U_1}+\frac{q_2}{U_2}+...+\frac{q_n}{U_n}=C_1+C_1+...+C_n. \qquad (1.84)$$

Електроємність C батареї n конденсаторів

$$C=C_1+C_2+....+C_n=\sum_{i=1}^{n}C_i. \qquad (1.85)$$

1.2.7. ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ. ОБ'ЄМНА ГУСТИНА ЕНЕРГІЇ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ

ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ В КОНДЕНСАТОРІ

Розглянемо квазістатичний процес зарядки конденсатора (рисунок 1.45), тобто будемо вважати, що напруга на конденсаторі зростає фізично нескінченно повільно. В такому випадку потенціал кожної обкладки в будь-який момент часу в будь-якій її точці матиме одне й те ж значення. При збільшенні заряду обкладки конденсатора на нескінченно малу величину dq джерело постійного струму виконує роботу

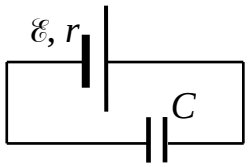


Рисунок 1.45

$$\delta A = u dq , \qquad (1.86)$$

де u – напруга на конденсаторі в момент часу t, при якій відбувається приріст заряду.

Оскільки

$$dq = Cdu, \tag{1.87}$$

де C – ємність конденсатора, du – приріст напруги на конденсаторі, тоді

$$\delta A = Cudu. \tag{1.88}$$

Якщо ємність конденсатора не залежить від напруги, то за рахунок роботи джерела живлення збільшується енергія конденсатора.

Отже, **енергія W_e електричного поля конденсатора, зарядженого до напруги U**, визначається як

$$W_e = A = \int_0^U Cudu = \frac{CU^2}{2},$$

$$\boxed{W_e = \frac{CU^2}{2}}. \tag{1.89}$$

ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ

Для плоского конденсатора формула (1.89) може бути написана як

$$W_e = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SE^2 d^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 Sd}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 V}{2}, \tag{1.90}$$

де V – об’єм конденсатора.

Оскільки електричне зміщення $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, тоді формула (1.90) набуває вигляду

$$W_e = \frac{\vec{D}\cdot\vec{E}}{2}V. \tag{1.91}$$

Об’ємна густина енергії електричного поля — фізична величина, яка чисельно дорівнює енергії електричного поля в одиниці об’єму

$$\boxed{w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\vec{D}\cdot\vec{E}}{2}}, \tag{1.92}$$

де dW_e – енергія електричного поля в об’ємі dV.

В СІ $[w_e] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$.

1.2.8. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 14

Металева сфера радіусом $R = 5$ см має заряд $q = 10$ нКл. Визначити потенціал і електроємність сфери.

Аналіз

За визначенням електроємність провідника

$$C = \frac{q}{\varphi}, \tag{1}$$

де q – заряд, φ – потенціал провідника.

В пункті 1.1.7 було показано, що *електричне поле рівномірно зарядженої сфери на відстанях* $r \geq R$ *(R – радіус сфери) еквівалентне полю точкового заряду, який знаходиться в центрі сфери.*

Тоді потенціал поля рівномірно зарядженої сфери на відстані $r \geq R$ від її центру визначається як

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{2}$$

де r – радіус сфери; ε_0 – електрична стала.

Потенціал зарядженої сфери

$$\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}, \tag{3}$$

де R – радіус сфери.

Врахувавши (1) і (3), визначимо електроємність сфери

$$C = \frac{q}{\varphi_0} = \frac{q}{q} \cdot 4\pi\varepsilon_0 R = 4\pi\varepsilon_0 R,$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R. \tag{4}$$

Перевіримо формулу (4):

$$[C] = \Phi = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^2}; \quad [R] = \text{м}; \quad [q] = \text{А} \cdot \text{с}; \quad [\varepsilon_0] = \frac{\Phi}{\text{м}} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3};$$

$$[\varepsilon_0 R] = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4 \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^2}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м		$\varphi_0 = \dfrac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-8}}{5 \cdot 10^{-2}} = 1{,}8 \cdot 10^3$ В $= 1{,}8$ кВ;
$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф		$C = 4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 556 \cdot 10^{-14}$ Ф =
$R = 5$ см	$5 \cdot 10^{-2}$ м	$= 5{,}56 \cdot 10^{-12}$ Ф $= 5{,}56$ пФ.
$q = 10$ нКл	10^{-8} Кл	**Відповідь:**
φ_0 – ?		$\varphi_0 = 1{,}8$ кВ; $C = 5{,}56$ пФ.
C – ?		

Задача 15

Обкладки плоского конденсатора, площею $S = 0{,}01$ м^2 кожна, притягуються одна до іншої з силою $F = 30$ мН. Простір між обкладками заповнений слюдою. Визначити: заряд q конденсатора; напруженість E електричного поля в конденсаторі; об'ємну густину енергії w_e електричного поля.

Аналіз

На обкладках конденсатора заряди однакові за модулем і протилежні за знаком. Якщо знехтувати крайовими ефектами, то електричне поле в плоскому конденсаторі можна вважати однорідним (рисунок 1).

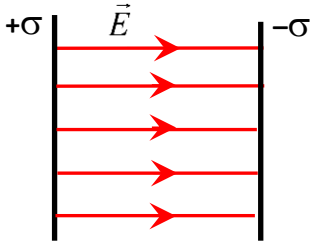


Рисунок 1

Модуль напруженості E електричного поля в конденсаторі

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad (1)$$

де σ – модуль поверхневої густини заряду на обкладці; ε_0 – електрична стала; ε – відносна діелектрична проникність речовини між обкладками.

Модуль сили F_1, що діє на одиницю площі обкладки,

$$F_1 = \sigma E = \frac{\sigma\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad (2)$$

тоді модуль сили F, що діє на обкладку площею S,

$$F = \frac{\sigma^2 S}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma q}{\varepsilon\varepsilon_0}, \tag{3}$$

де q – модуль заряду на обкладці.

З (3) випливає

$$\sigma = \sqrt{\frac{F\varepsilon\varepsilon_0}{S}}. \tag{4}$$

Зарядом конденсатора називається заряд позитивно зарядженої обкладки.

Заряд q конденсатора

$$q = \sigma S = S\sqrt{\frac{F\varepsilon\varepsilon_0}{S}} = \sqrt{SF\varepsilon\varepsilon_0}. \tag{5}$$

Модуль напруженості поля

$$E = \sqrt{\frac{F}{\varepsilon_0\varepsilon S}}. \tag{6}$$

Об’ємна густина енергії електричного поля

$$w_e = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 F}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{F}{2S}. \tag{7}$$

Перевіримо формули (5), (6) і (7):

$(\mathbf{5})$ $[q] = \text{Кл} = \text{А}\cdot\text{с};\ [S] = \text{м}^2;\ [F] = \text{Н} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2};\ [\varepsilon] = 1;$

$$[\varepsilon_0] = \text{Ф/м} = \text{А}^2\cdot\text{с}^4 \Big/ \left(\text{кг}\cdot\text{м}^3\right);\ \left[\sqrt{SF\varepsilon\varepsilon_0}\right] = \sqrt{\frac{\text{м}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{А}^2\cdot\text{с}^4}{\text{с}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^3}} = \text{А}\cdot\text{с};$$

$(\mathbf{6})$ $[E] = \frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^3\cdot\text{А}};\ [F] = \text{Н} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2};\ [S] = \text{м}^2;\ [\varepsilon] = 1;$

$$[\varepsilon_0] = \text{Ф/м} = \text{А}^2\cdot\text{с}^4 \Big/ \left(\text{кг}\cdot\text{м}^3\right);\ \left[\sqrt{\frac{F}{\varepsilon_0\varepsilon S}}\right] = \sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{с}^2\cdot\text{м}^2\cdot\text{А}^2\cdot\text{с}^4}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^3\cdot\text{А}};$$

$(\mathbf{7})$ $[w_e] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2\cdot\text{м}};\ [F] = \text{Н} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2};\ [S] = \text{м}^2;\ \left[\frac{F}{S}\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2\cdot\text{м}}.$

Задача 16

Площа обкладки плоского повітряного конденсатора $S = 0{,}01$ м^2, відстань між обкладками $d_1 = 2$ см. Напруга на конденсаторі $U = 3$ кВ. Визначити зміну модуля напруженості E поля конденсатора та заряду q конденсатора, якщо, не відключаючи джерело напруги, збільшити відстань між обкладками до $d_2 = 5$ см.

Аналіз

Напруженість електричного поля в зарядженому конденсаторі

$$E = \frac{U}{d}, \tag{1}$$

де U – напруга на конденсаторі; d – відстань між обкладками.

Якщо обкладки конденсатора розсунути без відключення джерела напруги, то напруга на конденсаторі залишиться незмінною.

Модуль напруженості E_1 електричного поля в початковому стані

$$E_1 = \frac{U}{d_1}, \tag{2}$$

де d_1 – початкова відстань між обкладками;

модуль напруженості E_2 електричного поля в кінцевому стані

$$E_2 = \frac{U}{d_2}, \tag{3}$$

де d_2 – кінцева відстань між обкладками.

Зміна модуля напруженості електричного поля при розсуванні обкладок

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{U}{d_2} - \frac{U}{d_1} = U\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right). \tag{4}$$

Заряд конденсатора

$$q = CU, \tag{5}$$

де C – електроємність конденсатора.

Електроємність плоского конденсатора (див. формулу (1.75))

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \tag{6}$$

де S – площа обкладки; d – відстань між обкладками; ε – відносна діелектрична

проникність речовини між обкладками; ε_0 – електрична стала.

Отже,

$$q = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU}{d}. \tag{7}$$

Тоді

в початковому стані

$$q_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU}{d_1}, \tag{8}$$

в кінцевому стані

$$q_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU}{d_2}. \tag{9}$$

Зміна заряду на конденсаторі

$$\Delta q = q_2 - q_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU}{d_2} - \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU}{d_1} = \varepsilon\varepsilon_0 SU\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right). \tag{10}$$

Розмірність напруженості за формулою (4) збігається з розмірністю напруженості.

Перевіримо формулу (10):

$$[q] = \text{Кл} = \text{А}\cdot\text{с};\ [\varepsilon] = 1;\ [\varepsilon_0] = \frac{\Phi}{\text{м}} = \frac{\text{А}^2\cdot\text{с}^4}{\text{кг}\cdot\text{м}^3};\ [S] = \text{м}^2;$$

$$[d] = \text{м};\ [U] = \text{В} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{А}\cdot\text{с}^3};\ \left[\varepsilon\varepsilon_0 SU\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right)\right] = 1\cdot\frac{\text{А}^2\cdot\text{с}^4\cdot\text{м}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}^3\cdot\text{А}\cdot\text{с}^3\cdot\text{м}} = \text{А}\cdot\text{с}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\ \frac{\Phi}{\text{м}}$		$\Delta E = 3\cdot10^3\left(\frac{1}{5\cdot10^{-2}} - \frac{1}{2\cdot10^{-2}}\right) =$
$S = 0{,}01\,\text{м}^2$		$= -9\cdot10^4\ \frac{\text{В}}{\text{м}} = -90\frac{\text{кВ}}{\text{м}};$
$d_1 = 2\,\text{см}$	$2\cdot10^{-2}$ м	$\Delta q = 8{,}85\cdot10^{-12}\cdot10^{-2}\cdot3\cdot10^3\left(\frac{1}{5\cdot10^{-2}} - \frac{1}{2\cdot10^{-2}}\right) =$
$d_2 = 5\,\text{см}$	$5\cdot10^{-2}$ м	$= -7{,}97\cdot10^{-9}\,\text{Кл} = -7{,}97\ \text{нКл}.$
$\varepsilon = 1$		
$U = 3\,\text{кВ}$	$3\cdot10^3$ В	
ΔE – ?		**Відповідь:** $\Delta E = -90\frac{\text{кВ}}{\text{м}};\ \Delta q = -7{,}97$ нКл.
Δq – ?		

Від'ємні значення ΔE і Δq означають, що у випадку, який розглядався, напруженість поля в конденсаторі й заряд конденсатора зменшуються.

Задача 17

Площа обкладки плоского повітряного конденсатора $S = 0{,}01$ м^2, відстань між обкладками $d_1 = 2$ см. Напруга на конденсаторі $U = 3$ кВ. Визначити зміну модуля напруженості E поля конденсатора й заряду q конденсатора, якщо відключити джерело напруги, а потім збільшити відстань між обкладками до $d_2 = 5$ см.

Аналіз

Якщо відключити джерело напруги, а потім розсунути обкладки конденсатора, то заряд на обкладках конденсатора залишиться незмінним.

Отже,

$$q_1 = q_2 = q\,, \tag{1}$$

де q_1 і q_2 – відповідно заряд конденсатора в початковому й кінцевому станах.

Зміна заряду конденсатора

$$\Delta q = q_2 - q_1 = 0\,. \tag{2}$$

Електричне поле в плоскому конденсаторі можна вважати однорідним.

Модуль напруженості E електричного поля в конденсаторі

$$E = \frac{U}{d}\,, \tag{3}$$

де U – напруга на конденсаторі; d – відстань між обкладками конденсатора.

В початковому стані

$$E_1 = \frac{U_1}{d_1}\,, \tag{4}$$

в кінцевому стані

$$E_2 = \frac{U_2}{d_2}\,. \tag{5}$$

Напруга на конденсаторі

$$U = \frac{q}{C}\,, \tag{6}$$

де C – електроємність конденсатора.

Звідси

$$q = CU\,. \tag{7}$$

Електроємність плоского конденсатора (див. формулу (1.75))

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \tag{8}$$

де S – площа обкладки; d – відстань між обкладками; ε – відносна діелектрична проникність речовини між обкладками; ε_0 – електрична стала.

Тоді

$$q = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU}{d} \tag{9}$$

і

$$q = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU_1}{d_1} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU_2}{d_2}\,. \tag{10}$$

Звідси

$$U_2 = \frac{U_1 d_2}{d_1} \tag{11}$$

і

$$E_2 = \frac{U_1 d_2}{d_1 d_2} = \frac{U_1}{d_1} = E_1. \tag{12}$$

Зміна модуля напруженості електричного поля при розсуванні обкладок

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 0\,. \tag{13}$$

Відповідь: $\Delta E = 0; \Delta q = 0\,.$

Задача 18

Визначити електроємність C батареї конденсаторів, яка надана на рисунку 1. Електроємність кожного конденсатора C_0 = 5 мкФ.

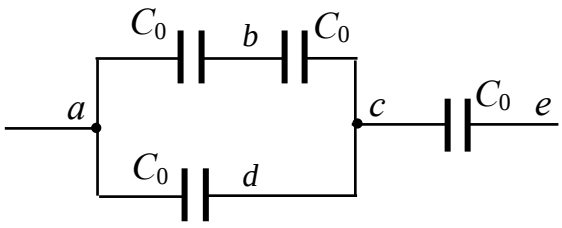


Рисунок 1

Аналіз

Визначимо еквівалентну електроємність C_1 ділянки *abc* (див. рис. 1). Конденсатори з'єднані послідовно. Отже,

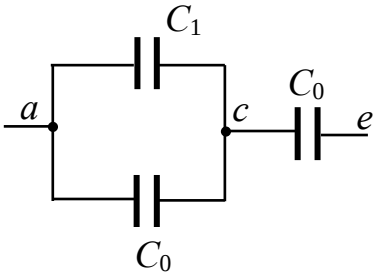


Рисунок 2

$$\frac{1}{C_1}=\frac{1}{C_0}+\frac{1}{C_0}=\frac{C_0+C_0}{C_0C_0}=\frac{2C_0}{C_0C_0}=\frac{2}{C_0}\ , \quad (1)$$

$$C_1=\frac{C_0}{2}. \quad (2)$$

Визначимо еквівалентну електроємність C_2 ділянки *ac* (рисунок 2). Конденсатори з'єднані паралельно. Отже,

$$C_2=C_1+C_0=\frac{C_0}{2}+C_0=\frac{3C_0}{2}. \quad (3)$$

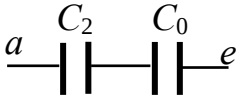


Рисунок 3

Визначимо еквівалентну електроємність C ділянки *ae* (рисунок 3). Конденсатори з'єднані послідовно. Отже,

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_0}=\frac{2}{3C_0}+\frac{1}{C_0}=\frac{2+3}{3C_0}=\frac{5}{3C_0}. \quad (4)$$

Звідси

$$C=\frac{3C_0}{5}. \quad (5)$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$C_0=5$ мкФ	$5\cdot10^{-6}$ Ф	$C=\frac{3\cdot10^{-6}}{5}=0,6\cdot10^{-6}$ Ф $=0,6$ мкФ.
C – ?		**Відповідь:** $C=0,6$ мкФ.

Задача 19

Визначити електроємність батареї конденсаторів, яка надана на рисунку 1. Електроємності конденсаторів $C_1=C_2=C_3=C_4=C_0=1$ пФ.

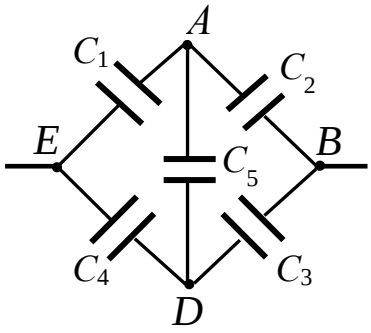


Рисунок 1

Аналіз

Схему (див. рис. 1) можна надати як показано на рисунку 2. За умовою задачі всі конденсатори однакові. Тому, коли до батареї прикладається напруга U_{EB}, потенціали точок A і D однакові й напруга на конденсаторі C_5 $U_5 = 0$. Отже, конденсатор C_5 не буде впливати на електроємність батареї. Внаслідок цього схему можна надати як показано на рисунку 3.

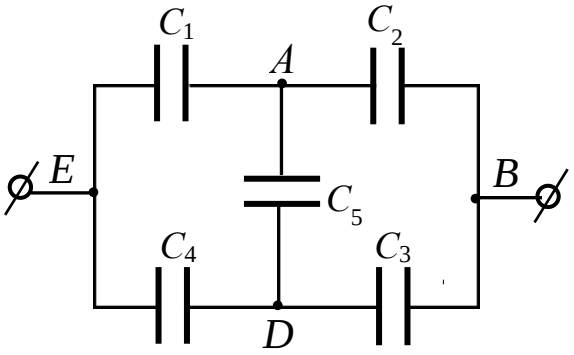


Рисунок 2

Електроємність $C_{1,2}$ ділянки *EAB* схеми визначимо зі співвідношення

$$\frac{1}{C_{1,2}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}, \qquad (1)$$

$$C_{1,2} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \qquad (2)$$

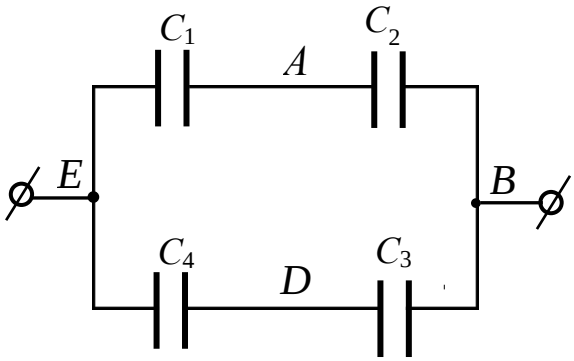


Рисунок 3

Врахувавши, що електроємності конденсаторів однакові, отримуємо

$$C_{1,2} = \frac{C_0 C_0}{C_0 + C_0} = \frac{C_0}{2}, \qquad (3)$$

де C_0 – електроємність одного конденсатора.

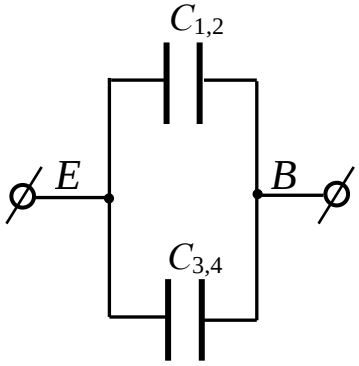


Рисунок 4

Аналогічно для ділянки *EDB* отримуємо вираз для еквівалентної електроємності $C_{3,4}$

$$C_{3,4} = \frac{C_0}{2}. \qquad (4)$$

Отже, схема набуває вигляду як показано на рисунку 4. Маємо паралельне з'єднання конденсаторів $C_{1,2}$ і $C_{3,4}$. Еквівалентна електроємність C

$$C = C_{1,2} + C_{3,4} = \frac{C_0}{2} + \frac{C_0}{2} = C_0. \qquad (5)$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$C_0 = 1\,\text{пФ}$	$1 \cdot 10^{-12}\,\text{Ф}$	$C = C_0 = 1 \cdot 10^{-12}\,\text{Ф} = 1\,\text{пФ}.$
$C - ?$		**Відповідь:** $C = 1\,\text{пФ}.$

1.2.9. ОСЦИЛОГРАФ

Осцилограф — вимірювальний прилад для візуального спостереження або реєстрації функціонального зв'язку між двома або більше величинами, що характеризують будь-який фізичний процес.

Осцилографи переважно використовуються для спостереження зміни сили струму або напруги з часом, а також для вимірювання різних електричних величин: амплітуд сили струму й напруги, частоти, зсуву фаз, глибини модуляції, тривалості й частоти повторювання електричних імпульсів *тощо*.

Розглянемо принцип дії **електронно-променевого осцилографа** (рисунок 1.46, *а*).

Основний елемент осцилографа — **електронно-променева трубка** (див. рис. 1.46, *б*), яка створює й фокусує електронний промінь.

Її компоненти:

1. нагрівний катод — металевий циліндр із ниткою розжарювання всередині; на зовнішню сторону дна циліндра нанесений шар оксиду;

2. керуючий електрод — модулятор;

3. перший анод;

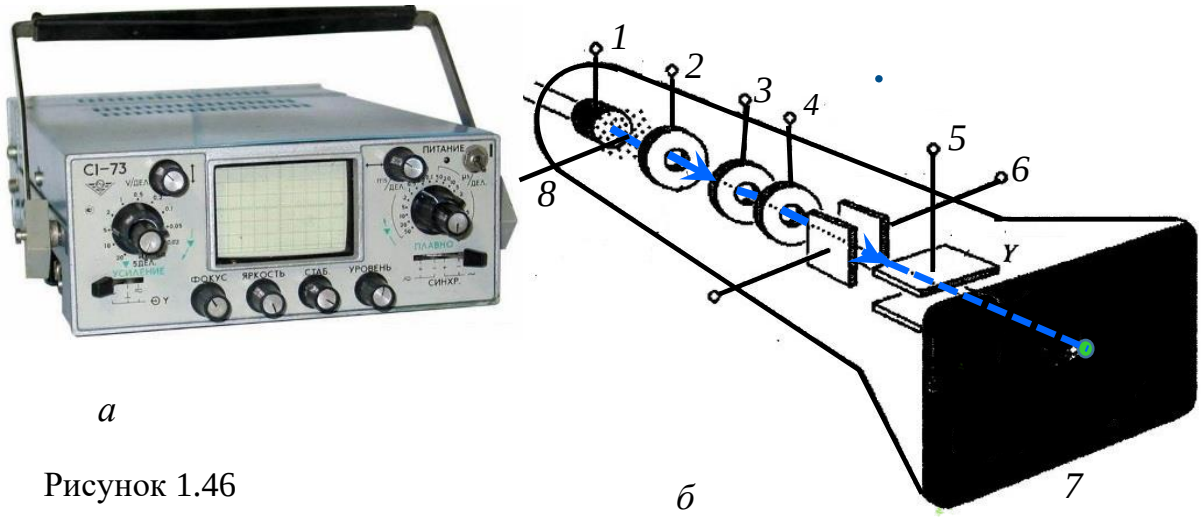
4. другий анод;

5. пластини горизонтального відхилення;

6. пластини вертикального відхилення;

7. екран, покритий люмінофором.

При нагріванні катода 1 до температури $T \approx 900 \div 1000$ К відбувається термоелектронна емісія з окисного шару: *електрони 8* набувають кінетичної енергії, достатньої для подолання сил, що утримують їх в окисі, й вилітають за межі катода. За катодом розташований *керуючий електрод 2 — модулятор* — диск із маленьким отвором у центрі, на який подається негативний (відносно катода) потенціал (зазвичай декілька десятків вольт). Змінюючи різницю потенціалів (напругу) між катодом і модулятором, можна регулювати кількість



а *б*

Рисунок 1.46

електронів у пучку, а отже, *яскравість світіння* плями, що утворюється на люмінесцентному екрані при потраплянні на нього електронів. Далі електрони проходять через простір анодів. Кожний анод є порожнистим циліндром із діафрагмою з маленьким отвором у центрі, яка слугує для обмеження поперечного перетину електронного променя. Аноди розташовані вздовж осі трубки на деякій відстані один від іншого. *Перший анод 3 — фокусуючий*, *другий анод 4 — керуючий*. Обидва аноди мають позитивні потенціали. До першого анода прикладена напруга декілька сотень вольт. Потенціал другого анода в декілька разів перевищує потенціал першого. Пройшовши електричне поле першого анода, потік електронів набуває великої швидкості й фокусується в тонкий електронний промінь. Фокусування електронного променя подібне до фокусування світлового пучка оптичною лінзою, тільки фокусуючою лінзою є сильно неоднорідне електростатичне поле в просторі анодів. Пролітаючи через другий анод, електрони прискорюються до швидкостей декілька тисяч км/с. Далі вони потрапляють у простір горизонтально й вертикально відхилювальних пластин, на які подається електрична напруга. Електрони відхиляються від осі трубки й потрапляють в певну точку екрана. Потрапляючи на люмінофорне покриття екрана, електрони викликають спалах. На екрані з’являється пляма, яка світиться. Зазвичай люмінофор екрана світиться зеленим світлом. *Положення сліду електронів — електронної плями — на екрані* визначається напругами, які подаються на *відхилювальні пластини*: в горизонтальному напрямку відхиляють *X-пластини 6*, у вертикальному напрямку — *Y-пластини 5*.

Розглянемо дію відхилювальних пластин більш детально на прикладі вертикально відхилювальних пластин, розв’язуючи задачу.

Задача 20

В осцилографі електрон, пройшовши прискорювальну різницю потенціалів $U_0 = 100$ В і рухаючись горизонтально, влітає посередині між вертикально відхилювальними пластинами. Лінійний розмір пластини в напрямку руху електрона 10 см, відстань між пластинами 5 см. Визначити: рівняння руху електрона; критичну напругу на пластинах, при якій електрон не виходить за межі пластин (потрапляє на пластину); відхилення електрона вздовж осі $0Y$ у разі, коли напруга на пластинах менша за критичну напругу на 10 В.

Аналіз

Електрон влітає в простір між пластинами, пройшовши прискорювальну напругу U_0 та отримавши швидкість $\vec{v}_0$ (рисунок 1). За *теоремою про зміну кінетичної енергії* за рахунок роботи електричного поля eU_0 відбувається приріст кінетичної енергії електрона

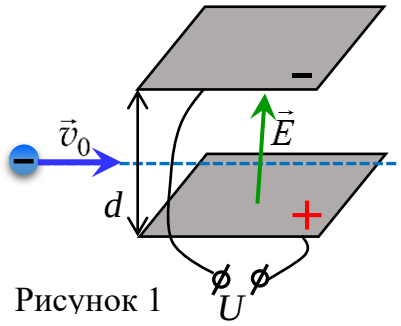


Рисунок 1

$$eU_0 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \qquad (1)$$

де m – маса, e – модуль заряду електрона; v_1, v_2 – відповідно модулі початкової і кінцевої швидкостей електрона; U_0 – прискорювальна напруга.

Нехай початкова швидкість електрона $v_1 = 0$. Отже,

$$eU_0 = \frac{mv_2^2}{2}. \qquad (2)$$

Звідси модуль швидкості v_0, з якою електрон влітає в простір між пластинами,

$$v_0 = v_2 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}. \qquad (3)$$

Пластини мають однаковий за модулем заряд різних знаків. У просторі між пластинами існує електричне поле. Будемо вважати, що електричне поле однорідне, тобто напруженість $\vec{E} = \text{const}$.

Тоді модуль напруженості електричного поля

$$E = \frac{U}{d}, \qquad (4)$$

де U – напруга на пластинах; d – відстань між пластинами.

За умовою задачі пластини відхиляють електрони у вертикальному напрямку, тобто вони розташовані горизонтально. Електрон влітає горизонтально посередині між пластинами, тобто паралельно пластинам.

Задаємо систему координат: вісь $0X$ напрямлена горизонтально, а вісь $0Y$ — вертикально; початок системи координат міститься в точці вльоту електрона (рисунок 2).

На електрон в електричному полі діє електрична сила

$$\vec{F}_{\text{e}} = -e\vec{E}, \tag{5}$$

де e – модуль заряду електрона.

Отже, електрон рухається в напрямку позитивно зарядженої пластини. Обмежимось показом на рисунку 2 половини простору між пластинами: від точки вльоту в простір пластин до позитивно зарядженої пластини.

На електрон діє також сила тяжіння $\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{g}$ (m *– маса електрона;* $\vec{g}$ *– прискорення вільного падіння*: $g \approx 10$ м/с^2), *якою ми знехтуємо, бо* $F_{\text{т}} << F_{\text{e}}$. *Підтвердження цьому надаватимемо наприкінці розв'язку задачі, коли отримаємо значення напруги на пластинах і зможемо оцінити* F_{e}.

Враховуючи (4), модуль сили

$$F_{\text{e}} = eE = \frac{eU}{d}. \tag{6}$$

За другим законом Ньютона сила $\vec{F}_{\text{e}}$ надає електрону прискорення

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{e}}}{m}, \tag{7}$$

де m – маса електрона.

Модуль прискорення напишемо, врахувавши (6),

$$a = \frac{F_{\text{e}}}{m} = \frac{eU}{md}. \tag{8}$$

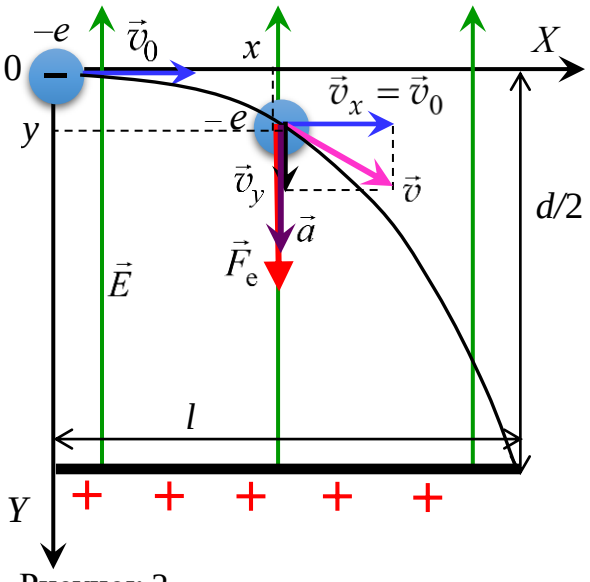


Рисунок 2

Отже, на горизонтальний рівномірний прямолінійний рух

електрона вздовж осі $0X$ зі швидкістю $\vec{v}_x = \vec{v}_0$ накладається вертикальний рівноприскорений прямолінійний рух зі швидкістю $\vec{v}_y$ вздовж осі $0Y$.

Швидкість $\vec{v}_y$ в момент часу t

$$\vec{v}_y = \vec{a}t\,, \tag{9}$$

результівна швидкість

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \tag{10}$$

Модуль результівної швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (at)^2}. \tag{11}$$

Отже, електрон буде рухатись по криволінійній траєкторії до позитивно зарядженої пластини (див. рис. 2).

Визначимо рівняння траєкторії електрона.

Рівняння руху електрона вздовж осі $0X$ (див. рис. 2)

$$x = v_{0x}t = v_0 t\,, \tag{12}$$

де v_0 – модуль швидкості $\vec{v}_0$; v_{0x} – проєкція швидкості $\vec{v}$ на вісь $0X$: $v_x = v_{0x} = v_0$.

Врахувавши (3), отримуємо

$$x = t\sqrt{\frac{2eU_0}{m}}. \tag{13}$$

Рівняння руху електрона вздовж осі $0Y$ (див. рис. 2)

$$y = \frac{a_y t^2}{2} = \frac{at^2}{2}\,, \tag{14}$$

де a_y – проєкція прискорення $\vec{a}$ на вісь $0Y$; a – модуль прискорення.

Врахувавши (8), отримуємо

$$y = \frac{eUt^2}{2md}\,. \tag{15}$$

Виразимо з (13) час t

$$t = x\sqrt{\frac{m}{2eU_0}}\,. \tag{16}$$

Підставивши (16) в (15), отримуємо **рівняння траєкторії електрона**

$$y = \frac{eUmx^2}{2md \cdot 2eU_0} = \frac{Ux^2}{4U_0 d},$$

$$y = \frac{Ux^2}{4U_0 d}. \qquad (17)$$

Отже, **траєкторією електрона є парабола.**

Критичну напругу на пластинах, при якій електрон потрапляє на пластину, визначимо з наступних міркувань: за один і той же час $t_р$ електрон пройде в горизонтальному напрямку відстань l (довжина пластини) й у вертикальному напрямку відстань $d/2$ (d – відстань між пластинами).

З (13)

$$l = t_р \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}, \qquad (18)$$

з (15)

$$\frac{d}{2} = \frac{eU_{кр} t_р^2}{2md}. \qquad (19)$$

Виразимо $t_р$ із (18)

$$t_р = l \sqrt{\frac{m}{2eU_0}}, \qquad (20)$$

та з (19)

$$t_р = d \sqrt{\frac{m}{eU_{кр}}}. \qquad (21)$$

Прирівняємо праві частини (20) і (21)

$$l \sqrt{\frac{m}{2eU_0}} = d \sqrt{\frac{m}{eU_{кр}}}, \qquad (22)$$

звідси **критична напруга на пластинах**

$$U_{кр} = 2U_0 \left(\frac{d}{l} \right)^2. \qquad (23)$$

Якщо напруга на пластинах більша за $U_{кр}$, то електрон не вилетить за межі пластин й осяде на позитивно зарядженій пластині.

Коли на горизонтально й вертикально відхилювальних пластинах відсутня напруга, тоді електронний промінь потрапляє в центр екрана.

Нехай напруга U_1 на пластинах менша за критичну на ΔU, тобто

$$U_1 = U_{\text{кр}} - \Delta U\ , \tag{24}$$

тоді **відстань d_1, на яку відхилиться електрон від центру екрана** на виході за межі пластин, визначимо за формулою (17)

$$d_1 = y = \frac{U_1 x^2}{4U_0 d} = \frac{\left(U_{\text{кр}} - \Delta U\right) l^2}{4U_0 d}. \tag{25}$$

Перевіримо формули (23) й (25):

(23) $\left[U_{\text{кр}}\right] = \text{В};\ \left[U_0\right] = \text{В};\ \left[d\right] = \left[l\right] = \text{м};\ \left[U_0\left(\frac{d}{l}\right)^2\right] = \text{В}\left(\frac{\text{м}}{\text{м}}\right)^2 = \text{В};$

(25) $\left[d_1\right] = \text{м};\ \left[U\right] = B;\ \left[l\right] = \left[d\right] = \text{м};\ \left[\frac{\left(U - \Delta U\right) l^2}{U_0 d}\right] = \frac{\text{В}\cdot\text{м}^2}{\text{В}\cdot\text{м}} = \text{м}.$

1. *Зазначимо, що рух електрона, який влітає в однорідне електричне поле перпендикулярно до силових ліній, формально подібний до руху тіла, кинутого горизонтально.*

2. *Порівняймо модулі сили тяжіння й кулонівської сили, що діють на електрон: сила тяжіння:* $\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{g}$ ($m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг; $g \approx 10$ м/с^2), $F_{\text{т}} = 9{,}1\cdot10^{-31}\cdot10 \simeq 10^{-29}$ Н. *Для розрахунку електричної сили візьмемо* U = 100 В: $F_{\text{е}} = \frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot10^2}{2\cdot10^{-2}} = 0{,}8\cdot10^{-15}$ Н=$8\cdot10^{-16}$ Н. *Як бачимо,* $F_{\text{т}} << F_{\text{е}}$.

Дано:	**СІ**
$U_0 = 100$ В	10^2 В
$l = 10$ см	10^{-1} м
$d = 5$ см	$5\cdot10^{-2}$ м
$\Delta U = 10$ В	
$y = f(x)$ – ?	
$U_{\text{кр}}$ – ?	

Розв'язок:

$$U_{\text{кр}} = 2\cdot10^2\cdot\left(\frac{5\cdot10^{-2}}{10^{-1}}\right)^2 = 50\ \text{В};$$

$$d_1 = \frac{\left(50-10\right)\cdot\left(10^{-1}\right)^2}{4\cdot10^2\cdot5\cdot10^{-2}} = 2\cdot10^{-2}\ \text{м} = 2\ \text{см}.$$

Відповідь: 1. $y = \frac{Ux^2}{4U_0 d}$; 2. $U_{\text{кр}} = 50$ В; 3. $d_1 = 2$ см.

1.2.10. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

В чому полягає процес електризації? Які види електризації ви знаєте?

Легка незаряджена кулька з металевої фольги підвішена на тонкій шовковій нитці. Що буде відбуватися з кулькою, якщо до неї піднести позитивно заряджений стрижень (без дотику)?

Надайте визначення точкового заряду.

Сформулюйте закон Кулона для взаємодії електричних зарядів у вакуумі й у діелектричному середовищі.

Як відбувається взаємодія заряджених тіл на відстані?

Надайте визначення напруженості електричного поля.

Надайте визначення однорідного електростатичного поля та наведіть рисунок, на якому зображені силові лінії однорідного електростатичного поля.

Надайте визначення потоку напруженості електростатичного поля.

Сформулюйте теорему Гаусса для електростатичного поля у вакуумі.

Коли однорідно заряджена пластина може вважатись нескінченною?

Яка фізична величина є силовою характеристикою електричного поля?

Яка фізична величина є енергетичною характеристикою електричного поля?

Чому електростатичне поле є потенціальним?

Яке фізичне явище використовується в електростатичному захисті?

В чому полягає явище поляризації діелектрика?

В чому полягає відмінність між полярними й неполярними діелектриками?

Надайте визначення електроємності провідника.

Надайте визначення конденсатора.

Яким є електричне поле зарядженого плоского конденсатора?

Наведіть формули для визначення еквівалентної електроємності батареї конденсаторів при їхньому послідовному й паралельному з’єднанні.

1.2.11. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Два точкових заряди $q_1 = 10$ нКл і $q_2 = -8$ нКл розташовані на відстані $r = 30$ см один від іншого. Визначити силу, яка діє на заряд $q = 2$ нКл, що знаходиться посередині між зарядами q_1 і q_2. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Відповідь: $F = 14{,}4$ мкН.

2. Два точкових заряди $q_1 = -5$ нКл і $q_2 = -10$ нКл розташовані на відстані $r = 10$ см один від іншого. Визначити модуль напруженості E та потенціал φ поля в точці, яка знаходиться між зарядами q_1 і q_2 на відстані 2 см від першого заряду.

Відповідь: $E = 98$ кВ/м, $\varphi = -3{,}375$ кВ.

3. Тонка металева нитка має позитивний рівномірно розподілений по довжині заряд. Поблизу середньої частини нитки на відстані $r = 0{,}5$ см, значно меншій ніж її довжина, знаходиться точковий заряд $q = 0{,}5$ нКл. На заряд діє сила $F = 5$ мкН. Визначити заряд, який розподілений на 1 см нитки.

Відповідь: $q_l = 27{,}8$ пКл.

4. До нескінченної площини з поверхневою густиною заряду $\sigma = 20$ мкКл/м^2 прикріплена однойменно заряджена кулька масою 1 г і зарядом $q = 1$ нКл (рисунок 1). Визначити кут, що утворює з площиною нитка, на якій висить кулька. Прийняти $g = 10$ м/с^2.

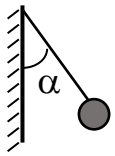


Рисунок 1

Відповідь: $\alpha = 6^o$.

5. Мідна куля радіусом $R = 0{,}5$ см знаходиться в маслі. Густина масла $\rho_1 = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Визначити заряд кулі, якщо в однорідному електростатичному полі напруженістю $E = 3{,}6$ МВ/м вона перебуває в стані спокою. Густина міді $\rho_2 = 8{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3. Прийняти $g = 10$ м/с^2.

Відповідь: $q = 11$ нКл.

6. Точковий заряд $q = 1$ мкКл розташований поблизу середини великої позитивно рівномірно зарядженої площини. Визначити поверхневу густину σ заряду пластини, якщо на заряд діє сила $F = 60$ мН.

Відповідь: $\sigma = 1{,}06$ мкКл/м^2 .

7. Металева сфера радіусом $R = 10$ см має заряд $q = 1$ нКл. Визначити: напруженість електричного поля на відстані $r_1 = 8$ см від центру сфери; на відстані $r_2 = 15$ см від центру сфери.

Відповідь: $E_1 = 0$; $E_2 = 400$ В/м.

8. Визначити різницю потенціалів між точками електростатичного поля, які розташовані на відстані $r_1 = 0{,}4$ м і $r_2 = 1{,}4$ м від точкового заряду $q = 10^{-9}$ Кл. Заряд знаходиться в повітрі.

Відповідь: $\varphi_1 - \varphi_2 = 16{,}1\,\text{В}$.

9. Два точкових заряди q_1 = 10 нКл і q_2 = – 8 нКл розташовані на відстані r = 20 см один від іншого. Заряд q = –2 нКл знаходиться на відстані r_1 = 15 см від першого заряду й на відстані r_2 = 15 см від другого заряду. Яку роботу треба виконати електричному полю, щоб перемістити заряд q в точку посередині між зарядами q_1 і q_2?

Відповідь: A = 0,11 мкДж.

10. Плоский конденсатор, відстань між пластинами якого d = 1 см, заряджений до напруги U = 300 В. Визначити об'ємну густину енергії поля конденсатора w_e, якщо простір між пластинами заповнений слюдою (ε = 7).

Відповідь: w_e = 27,9 мДж/м^3.

11. Напруга на повітряному плоскому конденсаторі U = 500 В. Площа кожної обкладки S = 100 см^2, заряд конденсатора q = 20 нКл. Визначити відстань між обкладками.

Відповідь: d = 2,2 мм.

12. Визначити електроємність батареї конденсаторів, що надана на рисунку 2, якщо електроємність кожного конденсатора C_0 = 6 мкФ.

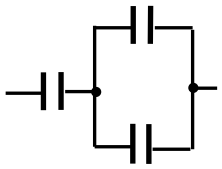


Рисунок 2

Відповідь: C = 4 мкФ.

13. Чотири однакових плоских конденсатори з'єднані послідовно. Електроємність такої батареї C = 100 пФ. Площа кожної обкладки S = 100 см^2, простір між обкладками заповнений слюдою. Визначити товщину шару слюди. Відносна діелектрична проникність слюди ε = 7.

Відповідь: d = 1,55 мм.

14. Різниця потенціалів обкладок плоского повітряного конденсатора U = 500 В. Площа кожної обкладки S = 100 см^2, заряд конденсатора q = 20нКл. Визначити енергію, яка накопичена в конденсаторі.

Відповідь: 5 мкДж.

15. Два конденсатори електроємностями C_1 = 3 мкФ й C_2 = 6 мкФ з'єднані паралельно та підключені до джерела живлення напругою U = 120 В. Визначити заряд кожного конденсатора й напругу на кожному конденсаторі.

Відповідь: q_1 = 360 мкКл; q_2 = 720 мкКл; $U_1 = U_2$ = 120 В.

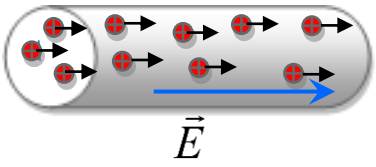
РОЗДІЛ 2. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

2.1. ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ І УМОВИ ЙОГО ІСНУВАННЯ. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЛЕКТРИЧНОГО СТРУМУ: СИЛА СТРУМУ, ГУСТИНА СТРУМУ. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

Електричним струмом називається напрямлений рух електрично заряджених частинок (рисунок 2.1).

Речовини, що проводять електричний струм, називаються **провідниками** (див. п. 1.2.1).

За напрямок електричного струму береться напрямок руху позитивно заряджених частинок (див. рис. 2.1).



● – позитивно заряджена частинка; $\vec{E}$ – напруженість електричного поля

Рисунок 2.1

УМОВИ ІСНУВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО СТРУМУ

1. Наявність в речовині заряджених частинок, які можуть вільно рухатись в межах її об'єму. Такі частинки називаються *носіями заряду*.

2. Наявність в речовині електричного поля.

Середня швидкість $\vec{u}$ напрямленого руху носіїв заряду називається *дрейфовою швидкістю носіїв заряду*.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЛЕКТРИЧНОГО СТРУМУ

Силою струму I (читаємо як латинську літеру **«і»**) називається фізична величина, яка визначається співвідношенням

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}}, \qquad (2.1)$$

де dq – заряд, який переноситься крізь поверхню, що розглядається (наприклад, поперечний перетин провідника), за нескінченно малий інтервал часу dt.

В СІ $[I]$ = А (ампер). Розмірність сили струму $\dim I = I$.

Ампер *— одна з семи основних одиниць* СІ.

Визначення ампера (А). *Ампер* визначається шляхом прийняття числового значення елементарного електричного заряду ***e*** рівним 1,602176634·10^{-19} Кл, що відповідає А·с (ампер×секунду), де **с** (секунда) визначається через частоту **ν** випромінювання, яка відповідає переходу між двома надтонкими рівнями основного стану атома цезію Cs-133.

Це формулювання було прийняте на XXVI *Генеральній конференції мір і ваг* 16.11.2019.

Визначення секунди (с): *секунда* — інтервал часу, який дорівнює 9192631770 періодам випромінювання, що відповідає переходу між двома надтонкими рівнями основного стану атома цезію Cs-133. Це визначення стосується атомів цезію, що знаходяться в стані спокою при температурі 0 К.

Електричний струм може бути неоднорідно розподіленим по поверхні. Для більш детальної характеристики струму вводиться фізична величина — густина електричного струму.

Густиною електричного струму $\vec{j}$ (читаємо як латинську літеру «**йот**») називається векторна фізична величина, модуль якої визначається співвідношенням

$$j = \frac{dI}{dS_\perp} = \frac{dq}{dt dS_\perp}, \qquad (2.2)$$

де dI – сила струму крізь елементарну площинку (площинку нескінченно малої площі $dS_\perp$), що розташована в даній точці провідника перпендикулярно до напрямку руху носіїв заряду; dq – заряд, який переноситься за час dt крізь площинку $dS_\perp$.

В СІ $[j] = \frac{\text{А}}{\text{м}^2}$ (ампер/метр^2). Розмірність густини струму $\dim j = IL^{-2}$.

Напрямок вектора $\vec{j}$ збігається з напрямком швидкості $\vec{u}$ впорядкованого руху позитивних носіїв заряду.

Поле вектора $\vec{j}$ можна надати графічно за допомогою ліній струму (ліній вектора $\vec{j}$), які проводять аналогічно лініям напруженості $\vec{E}$ електричного поля.

Визначимо зв’язок між густиною струму й мікроскопічними характеристиками струму: дрейфовою швидкістю $\vec{u}$ носіїв заряду, концентрацією n частинок й електричним зарядом q частинки.

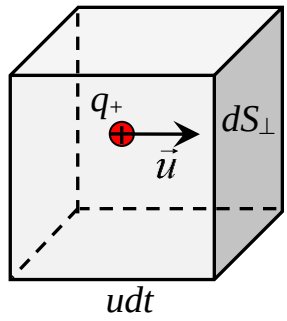


Рисунок 2.2

Нехай провідник містить однакові позитивні носії заряду q_+. Виділимо всередині провідника елементарну прямокутну площинку $dS_\perp$, яка перпендикулярна до вектора $\vec{u}$ (рисунок 2.2.). Кількість частинок, які перетнули площинку $dS_\perp$ за нескінченно малий інтервал часу dt, дорівнює кількості частинок, що міститься всередині прямокутного паралелепіпеда з основою $dS_\perp$ і ребром udt, тобто $ndS_\perp udt$. Вони перенесуть заряд $dq = q_+ ndS_\perp udt$.

Отже,

$$j = \frac{q_+ ndS_\perp udt}{dS_\perp dt} = q_+ nu, \tag{2.3}$$

де q_+ – заряд однієї частинки.

У векторній формі

$$\vec{j} = q_+ n\vec{u}, \tag{2.4}$$

де $\vec{u}$ – дрейфова швидкість, n – концентрація позитивно заряджених частинок. Якщо носіями заряду є негативно заряджені частинки, тоді

$$\vec{j} = -|q_-|n\vec{u}, \tag{2.5}$$

де $\vec{u}$ – дрейфова швидкість негативно заряджених частинок; $|q_-|$ – модуль заряду частинки. Знак «–» означає, що напрямок струму протилежний напрямку дрейфової швидкості негативно заряджених частинок.

Якщо носіями заряду є позитивно й негативно заряджені частинки, то

$$\vec{j} = q_+ n_+ \vec{u}_+ - |q_-| n_- \vec{u}_-, \tag{2.6}$$

або

$$\vec{j} = q_+ n_+ \vec{u}_+ + q_- n_- \vec{u}_-, \tag{2.7}$$

де знак «+» стосується позитивних зарядів, знак «–» – негативних зарядів; $|q_-|$ – модуль заряду q_-; q_- – алгебраїчна величина заряду.

В металах носіями заряду є електрони — негативно заряджені частинки, тому

$$\vec{j} = -|e| n\vec{u} = en\vec{u}, \qquad (2.8)$$

де e – заряд електрона: $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Якщо вектор густини струму відомий в кожній точці поверхні S, що розглядається, тоді можна визначити силу струму крізь цю поверхню як потік вектора $\vec{j}$

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \qquad (2.9)$$

Електричний струм називається постійним, якщо $\vec{j}$ = const і, отже, I = const. Тоді

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \text{const}, \qquad (2.10)$$

де Δq – заряд, який переноситься крізь поперечний перетин провідника за інтервал часу Δt.

Отже, в цьому випадку за будь-які однакові інтервали часу Δt крізь поперечний перетин провідника переноситься однаковий заряд Δq.

2.2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Визначити дрейфову швидкість u електронів у мідному провіднику при густині постійного струму $j = 11$ А/мм^2, якщо вважати, що на кожний атом міді припадає один вільний електрон. Порівняти дрейфову швидкість електронів з їхньою середньоквадратичною швидкістю при температурі $T = 300$ К. Відносна атомна маса міді $a_r \approx 64$. Густина міді $\rho = 8{,}9$ г/см^3.

Аналіз

В металевих провідниках носіями заряду є електрони, тому

$$j = |e| nu, \qquad (1)$$

де $|e|$ – модуль заряду електрона; n – концентрація електронів; u – модуль дрейфової швидкості електронів.

Звідси

$$u = \frac{j}{|e|n}. \tag{2}$$

За умовою задачі на кожний атом міді припадає один вільний електрон, тому концентрація електронів дорівнює концентрації атомів міді.

Густина ρ речовини зв'язана з концентрацією n атомів співвідношенням

$$\rho = m_0 n = \frac{\mu n}{N_A}, \tag{3}$$

де m_0 – маса атома; μ – молярна маса речовини; N_A – число Авогадро.

Молярна маса речовини $\mu = a_r \cdot 10^{-3}$ кг/моль, де a_r – відносна атомна маса.

Отже,

$$\rho = \frac{n a_r \cdot 10^{-3}}{N_A}. \tag{4}$$

Звідси

$$n = \frac{\rho N_A}{a_r \cdot 10^{-3}}. \tag{5}$$

Тоді

$$u = \frac{j a_r \cdot 10^{-3}}{|e|\rho N_A}. \tag{6}$$

Середньоквадратична швидкість електронів при температурі T

$$v_{\text{скв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_e}} = \sqrt{\frac{3RT}{a_{re} \cdot 10^{-3}}}, \tag{7}$$

де μ_e – молярна маса електронів; a_{re} – відносна маса електрона; R – універсальна газова стала.

Перевіримо формулу (6):

$$[u] = \frac{\text{м}}{\text{с}};\ [j] = \frac{\text{А}}{\text{м}^2};\ \left[\mu = a_r \cdot 10^{-3}\right] = \frac{\text{кг}}{\text{моль}};\ [\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};\ [N_A] = \text{моль}^{-1};\ [e] = \text{Кл} = \text{А} \cdot \text{с};$$

$$\left[\frac{j a_r}{e \rho N_A}\right] = \frac{\text{А} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}}{\text{м}^2 \cdot \text{моль} \cdot \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$j = 11\ \text{А/мм}^2$	$11\cdot10^6\ \text{А/м}^2$	$u = \dfrac{11\cdot10^6\cdot64\cdot10^{-3}}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot8{,}9\cdot10^3\cdot6{,}02\cdot10^{23}} =$
$a_r \approx 64$		$= 8{,}2\cdot10^{-4}\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}};$
$\rho = 8{,}9\ \text{г/см}^3$	$8{,}9\cdot10^3\ \text{кг/м}^3$	$v_{\text{скв}} = \sqrt{\dfrac{3\cdot8{,}31\cdot3\cdot10^2}{5{,}49\cdot10^{-4}\cdot10^{-3}}} = 1{,}2\cdot10^5\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}.$
$N_A = 6{,}02\cdot10^{23}\ \text{моль}^{-1}$		**Відповідь:**
$e = -1{,}6\cdot10^{-19}\ \text{Кл}$		$u = 8{,}2\cdot10^{-4}\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}};\ v_{\text{скв}} = 1{,}2\cdot10^5\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}};$
$R = 8{,}31\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$		$v_{\text{скв}} \gg u.$
$a_{re} = 0.000549$		
$T = 300\ \text{К}$		
$u - ?$		
$v_{\text{скв}} - ?$		

2.3. СТОРОННІ СИЛИ. ЕЛЕКТРОРУШІЙНА СИЛА

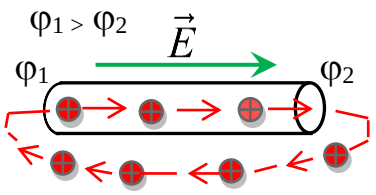


Рисунок 2.3

Щоб по провіднику проходив електричний струм, у ньому має бути створене електричне поле. Отже, на кінцях провідника повинна існувати різниця потенціалів. Для підтримання $I = \text{const}$ необхідно, щоб різниця потенціалів була постійною в часі: $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$ (рисунок 2.3). Тому в замкненому електричному колі крім ділянок, де відбувається рух носіїв позитивного заряду в напрямку зменшення потенціалу (див. пункт 1.1.11), повинні бути ділянки, в яких перенесення носіїв позитивного заряду відбувається в напрямку зростання потенціалу, тобто проти сил електростатичного поля — кулонівських сил (див. рис. 2.3).

Переміщення носіїв заряду в цих ділянках можливе тільки під дією **сил неелектростатичного походження, які називаються сторонніми силами.** Отже, щоб підтримувати $I = \text{const}$ необхідні стаціонарні сторонні сили, які діють або в ділянках кола, або в усьому колі.

Фізична природа сторонніх сил може бути різною. Наприклад, сили, що виникають: при взаємодії двох металів в електроліті, (гальванічний елемент, акумулятор); при дії світла на неоднорідну напівпровідникову структуру

(напівпровідниковий фотоелемент); при з'єднанні на одному кінці двох провідників із різних металів (термоелемент) *тощо*.

Пристрій, який слугує для підтримання в електричному колі постійного струму називається **ДЖЕРЕЛОМ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ.**

На електричних схемах джерело постійного струму позначається як показано на рисунку 2.4, де $\mathscr{E}$ – електрорушійна сила (Е.Р.С.), r – внутрішній опір джерела; «+» і «–» – знаки потенціалів полюсів джерела.

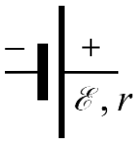


Рисунок 2.4

Ділянка кола, яка містить джерело струму, називається **неоднорідною.**

Поле, в якому на ***позитивний заряд*** q діють сторонні сили $\vec{F}_{\text{ст}}$, характеризується напруженістю

$$\vec{E}^* = \frac{\vec{F}_{\text{ст}}}{q}. \tag{2.11}$$

Елементарна робота $\delta A_{\text{ст}}$ сторонніх сил $\vec{F}_{\text{ст}}$ — робота на елементарному (нескінченно малому) переміщенні $d\vec{l}$

$$\delta A_{\text{ст}} = \vec{F}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l} = q\vec{E}^* \cdot d\vec{l}. \tag{2.12}$$

Робота $A_{12\text{ст}}$ сторонніх сил при переміщенні заряду q від негативного полюса *1* джерела до позитивного полюса *2* джерела

$$A_{12\text{ст}} = q\int_1^2 \vec{E}^* \cdot d\vec{l}. \tag{2.13}$$

Відношення роботи $A_{12\text{ст}}$ сторонніх сил при переміщенні заряду q до величини цього заряду називається **електрорушійною силою (Е.Р.С.)** $\mathscr{E}$ джерела постійного струму

$$\boxed{\mathscr{E} = \frac{A_{12\text{ст}}}{q} = \int_1^2 \vec{E}^* \cdot d\vec{l}}. \tag{2.14}$$

В СІ $[\mathscr{E}] = \text{В}$ (вольт). Розмірність Е.Р.С. збігається з розмірністю електричного потенціалу.

Нехай на ділянці кола з точки *1* в точку *2* переміщується ***позитивний заряд q*** під дією кулонівських і сторонніх сил (рисунок 2.5). Ці сили виконують роботу

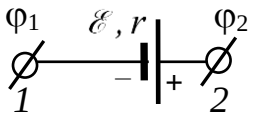


Рисунок 2.5

$$A_{12} = A_{12\text{ст}} + A_{12\text{ел}}, \qquad (2.15)$$

де $A_{12\text{ст}} = q\mathscr{E}$ – робота сторонніх сил; $A_{12\text{ел}} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ – робота електричних сил.

Електричною напругою U_{12} на ділянці електричного кола між точками *1* і *2* (див. рис. 2.5) називається фізична величина, яка визначається співвідношенням

$$\boxed{U_{12} = \frac{A_{12}}{q} = \varphi_1 - \varphi_1 \pm \mathscr{E}}. \qquad (2.16)$$

Якщо напрямок перенесення носіїв позитивних зарядів у джерелі постійного струму (напрямок від полюса «–» джерела до полюса «+» джерела) збігається з напрямком електричного струму в ділянці електричного кола, то Е.Р.С. береться зі знаком «+», якщо не збігається, то зі знаком «–».

В СІ $[U] = \text{В}$ (вольт).

Примітка: В деяких підручниках використовуються спрощені позначення $A_{\text{ст}}$, $A_{\text{ел}}$, U.

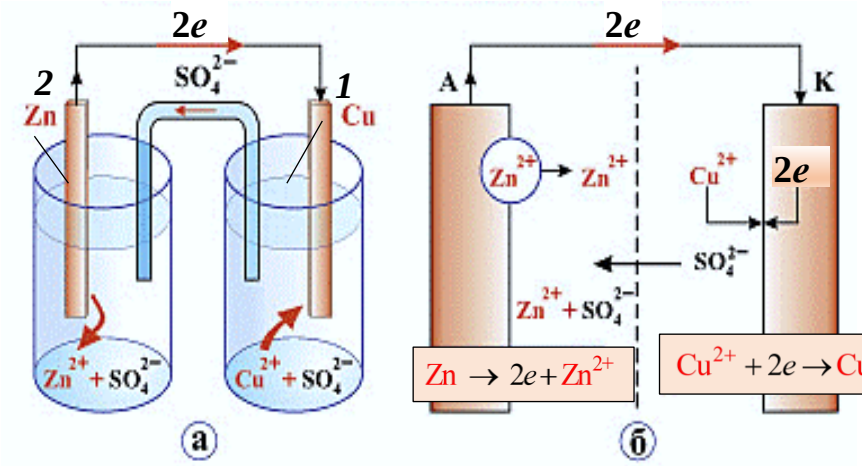
2.4. ГАЛЬВАНІЧНИЙ ЕЛЕМЕНТ. АВТОМОБІЛЬНИЙ АКУМУЛЯТОР

AK-MANN
ALKALINE
AK-MANN
AK-MANN
AK-MANN

Гальванічні елементи, які використовуються сьогодні, називаються **батарейками** (рисунок 2.6). Розглянемо принцип дії простого **гальванічного мідно-цинкового елемента.**

Елемент (рисунок 2.7) складається з посудини з водним розчином сірчаної кислоти (H_2SO_4), в який занурені дві пластини: цинкова й мідна. Внаслідок хімічної реакції цинк отримує негативний заряд, а мідь — позитивний. Елемент має два виводи — **полюси**: позитивний (катод) і негативний (анод). На аноді відбувається реакція окислення, на катоді — відновлення.

Примітка: Така відповідність між назвою й полярністю електродів використовується тільки для гальванічних елементів: анод — електрод, з якого виходять електрони, катод — електрод, до якого надходять електрони.



$CuSO_4 + Zn \rightarrow ZnSO_4 + Cu$ | Анод $Zn \rightarrow 2e + Zn^{2+}$ | Катод $Cu^{2+} + 2e \rightarrow Cu$

1 – мідний електрод (катод); *2* – цинковий електрод (анод)

Рисунок 2.7

При розчиненні сірчаної кислоти у воді відбувається електролітична дисоціація: частка молекул кислоти розпадається на іони H_2^{2+} і SO_4^{2-}. Цинкова й мідна пластина розчинятимуться в розчині сірчаної кислоти. Цинк здатен віддавати свої електрони, тому він залишає два електрони на пластині й переходить у розчин як позитивний іон Zn^{2+}: $Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e$.

Між цинковою пластиною й розчином виникає певна різниця потенціалів, яка припиняє подальше розчинення цинкової пластини.

Здатність міді до розчинення менша ніж здатність цинку, тому потенціал мідної пластини буде відрізнятися від потенціалу цинкової пластини. Отже, між цинковою й мідною пластинами виникає різниця потенціалів. Електрорушійна сила — Е.Р.С. — мідно-цинкового елемента дорівнює 1,1 В.

При замиканні полюсів елемента металевим провідником електрони з цинкової пластини переходитимуть по ньому до мідної пластини. На цьому електроді відбувається відновлення катіонів міді з розчину в атоми міді $\left(Cu^{2+} + 2e \rightarrow Cu\right)$ та їхнє осідання на електроді. Внаслідок втрати електронів різниця потенціалів між цинковою пластиною та розчином зменшується й нова порція іонів цинку переходить з пластини в розчин; одночасно сама пластина знову збагачується на електрони. Позитивні іони цинку Zn^{2+}, перейшовши в розчин, з'єднуються з негативними іонами кислотного залишку SO_4^{2-} й утворюють молекулу цинкового купоросу $ZnSO_4$. Позитивний іон водню H_2^{2+}, підходячи до мідної пластини, забирає в неї електрони, утворює молекулу H_2 й виділяється у вигляді бульбашок, які вкривають мідну пластину. Внаслідок цього процесу цинкова пластина, розчиняючись у кислоті, поповнюється електронами, а мідна пластина, віддаючи електрони, зберігає позитивний заряд і вкривається бульбашками водню. В зовнішній частині кола електрони рухаються від цинкової пластини до мідної, всередині електроліту негативні іони рухаються від міді до цинку, а позитивні іони — від цинку до міді. Сила струму в колі швидко зменшується. Це пояснюється тим, що мідна пластина сумісно з воднем, який вкриває цю пластину, утворює гальванічну пару — своєрідний окремий елемент, Е.Р.С. якого напрямлена проти Е.Р.С. самого елемента (має зворотну полярність). Це явище має назву поляризації. Внаслідок сильної поляризації мідно-цинковий елемент не знайшов використання на практиці.

Початкова різниця потенціалів між електродами (коли електричне коло розімкнуте) залежить від двох факторів: від кислотності середовища та від різниці електрохімічних потенціалів металів, із яких виготовлені електроди. Для позитивного електрода доцільно брати метал, стандартний електрохімічний потенціал якого позитивний відносно гідрогену (наприклад, електрохімічний потенціал міді (Cu) дорівнює +0,34 В). Для негативного електрода потрібно брати метал, стандартний електрохімічний потенціал якого негативний відносно гідрогену (наприклад, електрохімічний потенціал цинку (Zn) дорівнює − 0,76 В). Маємо різницю потенціалів 1,1 В. В таблиці 2.1 наведені електрохімічні потенціали деяких металів і хімічні реакції, що відбуваються на електродах.

Таблиця 2.1 – Електрохімічні потенціали E_0 металів та реакції, що відбуваються на електродах

Електрод	**Реакція на електроді**	E_0, В
Li^+/Li	$Li^+ + e = Li$	−3,05
K^+/K	$K^+ + e = K$	−2,93
Ba^{2+}/Ba	$Ba^{2+} + 2e = Ba$	−2,90
Ca^{2+}/Ca	$Ca^{2+} + 2e = Ca$	−2,87
Na^+/Na	$Na^+ + e = Na$	−2,71
Mg^{2+}/Mg	$Mg^{2+} + 2e = Mg$	−2,36
Al^{3+}/Al	$Al^{3+} + 3e = Al$	−1,66
Mn^{2+}/Mn	$Mn^{2+} + 2e = Mn$	−1,18
Zn^{2+}/Zn	$Zn^{2+} + 2e = Zn$	−0,76
Fe^{2+}/Fe	$Fe^{2+} + 2e = Fe$	−0,44
Cd^{2+}/Cd	$Cd^{2+} + 2e = Cd$	−0,40
Pb^{2+}/Pb	$Pb^{2+} + 2e = Pb$	−0,13
W^{3+}/W	$W^{3+} + 3e = W$	−0,05
$2H^+/H_2$	$2H^+ + 2e = H_2$	0
Ge^{2+}/Ge	$Ge^{2+} + 2e = Ge$	+0,01
Sb^{3+}/Sb	$Sb^{3+} + 3e = Sb$	+0,20
Bi^{3+}/Bi	$Bi^{3+} + 3e = Bi$	+0,23
Cu^{2+}/Cu	$Cu^{2+} + 2e = Cu$	+0,34
Cu^+/Cu	$Cu^+ + e = Cu$	+0,52
Ag^+/Ag	$Ag^+ + e = Ag$	+0,80
Hg^{2+}/Hg	$Hg^{2+} + 2e = Hg$	+0,85
Au^+/Au	$Au^+ + e = Au$	+1,70

ЕЛЕКТРИКА З ЛИМОНА

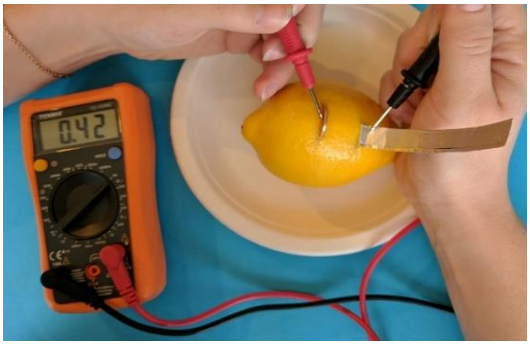


Рисунок 2.8 [https://svitdovkola.org/3/media3?ref=ik31]

Сік лимона (а також картоплини, яблука, апельсина *тощо*) є природним електролітом, тобто містить кислоту й розчинені в ній солі. Отже, ми можемо створити гальванічний елемент, використовуючи лимон. Для цього треба встромити в лимон оцинкований гвіздок і мідний дріт (рисунок 2.8). Процеси, які відбуватимуться в такій системі, аналогічні процесам, що відбуваються в мідно-цинковому гальванічному елементі, який розглянули раніше.

АВТОМОБІЛЬНИЙ АКУМУЛЯТОР

Автомобільний акумулятор забезпечує електричним струмом усі споживачі доки двигун не працює або працює на невеликих обертах, а також є резервним джерелом живлення.

Як і гальванічний елемент автомобільний акумулятор є хімічним джерелом постійного струму, але, на відміну від елемента, після розряджання він може заряджатися знову, тобто його робота має циклічний характер.

На легкових автомобілях переважно використовуються свинцево-кислотні акумулятори. Розглянемо будову типового акумулятора, схематичне зображення якого надано на рисунку 2.9. В корпусі батареї знаходиться шість елементів, кожен з яких створює напругу 2,12 В. Елемент містить 16 свинцевих пластин, полярність яких чергується. Однойменно заряджені пластини з'єднані послідовно й утворюють відповідний електрод — позитивний чи негативний. Кожний електрод підключається до відповідної клеми акумулятора. Між пластинами міститься ізоляційний матеріал для запобігання короткому замиканню.

Принцип дії акумулятора базується на створенні різниці потенціалів між двома пластинами, зануреними в електроліт. Розглянемо процеси, що відбуваються при розряджанні й заряджанні акумулятора.

В електроліт — 35 % розчин сірчаної кислоти (H_2SO_4) в дистильованій воді — занурені дві сітчасті, виготовлені зі спеціального свинцевого сплаву, пластини. Негативно заряджена пластина (анод) покрита активною масою —

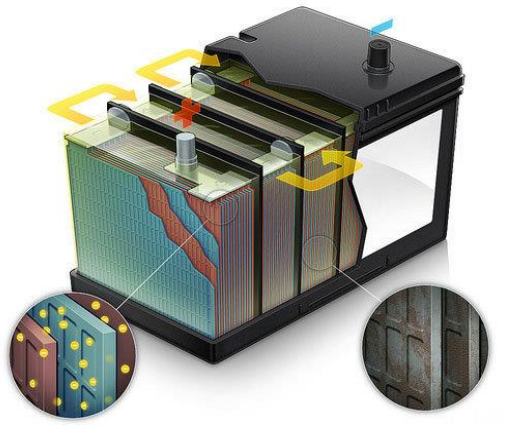


Рисунок 2.9

шаром губчатого чистого свинцю (Pb), а позитивно заряджена пластина (катод) — активною масою — шаром діоксиду свинцю (PbO_2).

Розряджання акумулятора відбувається, коли він підключається в замкнене електричне коло, тобто використовується як джерело живлення.

Як зазначалося вище, при розчиненні сірчаної кислоти у воді відбувається електролітична дисоціація: частка молекул кислоти розпадається на іони SO_4^{2-} і H_2^{2+}. Між негативно й позитивно зарядженими пластинами відбувається окисно-відновна реакція.

На аноді активна маса — губчатий свинець — розчиняється й позитивно заряджені двовалентні іони свинцю (Pb^{2+}) надходять в електроліт, а утворені при цьому надлишкові електрони рухаються в зовнішньому електричному колі до катода, створюючи електричний струм. Негативно заряджені іони SO_4^{2-} рухатимуться до анода, а іони H_2^{2+} — до катода. Біля анода відбувається реакція

$$Pb^{2+} + SO_4^{2-} \rightarrow PbSO_4.$$

Сульфат свинцю $PbSO_4$ осідає на аноді. На катоді від кожної молекули оксиду свинцю відокремлюються два негативно заряджені іони кисню O^{2-}, залишаючи іон Pb^{4+}. Електрони, які по зовнішньому ланцюгу надходять до катода, взаємодіють з цими іонами, знижуючи валентність до Pb^{2+}. При взаємодії Pb^{2+}, що виходить в електроліт, із сульфатною групою SO_4^{2-} сірчаної кислоти утворюється сульфат свинцю $PbSO_4$ (див. реакцію вище), який осідає на катоді. Іони кисню O^{2-} взаємодіють з іонами H_2^{2+}, утворюючи молекули води H_2O. Внаслідок цього процесу густина електроліту зменшується.

У міру того як розряджається акумулятор, все більше сульфату свинцю осідає на поверхні пластин, а концентрація сірчаної кислоти в розчині зменшується. Якщо розряджання акумулятора досягає критичної величини,

настає ефект глибокого розряду. Концентрація сульфату свинцю стає настільки великою, що електропровідність пластин різко зменшується.

При заряджанні акумулятора відбуваються зворотні хімічні реакції. Під дією зовнішньої напруги на аноді іони двовалентного свинцю Pb^{2+} віддають по два електрони й окислюються в чотиривалентні іони Pb^{4+}. Електрони рухаються до анода й нейтралізують іони двовалентного свинцю, відновлюючи губчатий свинець. На катоді шляхом проміжкових реакцій утворюється діоксид свинцю.

2.5. ЗАКОН ОМА ДЛЯ ОДНОРІДНОЇ ДІЛЯНКИ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА. ЕЛЕКТРИЧНИЙ ОПІР ПРОВІДНИКА. ВИМІРЮВАННЯ СИЛИ СТРУМУ Й НАПРУГИ

ЗАКОН ОМА ДЛЯ ОДНОРІДНОЇ ДІЛЯНКИ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА В ІНТЕГРАЛЬНІЙ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ ФОРМАХ

Однорідна ділянка електричного кола — ділянка кола, яка містить тільки провідник (рисунок 2.10).

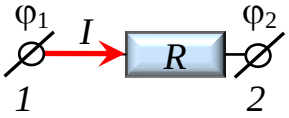


Рисунок 2.10

ЗАКОН ОМА В ІНТЕГРАЛЬНІЙ ФОРМІ:

Сила струму I, який тече в провіднику, пропорційна електричній напрузі U_{12} на його кінцях

$$I = \frac{U_{12}}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}, \qquad (2.17)$$

де $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ – електрична напруга (різниця потенціалів) на однорідній ділянці кола; ***R*** – **електричний опір провідника.**

В СІ [R] = Ом (ом). Розмірність електричного опору $\dim R = L^2MT^{-3}I^{-2}$.

Опір *R* провідника залежить від його форми, розмірів, матеріалу й температури.

Для однорідного циліндричного провідника

$$R = \rho\frac{l}{S}, \qquad (2.18)$$

де l – довжина провідника; S – площа поперечного перетину провідника; ρ – питомий електричний опір матеріалу.

Елемент електричного кола, призначений для використання його опору, називається ***резистором.*** *На електричних схемах він зазвичай позначається як показано на рис. 2.10.*

Експериментально встановлено, що в достатньо широкому діапазоні температур **питомий електричний опір ρ більшості металів залежить від температури за законом**

$$\boxed{\rho = \rho_0 (1 + \alpha t)}, \tag{2.19}$$

або

$$\boxed{\rho = \rho_0 \alpha T}, \tag{2.20}$$

де ρ_0 – питомий електричний опір провідника при 0 °С (273 К); t – температура в °С; T – термодинамічна температура; α – температурний коефіцієнт опору.

В СІ [ρ] = Ом·м; $[\alpha] = \text{град}^{-1}$. Розмірність питомого електричного опору $\dim \rho = L^3 M T^{-3} I^{-2}$.

Питомий електричний опір металів: $10^{-8}\ \text{Ом} \cdot \text{м} < \rho < 10^{-5}\ \text{Ом} \cdot \text{м}$.

Температурний коефіцієнт опору α — фізична величина, яка характеризує залежність питомого електричного опору провідника від температури й визначається за формулою

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}}, \tag{2.21}$$

де ρ – питомий електричний опір провідника при температурі T; $d\rho$ – приріст питомого електричного опору при зміні температури провідника від T до $T + dT$ (dT – нескінченно малий приріст температури).

Примітка: На практиці для визначення α широко використовується формула

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{R}\frac{dR}{dT}}, \tag{2.22}$$

де R – електричний опір провідника при температурі T; dR – приріст електричного опору при зміні температури провідника від T до $T + dT$.

При використанні цієї формули треба враховувати, що при зміні температури провідника внаслідок теплового розширення змінюються також його лінійні

розміри, тому температурний коефіцієнт опору вже не є характеристикою виключно електричних властивостей провідника.

Визначення величини α за формулою (2.21) чи (2.22) залежить від необхідної точності результату.

ЗАКОН ОМА В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ ФОРМІ

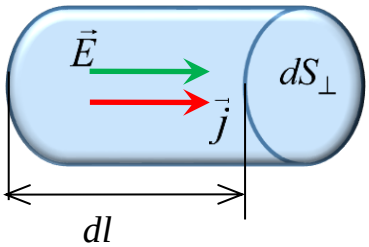


Рисунок 2.11

Виділимо умовно всередині провідника елементарний (нескінченно малий) циліндричний об'єм, твірна якого паралельна напрямку густини струму $\vec{j}$ у цій області, а основи перпендикулярні до $\vec{j}$ (рисунок 2.11). Позначимо напругу, що прикладена до циліндра, як dU. В межах виділеного об'єму електричне поле однорідне. Тоді

$$dU = Edl, \tag{2.23}$$

де E – модуль напруженості електричного поля в циліндрі; dl – довжина циліндра.

Модуль густини струму в провіднику

$$j = \frac{dI}{dS_\perp}, \tag{2.24}$$

де dI – сила струму крізь елементарну площинку $dS_\perp$

Опір dR виділеного об'єму провідника

$$dR = \rho\frac{dl}{dS_\perp}. \tag{2.25}$$

З формул (2.24), (2.17), (2.23) і (2.25) випливає

$$jdS_\perp = dI = \frac{dU}{dR} = \frac{EdldS_\perp}{\rho dl},$$

$$j = \frac{E}{\rho}. \tag{2.26}$$

Примітка: У формулах 2.23-2.25 літера d перед фізичною величиною показує, що значення фізичної величини відноситься до виділеного елементарного (нескінченно малого) об'єму.

У векторній формі вираз (2.26) набуває вигляду

$$\boxed{\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \sigma\vec{E}}, \qquad (2.27)$$

де $\vec{j}$ – густина струму; $\vec{E}$ – напруженість електричного поля;

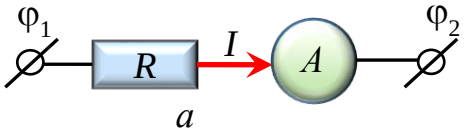
$\boxed{\sigma = \frac{1}{\rho}}$ – **питома електропровідність матеріалу провідника**.

Співвідношення (2.27) *називається законом Ома для однорідної ділянки електричного кола в диференціальній формі.*

В СІ [σ] = 1/(Ом·м) = См/м (См – сименс; См = Ом$^{-1}$). Розмірність питомої електропровідності $\dim\sigma = L^{-3}M^{-1}T^{3}I^{2}$.

ВИМІРЮВАННЯ СИЛИ СТРУМУ ТА ЕЛЕКТРИЧНОЇ НАПРУГИ

АМПЕРМЕТР (рисунок 2.12) використовується для вимірювання сили струму в ділянці електричного кола. Амперметр підключається послідовно з ділянкою кола, в якій вимірюється сила струму (див. рис. 2.12, *а*).



а

б

в

Рисунок 2.12

б – зовнішній вигляд аналогового амперметра

в – зовнішній вигляд цифрового амперметра

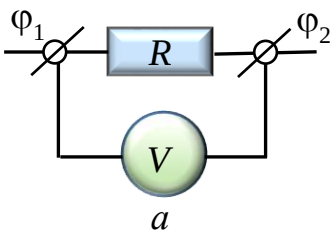
Опір R_A амперметра: $R_A << R$, де R – опір ділянки кола.

Ціна поділки аналогового амперметра (див. рис. 2.12, *б*): $C_A = \frac{I_A}{N}$, де I_A – максимальне значення шкали амперметра; N – кількість поділок шкали.

ВОЛЬТМЕТР (рисунок 2.13) використовується для вимірювання електричної напруги на ділянці електричного кола. Вольтметр підключається паралельно до ділянки кола, на якій вимірюється напруга (див. рис. 2.13, *а*).

Опір R_V вольтметра: $R_V >> R$, де R – опір ділянки кола.

Ціна поділки аналогового вольтметра (див. рис. 2.13, *б*): $C_V = \frac{U_V}{N}$, де U_V – максимальне значення шкали вольтметра; N – кількість поділок шкали.



а

б зовнішній вигляд аналогового вольтметра

в зовнішній вигляд цифрового вольтметра

Рисунок 2.13

Зараз широко використовуються **мультиметри**, які зазвичай призначені для вимірювання сили струму, напруги, опору та електроємності.

2.6. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 2

По мідному провіднику довжиною $l = 1$ м і діаметром $d = 2$ мм тече струм силою 2 А. Визначити: густину струму в провіднику; напругу на провіднику; напруженість електричного поля в провіднику. Питомий опір міді $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Аналіз

Густина струму j характеризує розподіл струму по поперечному перетину провідника (див. ф-лу 2.2). Для постійного струму характерним є рівномірний розподіл струму по поперечному перетину провідника, тому

$$j = \frac{I}{S_\perp}, \qquad (1)$$

де I – сила струму; $S_\perp$ – площа поперечного перетину провідника.

Маємо циліндричний провідник, тому

$$S_\perp = \frac{\pi d^2}{4}, \qquad (2)$$

де d – діаметр провідника.

Отже,

$$j = \frac{4I}{\pi d^2}. \tag{3}$$

Напругу U на провіднику визначимо за законом Ома для однорідної ділянки електричного кола (див. ф-лу (2.17))

$$U = IR, \tag{4}$$

де R – електричний опір провідника.

Опір циліндричного провідника

$$R = \rho \frac{l}{S_\perp}, \tag{5}$$

де l – довжина провідника; $S_\perp$ – площа поперечного перетину провідника; ρ – питомий електричний опір матеріалу провідника.

Тоді співвідношення (4) можна написати як

$$U = \frac{I\rho l}{S_\perp} = \frac{4I\rho l}{\pi d^2}. \tag{6}$$

Електричне поле в провіднику однорідне, тому його напруженість E

$$E = \frac{U}{l} = \frac{4I\rho l}{\pi d^2 l} = \frac{4I\rho}{\pi d^2}. \tag{7}$$

Перевіримо формули (3), (6) і (7):

$$(\mathbf{3})\ [j] = \frac{\text{А}}{\text{м}^2};\ [I] = \text{А};\ [d] = \text{м};\ \left[\frac{I}{d^2}\right] = \frac{\text{А}}{\text{м}^2};$$

$$(\mathbf{6})\ [U] = \text{В} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{А}\cdot\text{с}^3};\ [I] = \text{А};\ [\rho] = \text{Ом}\cdot\text{м} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{А}^2\cdot\text{с}^3};\ [l] = [d] = \text{м};$$

$$\left[\frac{I\rho l}{d^2}\right] = \frac{\text{А}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^3\cdot\text{м}}{\text{А}^2\cdot\text{с}^3\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{А}\cdot\text{с}^3};$$

(7) $[E]=\frac{\text{В}}{\text{м}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{с}^3}$; $[I]=\text{А}$; $[\rho]=\text{Ом}\cdot\text{м}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{А}^2\cdot\text{с}^3}$; $[d]=\text{м}$;

$\left[\frac{I\rho}{d^2}\right]=\frac{\text{А}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{А}^2\cdot\text{с}^3\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{с}^3}$.

Дано:	**СІ**
$l=1$ м	
$d=2$ мм	$2\cdot10^{-3}$ м
$\rho=1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м	
$I=2$ А	
$j-?$	
$U-?$	
$E-?$	

Розв'язок:

$$j=\frac{4\cdot2}{\pi\left(2\cdot10^{-3}\right)^2}=\frac{8}{\pi\cdot4\cdot10^{-6}}=6{,}4\cdot10^5\ \frac{\text{А}}{\text{м}^2};$$

$$U=\frac{4\cdot2\cdot1{,}7\cdot10^{-8}\cdot1}{\pi\left(2\cdot10^{-3}\right)^2}=\frac{2\cdot1{,}7\cdot10^{-8}\cdot1}{\pi\cdot10^{-6}}=$$

$$=1{,}08\cdot10^{-2}\ \text{В};$$

$$E=\frac{4\cdot2\cdot1{,}7\cdot10^{-8}}{\pi\left(2\cdot10^{-3}\right)^2}=1{,}08\cdot10^{-2}\ \text{В/м}.$$

Відповідь : $j=6{,}4\cdot10^5\ \frac{\text{А}}{\text{м}^2}$; $U=1{,}08\cdot10^{-2}$ В; $E=1{,}08\cdot10^{-2}$ В/м.

Задача 3

Плоский конденсатор заповнений речовиною з відносною діелектричною проникністю ε і питомим електричним опором ρ. Електроємність конденсатора C. Визначити електричний опір конденсатора.

Аналіз

Електричний опір плоского конденсатора

$$R=\rho\frac{l}{S},\qquad(1)$$

де ρ – питомий електричний опір речовини між обкладками конденсатора; l – відстань між обкладками; S – площа обкладки конденсатора.

Електроємність плоского конденсатора

$$C=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{l},\qquad(2)$$

де S – площа обкладки; l – відстань між обкладками; ε – відносна діелектрична

проникність речовини між обкладками; ε_0 – електрична стала.

З (2) випливає

$$\frac{l}{S}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{C}. \qquad (3)$$

Тоді

$$R=\frac{\rho\varepsilon\varepsilon_0}{C}. \qquad (4)$$

Перевіримо формулу (4):

$$R=\text{Ом}=\frac{\text{м}^2\cdot\text{кг}}{\text{с}^3\cdot\text{А}^2};\quad \rho=\text{Ом}\cdot\text{м}=\frac{\text{м}^3\cdot\text{кг}}{\text{с}^3\cdot\text{А}^2};\quad \varepsilon=1;\quad \varepsilon_0=\frac{\Phi}{\text{м}}=\frac{\text{А}^2\cdot\text{с}^4}{\text{кг}\cdot\text{м}^3};$$

$$C=\Phi=\frac{\text{А}^2\cdot\text{с}^4}{\text{кг}\cdot\text{м}^2};\quad \left[\frac{\rho\varepsilon\varepsilon_0}{C}\right]=\frac{\text{м}^3\cdot\text{кг}\cdot\text{А}^2\cdot\text{с}^4\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^3\cdot\text{А}^2\cdot\text{с}^4}=\frac{\text{м}^2\cdot\text{кг}}{\text{с}^3\cdot\text{А}^2}.$$

Задача 4

До резистора підключені амперметр і вольтметр. Визначити опір R резистора, якщо амперметр показує силу струму I = 5 А, а вольтметр — напругу U = 100 В. Внутрішній опір вольтметра R_V = 2500 Ом. Якою буде похибка у визначенні опору резистора, якщо знехтувати внутрішнім опором вольтметра?

Аналіз

Позначимо як R_1 опір резистора, що отриманий з врахуванням внутрішнього опору вольтметра (рисунок 1, *а*), як R_2 опір резистора, що отриманий без врахування внутрішнього опору вольтметра (рисунок 1, *б*).

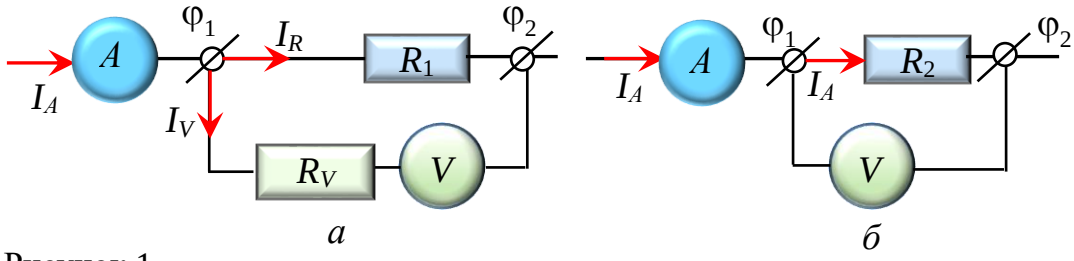


Рисунок 1

Напишемо рівняння за законом Ома для однорідної ділянки електричного кола з опором R_1 (див. рис. 1, *а*)

$$U_R=I_R R_1, \qquad (1)$$

де U_R – напруга на опорі R_1; I_R – сила струму в опорі R_1.

З умови задачі випливає, що

$$I_R R_1 = U_V = I_V R_V, \tag{2}$$

де U_V – напруга на вольтметрі (покази вольтметра); I_V – сила струму через вольтметр; R_V – внутрішній опір вольтметра.

З рис. 1, *а*

$$I_A = I_R + I_V, \tag{3}$$

де I_A – сила струму в амперметрі (покази амперметра).

Визначимо силу струму в резисторі R_1.

З (3)

$$I_V = I_A - I_R. \tag{4}$$

Підставимо (4) в (2)

$$I_R R_1 = \left(I_A - I_R\right) R_V. \tag{5}$$

Звідси

$$I_R = \frac{I_A R_V}{R_1 + R_V}. \tag{6}$$

Тоді, врахувавши (6), із ф-ли (2) отримуємо

$$R_1 = \frac{U_V}{I_R} = \frac{U_V\left(R_1 + R_V\right)}{I_A R_V}. \tag{7}$$

Звідси

$$R_1 = \frac{U_V R_V}{I_A R_V - U_V}. \tag{8}$$

Напишемо рівняння за законом Ома для однорідної ділянки електричного кола опором R_2 (див. рис. 1, *б*):

$$U_R = I_A R_2, \tag{9}$$

де U_R – напруга на опорі R_2; I_A – сила струму в амперметрі (покази амперметра).

З умови задачі випливає, що

$$U_R = U_V, \tag{10}$$

де U_V – напруга на вольтметрі (покази вольтметра).

З (9) і (10) випливає

$$U_V = I_A R_2. \tag{11}$$

Звідси

$$R_2 = \frac{U_V}{I_A}. \qquad (12)$$

Відносна похибка δR у визначенні опору резистора, якщо знехтувати внутрішнім опором вольтметра,

$$\delta R = \frac{|R_1 - R_2|}{R_1} \cdot 100\%. \qquad (13)$$

Дано:

$I = 5$ А

$U = 100$ В

$R_V = 2500$ Ом

$R_1 - ?$

$R_2 - ?$

$\delta R - ?$

Розв'язок:

$$R_1 = \frac{100 \cdot 2500}{5 \cdot 2500 - 100} = 20{,}16 \text{ Ом};$$

$$R_2 = \frac{100}{5} = 20{,}00 \text{ Ом};$$

$$\delta R = \frac{|20{,}16 - 20{,}00|}{20{,}16} \cdot 100\% = 0{,}79\%.$$

Відповідь: $R_1 = 20{,}16$ Ом; $R_2 = 20{,}00$ Ом; $\delta R = 0{,}79\%$.

2.7. ЗАКОН ОМА ДЛЯ НЕОДНОРІДНОЇ ДІЛЯНКИ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА. ЗАКОН ОМА ДЛЯ ЗАМКНЕНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА

ЗАКОН ОМА ДЛЯ НЕОДНОРІДНОЇ ДІЛЯНКИ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА В ІНТЕГРАЛЬНІЙ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ ФОРМАХ

Неоднорідна ділянка електричного кола — ділянка, яка містить провідник і джерело постійного струму (рисунок 2.14).

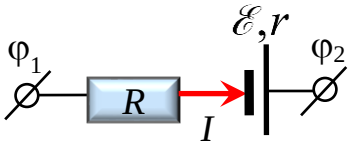


Рисунок 2.14

ЗАКОН ОМА В ІНТЕГРАЛЬНІЙ ФОРМІ

Сила струму I, який тече в ділянці, пропорційна електричній напрузі U_{12} на її кінцях

$$\boxed{I = \frac{U_{12}}{R + r} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathscr{E}}{R + r}}, \qquad (2.28)$$

де r – внутрішній опір джерела струму; R – зовнішній опір (опір провідника).

Якщо напрямок руху позитивних носіїв заряду в джерелі постійного струму (напрямок від полюса «–» джерела до полюса «+» джерела) збігається з напрямком електричного струму в ділянці електричного кола, то Е.Р.С. $\mathscr{E}$ береться зі знаком «+», якщо не збігається, то зі знаком «–».

ЗАКОН ОМА В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ ФОРМІ

Напруженість електричного поля в неоднорідній елементарній ділянці електричного кола $\vec{E}+\vec{E}^*$ (рисунок 2.15), де $\vec{E}$ – напруженість електростатичного поля; $\vec{E}^*$ – напруженість поля сторонніх сил. Тоді за аналогією з формулою (2.27) напишемо

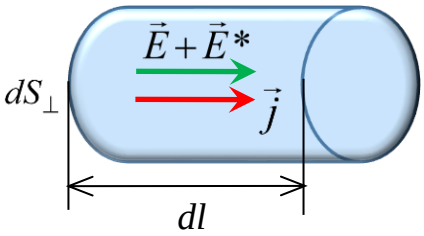


Рисунок 2.15

$$\vec{j}=\frac{1}{\rho}\left(\vec{E}+\vec{E}^*\right)=\sigma\left(\vec{E}+\vec{E}^*\right), \qquad (2.29)$$

де $\vec{j}$ – густина струму; ρ – питомий електричний опір провідника; σ – питома електропровідність провідника.

Співвідношення (2.29) називається **законом Ома для неоднорідної ділянки електричного кола в диференціальній формі.**

ЗАКОН ОМА ДЛЯ ЗАМКНЕНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА

Сила струму I в замкненому електричному колі (рисунок 2.16)

$$\boxed{I=\frac{\mathscr{E}}{R+r}}, \qquad (2.30)$$

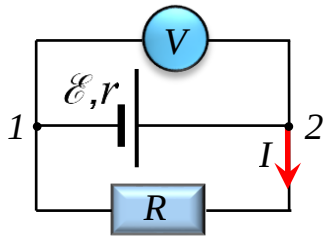


Рисунок 2.16

де $\mathscr{E}$ – Е.Р.С., r – внутрішній опір джерела струму; R – зовнішній опір (навантажувальний опір, навантаження, резистор).

Звідси ***напруга U_{12} на джерелі струму***

$$U_{12}=IR=\mathscr{E}-Ir\,. \qquad (2.31)$$

Якщо $R=0$ (клеми джерела з'єднані провідником), *то джерело струму працює* **в режимі короткого замикання** (к.з.).

Сила струму короткого замикання

$$I_{\text{к.з.}} = \frac{\mathscr{E}}{r}. \qquad (2.32)$$

Примітка: Сила струму короткого замикання може досягати великих значень, тому цей режим небезпечний для джерела струму.

При розриві електричного кола $R \to \infty$ *джерело струму працює в* **режимі холостого ходу.**

Напруга холостого ходу

$$U_{\text{х.х.}} = \mathscr{E}. \qquad (2.33)$$

Примітка: Вимірювати Е.Р.С. джерела постійного струму необхідно в режимі холостого ходу.

2.8. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 5

Визначити напрямок струму й силу струму в ділянці електричного кола (рисунок 1). Потенціали на кінцях ділянки: $\varphi_A = -5$ В; $\varphi_B = 15$ В; опір $R = 20$ Ом; Е.Р.С. джерела постійного струму $\mathscr{E} = 4$ В; внутрішній опір $r = 0{,}5$ Ом.

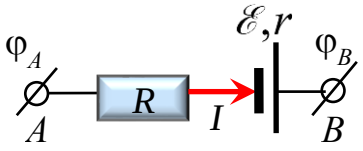


Рисунок 1

Аналіз

Задаємо довільно напрямок струму (див. рис. 1). Врахувавши напрямок струму, напишемо закон Ома для неоднорідної ділянки електричного кола: в різниці потенціалів на першому місці знаходиться потенціал φ_A точки A, з якої витікає струм; напрямок у джерелі постійного струму від «–» до «+» збігається з напрямком струму, тому Е.Р.С. $\mathscr{E}$ беремо зі знаком «+». Отже, закон Ома набуває вигляду

$$I = \frac{\varphi_A - \varphi_B + \mathscr{E}}{R + r},$$

де φ_A і φ_B – потенціали на кінцях ділянки; $\mathscr{E}$ і r – Е.Р.С. і внутрішній опір джерела постійного струму відповідно; R – опір ділянки.

Дано:

φ_A = –5 В

φ_B = 15 В

R = 20 Ом

$\mathscr{E}$ = 4 В

r = 0,5 Ом

I = ?

Розв'язок:

$$I = \frac{-5-15+4}{20+0,5} = -0,78 \text{ А}.$$

Відповідь: $|I| = 0,78$ А. Знак «–» свідчить про те, що струм тече від точки B до точки A.

Задача 6

Амперметр з опором 3 Ом підключений до джерела постійного струму і показує силу струму 3 А. Вольтметр з опором 150 Ом підключений до того ж джерела струму і показує напругу 15 В. Визначити силу струму короткого замикання джерела.

Аналіз

Сила струму короткого замикання

$$I_{\text{к.з.}} = \frac{\mathscr{E}}{r}, \qquad (1)$$

де $\mathscr{E}$ – Е.Р.С., r – внутрішній опір джерела постійного струму.

Отже, потрібно визначити $\mathscr{E}$ і r .

Розглянемо випадок, коли до джерела постійного струму підключений амперметр (рисунок 1). Амперметр показує силу струму I_1.

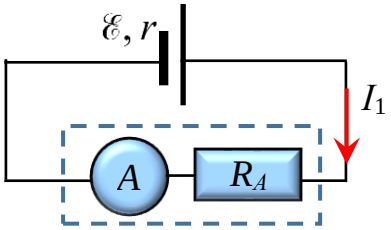


Рисунок 1

Напишемо закон Ома для замкненого кола

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{r + R_A}, \qquad (2)$$

де R_A – опір амперметра.

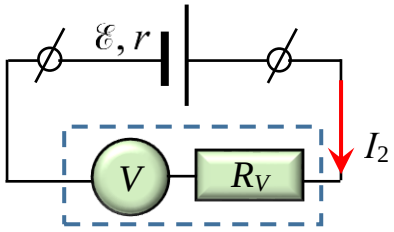


Рисунок 2

Розглянемо випадок, коли до джерела постійного струму підключений вольтметр (рисунок 2). Напишемо закон Ома для замкненого кола

$$I_2 = \frac{\mathscr{E}}{r + R_V}, \qquad (3)$$

де R_V – опір вольтметра.

Напруга, яку показує вольтметр,

$$U = I_2 R_V . \tag{4}$$

Звідси

$$I_2 = \frac{U}{R_V}, \tag{5}$$

тоді формулу (3) можна написати як

$$\frac{U}{R_V} = \frac{\mathscr{E}}{r + R_V}. \tag{6}$$

Маємо систему двох рівнянь (2) й (6) з двома невідомими $\mathscr{E}$ і r .

Напишемо рівняння (2) як

$$\frac{1}{I_1} = \frac{r}{\mathscr{E}} + \frac{R_A}{\mathscr{E}}, \tag{7}$$

а рівняння (6) як

$$\frac{R_V}{U} = \frac{r}{\mathscr{E}} + \frac{R_V}{\mathscr{E}}. \tag{8}$$

Віднімемо від лівої частини рівняння (7) ліву частину рівняння (8), а від правої частини праву частину

$$\frac{1}{I_1} - \frac{R_V}{U} = \frac{R_A}{\mathscr{E}} - \frac{R_V}{\mathscr{E}}. \tag{9}$$

Звідси

$$\mathscr{E} = \frac{\left(R_A - R_V\right) I_1 U}{U - I_1 R_V}. \tag{10}$$

Підставимо (10) в (2)

$$I_1 = \frac{\left(R_A - R_V\right) I_1 U}{\left(U - I_1 R_V\right)\left(r + R_A\right)}. \tag{11}$$

Звідси

$$r = \frac{R_V \left(I_1 R_A - U\right)}{\left(U - I_1 R_V\right)}. \tag{12}$$

Тоді

$$I_{\text{к.з.}} = \frac{(R_V - R_A) I_1 U}{R_V (U - I_1 R_A)}. \qquad (13)$$

Перевіримо формулу (13):

$$[I] = \text{А}; \quad [U] = \text{В} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3 \cdot \text{А}}; \quad [R] = \text{Ом} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3 \cdot \text{А}^2}; \quad \left[\frac{IU}{(U - IR)} \right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{А}}{\text{с}^3 \cdot \text{А} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2} = \text{А}.$$

Дано:

$U = 15$ В

$I_1 = 3$ А

$R_A = 3$ Ом

$R_V = 150$ Ом

$I_{\text{к.з.}} - ?$

Розв'язок:

$$I_{\text{к.з.}} = \frac{(150 - 3) \cdot 3 \cdot 15}{150 \cdot (15 - 3 \cdot 3)} = 7{,}35 \text{ А}.$$

Відповідь: $I_{\text{к.з.}} = 7{,}35$ А.

2.9. ЗАКОН ДЖОУЛЯ-ЛЕНЦА. ТЕПЛОВА ПОТУЖНІСТЬ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

ЗАКОН ДЖОУЛЯ–ЛЕНЦА В ІНТЕГРАЛЬНІЙ ФОРМІ

При проходженні електричного струму в провіднику він нагрівається.

Кількість теплоти Q, що виділяється в провіднику за час t, визначається за **ЗАКОНОМ ДЖОУЛЯ-ЛЕНЦА**

$$\boxed{Q = I^2 R t}, \qquad (2.34)$$

де I – сила струму; R – опір провідника.

В СІ $[Q]$ = Дж (джоуль). Розмірність кількості теплоти $\dim Q = ML^2T^{-2}$.

Теплова потужність P постійного струму чисельно дорівнює кількості теплоти, що виділяється в провіднику за одиницю часу

$$\boxed{P = \frac{Q}{t} = I^2 R}. \qquad (2.35)$$

В СІ $[P] = \text{Вт}$ (ват). Розмірність потужності $\dim P = ML^2T^{-3}$.

Якщо сила струму змінюється з часом, то кількість теплоти Q, яка виділяється в провіднику за інтервал часу $\Delta t = t_2 - t_1$,

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I^2 R dt\,. \tag{2.36}$$

ЗАКОН ДЖОУЛЯ–ЛЕНЦА В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ ФОРМІ

Виділимо всередині провідника елементарний циліндричний об’єм, як це було зроблено в підрозділі 2.5 (див. рис. 2.11). За законом Джоуля-Ленца в цьому об’ємі протягом нескінченно малого інтервалу часу dt виділиться кількість теплоти

$$\delta Q = \left(dI\right)^2 dRdt = \left(jdS_\perp\right)^2 \rho \frac{dl}{dS_\perp} dt = j^2 \rho dS_\perp dl dt = j^2 \rho dV dt\,, \tag{2.37}$$

де dI – сила струму крізь основу циліндра; dR – електричний опір, dl – довжина, $dS_\perp$ – площа основи циліндра; $dV = dS_\perp dl$ – об’єм циліндра (елементарний об’єм).

Визначимо **питому теплову потужність струму** w — величину, яка чисельно дорівнює кількості теплоти, що виділяється в одиниці об’єму провідника за одиницю часу

$$w = \frac{\delta Q}{dVdt} = \frac{j^2 \rho dVdt}{dVdt} = j^2 \rho.$$

$$\boxed{w = j^2 \rho}\,. \tag{2.38}$$

Врахувавши ф-ли (2.26) і (2.27), отримуємо закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі

$$w = \left(\frac{E}{\rho}\right)^2 \rho = \frac{\left(E\right)^2}{\rho} = \sigma E^2,$$

$$\boxed{w = \sigma E^2}\,, \tag{2.39}$$

або у векторній формі

$$\boxed{w = \vec{j} \cdot \vec{E}}\,. \tag{2.40}$$

2.10. ТЕПЛОВА ПОТУЖНІСТЬ, ЩО ВИДІЛЯЄТЬСЯ В КОЛІ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ. КОЕФІЦІЄНТ КОРИСНОЇ ДІЇ ДЖЕРЕЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

При переміщенні зарядів по замкненому колу — проходженні струму — кулонівські й сторонні сили виконують роботу. Ця робота називається також *роботою струму*. Якщо провідник нерухомий і в ньому не відбуваються хімічні перетворення, то за рахунок роботи струму тільки зростає внутрішня енергія провідника, тобто він нагрівається. Кількість теплоти, що виділяється в провіднику, визначається за ф-лою (2.34), а потужність за ф-лою (2.35).

Розглянемо замкнене електричне коло (рисунок 2.17).

Активною (корисною) потужністю P_a називається потужність, що виділяється в зовнішньому (навантажувальному) опорі R

$$P_a = I^2 R = \frac{\mathscr{E}^2 R}{(R+r)^2}. \qquad (2.41)$$

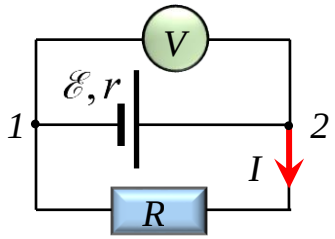


Рисунок 2.17

Потужність P_i, що виділяється у внутрішньому опорі r джерела, визначається як

$$P_i = I^2 r = \frac{\mathscr{E}^2 r}{(R+r)^2}. \qquad (2.42)$$

Ця потужність розсіюється в довколишньому просторі й називається також *паразитною потужністю*.

Загальна (повна) теплова потужність P, що виділяється в електричному колі, визначається як

$$P = P_a + P_i = I^2 (R+r) = \frac{\mathscr{E}^2 (r+R)}{(R+r)^2} = \frac{\mathscr{E}^2}{R+r} = \mathscr{E} I. \qquad (2.43)$$

Коефіцієнт корисної дії (к.к.д.) η (читаймо як грецьку літеру «ета») джерела струму визначається відношенням корисної потужності до загальної потужності

$$\eta = \frac{P_a}{P} = \frac{\mathscr{E}^2 R(R+r)}{(R+r)^2 \mathscr{E}^2} = \frac{R}{R+r} = \frac{1}{1+\frac{r}{R}}. \qquad (2.44)$$

2.11. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 7

Автомобільну лампу, на якій написано «12 В, 100 Вт», під'єднали до батарейки з Е.Р.С. 12 В і внутрішнім опором 0,06 Ом. Визначити силу струму та потужність струму в лампі.

Аналіз

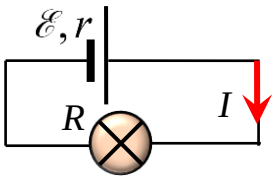


Рисунок 1

На автомобільній лампі вказані *номінальні значення напруги* $U_л$ й *потужності* $P_л$.

Потужність $P_л$, на яку розрахована лампа,

$$P_л = \frac{U_л^2}{R}, \tag{1}$$

де $U_л$ – допустима напруга на лампі; R – опір лампи.

Звідси опір лампи

$$R = \frac{U_л^2}{P_л}. \tag{2}$$

Силу струму в лампі при її підключенні до батарейки розрахуємо за законом Ома для замкненого електричного кола (рисунок 1)

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r} = \frac{\mathscr{E}}{\frac{U_л^2}{P_л} + r}, \tag{3}$$

де $\mathscr{E}$ – Е.Р.С., r – внутрішній опір батарейки.

Примітка: На рис. 1 надано позначення лампочки на електричних схемах.

Потужність струму в лампі

$$P = RI^2 = \frac{U_л^2}{P_л} \cdot \left(\frac{\mathscr{E}}{\frac{U_л^2}{P_л} + r} \right)^2, \tag{4}$$

Дано:

$U_л$ = 12 В

$P_л$= 100 Вт

$\mathscr{E}$ = 12 В

r = 0,06 Ом

I = ?

P = ?

Розв'язок:

$$I = \frac{12}{\frac{12^2}{100} + 0{,}06} = 8 \text{ А};$$

$$P = \frac{12^2}{100} \cdot \left(\frac{12}{\frac{12^2}{100} + 0{,}06} \right)^2 = 92{,}16 \text{ Вт}.$$

Відповідь: $I = 8$ А; $P = 92{,}16$ Вт.

Задача 8

До свинцевого дроту довжиною 10 см і діаметром 2 мм при кімнатній температурі 20°С приклали напругу 10 В (рисунок 1). Температура плавлення свинцю $t = 327\,^{\circ}\text{C}$. Визначити час, через який свинцевий дріт почне плавитись. Вважати, що теплоємність свинцю постійна в цьому діапазоні температур, а також, що вся теплота, яка виділяється, витрачається на нагрівання дроту.

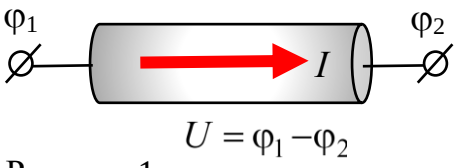


Рисунок 1

Аналіз

При проходженні струму по дроту за законом Джоуля-Ленца в ньому за час t виділяється кількість теплоти Q

$$Q = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t, \qquad (1)$$

де I – сила струму в дроті; U – напруга на дроті; R – опір дроту.

Провідник циліндричний, тому його опір

$$R = \frac{\rho l}{S}, \qquad (2)$$

де ρ − питомий електричний опір свинцю; l – довжина, S – площа поперечного перетину дроту.

Площа поперечного перетину дроту

$$S = \frac{\pi d^2}{4}, \qquad (3)$$

де d – діаметр дроту.

Тоді

$$Q = \frac{U^2 S}{\rho l} t = \frac{U^2 \pi d^2}{4\rho l} t. \tag{4}$$

За умовою задачі вся теплота, що виділяється, витрачається на нагрівання дроту. Тоді

$$Q = cm\left(T_2 - T_1\right), \tag{5}$$

де c – питома теплоємність, m – маса свинцю; T_1 – початкова температура дроту: кімнатна температура; T_2 – кінцева температура дроту.

За умовою задачі кінцева температура — це температура, при якій дріт почне плавитись. Отже, T_2 – температура плавлення свинцю $T_{\text{пл}}$. Тоді

$$Q = cm\left(T_{\text{пл}} - T_1\right). \tag{6}$$

Маса дроту

$$m = \delta V = \delta S l = \frac{\delta \pi d^2 l}{4}, \tag{7}$$

де δ − густина свинцю; V – об’єм, S – площа поперечного перетину, l – довжина дроту.

Отримуємо

$$Q = \frac{c\delta \pi d^2 l}{4}\left(T_{\text{пл}} - T_1\right). \tag{8}$$

На основі умови задачі прирівняємо праві частини співвідношень (4) і (8)

$$\frac{U^2}{\rho l} t = c\delta l\left(T_{\text{пл}} - T_1\right). \tag{9}$$

Звідси час t, через який дріт почне плавитись,

$$t = \frac{c\delta\rho l^2\left(T_{\text{пл}} - T_1\right)}{U^2}. \tag{10}$$

Перевіримо формулу (10):

$$[t] = \text{с};\ [c] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{К}};\ [\delta] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};\ [\rho] = \text{Ом}\cdot\text{м} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{А}^2\cdot\text{с}^3};$$

$$[l] = \text{м};\ [T] = \text{К};\ [U] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{А}\cdot\text{с}^3};\ \left[\frac{c\delta\rho l^2 T}{U^2}\right] = \frac{\text{м}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^3\cdot\text{м}^2\cdot\text{К}\cdot\text{А}^2\cdot\text{с}^6}{\text{с}^2\cdot\text{К}\cdot\text{м}^3\cdot\text{А}^2\cdot\text{с}^3\cdot\text{кг}^2\cdot\text{м}^4} = \text{с}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$l = 10$ см	10^{-1} м	$t = \dfrac{127 \cdot 11{,}3 \cdot 10^3 \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-2}(600 - 293)}{10^2} =$
$d = 2$ мм	$2 \cdot 10^{-3}$ м	$= 9{,}7 \cdot 10^{-3}$ с = 9,7 мс.
$U = 10$ В		
$T_1 = 20\ ^\circ$C	293 К	
$T_{пл} = 327\ ^\circ$C	600 К	
$c = 127$ Дж/(кг·К)		
$\rho = 2{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом·м		
$\delta = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3		**Відповідь:** $t = 9{,}7$ мс.
t — ?		

Задача 9

Е.Р.С. акумулятора $\mathscr{E} = 20$ В, сила струму короткого замикання $I_{к.з.} = 4$ А. Визначити найбільшу потужність, яку можна отримати в зовнішньому електричному колі, яке підключене до такого акумулятора.

Аналіз

Корисна потужність P_a — потужність, що виділяється в зовнішньому резисторі (опорі, навантаженні) R,

$$P_a = I^2 R, \tag{1}$$

де I – сила струму в електричному колі; R – опір резистора.

За законом Ома для замкненого електричного кола сила струму в колі

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}, \tag{2}$$

де $\mathscr{E}$ – Е.Р.С., r – внутрішній опір джерела постійного струму.

Тоді

$$P_a = \frac{\mathscr{E}^2 R}{(R + r)^2}. \tag{3}$$

Нам треба визначити зовнішній опір, при якому корисна потужність P_a досягає максимального значення. Для цього необхідно дослідити функцію $P_a(R)$ на екстремум. Отже,

$$\frac{dP_a}{dR} = 0. \tag{4}$$

Визначимо похідну виразу (3) по *R*. Отримуємо

$$\frac{\mathscr{E}^2}{(R+r)^2} - \frac{2\mathscr{E}^2 R}{(R+r)^3} = 0, \tag{5}$$

$$1 - \frac{2R}{R+r} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{2R}{R+r} = 1, \tag{7}$$

$$2R = R + r, \tag{8}$$

$$R = r. \tag{9}$$

Отже, корисна потужність P_a досягає максимального значення коли $R = r$.

Підставивши $R = r$ до співвідношення (3), отримуємо формулу для визначення максимальної корисної потужності $P_{a(\max)}$

$$P_{a(\max)} = \frac{\mathscr{E}^2 r}{(r+r)^2} = \frac{\mathscr{E}^2}{4r}. \tag{10}$$

З умови задачі відома сила струму короткого замикання, яка визначається за формулою

$$I_{\text{к.з.}} = \frac{\mathscr{E}}{r}. \tag{11}$$

Звідси

$$r = \frac{\mathscr{E}}{I_{\text{к.з.}}}. \tag{12}$$

Врахувавши формулу (12), напишемо формулу (10) як

$$P_{a(\max)} = \frac{\mathscr{E}^2 I_{\text{к.з.}}}{4\mathscr{E}} = \frac{\mathscr{E} I_{\text{к.з}}}{4}. \tag{13}$$

Перевіримо формулу (13):

$$[P]=\text{Вт}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3};\quad [\mathscr{E}]=\text{В}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}};\quad [I]=\text{А};\quad [\mathscr{E}\cdot I]=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{А}}{\text{с}^3\cdot\text{А}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3}.$$

Дано:	**Розв'язок:**
$\mathscr{E}=20$ В $I_{\text{к.з.}}=4$ А	$P_{a(\max)}=\frac{20\cdot 4}{4}=20$ Вт.
$P_{a(\max)}-?$	**Відповідь:** $P_{a(\max)}=20$ Вт.

Задача 10

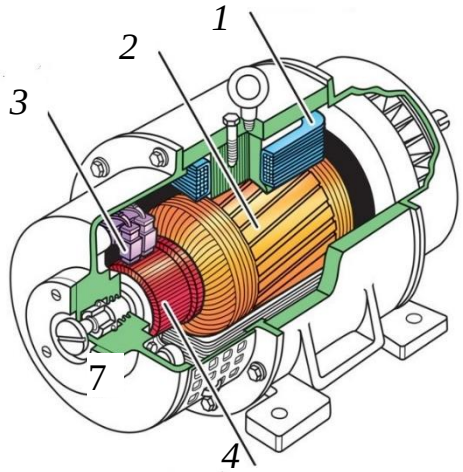
Електродвигун постійного струму під'єднали до джерела постійного струму з Е.Р.С. $\mathscr{E}$. Опір обмотки якоря дорівнює R. Визначити силу струму в обмотці, при якій корисна потужність двигуна буде максимальною. Визначити максимальну потужність. Визначити коефіцієнт корисної дії (к.к.д.) двигуна в такому режимі.

Примітка: ***Електродвигун*** — пристрій, який перетворює енергію джерела постійного струму в механічну енергію (кінетичну енергію обертання).

Схематичне зображення електродвигуна наведене на рисунку 1.

Основні вузли електродвигуна постійного струму:

- **індуктор *1*** — постійний магніт або електромагніт, який створює магнітне поле (зазвичай використовується електромагніт);
- **якір *2*** — обмотка, в якій при зміні магнітного потоку, що її перетинає, виникає Е.Р.С. індукції. Для створення потужних магнітних полів використовується якір із феромагнітним осердям. Кінці осердя мають таку форму, щоб між полюсами магніта й осердя був невеликий проміжок, достатній для обертання;



1 – індуктор; *2* – якір; *3* – електричні щітки; *4* – колектор

Рисунок 1

➢ **колектор *4*** й контактні пластинки, які ковзають по ньому, — **електричні щітки *3***, за допомогою яких обмотки якоря з'єднуються з джерелом постійного струму.

Частина двигуна, що обертається (якір), називається **ротором**, а його нерухома частина (індуктор) — **статором.**

Якщо приєднати клеми статора й щітки ротора електродвигуна до джерела постійного струму, то по обмоткам статора й ротора будуть проходити електричні струми. Електричні струми створюють магнітні поля статора й ротора. Внаслідок дії магнітного поля статора на електричний струм ротора відбувається обертання ротора. Отже, енергія джерела постійного струму перетворюється в кінетичну енергію обертання.

Примітка: На електричний струм обмотки ротора з боку магнітного поля індуктора (статора) діють **сили Ампера**, перпендикулярні до напрямку струму й індукції магнітного поля. Саме ці сили створюють обертальний момент, що викликає обертання ротора. Більш детально силу Ампера та принцип роботи електродвигуна постійного струму буде розглянуто в Розділі 3 «Магнітостатика у вакуумі».

Аналіз

Оскільки Е.Р.С. джерела постійного струму чисельно дорівнює роботі, що виконується при перенесенні одиничного позитивного заряду по замкненому електричному колу, то при постійному струмі за час t виконується повна робота (див. підрозділ 2.3)

$$A = \mathscr{E} q = \mathscr{E} It, \qquad (1)$$

де q – заряд, що пройшов по колу; $\mathscr{E}$ – Е.Р.С. джерела постійного струму; I – сила струму в електричному колі обмотки ротора.

Згідно з законом збереження енергії за рахунок цієї роботи виконується корисна механічна робота (обертання ротора) та нагрівається обмотка ротора.

Повна потужність P, яка використовується в електричному колі обмотки ротора,

$$P = \frac{A}{t} = \frac{I\mathscr{E}t}{t} = I\mathscr{E}. \qquad (2)$$

Теплова потужність $P_{\text{Т}}$, яка виділяється при нагріванні обмотки ротора,

$$P_{\text{Т}} = I^2 R, \tag{3}$$

де R – опір обмотки ротора.

Отже, корисна потужність P_a двигуна, яка витрачається на виконання ним роботи,

$$P_a = P - P_{\text{Т}} = I\mathscr{E} - I^2 R. \tag{4}$$

Нам потрібно визначити силу струму в обмотці, при якій корисна потужність двигуна буде максимальною. Для цього необхідно дослідити функцію $P_a(I)$ на екстремум. Отже,

$$\frac{dP_a}{dI} = 0. \tag{5}$$

З (4) маємо

$$\frac{dP_a}{dI} = \mathscr{E} - 2IR = 0. \tag{6}$$

Звідси **сила струму, при якій корисна потужність електродвигуна буде максимальною,**

$$I = \frac{\mathscr{E}}{2R}. \tag{7}$$

Максимальна корисна потужність двигуна

$$P_{a(\max)} = \frac{\mathscr{E}\cdot\mathscr{E}}{2R} - \frac{\mathscr{E}^2\cdot R}{4R^2} = \frac{\mathscr{E}^2}{2R} - \frac{\mathscr{E}^2}{4R} = \frac{\mathscr{E}^2}{4R}. \tag{8}$$

Відповідний **коефіцієнт корисної дії η**

$$\eta = \frac{P_{a(\max)}}{P} = \frac{\mathscr{E}^2}{4R\cdot\mathscr{E}\cdot I} = \frac{\mathscr{E}^2\cdot 2R}{4R\cdot\mathscr{E}\cdot\mathscr{E}} = 0{,}5. \tag{9}$$

2.12. РОЗГАЛУЖЕНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА. ПРАВИЛА КІРХГОФА

Введемо необхідні визначення для розгалуженого електричного кола.

Розгалужене електричне коло — електричне коло, яке складається з кількох замкнених кіл, що з’єднані між собою в окремих точках і мають спільні ділянки.

Вузол — точка розгалуження, в якій сходяться не менше трьох провідників. На схемі позначається жирною точкою (рисунок 2.18).

Ділянка кола — частина кола між двома вузлами.

Примітка: Для **ділянки кола** вживаються також тотожні назви: **гілка,** рідше **вітка.**

Перше правило Кірхгофа (застосовується до вузлів кола): алгебраїчна сила струмів, що сходяться у вузлі, дорівнює нулю

$$\sum I_i = 0 . \qquad (2.45)$$

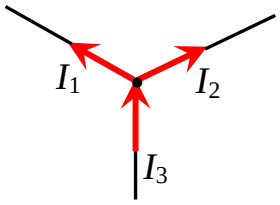


Рисунок 2.18

Сили струмів, які входять у вузол, і сили струмів, які виходять із вузла, беруться з протилежними знаками. Наприклад (див. рис. 2.18),

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0 . \qquad (2.46)$$

Примітка: Зазвичай (*не обов'язково*!) сили струмів, які входять у вузол, беруться зі знаком «+», а сили струмів, які виходять із вузла, — зі знаком «–».

Перше правило Кірхгофа *є наслідком закону збереження електричного заряду в кожній точці електричного кола постійного струму.*

Друге правило Кірхгофа (застосовується до будь-якого замкненого контуру, виділеного в розгалуженому колі): алгебраїчна сума Е.Р.С., що діють в замкненому контурі, дорівнює алгебраїчній сумі добутків сил струмів в окремих ділянках контуру на опори цих ділянок, враховуючи внутрішні опори джерел,

$$\sum_{j=1}^{m} \mathscr{E}_j = \sum_{i=1}^{n} I_i R_i , \qquad (2.47)$$

де m – кількість джерел живлення, n – кількість ділянок в замкненому контурі.

Друге правило Кірхгофа *є наслідком загального закону збереження енергії.*

СКЛАДАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

1) якщо розгалужене коло має r вузлів, то кількість незалежних рівнянь за першим правилом Кірхгофа дорівнює r – 1;

2) якщо в розгалуженому колі можна виділити декілька замкнених контурів, то незалежні рівняння за другим правилом Кірхгофа складаються тільки для тих контурів, які не можна отримати з уже розглянутих, — *незалежних контурів*. Якщо розгалужене коло містить r вузлів і n ділянок, то кількість незалежних рівнянь за другим правилом Кірхгофа для електричного кола дорівнює $n - r + 1$.

ПРАВИЛА СКЛАДАННЯ РІВНЯНЬ

1. ***Довільно*** *позначити стрілками напрямки струмів у ділянках кола*. Якщо наприкінці розрахунків виявиться, що значення сили струму додатне, то його напрямок вибраний правильно; якщо значення сили струму від'ємне, то напрямок струму протилежний напрямку, який був заданий напочатку.

2. *Вибрати замкнені контури й* ***довільні*** *напрямки обходу контурів*. Якщо напрямок струму в ділянці збігається з напрямком обходу, то добуток IR береться зі знаком «+»; у протилежному випадку — зі знаком «–». Якщо напрямок від « – » до « + » у джерелі збігається з напрямком обходу, то Е.Р.С. береться зі знаком «+», у протилежному випадку – зі знаком «–».

Напишемо рівняння за правилами Кірхгофа для електричної схеми, що наведена на рисунку 2.19. Знехтуємо внутрішніми опорами джерел струму.

Задаємо напрямки струмів, наприклад, як показано на рис. 2.19.

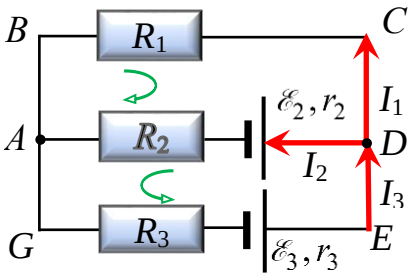


Рисунок 2.19

I правило: схема має $r = 2$ вузли (A і D), отже, необхідно написати $r - 1 = 1$ рівняння. Напишемо рівняння для вузла D:

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0\,.$$

II правило: схема має $n = 3$ ділянки ($ABCD$, AD й $AGED$) й $r = 2$ вузли (A і D). Отже, число рівнянь $n - r + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$.

Рівняння потрібно складати для незалежних контурів. Такими є, зокрема, контури $ABCDA$ й $ADEGA$.

Задаємо напрямки обходу кожного контуру, наприклад як показано на рис. 2.19.

Рівняння за другим правилом Кірхгофа

для контуру $ABCDA$

$$-I_1R_1 + I_2R_2 = -\mathscr{E}_2;$$

для контуру *ADEGA*

$$I_2R_2 + I_3R_3 = \mathscr{E}_3.$$

2.13. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 11

Три джерела струму з Е.Р.С. $\mathscr{E}_1$ = 15 В, $\mathscr{E}_2$ = 25 В, $\mathscr{E}_3$ = 5 В і три резистори опорами R_1 = 50 Ом, R_2 = 100 Ом, R_3 = 75 Ом з'єднані як показано на схемі (рисунок 1). Визначити сили струмів I_1, I_2, I_3 в резисторах. Внутрішнім опором джерел знехтувати.

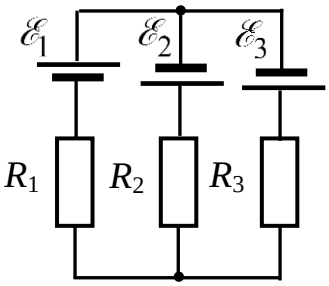


Рисунок 1

Аналіз

Маємо розгалужене електричне коло, тому для обчислення струмів у ділянках кола застосуємо правила Кірхгофа. Довільно задаємо напрямки струмів у ділянках (рисунок 2). Схема має r = 2 вузли (B і E), тому за першим правилом Кірхгофа напишемо $r - 2 = 2 - 1 =$ **1 рівняння**.

Рівняння для вузла B

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0. \qquad (1)$$

Схема має n = 3 ділянки: *BAFE*, *BE* й *BCDE*, тому за другим правилом Кірхгофа напишемо $n - r + 1 = 3 - 2 + 1 =$ **2 рівняння**.

Вибираємо незалежні контури (*BEFAB* і *BCDEB*) і довільно задаємо напрямки обходу контурів. Напишемо рівняння за другим правилом Кірхгофа для контуру *BEFAB*:

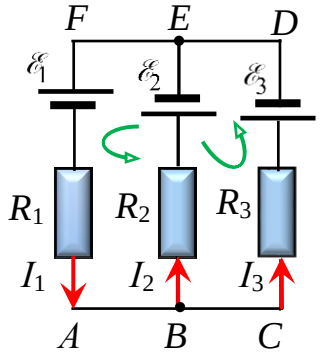


Рисунок 2

$$I_1R_1 + I_2R_2 = -\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2; \qquad (2)$$

для контуру *BCDEB*:

$$-I_2R_2 + I_3R_3 = \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3. \qquad (3)$$

Маємо систему з 3-х рівнянь. Застосуємо *матричний метод* для визначення сили струмів у ділянках. Для цього перепишемо рівняння (1) – (3) як

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0, \qquad (4)$$

$$I_1R_1 + I_2R_2 + 0 = -\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2, \quad (5)$$

$$0 - I_2R_2 + I_3R_3 = \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3. \quad (6)$$

Дано:

$\mathscr{E}_1$ = 15 В, $\mathscr{E}_2$ = 25 В, $\mathscr{E}_3$ = 5 В, R_1 = 50 Ом, R_2 = 100 Ом, R_3 = 75 Ом

$I_1 - ?, I_2 - ?, I_3 - ?,$

Розв'язок

Маємо квадратну матрицю 3х3.

Для розв'язку квадратних матриць 2х2 і 3х3 можна використати *або метод Крамера,* або *метод підстановок*. Для розв'язку більш складних матриць ефективнішим є *метод Гаусса*.

Визначати сили струмів у ділянках електричного кола будемо за методом Крамера.

Обчислимо детермінанти:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ -R_2 & R_3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_3 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (R_2R_3 + R_2 \cdot 0) + 1 \cdot (R_1R_3 - 0 \cdot 0) - 1 \cdot (-R_1R_2 - 0 \cdot R_2) =$$

$$= R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2 = 100 \cdot 75 + 50 \cdot 75 + 50 \cdot 100 = 16250;$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 & R_2 & 0 \\ \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3 & -R_2 & R_3 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ -R_2 & R_3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 & 0 \\ \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3 & R_3 \end{bmatrix} -$$

$$-1 \cdot \begin{bmatrix} -\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 & R_2 \\ \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3 & -R_2 \end{bmatrix} = 0 \cdot (R_2R_3 + R_2 \cdot 0) + 1 \cdot ((-\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)R_3 - 0 \cdot (\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3)) -$$

$$-1 \cdot ((-\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)(-R_2) - (\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3)R_2) = -(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)R_3 - (\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_3)R_2 =$$

$$= -(15 + 25) \cdot 75 - (5 + 15) \cdot 100 = -5000;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & -\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 & 0 \\ 0 & \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3 & R_3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} -\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 & 0 \\ \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3 & R_3 \end{bmatrix} - 0 \cdot \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_3 \end{bmatrix} -$$

$$-1 \cdot \begin{bmatrix} R_1 & -\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 \\ 0 & \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3 \end{bmatrix} = 1 \cdot ((-\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)R_3 - (\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3) \cdot 0) - 0 \cdot (R_1 R_3 - 0 \cdot 0) -$$

$$-1 \cdot ((\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3)R_1 + (\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2) \cdot 0) = -(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)R_3 - (\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3)R_1 =$$

$$= -(15 + 25) \cdot 75 - (25 - 5) \cdot 50 = -4000;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & -\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 \\ 0 & -R_2 & \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} R_2 & -\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 \\ -R_2 & \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3 \end{bmatrix} +$$

$$+1 \cdot \begin{bmatrix} R_1 & -\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 \\ 0 & \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} = 1 \cdot (R_2(\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3) - R_2(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)) +$$

$$+1 \cdot (R_1(\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3) - 0 \cdot (-\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)) + 0 \cdot (-R_1 R_2 - 0 \cdot R_2) =$$

$$= -R_2(\mathscr{E}_3 + \mathscr{E}_1) + R_1(\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3) = -100 \cdot (5 + 15) + 50 \cdot (25 - 5) = -1000.$$

Сили струмів обчислимо за **формулою Крамера**

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{5000}{16250} = -0,308 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{4000}{16250} = -0,246 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{1000}{16250} = -0,062 \text{ А}.$$

Знак «–» означає, що напрямок струму протилежний заданому на рис. 2.

Перевіримо відповіді:

Підставимо розраховані значення сил струмів у рівняння (2) і (3)

2) $I_1 R_1 + I_2 R_2 = -0,308 \cdot 50 + 0,246 \cdot 100 = -15,4 - 24,6 = -40\ B,$
$-\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 = -15 - 25 = -40\ B;$

3) $-I_2 R_2 + I_3 R_3 = 0,246 \cdot 100 - 0,062 \cdot 75 = 24,6 - 4,65 = 19,95\ B,$
$\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3 = 25 - 5 = 20\ B.$

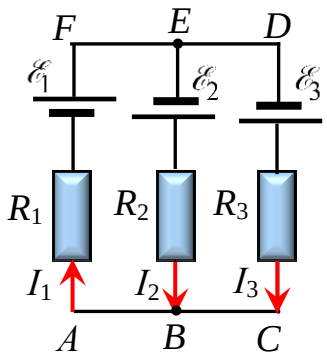


Рисунок 3

Відмінність обчислених значень $\sum_{i=1}^{n} I_i R_i$ і $\sum_{j=1}^{m} \mathscr{E}_j$ останнього рівняння зумовлена похибкою округлення значень сил струмів.

Покажемо дійсні напрямки струмів у ділянках кола (рисунок 3).

Відповідь: $I_1 = 0{,}308$ А, $I_2 = 0{,}246$ А; $I_3 = 0{,}062$ А.

Задача 12

Два джерела струму з Е.Р.С. $\mathscr{E}_1$ = 2,1 В, $\mathscr{E}_2$ = 1,9 В і три резистори опорами R_1 = 45 Ом, R_2 = 10 Ом, R_3 = 10 Ом з'єднані як показано на схемі (рисунок 1). Визначити сили струмів I_1, I_2, I_3 в резисторах. Внутрішнім опором джерел струму знехтувати.

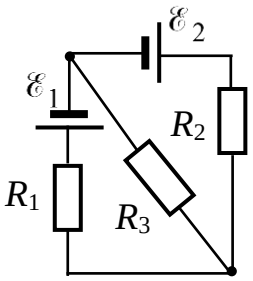


Рисунок 1

Аналіз

Маємо розгалужене електричне коло, тому для обчислення сили струмів у ділянках кола застосуємо правила Кірхгофа. Довільно задаємо напрямки струмів у ділянках (рисунок 2). Схема має r = 2 вузли (C і F), тому за першим правилом Кірхгофа напишемо $r - 2 = 2 - 1 = 1$ рівняння.

Для вузла F

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0\,. \qquad (1)$$

Схема має n = 3 ділянки: $FABC$, FC і $FEDC$, тому за другим правилом Кірхгофа напишемо $n - r + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$ рівняння.

Вибираємо незалежні контури ($FABCF$ і $FEDCF$) та довільно задаємо напрямки обходу контурів. Складаємо рівняння за другим правилом Кірхгофа для контуру $FABCF$

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 = -\mathscr{E}_1\,; \qquad (2)$$

для контуру $FEDCF$

$$-I_2 R_2 + I_3 R_3 = -\mathscr{E}_2\,. \qquad (3)$$

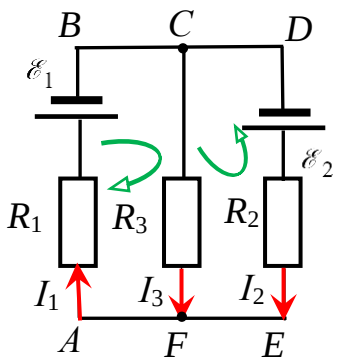


Рисунок 2

Маємо систему з 3-х рівнянь. Коли система складається з невеликої кількості рівнянь, як в нашому випадку, тоді можна застосувати **метод підстановок.**

Отримаємо вираз для I_1 із рівняння (1)

$$I_1 = I_2 + I_3. \tag{4}$$

Підставимо вираз для I_1 в рівняння (2)

$$\left(I_2 + I_3\right)R_1 + I_3R_3 = -\mathscr{E}_1, \tag{5}$$

розкриємо дужки

$$I_2R_1 + I_3R_1 + I_3R_3 = -\mathscr{E}_1. \tag{6}$$

Віднімемо від лівої частини рівняння (3) ліву частину рівняння (6), а від правої частини — праву частину

$$-I_2R_2 + I_3R_3 - I_2R_1 - I_3R_1 - I_3R_3 = -\mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_1, \tag{7}$$

$$I_2R_2 + I_2R_1 + I_3R_1 = \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1. \tag{8}$$

Звідси

$$I_3 = \frac{\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1 - I_2\left(R_2 + R_1\right)}{R_1}. \tag{9}$$

Підставимо вираз для I_3 в рівняння (3)

$$-I_2R_2 + \frac{\left[\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1 - I_2\left(R_2 + R_1\right)\right]R_3}{R_1} = -\mathscr{E}_2. \tag{10}$$

$$-I_2R_1R_2 + \left(\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1\right)R_3 - I_2\left(R_2 + R_1\right)R_3 = -\mathscr{E}_2R_1. \tag{11}$$

Звідси

$$I_2 = \frac{\left(\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1\right)R_3 + \mathscr{E}_2R_1}{R_1R_2 + \left(R_2 + R_1\right)R_3}. \tag{12}$$

Силу струму I_1 визначимо з рівняння (1)

$$I_1 = I_2 + I_3. \tag{13}$$

Дано:

$\mathscr{E}_1 = 2{,}1$ В

$\mathscr{E}_2 = 1{,}9$ В

$R_1 = 45$ Ом

$R_2 = 10$ Ом

$R_3 = 10$ Ом

$I_1 - ?\ I_2 - ?\ I_3 - ?$

Розв'язок:

$$I_2 = \frac{(1{,}9 - 2{,}1)\cdot 10 + 1{,}9 \cdot 45}{45 \cdot 10 + (45 + 10)\cdot 10} = 0{,}0835 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{1{,}9 - 2{,}1 - 0{,}0835 \cdot (45 + 10)}{45} = -0{,}1065 \text{ А};$$

$$I_1 = -0{,}1065 + 0{,}0835 = -0{,}0230 \text{ А}.$$

Знаки «–» для сил струмів I_1 і I_2 означають, що дійсні напрямки струмів протилежні тим, що були задані напочатку.

Перевіримо відповіді: підставимо отримані значення сил струмів у рівняння (2) і (3):

2) $-0{,}0230 \cdot 45 - 0{,}1065 \cdot 10 = -2{,}1$ В; $\mathscr{E}_1 = -2{,}1$;

3) $-0{,}1065 \cdot 10 - 0{,}0835 \cdot 10 = -1{,}9$ В; $\mathscr{E}_2 = -1{,}9$.

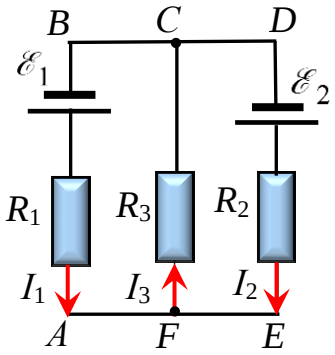


Рисунок 3

Покажемо дійсні напрямки струмів у ділянках електричного кола (рисунок 3).

Відповідь: $I_1 = 0{,}0230$ А, $I_2 = 0{,}0835$ А; $I_3 = 0{,}1065$ А.

2.14. ПОСЛІДОВНЕ Й ПАРАЛЕЛЬНЕ З'ЄДНАННЯ ОПОРІВ. РОЗШИРЕННЯ МЕЖ ВИМІРЮВАННЯ АМПЕРМЕТРА Й ВОЛЬТМЕТРА

ПОСЛІДОВНЕ З'ЄДНАННЯ РЕЗИСТОРІВ (ОПОРІВ)

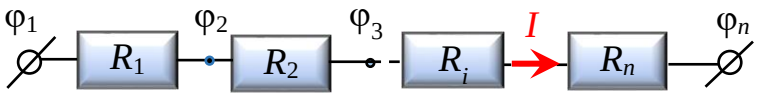


Рисунок 2.20

Напруга U (різниця потенціалів $\varphi_1 - \varphi_n$) на ділянці, що містить n послідовно з'єднаних резисторів (рисунок 2.20)

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_3 - \varphi_4 + ... + \varphi_{n-1} - \varphi_n = \varphi_1 - \varphi_n =$$

$$= U_1 + U_2 + ... + U_n = U = R_1 I + R_2 I + ... + R_N I = I \sum_{i=1}^{n} R_i,$$

$$U = I \sum_{i=1}^{n} R_i. \qquad (2.48)$$

Звідси

$$\frac{U}{I} = \sum_{i=1}^{n} R_i = R.$$

Отже, **загальний (або еквівалентний) опір *n* послідовно з'єднаних резисторів** визначається співвідношенням

$$\boxed{R = \sum_{i=1}^{n} R_i}. \qquad (2.49)$$

Послідовне з'єднання резисторів застосовується *для розширення межі вимірювання вольтметра* (рисунок 2.21). Щоб розширити межу вимірювання вольтметра до нього **послідовно** під'єднують **додатковий опір** $R_д$ (див. рис. 2.21).

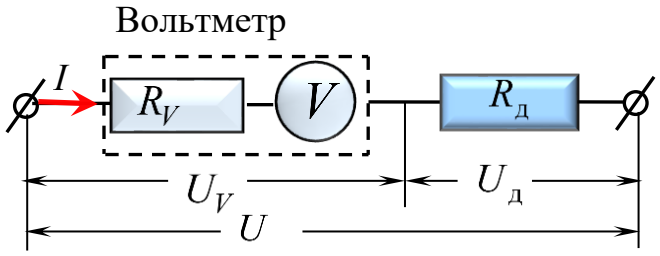


Рисунок 2.21

Позначимо як U напругу, яка вимірюється, як U_V – допустиму напругу на вольтметрі, як $U_Д$ – напругу на додатковому опорі

Тоді

$$U = U_V + U_д = I\ R_V + R_д\ , \qquad (2.50)$$

де I – сила струму в ділянці; R_V – опір вольтметра.

Коефіцієнт *n* розширення межі вимірювання вольтметра

$$n = \frac{U}{U_V} = \frac{U_V + U_д}{U_V} = 1 + \frac{U_д}{U_V} = 1 + \frac{IR_д}{IR_V} = 1 + \frac{R_д}{R_V}. \qquad (2.51)$$

Звідси **додатковий опір вольтметра**

$$\boxed{R_д = (n-1)R_V}. \qquad (2.52)$$

Ціна поділки шкали аналогового вольтметра з додатковим опором $C_V = \dfrac{U}{N} = \dfrac{nU_V}{N}$, де N – кількість поділок шкали, зростає в n разів.

ПАРАЛЕЛЬНЕ З'ЄДНАННЯ РЕЗИСТОРІВ (ОПОРІВ)

Розглянемо розгалужене електричне коло, що надане на рисунку 2.22, *а*.

Задаємо напрямки струмів у ділянках як показано на рисунку. Схема має $r = 2$ вузли. За першим правилом Кірхгофа складаємо одне рівняння: для вузла A

$$I_1 + I_2 - I = 0. \tag{2.53}$$

Звідси

$$I = I_1 + I_2. \tag{2.54}$$

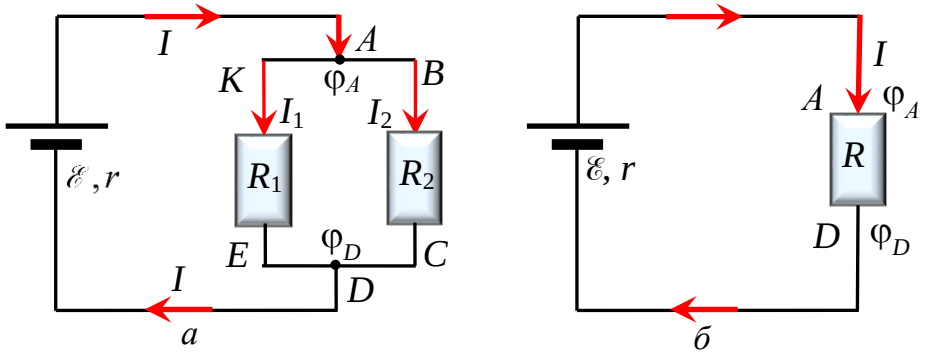


Рисунок 2.22

Позначимо: R – еквівалентний опір ділянки AD; $U = \varphi_A - \varphi_D$ – напруга на ділянці AD. Зазначимо, що I – сила струму, який проходить в еквівалентному опорі R ділянки AD (див. рис. 2.22, *б*).

Напруга на резисторі R_1

$$U_1 = \varphi_A - \varphi_D = U = I_1 R_1, \tag{2.55}$$

звідси

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U}{R_1}. \tag{2.56}$$

Напруга на резисторі R_2

$$U_2 = \varphi_A - \varphi_D = U = I_2 R_2, \tag{2.57}$$

звідси

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U}{R_2}. \qquad (2.58)$$

Напруга на еквівалентному опорі R

$$U = IR, \qquad (2.59)$$

звідси

$$I = \frac{U}{R}. \qquad (2.60)$$

Підставимо вирази (2.56, 2.58, 2.60) в рівняння (2.54)

$$\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}.$$

Звідси

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \qquad (2.61)$$

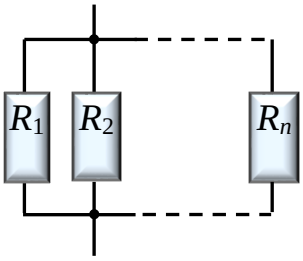


Рисунок 2.23

В загальному випадку (рисунок 2.23) **загальний (або еквівалентний) опір *R* паралельно з'єднаних *n* резисторів** визначається зі співвідношення

$$\boxed{\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}. \qquad (2.62)$$

Паралельне з'єднання резисторів застосовується *для розширення межі вимірювання амперметра*. Для цього **паралельно амперметру** під'єднується опір, який називається **шунтом** (рисунок 2.24).

Позначимо як I силу струму, що вимірюється, як I_A допустиму силу струму в амперметрі, як $I_ш$ силу струму в шунті.

За першим правилом Кірхгофа

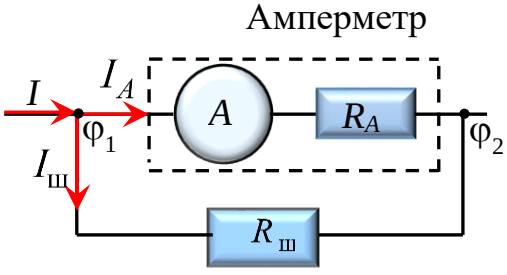


Рисунок 2.24

$$I = I_A + I_ш. \qquad (2.63)$$

З рис. 2.24 випливає, що напруга U_A на амперметрі дорівнює напрузі $U_ш$ на шунті

$$U_A = U_ш.$$

Отже,

$$I_A R_A = I_ш R_ш, \qquad (2.64)$$

де R_A – опір амперметра; $R_ш$ – опір шунта.

Коефіцієнт *n* розширення межі вимірювання амперметра

$$n=\frac{I}{I_A}=\frac{I_A+I_ш}{I_A}=1+\frac{I_ш}{I_A}. \qquad (2.65)$$

Врахувавши (2.64), отримуємо

$$n=1+\frac{R_A}{R_ш}. \qquad (2.66)$$

Звідси **опір шунта**

$$\boxed{R_ш=\frac{R_A}{n-1}}. \qquad (2.67)$$

Ціна поділки шкали аналогового амперметра з шунтом $C_A=\frac{I}{N}=\frac{nI_A}{N}$, де N – кількість поділок шкали, зростає в n разів.

2.15. ПОСЛІДОВНЕ Й ПАРАЛЕЛЬНЕ З'ЄДНАННЯ ОДНАКОВИХ ДЖЕРЕЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

ПОСЛІДОВНЕ З'ЄДНАННЯ

Маємо *n* однакових джерел постійного струму (рисунок 2.25) з

E.P.C. $\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_3=....=\mathscr{E}_n=\mathscr{E}_0$

і **внутрішніми опорами** $r_1=r_2=....=r_n=r_0$.

За законом Ома для замкненого кола

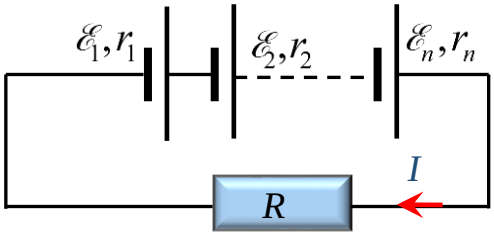


Рисунок 2.25

$$I\ nr_0+R\ =n\mathscr{E}_0,$$

Звідси **E.P.C. батареї**

$$\boxed{\mathscr{E}=n\mathscr{E}_0}, \qquad (2.68)$$

її **внутрішній опір**

$$\boxed{r=nr_0}. \qquad (2.69)$$

ПАРАЛЕЛЬНЕ З'ЄДНАННЯ

Маємо *n* однакових джерел постійного струму (рисунок 2.26) з

E.P.C. $\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_3=....=\mathscr{E}_n=\mathscr{E}_0$

і **внутрішніми опорами** $r_1 = r_2 = ... = r_n = r_0$.

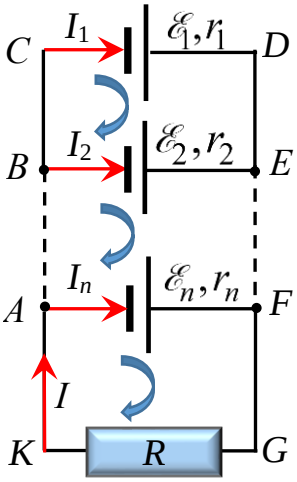


Рисунок 2.26

Задаємо напрямки струмів у ділянках кола як показано на рисунку. За першим правилом Кірхгофа

$$-I + I_1 + I_2 + ... + I_n = 0. \qquad (2.70)$$

Звідси

$$I = I_1 + I_2 + ... + I_n, \qquad (2.71)$$

Напишемо рівняння за другим правилом Кірхгофа для контурів, які утворені двома сусідніми ділянками з джерелами струму (тобто за виключенням контуру *AFGKA*)

$$r_1 I_1 - r_2 I_2 = r_0 I_1 - r_0 I_2 = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 = 0;\ r_2 I_2 - r_3 I_3 = r_0 I_2 - r_0 I_3 = \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3 = 0;\ .....;$$
$$r_{n-1} I_{n-1} - r_n I_n = r_0 I_{n-1} - r_0 I_n = \mathscr{E}_{n-1} - \mathscr{E}_n = 0. \qquad (2.72)$$

Звідси, враховуючи (2.71), отримуємо

$$I_1 = I_2 = I_3 = ... = I_n = \frac{I}{n}. \qquad (2.73)$$

За другим правилом Кірхгофа для кожного *i*-го (i = 1, 2, 3,…., n) контуру, який складається з двох ділянок: одна містить навантаження R , а інша — джерело струму з $\mathscr{E}_i = \mathscr{E}_0$ і $r_i = r_0$, можна написати

$$RI + r_0 \frac{I}{n} = \mathscr{E}_0. \qquad (2.74)$$

Звідси

$$I\left(R + \frac{r_0}{n}\right) = \mathscr{E}_0. \qquad (2.75)$$

Отже, **Е.Р.С. батареї**

$$\boxed{\mathscr{E} = \mathscr{E}_0}, \qquad (2.76)$$

її **внутрішній опір**

$$\boxed{r = r_0 / n}. \qquad (2.77)$$

2.16. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 13

Визначити еквівалентний опір ділянки кола, яка надана на рисунку 1. Опори $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R$.

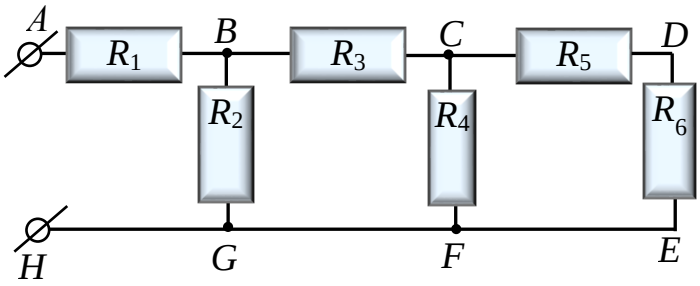


Рисунок 1

Аналіз

З рис. 1 випливає, що резистори R_5 і R_6 з'єднані послідовно. Враховуючи, що опори усіх резисторів однакові, визначимо еквівалентний опір ділянки *CDEF*

$$R_{5,6} = R_5 + R_6 = R + R = 2R. \qquad (1)$$

Схема набуває вигляду як показано на рисунку 2.

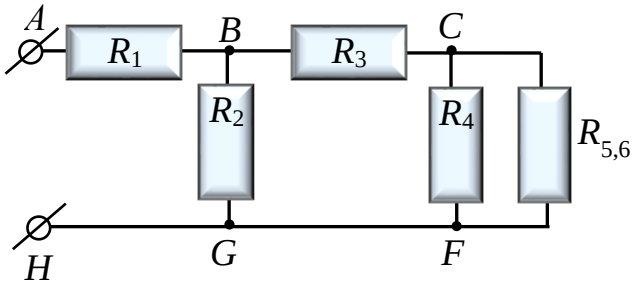


Рисунок 2

Резистори R_4 і R_{56} з'єднані паралельно. Еквівалентний опір ділянки *CF* визначимо зі співвідношення

$$\frac{1}{R_{4,5,6}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{5,6}} = \frac{R_{5,6} + R_4}{R_4 R_{5,6}} = \frac{2R + R}{2RR} = \frac{3}{2R}. \qquad (2)$$

Звідси

$$R_{4,5,6} = \frac{2R}{3}. \qquad (3)$$

Схема набуває вигляду як показано на рисунку 3. Опори R_3 і $R_{4,5,6}$ з'єднані послідовно. Еквівалентний опір ділянки *BCFG*

$$R_{3,4,5,6} = R_3 + R_{4,5,6} = R + \frac{2R}{3} = \frac{5}{3}R. \qquad (4)$$

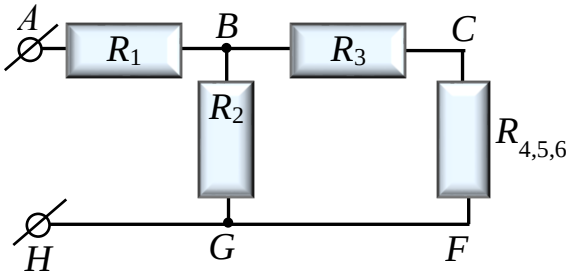


Рисунок 3

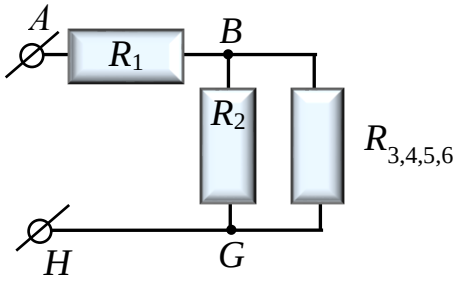


Рисунок 4

Схема набуває вигляду як показано на рисунку 4. Еквівалентний опір ділянки *BG* визначимо зі співвідношення

$$\frac{1}{R_{2,3,4,5,6}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{3,4,5,6}} = \frac{R_{3,4,5,6} + R_2}{R_2 R_{3,4,5,6}} = \frac{5R/3 + R}{\frac{5RR}{3}} = \frac{8R \cdot 3}{3 \cdot 5RR} = \frac{8}{5R}. \qquad (5)$$

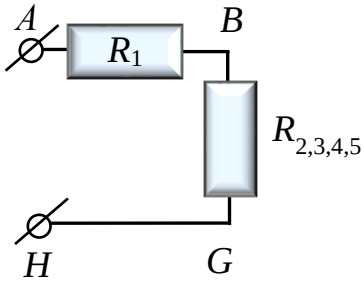


Рисунок 5

Звідси

$$R_{2,3,4,5,6} = \frac{5R}{8}. \qquad (6)$$

Схема набуває вигляду як показано на рисунку 5. Опори R_1 і $R_{2,3,4,5,6}$ з'єднані послідовно. Еквівалентний опір ділянки *ABGH*

$$R_{1,2,3,4,5,6} = R_1 + R_{2,3,4,5,6} = R + \frac{5R}{8} = \frac{13}{8}R = 1{,}625R. \qquad (7)$$

Схема набуває вигляду як показано на рисунку 6.

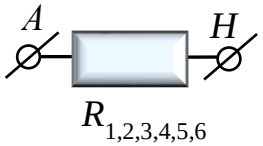


Рисунок 6

Відповідь: $R_{1,2,3,4,5,6} = 1{,}625R$.

Задача 14

Визначити еквівалентний опір з'єднання провідників у вигляді шестикутника (рисунок 1). Опір кожного дроту r = 1 Ом.

Аналіз

При розв'язанні таких задач треба виходити з того, що точки, які мають однакові потенціали, можна з'єднувати й роз'єднувати.

Схема, яка зображена на рис. 1, симетрична відносно осі FC, на якій знаходяться точки входу й виходу ділянки (точки, до яких прикладена зовнішня напруга). Точки A і E симетричні відносно осі FC. Отже, якщо до ділянки кола прикладена напруга й в ній проходить струм, то потенціали цих точок однакові, тобто $\varphi_A = \varphi_E$. Аналогічні міркування щодо точок B й D приводять до висновку, що $\varphi_B = \varphi_D$. Тому, якщо з'єднати дротом точки A та E, то струму в ньому не буде. Аналогічні міркування справедливі також для точок B й D. Отже, можна з'єднати точки A й E в один вузол, і точки B й D теж в один вузол, не змінивши опір кола.

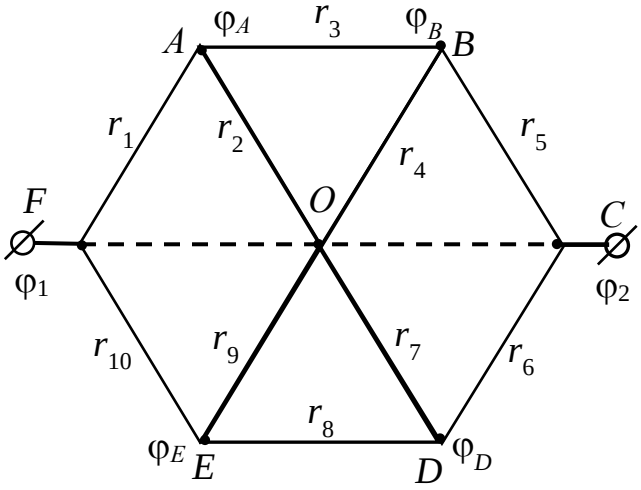


Рисунок 1

З іншого боку, потенціали точок A й B однакові за модулем, але мають різний знак: $+\varphi_A$ й $-\varphi_B$, $|\varphi_A| = |\varphi_B|$. Аналогічно однаковими за модулем, але різними за знаком, є потенціали точок E і D: $+\varphi_E$ і $-\varphi_D$, $|\varphi_E| = |\varphi_D|$. Внаслідок цього потенціали в точці O будуть також рівні за модулем, але різного знаку — два зі знаком «+» і два зі знаком «–». Тоді потенціал у точці O $\varphi_O = 0$. Роз'єднання кола в точці O не викличе зміни опору кола. Отже, схему можна надати як зображено на рисунку 2.

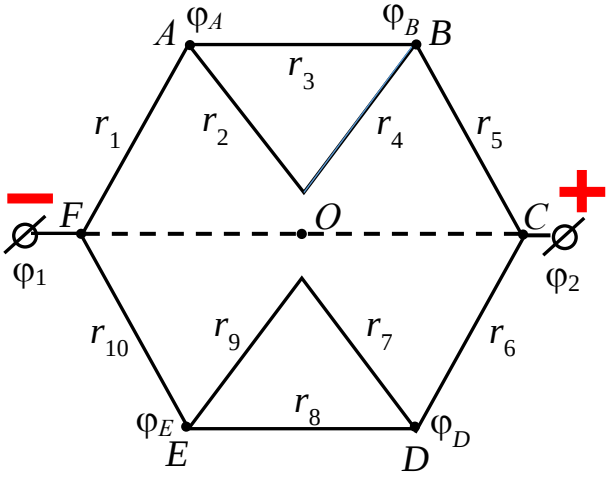


Рисунок 2

Оскільки опори r_2 і r_4 (див. рис. 2) з'єднані послідовно, то еквівалентний опір $r_{2,4}$

$$r_{2,4} = r_2 + r_4 = 2r\,. \tag{1}$$

Опори r_9 і r_7 (див. рис. 2) з'єднані послідовно, тоді еквівалентний опір $r_{9,7}$

$$r_{9,7} = r_9 + r_7 = 2r. \tag{2}$$

Врахувавши зазначене раніше, а також вирази (1) і (2), вихідну схему можна надати в більш звичному вигляді як показано на рисунку 3.

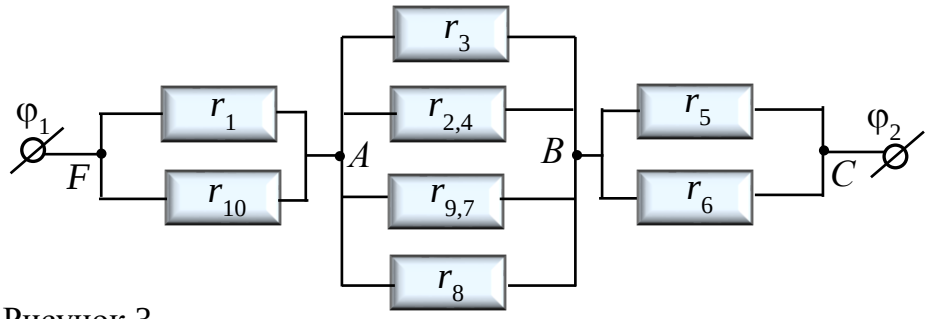


Рисунок 3

Еквівалентний опір ділянки *AF* визначимо зі співвідношення

$$\frac{1}{r_{AF}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_{10}} = \frac{r_1 + r_{10}}{r_1 r_{10}} = \frac{r + r}{r \cdot r} = \frac{2r}{r^2} = \frac{2}{r}, \tag{3}$$

$$r_{AF} = \frac{r}{2}. \tag{4}$$

Еквівалентний опір ділянки *AB* визначимо зі співвідношення

$$\frac{1}{r_{AB}} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_{2,4}} + \frac{1}{r_{9,7}} + \frac{1}{r_8} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{r}, \tag{5}$$

$$r_{AB} = \frac{r}{3}. \tag{6}$$

Еквівалентний опір ділянки *BC* визначимо зі співвідношення

$$\frac{1}{r_{BC}} = \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_6} = \frac{r_5 + r_6}{r_5 r_6} = \frac{r + r}{r \cdot r} = \frac{2r}{r^2} = \frac{2}{r}, \tag{7}$$

$$r_{BC} = \frac{r}{2}. \tag{8}$$

Маємо наступне послідовне з'єднання опорів (рисунок 4).

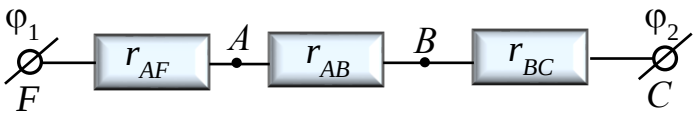


Рисунок 4

Еквівалентний опір ділянки FC

$$r_{FC} = r_{AF} + r_{AB} + r_{BC} = \frac{r}{2} + \frac{r}{2} + \frac{r}{3} = \frac{4r}{3}. \quad (9)$$

Дано:	**Розв'язок:**
r = 1 Ом	$r_{FC} = \frac{4 \cdot 1}{3} = \frac{4}{3}$ Ом $= 1{,}33$ Ом.
r_{FC} = ?	**Відповідь:** $r_{FC} = 1{,}33$ Ом.

Задача 15

До мережі з напругою 120 В підключені три однакові лампи: дві — –паралельно, третя — послідовно. Накреслити схему та визначити напругу на кожній лампі. В якій лампі виділяється більша потужність?

Аналіз

Електрична схема, що відповідає умові задачі, наведена на рисунку 1. Задаємо напрямки струмів у ділянках кола. За законом Ома для однорідної ділянки електричного кола

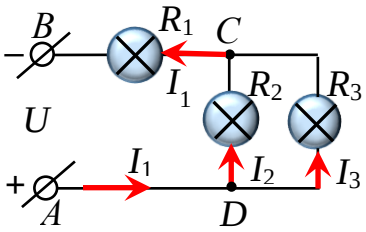


Рисунок 1

напруга

на лампі опором R_1

$$U_1 = I_1 R_1, \quad (1)$$

на лампі опором R_2

$$U_2 = I_2 R_2, \quad (2)$$

на лампі опором R_3

$$U_3 = I_3 R_3, \quad (3)$$

де I_1, I_2, I_3 – відповідно сили струмів в опорах R_1, R_2, R_3.

Сила струму

$$I_1 = \frac{U}{R}, \quad (4)$$

де U – напруга в мережі; R – еквівалентний опір ділянки електричного кола, яка під'єднана до мережі.

Визначимо R. Дві лампочки опорами R_2 і R_3 підключені паралельно. Еквівалентний опір $R_{2,3}$ ділянки AC, що містить ці лампочки, визначимо зі співвідношення

$$\frac{1}{R_{2,3}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}, \tag{5}$$

$$R_{2,3} = \frac{R_3 R_2}{R_2 + R_3}. \tag{6}$$

Електрична схема набуває вигляду як показано на рисунку 2. Визначимо еквівалентний опір ділянки $ADCB$. Опори R_1 і $R_{2,3}$ з'єднані послідовно. Еквівалентний опір R

$$R = R_1 + R_{2,3} = R_1 + \frac{R_3 R_2}{R_2 + R_3}. \tag{7}$$

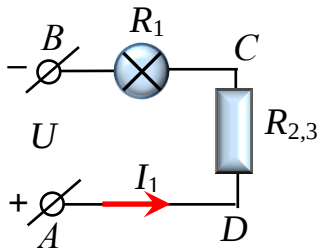


Рисунок 2

За умовою задачі $R_1 = R_2 = R_3$, тому

$$R = R_1 + \frac{R_1 R_1}{R_1 + R_1} = \frac{3}{2} R_1. \tag{8}$$

Отже,

$$I_1 = \frac{2U}{3R_1} \tag{9}$$

і

$$U_1 = \frac{2UR_1}{3R_1} = \frac{2U}{3}. \tag{10}$$

Напруги на опорах R_2 і R_3 дорівнюють одна іншій та напрузі на еквівалентному опорі $R_{2,3}$, тобто

$$U_2 = U_3 = U_{2,3}. \tag{11}$$

Напруга на опорі $R_{2,3}$ (див. рис. 2)

$$U_{2,3} = I_1 R_{2,3} = \frac{2UR_3 R_2}{3R_1(R_2 + R_3)} = \frac{2UR_1 R_1}{3R_1(R_1 + R_1)} = \frac{U}{3}. \tag{12}$$

Отже,

$$U_2 = U_3 = \frac{U}{3}. \tag{13}$$

Потужність, яка виділяється в лампі опором R_1,

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = \frac{4U^2}{9R_1}, \tag{14}$$

в лампі опором R_2,

$$P_2 = \frac{U_2^2}{R_2} = \frac{U^2}{9R_1}, \tag{15}$$

в лампі опором R_3,

$$P_3 = \frac{U_3^2}{R_3} = \frac{U^2}{9R_1}. \tag{16}$$

Дано:	**Розв'язок:**
U = 120 В	$U_1 = \frac{2 \cdot 120}{3} = 80$ В;
$U_1 - ?$	$U_2 = U_3 = \frac{120}{3} = 40$ В.
$U_2 - ?$	$\frac{P_2}{P_3} = \frac{U^2}{9R_1} : \frac{U^2}{9R_1} = 1;$
$U_3 - ?$	$\frac{P_1}{P_2} = \frac{4U^2}{9R_1} : \frac{U^2}{9R_1} = 4;$
$\frac{P_1}{P_2} - ?$	$\frac{P_1}{P_3} = \frac{4U^2}{9R_1} : \frac{U^2}{9R_1} = 4.$
$\frac{P_1}{P_3} - ?$	
$\frac{P_2}{P_3} - ?$	

Відповідь: $U_1 = 80$ В; $U_2 = U_3 = 40$ В.

В лампах опорами R_2 і R_3 виділяється однакова потужність, а в лампі опором R_1 виділяється потужність більша в 4 рази за потужність в кожній з ламп опорами R_2 і R_3 .

Задача 16

Резистори схеми, що надана на рисунку 1, мають опори $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$. Різниця потенціалів, що прикладена до ділянки електричного кола, $\varphi_1 - \varphi_2 = 10$ В. Потужність, яка виділяється в резисторі R_1, дорівнює $P_1 = 18$ Вт. Визначити напругу на резисторі R_4 й потужність, яка виділяється в ньому.

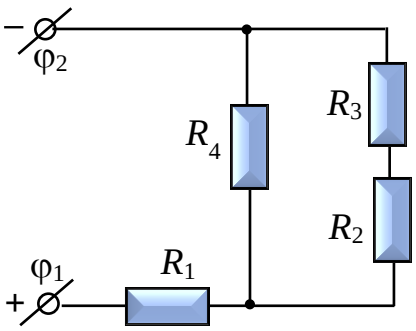


Рисунок 1

Аналіз

Задаємо напрямки струмів у ділянках електричного кола (рисунок 2). Зазначимо, що опори резисторів $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$.

Напруга U_4 на опорі R_4 дорівнює напрузі на ділянці електричного кола AD, яка складається з двох паралельних ділянок AD і $ABCD$. Визначимо еквівалентний опір цієї ділянки. Ділянка $ABCD$ містить послідовно з'єднані резистори R_3 і R_2. Еквівалентний опір цієї ділянки

$$R_{2,3} = R_2 + R_3 = 2R. \qquad (1)$$

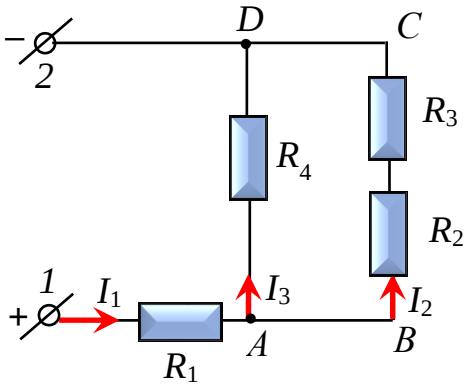


Рисунок 2

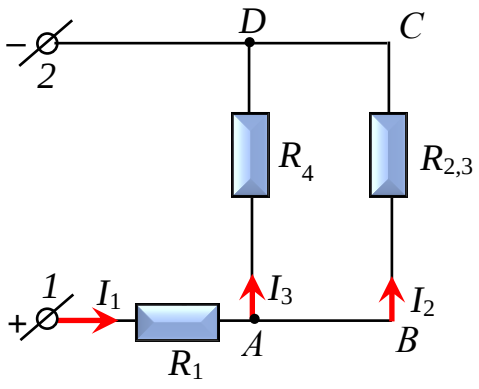


Рисунок 3

Отримуємо коло, що зображене на рисунку 3. Тепер визначимо еквівалентний опір $R_{2,3,4}$ ділянки AD зі співвідношення

$$\frac{1}{R_{2,3,4}} = \frac{1}{R_{2,3}} + \frac{1}{R_4} = \frac{R_4 + R_{2,3}}{R_{2,3}R_4} = \frac{R + 2R}{2RR} = \frac{3}{2R}, \qquad (2)$$

$$R_{2,3,4} = \frac{2R}{3}. \qquad (3)$$

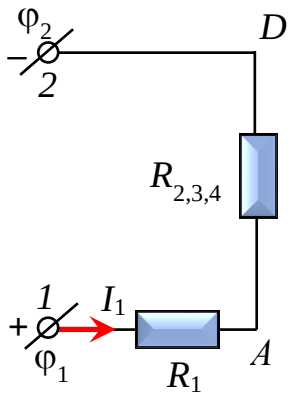


Рисунок 4

Отримуємо коло, що наведене на рисунку 4. Визначимо еквівалентний опір ділянки 1*AD*2

$$R_{1,2,3,4} = R_{2,3,4} + R_1 = \frac{2R}{3} + R = \frac{5R}{3}. \qquad (4)$$

Маємо ділянку електричного кола, яка наведена на рисунку 5.

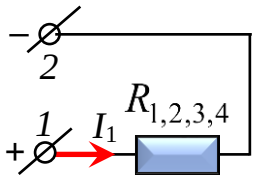


Рисунок 5

Сила струму I_1

$$I_1 = \frac{U}{R_{1,2,3,4}} = \frac{3U}{5R}, \qquad (5)$$

де $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – напруга, що прикладена до ділянки кола.

Напруга U_1 на резисторі R_1

$$U_1 = I_1 R_1 = \frac{3UR}{5R} = \frac{3U}{5}. \qquad (6)$$

Тоді напругу U_4 на резисторі R_4, яка дорівнює напрузі на ділянці AD (див. вище), можна визначити як

$$U_4 = U - U_1 = U - \frac{3}{5}U = \frac{2}{5}U. \qquad (7)$$

Потужність P_4, яка виділяється в резисторі R_4,

$$P_4 = \frac{U_4^2}{R_4} = \frac{U_4^2}{R} = \frac{4U^2}{25R}. \qquad (8)$$

За умовою задачі задана потужність P_1, яка виділяється в резисторі R_1,

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = \frac{9U^2}{25R}. \qquad (9)$$

Звідси

$$R = \frac{9U^2}{25P_1}, \qquad (10)$$

тоді

$$P_4 = \frac{4U^2 25P_1}{25 \cdot 9U^2} = \frac{4}{9}P_1. \qquad (11)$$

Дано:	**Розв'язок:**
$U = \varphi_1 - \varphi_2 = 10$ В	$U_4 = \frac{2 \cdot 10}{5} = 4$ В;
$P_1 = 18$ Вт	$P_4 = \frac{4 \cdot 18}{9} = 8$ Вт.
$U_4 - ?$	**Відповідь:** $U_4 = 4$ В; $P_4 = 8$ Вт.
$P_4 - ?$	

Задача 17

Батарея складається з 10-и однакових послідовно з'єднаних елементів (рисунок 1). Е.Р.С. кожного елемента 3 В, внутрішній опір — 0,1 Ом. До батареї під'єднаний резистор опором 20 Ом. Визначити: силу струму в колі; повну потужність, яка виділяється в колі; кількість теплоти, яка виділиться в колі за 10 хв.; коефіцієнт корисної дії (к.к.д.) батареї.

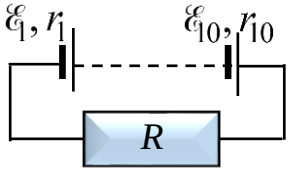


Рисунок 1

Аналіз

Електричне коло містить батарею, яка складається з 10-и однакових послідовно з'єднаних елементів. Визначимо Е.Р.С. $\mathscr{E}$ і внутрішній опір r батареї

$$\mathscr{E} = n\mathscr{E}_0, \quad r = nr_0, \qquad (1)$$

де $\mathscr{E}_0$ – Е.Р.С., r_0 – внутрішній опір одного елемента; n – кількість елементів.

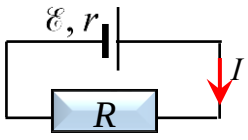


Рисунок 2

Тоді електричне коло набуває вигляду як показано на рисунку 2. За законом Ома для замкненого кола сила струму I

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r} = \frac{n\mathscr{E}_0}{R + nr_0}. \qquad (2)$$

Повна потужність, яка виділяється в колі,

$$P = I\mathscr{E} = \frac{n\mathscr{E}_0 n\mathscr{E}_0}{R + nr_0} = \frac{n^2\mathscr{E}_0^2}{R + nr_0}. \qquad (3)$$

Кількість теплоти Q, яка виділиться в електричному колі (у внутрішньому опорі r батареї та в зовнішньому опорі R) за час t, визначимо за законом Джоуля-Ленца

$$Q = I^2Rt + I^2rt = I^2\left(R+r\right)t = \left(\frac{n\mathscr{E}_0}{R+nr_0}\right)^2\left(R+nr_0\right)t = \frac{\left(n\mathscr{E}_0\right)^2 t}{R+nr_0}. \qquad (4)$$

Коефіцієнт корисної дії η батареї

$$\eta = \frac{P_a}{P} = \frac{I^2R}{I\mathscr{E}} = \frac{IR}{\mathscr{E}} = \frac{IR}{I\left(R+r\right)} = \frac{R}{R+r} = \frac{1}{1+\frac{r}{R}} = \frac{1}{1+\frac{nr_0}{R}}, \qquad (5)$$

де P_a – активна (корисна) потужність, що виділяється в зовнішньому опорі.

Структура формул (2, 3, 4, 5) збігається зі структурою формул, за якими визначаються відповідні величини, тому формули перевірки не потребують.

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$\mathscr{E}_0 = 3$ В $r_0 = 0{,}1$ Ом $n = 10$ $R = 20$ Ом $t = 10$ хв	600 с	$I = \frac{10\cdot 3}{20+10\cdot 0{,}1} = 1{,}4$ А; $P = \frac{10^2\cdot 3^2}{20+10\cdot 0{,}1} = 42{,}9$ Вт; $Q = \frac{(10\cdot 3)^2\cdot 600}{20+10\cdot 0{,}1} = 25714$ Дж $= 25{,}7$ кДж; $\eta = \frac{1}{1+\frac{10\cdot 0{,}1}{20}} = 0{,}95;\ \ \eta = 95\,\%.$
$I - ?\ P - ?$ $Q - ?\ \eta - ?$		**Відповідь:** $I = 1{,}4$ А; $P = 42{,}9$ Вт; $Q = 25{,}7$ кДж; $\eta = 95\,\%$.

2.17. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

Надайте визначення сили струму, густини струму, а також їхні одиниці.

Які частинки є носіями заряду в металах?

Яким приладом вимірюється сила струму в ділянці електричного кола? Як прилад підключається до ділянки електричного кола, в якій вимірюється сила струму? Як визначається ціна поділки шкали аналогового вимірювального приладу?

Поясніть принцип дії джерела постійного струму.

Як визначається напруга на однорідній та неоднорідній ділянках електричного кола?

Яким приладом вимірюється напруга на ділянці електричного кола? Як прилад підключається до ділянки електричного кола, на якій вимірюється напруга? Як визначається ціна поділки шкали аналогового вимірювального приладу?

Сформулюйте закон Ома для однорідної та неоднорідної ділянок електричного кола.

Як залежить електричний опір металевого провідника від температури в діапазоні температур, близьких до кімнатної?

Сформулюйте закон Ома для замкненого електричного кола.

Сформулюйте 1-е й 2-е правила Кірхгофа.

Як визначається Е.Р.С. і внутрішній опір батареї, яка складається з n послідовно з'єднаних однакових акумуляторів?

Як визначається Е.Р.С. і внутрішній опір батареї, яка складається з n паралельно з'єднаних однакових акумуляторів?

Як визначається еквівалентний опір ділянки електричного кола, яка складається з n послідовно з'єднаних резисторів?

Як визначається еквівалентний опір ділянки електричного кола, яка складається з n паралельно з'єднаних резисторів?

Сформулюйте закон Джоуля-Ленца.

Яка потужність, що виділяється в електричному колі, називається активною або корисною? Надайте формулу для її розрахунку.

Як визначається повна теплова потужність, що виділяється в електричному колі?

Надайте визначення коефіцієнта корисною дії (к.к.д., η) джерела постійного струму. Наведіть формулу для його розрахунку.

2.18. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Визначити напругу й потужність, яка виділяється в резисторах R_1, R_2 й R_3, якщо амперметр показує силу струму 3 А (рисунок 1). Опори резисторів R_1 = 4 Ом, R_2 = 2 Ом, R_3 = 2 Ом.

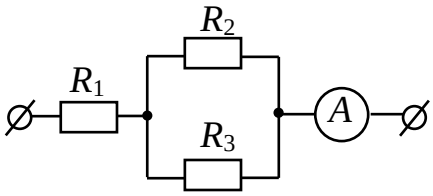


Рисунок 1

Відповідь: U_1 = 12 В; $U_2 = U_3$ = 3 В; P_1 = 36 Вт; $P_2 = P_3$ = 4,5 Вт.

2. Визначити напрямок і силу струму в ділянці електричного кола (рисунок 2). $\mathscr{E}$ = 3 В; r = 0,8 Ом; R = 5Ом; φ_1 = 5 В; φ_2 = –10 В.

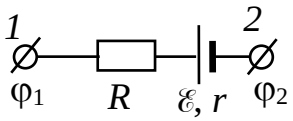


Рисунок 2

Відповідь: I = 2 А; струм тече від точки *1* до точки *2*.

3. Визначити силу струму, яку показує амперметр (рисунок 3), якщо $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2$ = 7,5 В, $r_1 = r_2$ = 0,5 м, R_1 = 5 Ом, R_2 = 2,5 Ом.

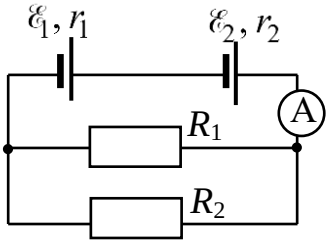


Рисунок 3

Відповідь: I = 5,6 А.

4. Визначити силу струму короткого замикання батареї $I_{кз.}$, якщо при силі струму I_1 = 2 А в зовнішньому колі виділяється потужність P_1 = 24 Вт, а при силі струму I_2 = 5 А — потужність P_2 = 30 Вт.

Відповідь: $I_{кз}$ = 8 А.

5. Е.Р.С. джерела постійного струму дорівнює $\mathscr{E}$ = 30 В, його внутрішній опір r = 1 Ом. Потужність, яка виділяється в нагрівачі, під'єднаному до джерела живлення, $P_а$ = 100 Вт. Визначити силу струму I в колі та к.к.д. η нагрівача.

Відповідь: I = 3,82 А; η = 87 %.

6. До мережі напругою U = 220 В послідовно під'єднані дві лампи з номінальними потужностями P_1 = 60 Вт і P_2 = 250 Вт, розраховані на напругу U_0 = 110 В кожна. Визначити кількість теплоти, яка виділиться в кожній лампі за 10 хвилин роботи.

Відповідь: Q_1 = 93,6 кДж; Q_2 = 22,5 кДж.

7. Елемент замикають спочатку на резистор R_1 = 2 Ом, а потім на резистор R_2 = 0,5 Ом. Визначити Е.Р.С. $\mathscr{E}$ елемента та його внутрішній опір r, якщо відомо, що в кожному з цих випадків потужність, яка виділяється в зовнішньому колі, однакова й дорівнює P = 2,54 Вт.

Відповідь: $\mathscr{E}$ = 3,4 В; r = 1 Ом.

8. До мережі напругою $U = 220$ В паралельно під'єднані 8 ламп опором $R_1 = 160$ Ом кожна й 10 ламп опором $R_2 = 200$ Ом кожна. Визначити повний опір R кола й силу струму в ньому.

Відповідь: $R = 10$ Ом; $I = 22$ А.

9. Визначити опір вольтметра R_V, якщо додатковий опір $R_д = 2$ кОм розширює межу вимірювання напруги цим вольтметром у $n = 5$ разів.

Відповідь: $R_V = 500$ Ом.

10. Амперметр із внутрішнім опором $R_A = 3$ Ом має межу вимірювання сили струму $I_A = 25$ мА. Визначити довжину дроту з манганіну діаметром $d = 1$ мм для виготовлення шунта до амперметра, щоб розширити межу вимірювання сили струму до $I = 2{,}5$ А. Питомий електричний опір манганіну $\rho = 4{,}3 \cdot 10^{-7}$ Ом·м.

Відповідь: $l = 5{,}5$ см.

11. До амперметра, опір якого $R_A = 0{,}27$ Ом, під'єднаний шунт опором $R_ш = 0{,}09$ Ом. Визначити силу струму в колі, якщо амперметр показує силу струму $I = 2$ А.

Відповідь: $I = 8$ А.

12. Маємо амперметр із внутрішнім опором $R_A = 1$ Ом і межею вимірювання сили струму $I_A = 1$ А. Що потрібно зробити, щоб його можна було б використовувати як вольтметр для вимірювання напруги до $U = 10$ В?

Відповідь: $R_д = 9$ Ом.

13. Два джерела струму з Е.Р.С. $\mathscr{E}_1 = 11$ В, $\mathscr{E}_2 = 4$ В і три резистори $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 2$ Ом з'єднані як показано на рисунку 4. Визначити сили струмів I_1, I_2, I_3 в резисторах. Внутрішніми опорами джерел живлення знехтувати.

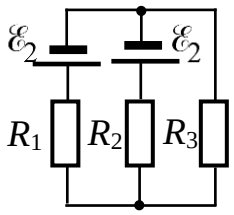


Рисунок 4

Відповідь: $I_1 = 1{,}15$ А; $I_2 = 0{,}525$ А; $I_3 = 0{,}625$ А.

14. Три джерела струму з Е.Р.С. $\mathscr{E}_2 = 11$ В, $\mathscr{E}_2 = 4$ В, $\mathscr{E}_3 = 6$ В і три резистори опорами $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 2$ Ом з'єднані як показано на схемі (рисунок 5). Визначити сили струмів I_1, I_2, I_3 в резисторах. Внутрішніми опорами джерел знехтувати.

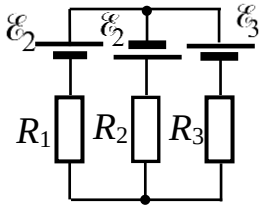


Рисунок 5

Відповідь: $I_1 = 1$ А; $I_2 = 1$ А; $I_3 = 0$.

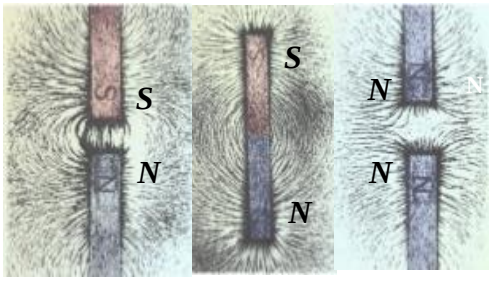
15. Батарея складається з n однакових паралельно з'єднаних елементів. Е.Р.С. кожного елемента $\mathscr{E}_0 = 5{,}5$ В, внутрішній опір $r_0 = 3$ Ом. Коли струм у зовнішньому колі $I = 2$ А, тоді корисна потужність $P_а = 7$ Вт. Скільки елементів має батарея?

Відповідь: $n = 3$.

Розділ 3 МАГНІТОСТАТИКА У ВАКУУМІ

3.1 МАГНІТНА ВЗАЄМОДІЯ: ВЗАЄМОДІЯ МАГНІТІВ, ДОСЛІДИ ЕРСТЕДА Й АМПЕРА

Шляхом дослідів було *встановлено*, що *бруски з матеріалів, які містять залізо* — **магніти** — **взаємодіють один з іншим** (рисунок 3.1). *Магніт*, якому притаманна незмінна з часом властивість притягувати предмети зі залізовмісних матеріалів, називається *постійним*. Якщо легка стрілка, що зроблена з постійного магніту, може вільно обертатись навколо вертикальної осі, яка проходить крізь її центр (рисунок 3.2, *а*), то вона завжди встановлюється так, що один її кінець (*полюс*) повернутий на північ, а інший полюс — на південь. (рисунок 3.2, *б*). Полюс стрілки, напрямлений на північ (*географічний північний полюс*), називається **північним** (*N*), інший полюс, напрямлений на південь (*південний географічний полюс*) — **південним** (*S*). Отже, наша планета — Земля — також є постійним магнітом (див. рис. 3.2, *б*). Припущення, що Земля є постійним магнітом, було вперше сформульоване англійським фізиком і медиком *У. Гільбертом* в його книзі «Про магніт, магнітні тіла й великий магніт — Землю» («De magnete, magneticisque corparibus etc»), яка була опублікована в 1600 р. Географічні й магнітні полюси Землі не збігаються ні за назвою, ні за розташуванням. *Географічна вісь* Землі — вісь обертання Землі — умовна лінія, яка проходить крізь південний та північний географічні полюси. *Магнітна*

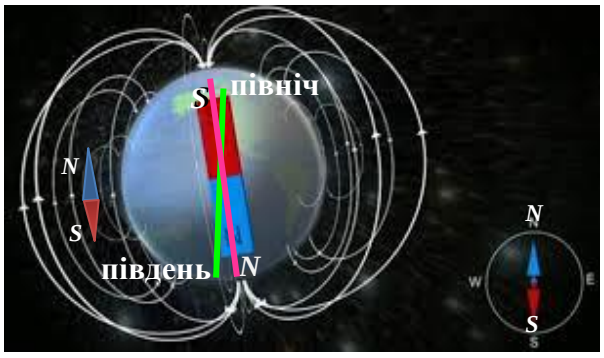


а *б* *в*

Взаємодія постійних магнітів, які знаходяться в мілкій залізній тирсі

Рисунок 3.1

а



б

а – магнітна стрілка; ***б*** – магнітне поле Землі: ——— – географічна вісь Землі; ——— – магнітна вісь Землі

Рисунок 3.2

вісь Землі — умовна лінія, яка проходить крізь магнітні полюси. Географічна й магнітна осі утворюють деякий кут, який називається *магнітним схиленням.* Якщо Землю умовно перетнути площиною, що містить географічну вісь, то отримаємо на її поверхні лінію, яка називається *географічним меридіаном*. За аналогією, якщо Землю умовно перетнути площиною, що містить магнітну вісь, то отримаємо на її поверхні лінію, яка називається *магнітним меридіаном*. Легка магнітна стрілка, що вільно обертається навколо вертикальної осі, встановлюється вздовж магнітного меридіана.

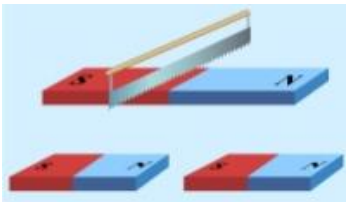
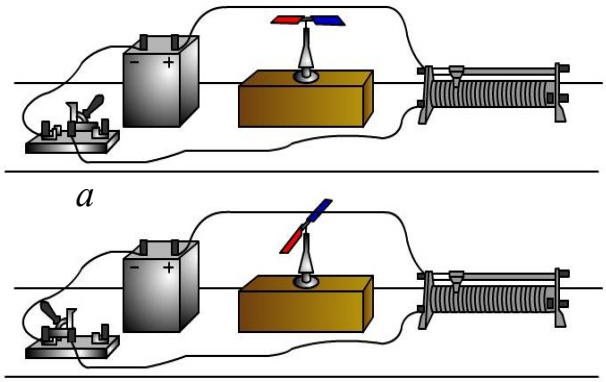


Рисунок 3.3

З дослідів відомо, що південний та північний магнітні полюси неможливо розділити (рисунок 3.3).



а

б

а – провідник без струму;
б – провідник зі струмом

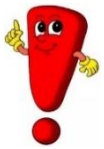
Рисунок 3.4

Експериментально встановлено, що однойменні полюси магнітів відштовхуються (див. рис. 3.1, *в*), а різнойменні полюси притягуються (див. рис. 3.1, *а*, *б*). Між полюсами знаходиться *нейтральна зона*. Найсильніша взаємодія спостерігається між полюсами магнітів, найслабша — між нейтральними зонами.

В 1820 р. данський фізик і хімік *Г. Х. Ерстед* встановив, що *у просторі навколо провідника, по якому тече постійний струм, діють сили, подібні до сил, що виникають поблизу постійних магнітів.* В дослідах Ерстеда (рисунок 3.4) напочатку магнітна стрілка й провідник розташовувались вздовж магнітного меридіана: стрілка знаходилась під провідником (див. рис. 3.4, *а*). Коли по провіднику пропускали постійний струм, тоді магнітна стрілка відхилялась на деякий кут відносно попереднього положення (див. рис. 3.4, *б*): кут відхилення стрілки залежав від сили струму в провіднику. При відключенні струму стрілка поверталась у вихідне положення (див. рис. 3.4, *а*).

В 1820 р. французький фізик і математик *А. М. Ампер* встановив і дослідив *взаємодію двох паралельних провідників із постійними струмами* (рисунок 3.5): вони відштовхувалися, коли струми були напрямлені протилежно один іншому

(див. рис. 3.5, *а*) і притягувалися, коли струми мали однаковий напрямок (див. рис. 3.5, *б*). Взаємодія провідників була відсутня, коли струм тік тільки по одному провіднику (див. рис. 3.5, *в*).



Взаємодія провідників також відсутня, коли один із провідників є скруткою з дротів, по яких течуть струми однакової сили в протилежних напрямках (рисунок 3.6).

Отже, два близько розташовані дроти, по яких течуть однакові постійні струми в протилежних напрямках, поводять себе як провідник без струму, тобто не діють на інший провідник із постійним струмом.

Ампер встановив, що сила взаємодії провідників пропорційна добутку сил струмів I_1 та I_2 в провідниках і обернено пропорційна відстані l між провідниками

$$F \sim \frac{I_1 I_2}{l}. \qquad (3.1)$$

Взаємодія між собою постійних магнітів, постійних струмів та постійних магнітів із провідниками з постійними струмами називається **магнітною взаємодією.**

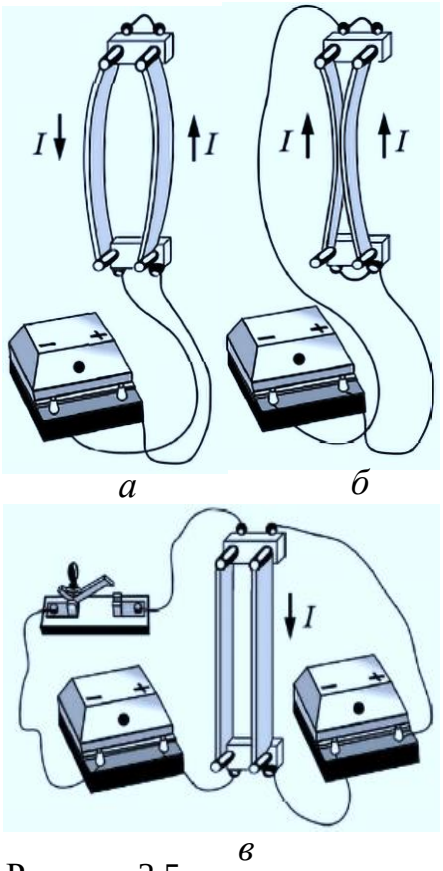


Рисунок 3.5

Пояснити магнітну взаємодію можна за допомогою поняття магнітного поля.

Провідник із постійним струмом і постійний магніт створюють у навколишньому просторі незмінне з часом (стаціонарне або статичне) магнітне поле. Наявність магнітного поля встановлюється по силовій дії на розташовані в ньому провідники зі струмом чи постійні магніти. Досліди Ерстеда свідчать про те, що магнітне поле створюється зарядженими частинками, які впорядковано рухаються. Досліди Ампера свідчать про те, що магнітне поле діє тільки на заряджені частинки, які впорядковано рухаються.

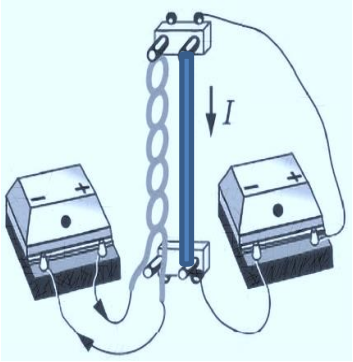


Рисунок 3.6

Магнітне поле — *особлива форма матерії, за посередництвом якої відбувається взаємодія між зарядженими частинками, що рухаються.*

Взаємодія магнітів використовується в гальмівній системі трамваю, яка має назву **магнітне рейкове гальмо.** До складу такого гальма входять дві котушки індуктивності — *електромагніти* й чавунний брус — *черевик*, який закріплений на пружинах між колесами трамвайного вагона. Коли електромагніти вимкнені, пружини підіймають брус над рейками. В разі гальмування електромагніти вмикаються (по їхнім обмоткам тече струм), виникає магнітне поле, яке зумовлює притягування черевика до рейок. Гальмівні показники такого гальма надвисокі: вони забезпечують гальмівну силу до 100 кН.

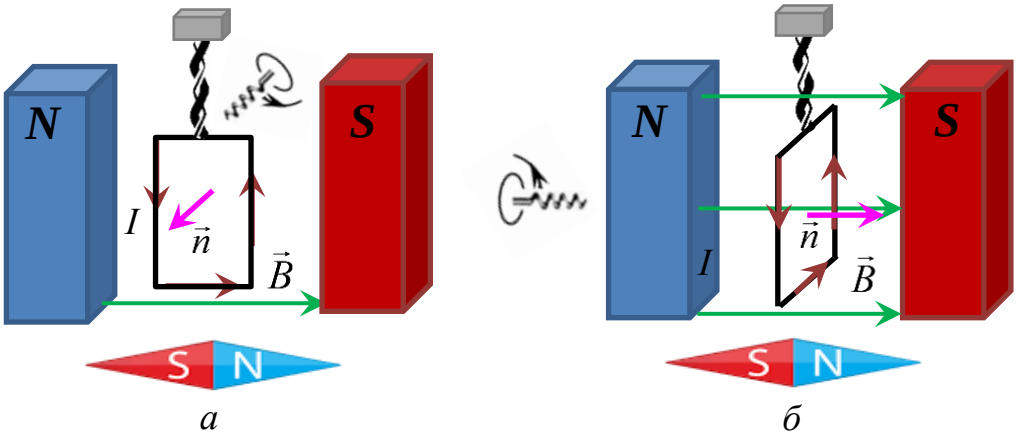
3.2 МАГНІТНА ІНДУКЦІЯ. СИЛОВІ ЛІНІЇ МАГНІТНОГО ПОЛЯ

Для кількісного опису магнітного поля вводиться *фізична векторна величина* — **магнітна індукція $\vec{B}$, яка є локальною силовою характеристикою магнітного поля.** Визначити напрямок і модуль магнітної індукції в кожній точці магнітного поля можна за допомогою *елементарного плоского контуру з постійним струмом* (контур, розміри якого нескінченно малі, так що в його межах поле практично не змінюється, а сила струму в ньому настільки мала, що його магнітне поле практично не впливає на поле, що досліджується); *сили Ампера*, яка діє на *елементарний провідник із постійним струмом* (тонкий прямий провідник, довжина якого нескінченно мала, так що в межах провідника поле практично не змінюється, а сила струму в ньому настільки мала, що його магнітне поле не впливає на поле, що досліджується) або *сили Лоренца*, яка діє на *елементарну частинку* (наприклад, електрон), *що рухається*.

Проте при експериментальному визначенні напрямку й модуля магнітної індукції за допомогою сили Ампера виникає проблема з отриманням елементарного провідника з постійним струмом — малої прямої ділянки тонкого провідника, по якій тече постійний струм. Як відомо, струм тече по замкненому колу, тому отримати окремо елементарний провідник зі струмом практично неможливо.

Для дослідження магнітного поля доцільно взяти *плоский контур, в якому тече постійний струм*. Магнітне поле може змінюватись від точки до точки простору, тому треба брати контур таких малих розмірів, щоб в межах контуру магнітне поле практично не змінювалось. Такий контур, як зазначалося вище, називається **елементарним контуром**. Елементарний контур з постійним струмом має також назву **пробного струму**. Контур може мати довільну форму, зокрема, плоску прямокутну (рисунок 3.7). Провідники, по яких до контуру (рамки) підводиться струм, або розташовуються близько один від іншого, або переплітаються один з іншим (див. рис. 3.6). Внаслідок того, що в таких провідниках течуть струми однакової сили у протилежних напрямках, вони не будуть створювати магнітне поле, тобто не будуть впливати на інші провідники; на них теж не будуть діяти сили з боку наявного магнітного поля.

Розташуємо *елементарний контур — плоску прямокутну рамку* — з *постійним струмом*, яка може вільно обертатись навколо вертикальної осі, паралельної до полюсів магнітів прямокутної форми, як показано на рис. 3.7, *а* (площина рамки перпендикулярна до площини полюсів). *Експериментально доведено, що рамка буде повертатись доки її площина не встановиться паралельно полюсам* (див. рис. 3.7, *б*). Отже, на елементарний контур із постійним струмом (пробний струм) з боку магнітного поля діють сили, які створюють обертальний момент. Для того, щоб описати орієнтацію рамки в магнітному полі, побудуємо позитивну нормаль $\vec{n}$ до контуру.



а *б*

Рисунок 3.7

Позитивна нормаль $\vec{n}$ до контуру — вектор довжиною $|\vec{n}|=1$, перпендикулярний до площини рамки, напрямок якого зв'язаний з напрямком струму в рамці *правилом правого свердлика*: якщо вороток свердлика обертати за

напрямком струму в рамці, то напрямок поступального руху свердлика збігатиметься з напрямком вектора $\vec{B}$ (див. рис. 3.7).

За напрямок магнітної індукції $\vec{B}$ в даній точці поля приймається напрямок позитивної нормалі $\vec{n}$ до елементарного контуру з постійним струмом (пробного струму), який може вільно обертатись в магнітному полі, в положенні стійкої рівноваги (див. рис. 3.7, *б*).

Напрямок магнітної індукції можна також визначити за допомогою **магнітної стрілки** (див. рис. 3.7). Напрямок від південного полюса *S* стрілки до її північного полюса *N* збігається з напрямком вектора $\vec{B}$.

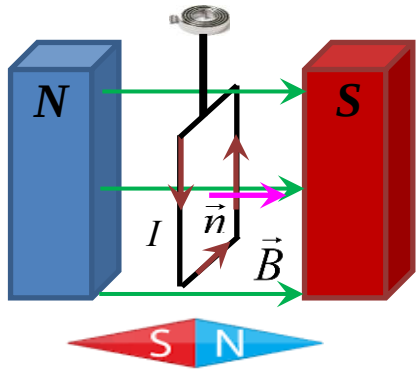


Рисунок 3.8

Орієнтувальна дія магнітного поля на елементарний контур зі струмом може бути використана також для визначення модуля магнітної індукції. Для цього рамку зі струмом потрібно підвісити на пружному підвісі (рисунок 3.8). Вимірюючи кут, на який повертається підвіс, можна визначити момент сили пружності, який діє на рамку. Якщо повернути підвіс, то рамка теж повернеться, але на менший кут. У стані рівноваги момент сил пружності врівноважується моментом сил магнітного поля.

Експериментуючи з контурами різної форми й розмірів, струмами різної сили та змінюючи орієнтацію контурів у просторі, можна встановити, що *обертальний момент залежить від місця розташування рамки, її площі та сили струму в ній, але не залежить від форми рамки.*

Обертальний момент сил магнітного поля буде максимальним тоді, коли площина рамки перпендикулярна до полюсів магніта (див. рис. 3.7, *а*). В цьому випадку підвіс буде повернутий на максимальний кут.

Експериментально встановлено, що *максимальний обертальний момент*

$$M_{\max} \sim IS, \qquad (3.2)$$

де I – сила струму; S – площа контуру.

Отже, відношення $\frac{M_{\max}}{IS}$ не залежить від параметрів рамки й характеризує магнітне поле в даній точці простору.

Модуль магнітної індукції

$$\boxed{B = \frac{M_{\max}}{IS}}. \qquad (3.3)$$

В СІ $[B]$ = Тл (тесла).

$$[M] = \text{Н}\cdot\text{м} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2};\ [I] = \text{А};\ [S] = \text{м}^2.\ [B] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2\cdot\text{А}}.$$

Розмірність магнітної індукції $\dim B = MI^{-1}T^{-2}$.

Магнітне поле можна зобразити графічно за допомогою силових ліній (ліній магнітної індукції).

Силовою лінією магнітного поля (лінією магнітної індукції) називається лінія, в кожній точці якої вектор $\vec{B}$ є дотичним до неї (рисунок 3.9).

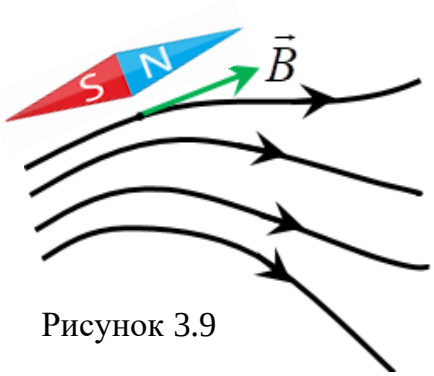


Рисунок 3.9

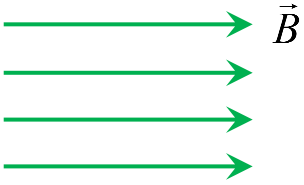


Рисунок 3.10

Густина силових ліній пропорційна модулю магнітної індукції (див. рис. 3.9). Силові лінії проводять так, щоб крізь поверхню площинки одиничної площі, перпендикулярної до ліній, проходила кількість ліній, яка чисельно дорівнює модулю магнітної індукції поля. Зазвичай на рисунках показують не сам вектор $\vec{B}$, а його напрямок (на рис. 3.9 — чорні стрілки).

Магнітне поле називається стаціонарним (статичним), якщо в кожній його точці індукція $\vec{B}$ не змінюється з часом.

Магнітне поле називається однорідним, якщо в кожній його точці $\vec{B} = \text{const}$ (рисунок 3.10).

На цей час не виявлені магнітні заряди. Тому **силові лінії магнітного поля замкнені.**

Примітка: Зазвичай, якщо вектор $\vec{B}$ напрямлений перпендикулярно до аркуша, тоді використовуються позначення: $\oplus$ (або $\times$) — вектор напрямлений від нас; $\odot$ (або $\bullet$) — вектор напрямлений до нас.

Магнітна індукція поля залежить від магнітних властивостей середовища, в якому воно створене. Тому вводиться векторна фізична величина — **напруженість магнітного поля** $\vec{H}$, яка не залежить від властивостей середовища й визначається зовнішніми електричними струмами.

В СІ $[H] = \frac{\text{А}}{\text{м}} \left(\frac{\text{ампер}}{\text{метр}} \right)$. Розмірність напруженості $\dim H = IL^{-1}$.

Між магнітною індукцією й напруженістю магнітного поля існує зв'язок

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}}, \qquad (3.4)$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \left(\frac{\text{генрі}}{\text{метр}} \right)$ – магнітна стала; μ – відносна магнітна проникність речовини.

Примітка: Більш детально напруженість магнітного поля буде розглянута в підрозділі 3.23. Магнітне поле в речовині.

3.3. СИЛА АМПЕРА

На провідник із постійним струмом у магнітному полі діє сила, яка називається *силою Ампера.*

Розглянемо спочатку окремий випадок, коли в однорідному магнітному полі знаходиться прямий провідник, в якому тече постійний струм.

ПРЯМИЙ ПРОВІДНИК ІЗ ПОСТІЙНИМ СТРУМОМ В ОДНОРІДНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ

Сила Ампера $\vec{F}_{\text{A}}$, що діє на прямий провідник довільної довжини l у стаціонарному однорідному магнітному полі індукцією $\vec{B}$ (рисунок 3.12), визначається співвідношенням

$$\boxed{\vec{F}_{\text{A}} = I\left[\vec{l}, \vec{B}\right]}, \qquad (3.5)$$

де I – сила струму в провіднику; $\vec{l}$ – вектор, довжина якого дорівнює довжині провідника l, а напрямок збігається з напрямком струму в провіднику; $[\vec{l},\vec{B}]$ означає векторний добуток векторів $\vec{l}$ і $\vec{B}$.

Примітка: Векторним добутком векторів $\vec{a}$ й $\vec{b}$ є вектор $\vec{c}$, (рисунок 3.11) модуль (довжина) якого чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ й $\vec{b}$, перпендикулярний до площини, в якій знаходяться ці вектори, та напрямлений так, щоб обертання від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ вздовж меншої дуги (дуги кута α) здійснювалось проти годинникової стрілки, якщо дивитись з кінця вектора $\vec{c}$.

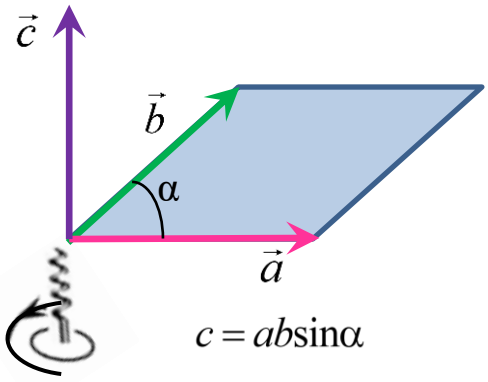


Рисунок 3.11

Отже, для визначення напрямку векторного добутку $\vec{c}$ векторів $\vec{a}$ й $\vec{b}$ можна застосувати **правило правого свердлика**: якщо вороток свердлика обертати від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ вздовж дуги кута α, то напрямок його поступального руху буде збігатися з напрямком вектора $\vec{c}$ (див. рис. 3.11).

Модуль сили Ампера

$$\boxed{F_A = IlB\sin\alpha}, \qquad (3.6)$$

де I – сила струму в провіднику; B – модуль магнітної індукції; α – кут між векторами $\vec{B}$ і $\vec{l}$ (між магнітною індукцією й напрямком струму).

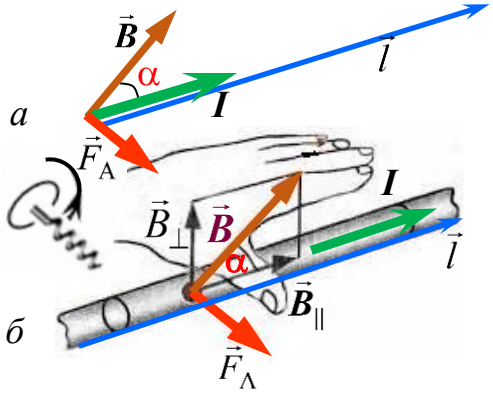


Рисунок 3.12

Напрямок сили $\vec{F}_A$ можна визначити або за *правилом правого свердлика* (див. рис. 3.12, *а*), або за *правилом лівої руки* за умови, що в долоню входить складова магнітної індукції $\vec{B}_\perp$, яка перпендикулярна до напрямку струму (див. рис. 3.12, *б*).

Правило правого свердлика: *якщо вороток свердлика обертати від вектора* $\vec{l}$ *до вектора* $\vec{B}$ *вздовж дуги,*

на яку опирається кут α, *то напрямок поступального руху свердлика збігатиметься з напрямком сили Ампера* $\vec{F}_{\text{A}}$ *(див. рис. 3.12, а).*

Правило лівої руки: *якщо ліву руку розташувати так, щоб чотири прямі пальці були напрямлені вздовж вектора* $\vec{l}$ *(напрямку струму), а складова магнітної індукції* $\vec{B}_{\perp}$ *(складова, що перпендикулярна до напрямку струму) входила в долоню, то відігнутий на* 90^{o} *великий палець вказуватиме напрямок сили Ампера* $\vec{F}_{\text{A}}$ *(див. рис. 3.12, б).*

ПРОВІДНИК ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ З ПОСТІЙНИМ СТРУМОМ У НЕОДНОРІДНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ. ЗАКОН АМПЕРА

Визначимо силу Ампера $\vec{F}_{\text{A}}$, що діє на провідник довільної форми з постійним струмом силою *I*, який розташований в неоднорідному магнітному полі (рисунок 3.13).

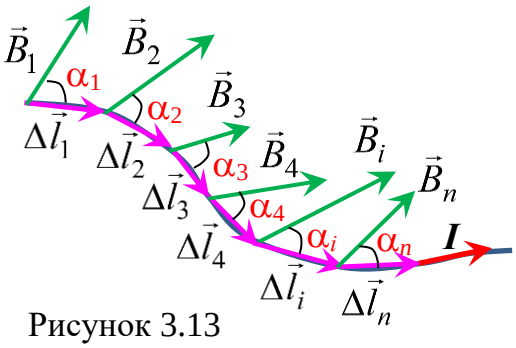


Рисунок 3.13

Умовно замінимо провідник на *n* послідовно з'єднаних однакових прямих ділянок довжиною Δl (див. рис. 3.13). Замість плавної лінії отримаємо ламану лінію, яка приблизно збігається з вихідним провідником. Введемо вектори $\Delta\vec{l}_i$, $(i=1,\ 2,\ 3,\ldots,n)$, довжина яких дорівнює Δl, а напрямок збігається з напрямком струму в відповідній ділянці. Будемо вважати, що в межах кожної ділянки індукція магнітного поля постійна за модулем і напрямком $\vec{B}_i = \text{const}$ (i = 1, 2, 3,…, n). Силу Ампера $\Delta\vec{F}_{\text{A}i}$, що діє на кожну таку ділянку, можна визначити за формулою (3.5)

$$\Delta\vec{F}_{\text{A}i} = I\left[\Delta\vec{l}_i, \vec{B}_i\right], \tag{3.7}$$

де i = 1, 2, 3,…, n.

Модуль сили

$$\Delta F_{\text{A}i} = I\Delta l B_i \sin\alpha_i, \tag{3.8}$$

де α_i – кут між векторами $\vec{B}_i$ і $\Delta\vec{l}_i$.

Напрямок сили можна визначити за *правилом правого свердлика* або *за правилом лівої руки* (див. вище).

Результівна сила $\vec{F}_{\text{A}}$, що діє на всі n ділянок,

$$\vec{F}_{\text{A}} = \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{F}_{\text{A}i} = \sum_{i=1}^{n} I\left[\Delta\vec{l}_i, \vec{B}_i\right]. \tag{3.9}$$

Сила Ампера, яка визначається за формулою (3.9), є наближеною, бо реальний провідник замінили ламаною лінією, а замість неперервної плавної зміни магнітної індукції поля в просторі прийняли, що вона змінюється від ділянки до ділянки стрибками (дискретно). Очевидно, що чим менша довжина ділянки Δl, тим точніше буде визначена сила Ампера. Тоді

$$\vec{F}_{\text{A}} = \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{i=1}^{n} I\left[\Delta\vec{l}_i, \vec{B}_i\right] = \int_{l} I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right].$$

$$\vec{F}_{\text{A}} = \int_{l} I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right] = \int_{l} d\vec{F}_{\text{A}}. \tag{3.10}$$

Елементом струму називається величина $Id\vec{l}$, де I – сила струму в елементарній прямій ділянці провідника; $d\vec{l}$ – вектор, модуль якого дорівнює довжині dl нескінченно малої ділянки провідника, а напрямок збігається з напрямком струму в провіднику.

Сила Ампера, яка діє на елемент струму,

$$d\vec{F}_{\text{A}} = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right], \tag{3.11}$$

називається **елементарною силою Ампера.**

3.4. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Прямий провідник довжиною 10 см, в якому тече струм силою 5 А, розміщений в стаціонарному однорідному магнітному полі перпендикулярно до силових ліній. Магнітна індукція поля 1 Тл. Визначити силу Ампера, яка діє на провідник.

Аналіз

На прямий провідник із постійним струмом в однорідному магнітному полі індукцією $\vec{B}$ діє сила Ампера (рисунок 1), яка визначається співвідношенням

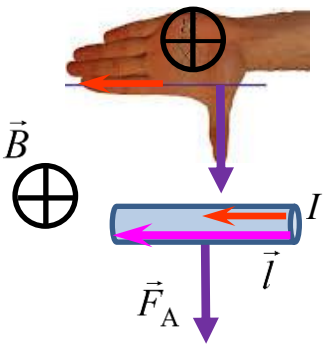


Рисунок 1

$$\vec{F}_A = I\left[\vec{l},\vec{B}\right], \qquad (1)$$

де I – сила струму в провіднику; $\vec{l}$ – вектор, довжина якого дорівнює довжині провідника l, а напрямок збігається з напрямком струму в провіднику.

Модуль сили Ампера

$$F_A = IlB\sin\alpha, \qquad (2)$$

де B – модуль магнітної індукції; α – кут між векторами $\vec{B}$ й $\vec{l}$ (між магнітною індукцією й напрямком струму).

Напрямок сили Ампера визначимо *за правилом лівої руки* (див. рис. 1).

Дано:	**СІ**	**Розв'язок**
l = 10 см	0,1 м	$F_A = 5 \cdot 0{,}1 \cdot 1 \cdot \sin 90^o = 0{,}5$ Н.
I = 5 А		
B = 1 Тл		
$\alpha = 90^o$		**Відповідь:** $F_A = 0{,}5$ Н.
F_A – ?		

Задача 2

Прямий провід довжиною l = 1 м, в якому тече струм силою I = 1 А, розміщений в стаціонарному однорідному магнітному полі під кутом 60^o до силових ліній. Визначити силу, з якою поле діє на відрізок дроту, якщо магнітна індукція B = 10 Тл.

Аналіз

На прямий провідник із постійним струмом в однорідному магнітному полі діє сила Ампера (рисунок 1), яка визначається співвідношенням

$$\vec{F}_A = I\left[\vec{l},\vec{B}\right], \qquad (1)$$

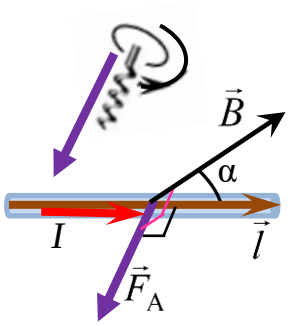


Рисунок 1

де I – сила струму в провіднику; $\vec{l}$ – вектор, довжина якого дорівнює довжині провідника l, а напрямок збігається з напрямком струму в провіднику.

Модуль сили Ампера

$$F_A = IlB\sin\alpha, \qquad (2)$$

де B – модуль магнітної індукції; α – кут між векторами $\vec{B}$ й $\vec{l}$ (між магнітною індукцією й напрямком струму).

Напрямок сили Ампера визначимо *за правилом правого свердлика* (див. рис. 1). Обертаємо вороток свердлика від вектора $\vec{l}$ до вектора $\vec{B}$ вздовж дуги, на яку опирається кут α. Напрямок його поступального руху збігається з напрямком сили Ампера $\vec{F}_A$.

Дано:	**СІ**	**Розв'язок**
l = 20 см	0,2 м	$F_A = 5 \cdot 0,2 \cdot 10 \cdot \sin 60^o = 8,66$ Н.
I = 5 А		
B = 10 Тл		
α = 60°		**Відповідь:** $F_A = 8,66$ Н.
F_A – ?		

Задача 3

Прямий провідник довжиною 20 см і масою 4 г, в якому тече струм силою 20 А, розташований горизонтально в стаціонарному однорідному магнітному полі перпендикулярно до силових ліній і перебуває в стані спокою. Визначити напрямок і модуль магнітної індукції поля.

Аналіз

Провідник знаходиться одночасно в двох силових полях: у гравітаційному полі Землі та магнітному полі. З боку кожного поля на нього діє відповідна сила: з боку гравітаційного поля *сила тяжіння* $\vec{F}_T$, з боку магнітного поля *сила Ампера* $\vec{F}_A$. Провідник перебуває в стані спокою, тому

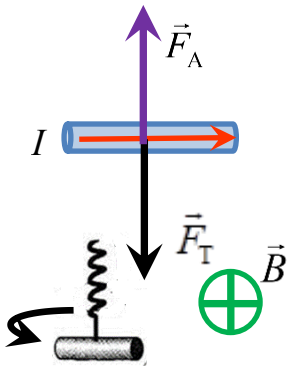


Рисунок 1

$$\vec{F}_T + \vec{F}_A = 0 \quad (1)$$

або

$$\vec{F}_T = -\vec{F}_A. \quad (2)$$

Сила тяжіння

$$\vec{F}_T = m\vec{g}, \quad (3)$$

де m – маса провідника; $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння, напрямлена вертикально вниз (рисунок 1).

Модуль сили тяжіння

$$F_T = mg. \quad (4)$$

Отже, сила Ампера повинна бути напрямлена вертикально вгору (див. рис. 1), а її модуль повинен дорівнювати модулю сили тяжіння

$$F_T = F_A. \quad (5)$$

Сила Ампера визначається співвідношенням

$$\vec{F}_A = I\left[\vec{l}, \vec{B}\right], \quad (6)$$

де I – сила струму в провіднику; $\vec{l}$ – вектор, довжина якого дорівнює довжині провідника l, а напрямок збігається з напрямком струму в провіднику.

Для заданих напрямків струму й сили Ампера визначимо напрямок магнітної індукції $\vec{B}$, застосовуючи або *правило лівої руки*, або *правило правого свердлика* (див. рис. 1).

Модуль сили Ампера

$$F_A = IlB\sin\alpha, \quad (7)$$

де B – модуль магнітної індукції; α – кут між векторами $\vec{B}$ й $\vec{l}$ (між магнітною індукцією й напрямком струму).

Врахувавши формули (4), (5) і (7), отримуємо

$$mg = IlB\sin\alpha. \quad (8)$$

Звідси

$$B = \frac{mg}{Il\sin\alpha}. \quad (9)$$

Перевіримо формулу (9):

$$[B] = \text{Тл} = \frac{\text{кг}}{\text{А} \cdot \text{с}^2};\ [m] = \text{кг};\ [g] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};\ [I] = \text{А};\ [l] = \text{м};$$

$$\left[\frac{mg}{Il\sin\alpha}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{А} \cdot \text{с}^2}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок**
$l = 20\,\text{см}$	$0{,}2\,\text{м}$	$B = \dfrac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{20 \cdot 0{,}2 \cdot \sin 90^\circ} = 10^{-2}\ \text{Тл}.$
$I = 20\,\text{А}$		
$m = 4\,\text{г}$	$4 \cdot 10^{-3}\ \text{кг}$	
$\alpha = 90^\circ$		
$g = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$		**Відповідь:** $B = 10^{-2}\ \text{Тл}.$
$B - ?$		

Задача 4

Прямий провідник підвішений на двох невагомих нитках у стаціонарному однорідному магнітному полі індукцією B. Площа поперечного перетину провідника S, густина матеріалу провідника ρ. Магнітна індукція перпендикулярна до площини підвісу провідника. Визначити силу струму I в провіднику, при якій в нитках не буде натягу.

Аналіз

На провідник діють сили:

1) з боку гравітаційного поля Землі *сила тяжіння* $m\vec{g}$ (m – маса провідника, $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння), яка напрямлена вертикально вниз; сила прикладена в центрі мас (центрі тяжіння) провідника.

2) з боку ниток *сили реакції* ниток $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$, які напрямлені вздовж відповідних ниток;

3) з боку магнітного поля *сила Ампера*, яка визначається співвідношенням

$$\vec{F}_\text{A} = I\left[\vec{l}, \vec{B}\right], \qquad (1)$$

де I – сила струму в провіднику; $\vec{l}$ – вектор, довжина якого дорівнює довжині провідника l, а напрямок збігається з напрямком струму в провіднику.

За умови, що провідник однорідний, сила Ампера прикладена в центрі мас провідника.

Отже, напрямок сили Ампера при заданому напрямку магнітної індукції залежить від напрямку струму в провіднику, як показано на рисунку 1 і рисунку 2.

За умовою задачі необхідно визначити силу струму, при якій відсутній натяг ниток, тобто $T_1 = T_2 = 0$. В разі, коли сила Ампера напрямлена вниз і збігається за напрямком із силою тяжіння (див. рис. 1), цю умову неможливо виконати, бо саме сили реакції ниток компенсують дію сили Ампера та сили тяжіння. Отже, сила Ампера повинна бути напрямлена вертикально вгору (див. рис. 2).

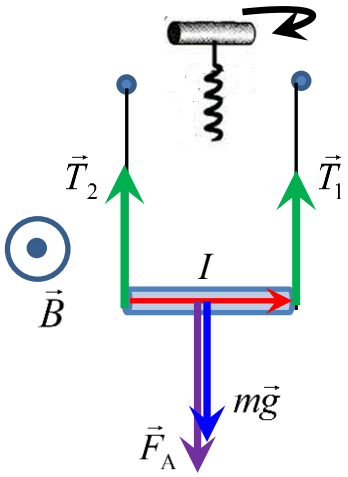


Рисунок 1

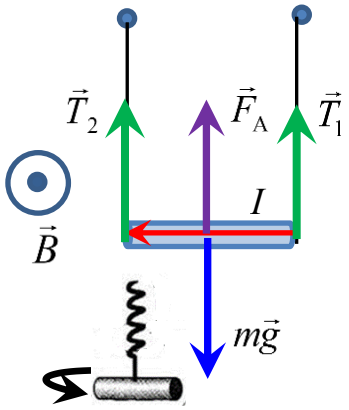


Рисунок 2

Виконання умови $T_1 = T_2 = 0$ можливе, коли рівнодіюча зовнішніх сил, прикладених до провідника, дорівнює нулю, тобто

$$m\vec{g} + \vec{F}_A = 0 \qquad (2)$$

або

$$m\vec{g} = -\vec{F}_A. \qquad (3)$$

Звідси

$$mg = F_A. \qquad (4)$$

Модуль сили Ампера

$$F_A = IlB\sin\alpha, \qquad (5)$$

де I – сила струму в провіднику; l – довжина провідника; B – модуль магнітної індукції; α – кут між векторами $\vec{l}$ і $\vec{B}$ (між напрямком струму й магнітною індукцією).

Маса провідника

$$m = \rho V = \rho Sl, \qquad (6)$$

де ρ – густина матеріалу провідника; V – об'єм, S – площа поперечного перетину, l – довжина провідника.

Зі співвідношень (4), (5) й (6) отримуємо

$$\rho Slg = IlB\sin\alpha\,. \qquad (7)$$

Звідси

$$I = \frac{\rho Sg}{B\sin\alpha}\,. \qquad (8)$$

З умови задачі випливає $\alpha = 0$, отже,

$$I = \frac{\rho Sg}{B}\,. \qquad (9)$$

Перевіримо формулу (9):

$$[I] = \text{А};\ [\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};\ [S] = \text{м}^2;\ [g] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};\ [B] = \text{Тл} = \frac{\text{кг}}{\text{А}\cdot\text{с}^2};$$

$$\left[\frac{\rho Sg}{B}\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}\cdot\text{А}\cdot\text{с}^2}{\text{м}^3\cdot\text{с}^2\cdot\text{кг}} = \text{А}.$$

Задача 5

Прямий провідник довжиною 10 см і масою 100 г, по якому тече струм силою $I = 1$ А, був підвішений горизонтально на двох однакових невагомих нитках. Після того, як увімкнули магнітне поле індукцією $B = 10$ Тл, він відхилився так, що нитки утворили з вертикаллю кут φ. Вважати магнітне поле в місці розташування провідника стаціонарним й однорідним, силові лінії якого перпендикулярні до провідника. Визначити силу натягу ниток і кут φ.

Аналіз

На провідник діють сили (рисунок 1) :

1) з боку гравітаційного поля Землі *сила тяжіння* $m\vec{g}$ (m – маса провідника, $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння), яка напрямлена вертикально вниз; сила прикладена в центрі тяжіння (центрі мас) провідника.

2) з боку ниток *сили реакції* ниток $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$, які напрямлені вздовж відповідних ниток;

Зазначимо, що сила натягу нитки, *яку треба визначити за умовою задачі, прикладена до нитки: за третім законом Ньютона вона за модулем дорівнює силі реакції нитки й напрямлена вздовж лінії дії сили реакції нитки в протилежний бік.*

3) з боку магнітного поля *сила Ампера* $\vec{F}_\text{A}$, яка визначається співвідношенням

$$\vec{F}_\text{A} = I\left[\vec{l},\vec{B}\right], \qquad (1)$$

де I – сила струму в провіднику; $\vec{l}$ – вектор, довжина якого дорівнює довжині провідника l, а напрямок збігається з напрямком струму в провіднику.

Модуль сили Ампера

$$F_\text{A} = IlB\sin\alpha, \qquad (2)$$

де B – модуль магнітної індукції; α – кут між векторами $\vec{l}$ і $\vec{B}$ (між напрямком струму й магнітною індукцією).

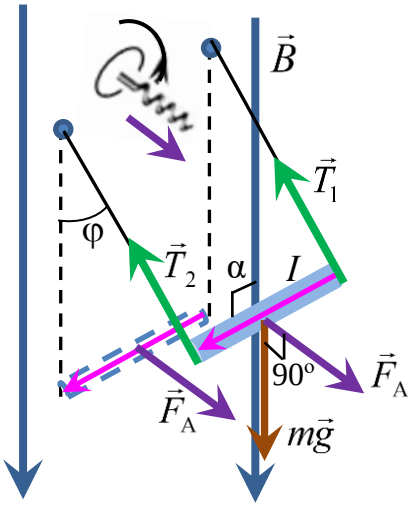


Рисунок 1

За умовою задачі силові лінії магнітного поля перпендикулярні до горизонтально розташованого провідника, тобто напрямлені вертикально. Тоді

$$F_\text{A} = IlB\sin\alpha = IlB\sin 90^\circ = IlB. \qquad (3)$$

Напрямок сили Ампера визначимо *за правилом правого свердлика* або *за правилом лівої руки* (див. рис. 1). Отже, сила Ампера $\vec{F}_\text{A}$ перпендикулярна до сили тяжіння $m\vec{g}$.

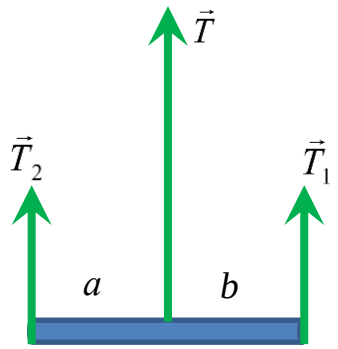


Рисунок 2

Сили реакції ниток $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$ паралельні й однакові за модулем. Визначимо результівну цих сил (рисунок 2). Результівна сила $\vec{T}$ паралельних однаково напрямлених сил паралельна силам і напрямлена в той же бік. Модуль T дорівнює

$$T = T_1 + T_2, \tag{4}$$

де T_1 і T_2 – модулі сил: $T_1 = T_2$.

Лінія дії результівної сили проходить між точками, в яких прикладені сили $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$ на відстанях a і b, які обернено пропорційні модулям сил,

$$\frac{a}{T_1} = \frac{b}{T_2}. \tag{5}$$

Внаслідок того, що $T_1 = T_2$, відстані $a = b = \frac{l}{2}$ (l – довжина провідника). Отже, лінія дії сили $\vec{T}$ проходить крізь центр мас провідника, який збігається з центром тяжіння.

Аналогічно можна показати, що лінія дії сили Ампера, що діє на однорідний провідник проходить крізь його центр мас (центр тяжіння).

Конфігурацію сил, прикладених до провідника, показано на рисунку 3. Для зручності на рисунку зображені тільки провідник і сили, що діють на нього. Нагадаємо, що сила Ампера перпендикулярна до сили тяжіння.

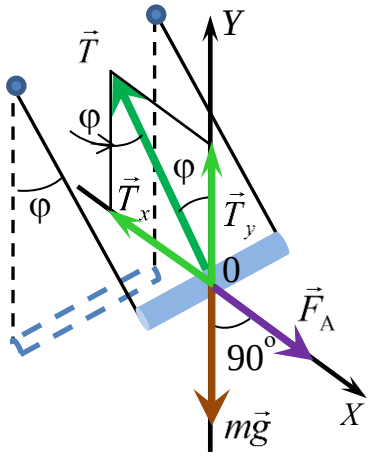


Рисунок 3

У стані спокою

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{T} = 0. \tag{6}$$

Напишемо це рівняння в скалярному вигляді. Задаємо систему координат. Нехай вісь $0Y$ напрямлена вертикально вгору, а вісь $0X$ — перпендикулярно до неї, тобто горизонтально (див. рис. 3). Тоді сила тяжіння $m\vec{g}$ напрямлена вздовж осі $0Y$, а сила Ампера $\vec{F}_A$ — вздовж осі $0X$. Розкладемо силу $\vec{T}$ на складові $\vec{T}_x$ і $\vec{T}_y$ вздовж відповідних осей (див. рис. 3): $\vec{T} = \vec{T}_x + \vec{T}_y$.

Тоді рівняння (6) можна написати як

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{A}} + \vec{T}_x + \vec{T}_y = 0. \tag{7}$$

Напишемо рівняння (7) в проєкціях на осі $0X$ і $0Y$.

В проєкціях *на вісь* $0X$

$$F_{\text{A}x} + T_x = F_{\text{A}} + T_x = 0\,, \tag{8}$$

де F_{A} – модуль сили $\vec{F}_{\text{A}}$.

Звідси

$$T_x = -F_{\text{A}}\,. \tag{9}$$

В проєкціях *на вісь* $0Y$

$$mg_y + T_y = -mg + T_y = 0\,, \tag{10}$$

де mg – модуль сили $m\vec{g}$.

Звідси

$$T_y = mg. \tag{11}$$

Модуль сили $\vec{T}$ зв'язаний з T_x і T_y співвідношенням

$$T^2 = T_x^2 + T_y^2. \tag{12}$$

З (12), (9), (11) і (3) отримуємо

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = \sqrt{F_{\text{A}}{}^2 + \left(mg\right)^2} = \sqrt{\left(IBl\right)^2 + \left(mg\right)^2}\,. \tag{13}$$

Врахувавши рівняння (4) та $T_1 = T_2$, визначимо модулі цих сил

$$T_1 = T_2 = \frac{\sqrt{\left(IBl\right)^2 + \left(mg\right)^2}}{2}\,. \tag{14}$$

З рис. 3 випливає

$$tg\varphi = \frac{\left|T_x\right|}{\left|T_y\right|} = \frac{F_{\text{A}}}{mg} = \frac{IlB}{mg}, \tag{15}$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{IlB}{mg}, \tag{16}$$

$$\varphi = \text{arctg}\frac{IlB}{mg}. \tag{17}$$

Перевіримо формули (14) і (17):

(14) $[T]=\text{Н};\ [F_\text{А}]=\text{Н};\ [mg]=\text{Н};\ \left[\sqrt{(IBl)^2+(mg)^2}\right]=\sqrt{\text{Н}^2+\text{Н}^2}=\text{Н};$

(17) $[\text{tg}\varphi]=1;\ [F_\text{А}]=\text{Н};\ [mg]=\text{Н};\ \left[\frac{IlB}{mg}\right]=\frac{\text{Н}}{\text{Н}}=1.$

Дано:	**СІ**
l = 10 см	0,1 м
I = 1 А	
m = 100 г	0,1 кг
$g=10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	
B = 10 Тл	
$T_1-?\ \ T_2-?$	
$\varphi-?$	

Розв'язок:

$$T_1=T_2=\frac{\sqrt{(1\cdot10\cdot0{,}1)^2+(0{,}1\cdot10)^2}}{2}=0{,}71\ \text{Н};$$

$$\varphi=\text{arctg}\frac{1\cdot10\cdot0{,}1}{0{,}1\cdot10}=\text{arctg}1=45^\text{o}.$$

Відповідь: $T_1=T_2=0{,}71\ \text{Н};\ \varphi=45^\text{o}.$

Задача 6

На горизонтальних рейках, відстань між якими дорівнює l = 40 см, розміщений стрижень перпендикулярно до рейок. Рейки й стрижень містяться в стаціонарному однорідному магнітному полі індукцією B = 50 мТл з вертикальними силовими лініями. Визначити силу струму I, який потрібно пропустити по стрижню, щоб він почав рухатись. Маса стрижня m = 0,5 кг, коефіцієнт тертя між стрижнем і рейками μ = 0,01. Прийняти прискорення вільного падіння $g=10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Аналіз

На провідник у стані спокою діють сили (рисунок 1) :

1) з боку гравітаційного поля Землі *сила тяжіння* $m\vec{g}$ (m – маса провідника; $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння);

2) з боку рейок *сила тертя спокою* $\vec{F}_\text{тер.с}$ та *сили нормальної реакції опори* $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$, які можна замінити однією силою $\vec{N}$, що прикладена в центрі мас

(центрі тяжіння) провідника (див. задачу 5: додавання паралельних сил) й напрямлена вертикально вгору;

3) з боку магнітного поля *сила Ампера* $\vec{F}_{\text{A}}$.

Провідник перебуває у стані спокою, тому

$$\vec{F}_{\text{A}} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер.с}} = 0. \qquad (1)$$

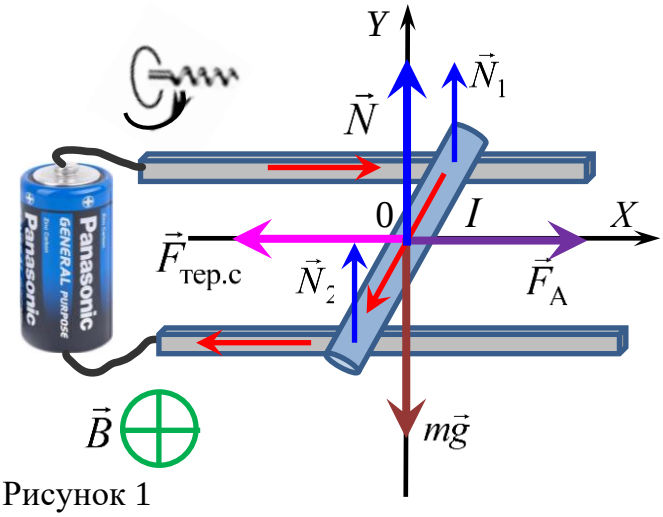


Рисунок 1

За умовою задачі необхідно визначити силу струму, при якій провідник почне рухатись. Це означає, що сила тертя спокою досягає максимального значення $\vec{F}_{\text{тер.с(max)}}$, яке можна вважати рівним значенню сили тертя ковзання $\vec{F}_{\text{тер}}$: $F_{\text{тер.с(max)}} = F_{\text{тер}}$; прискорення стрижня в цей момент $\vec{a} = 0$.

Зазначимо, що залежно від напрямку струму в стрижні й напрямку магнітної індукції можливі два напрямки руху стрижня. Розв'язки задачі в обох випадках однакові.

Отже,

$$\vec{F}_{\text{A}} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}} = 0. \qquad (2)$$

Напишемо рівняння (2) в скалярному вигляді.

Задаємо напрямок осей декартової системи координат: вісь $0X$ напрямлена горизонтально, вісь $0Y$ — вертикально.

Напишемо рівняння (2) в проєкціях на осі $0X$ і $0Y$.

В проєкціях на вісь $0X$

$$F_{\text{A}x} + F_{\text{тер}x} = F_{\text{A}} - F_{\text{тер}} = 0, \qquad (3)$$

де F_{A} і $F_{\text{тер}}$ – модулі відповідних сил.

Звідси

$$F_{\text{A}} = F_{\text{тер}}. \qquad (4)$$

В проєкціях на вісь $0Y$

$$N_y + mg_y = N - mg = 0, \qquad (5)$$

де N і mg – модулі відповідних сил.

Звідси

$$N = mg\,. \tag{6}$$

Модуль сили тертя ковзання

$$F_{\text{тер}} = \mu N = \mu mg\,, \tag{7}$$

де μ – коефіцієнт тертя.

*С*ила Ампера $\vec{F}_{\text{A}}$ визначається співвідношенням

$$\vec{F}_{\text{A}} = I\left[\vec{l}, \vec{B}\right], \tag{8}$$

де I – сила струму в провіднику; $\vec{l}$ – вектор, довжина якого дорівнює довжині провідника l, а напрямок збігається з напрямком струму в провіднику.

Модуль сили Ампера

$$F_{\text{A}} = IlB\sin\alpha, \tag{9}$$

де B – модуль магнітної індукції; α – кут між векторами $\vec{l}$ й $\vec{B}$ (між напрямком струму й магнітною індукцією).

З умови задачі випливає, що $\alpha = 90^{\text{o}}$, тому

$$F_{\text{A}} = IlB\sin\alpha = IlB\sin 90^{\text{o}} = IlB. \tag{10}$$

З (4), врахувавши (7) і (10), отримуємо

$$\mu mg = IlB. \tag{11}$$

Звідси

$$I = \frac{\mu mg}{lB}. \tag{12}$$

Перевіримо формулу (12):

$$\left[I\right] = \text{А};\ \left[\mu\right] = 1;\left[m\right] = \text{кг};\ \left[g\right] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};\ \left[l\right] = \text{м};\ \left[B\right] = \text{Тл} = \frac{\text{кг}}{\text{А}\cdot\text{с}^2};$$

$$\left[\frac{\mu mg}{lB}\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{А}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}\cdot\text{кг}} = \text{А}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
l = 40 см	0,4 м	$I = \dfrac{10^{-2} \cdot 0{,}5 \cdot 10}{0{,}4 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 2{,}5$ А.
m = 0,5 кг		
$g = 10 \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$		
μ = 0,01		
B = 50 мТл	$5 \cdot 10^{-2}$ Тл	**Відповідь:** $I = 2{,}5$ А.
I – ?		

3.5. РАМКА З ПОСТІЙНИМ СТРУМОМ У СТАЦІОНАРНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ

3.5.1. ПЛОСКА ПРЯМОКУТНА РАМКА З ПОСТІЙНИМ СТРУМОМ У СТАЦІОНАРНОМУ ОДНОРІДНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ. МАГНІТНИЙ МОМЕНТ КОНТУРУ З ПОСТІЙНИМ СТРУМОМ

Розглянемо спочатку окремий випадок: **плоска прямокутна рамка** зі сторонами a й b *знаходиться в однорідному магнітному полі індукцією* $\vec{B}$ (рисунок 3.14). Вісь обертання рамки перпендикулярна до вектора $\vec{B}$. В рамці тече постійний струм силою I. Рамка виготовлена з однорідного металевого дроту.

На провідник зі струмом у магнітному полі діє сила Ампера. На кожну зі сторін рамки буде діяти відповідна сила Ампера. Визначимо моменти цих сил (обертальні моменти).

Побудуємо позитивну нормаль $\vec{n}$ ($|\vec{n}| = 1$) до рамки, напрямок якої зв'язаний з напрямком струму в рамці *правилом правого свердлика*: якщо обертати вороток свердлика в напрямку струму, то напрямок поступального руху свердлика збігатиметься з напрямком позитивної нормалі до рамки. Нехай вектор $\vec{B}$ утворює кут α з нормаллю $\vec{n}$. Розкладемо вектор $\vec{B}$ на складові: перпендикулярну до площини рамки складову $\vec{B}_{\perp}$ (паралельну $\vec{n}$) і складову $\vec{B}_{\parallel}$, що знаходиться в площині рамки (перпендикулярну до $\vec{n}$). Розглянемо окремо

прикладені до сторін рамки сили Ампера, що зумовлені цими складовими вектора $\vec{B}$: складовою $\vec{B}_{\perp}$ (див. рис. 3.14) й складовою $\vec{B}_{\parallel}$ (рисунок 3.15).

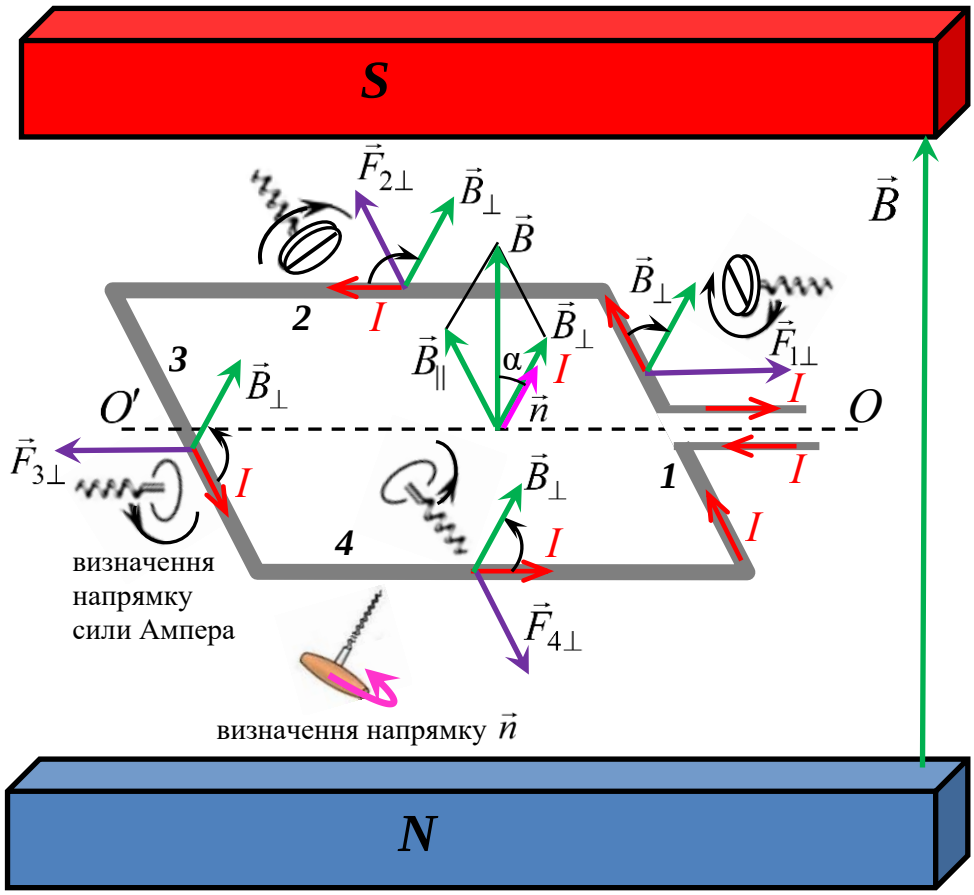


Рисунок 3.14

Визначимо складові сил Ампера $\vec{F}_{1\perp}$, $\vec{F}_{2\perp}$, $\vec{F}_{3\perp}$ і $\vec{F}_{4\perp}$, що зумовлені складовою $\vec{B}_{\perp}$ (див. рис. 3.14):

$$\vec{F}_{1\perp} = I\left[\vec{a}_1, \vec{B}_{\perp}\right], \tag{3.12}$$

де $\vec{a}_1$ – вектор, довжина якого дорівнює довжині a ділянки ***1*** рамки, а напрямок збігається з напрямком струму в цій ділянці; I – сила струму;

$$\vec{F}_{2\perp} = I\left[\vec{b}_1, \vec{B}_{\perp}\right], \tag{3.13}$$

де $\vec{b}_1$ – вектор, довжина якого дорівнює довжині b ділянки ***2*** рамки, а напрямок збігається з напрямком струму в цій ділянці;

$$\vec{F}_{3\perp} = I\left[\vec{a}_2, \vec{B}_{\perp}\right], \tag{3.14}$$

де $\vec{a}_2$ – вектор, довжина якого дорівнює довжині a ділянки ***3*** рамки, а напрямок збігається з напрямком струму в цій ділянці; I – сила струму;

$$\vec{F}_{4\perp} = I\left[\vec{b}_2, \vec{B}_\perp\right], \tag{3.15}$$

де $\vec{b}_2$ – вектор, довжина якого дорівнює довжині b ділянки ***4*** рамки, а напрямок збігається з напрямком струму в цій ділянці.

З виразів (3.12 – 3.15) випливає, що складові сил Ампера $\vec{F}_{1\perp}$, $\vec{F}_{2\perp}$, $\vec{F}_{3\perp}$ і $\vec{F}_{4\perp}$ перпендикулярні до сторін рамки й при заданому напрямку струму розтягують її (див. рис. 3.14). Зазначимо, що дріт, з якого виготовлена рамка, однорідний, тому сили прикладені в центрах мас (центрах тяжіння) відповідних ділянок.

Якщо змінити напрямок струму в рамці, то сили Ампера змінять напрямок на протилежний та будуть стискати рамку. Тобто складові сил Ампера, що зумовлені складовою $\vec{B}_\perp$, деформують рамку.

Визначимо тепер складові сил Ампера, що зумовлені складовою $\vec{B}_\parallel$ (див. рис. 3.15).

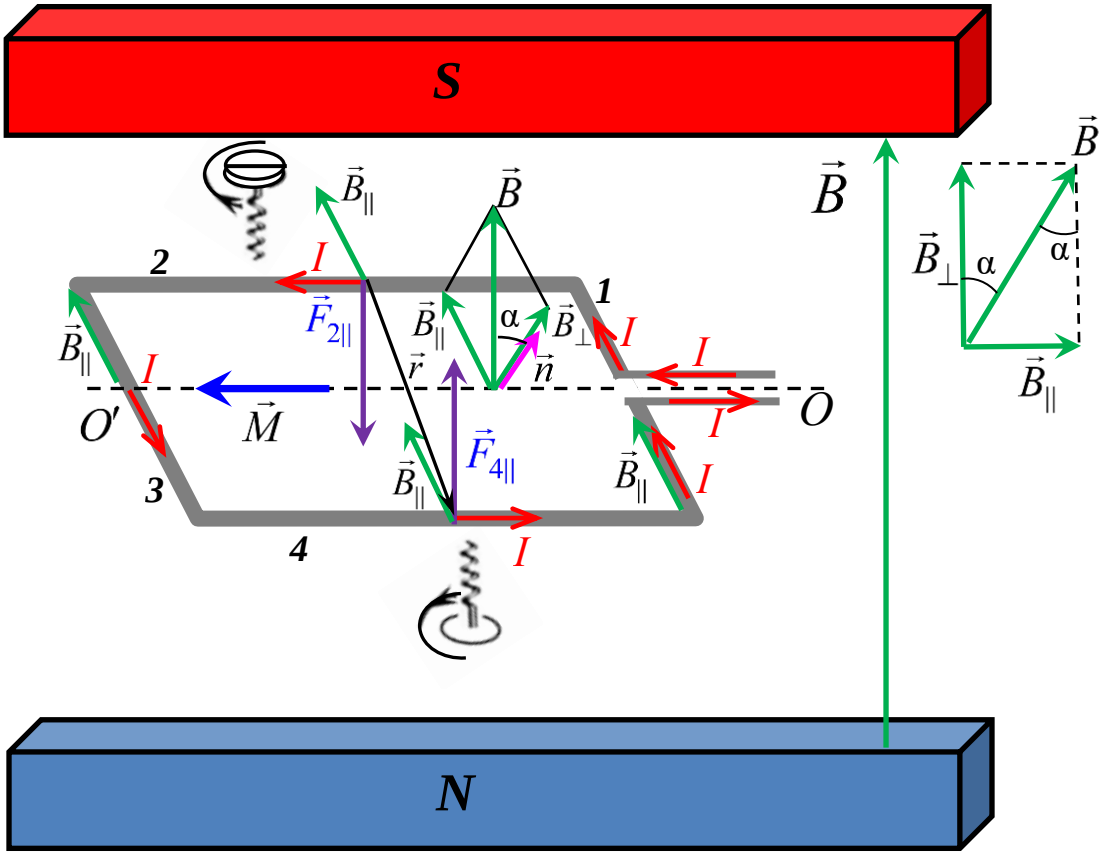


Рисунок 3.15

Складова $\vec{B}_{||}$ паралельна сторонам ***1*** і ***3*** рамки.

Оскільки напрямок складової $\vec{B}_{||}$ збігається з напрямком струму в ділянці ***1***, модуль складової сили Ампера, що діє на цю ділянку рамки,

$$F_{3||} = IaB_{||}\sin 0^{o} = 0. \tag{3.16}$$

Оскільки напрямок складової $\vec{B}_{||}$ протилежний напрямку струму в ділянці *3*, модуль складової сили Ампера, що діє на цю ділянку рамки,

$$F_{1||} = IaB_{||}\sin 180^{o} = 0. \tag{3.17}$$

Складова $\vec{B}_{||}$ перпендикулярна до сторін ***2*** й ***4*** рамки.

Визначимо складові сил Ампера $\vec{F}_{2||}$ і $\vec{F}_{4||}$, що діють на ділянки ***2*** й ***4*** рамки відповідно

$$\vec{F}_{2||} = I\left[\vec{b}_1, \vec{B}_{||}\right], \tag{3.18}$$

$$\vec{F}_{4||} = I\left[\vec{b}_2, \vec{B}_{||}\right]. \tag{3.19}$$

Сили $\vec{F}_{2||}$ і $\vec{F}_{4||}$ перпендикулярні до площини рамки й напрямлені в протилежні боки (див. рис. 3.15).

Модулі цих сил

$$F_{2||} = IbB_{||}\sin 90^{o} = IbB\sin\alpha\sin 90^{o} = IbB\sin\alpha; \tag{3.20}$$

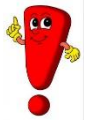
$$F_{4||} = IbB_{||}\sin 90^{o} = IbB\sin\alpha\sin 90^{o} = IbB\sin\alpha. \tag{3.21}$$

Тобто складові сил Ампера, що діють на ділянки рамки ***2*** й ***4***, однакові за модулем і протилежні за напрямком

$$\vec{F}_{2||} = -\vec{F}_{4||}. \tag{3.22}$$

Ці сили утворюють пару сил. Зазначимо, що сили прикладені в центрах мас відповідних ділянок.

Отже, задача полягає у визначенні моменту пари сил (обертального моменту пари сил).



Моментом пари сил *називається вектор* $\vec{M}$*, модуль якого дорівнює добутку модуля однієї з сил пари на плече пари, напрямлений*

перпендикулярно до площини дії пари в бік, звідкіля видно, що пара сил намагається повернути тіло проти годинникової стрілки.

***Плечем** пари сил називається найкоротша відстань між лініями дії сил пари.*

Примітка: З механіки відомо, що векторна сума моментів сил, які входять до складу пари, відносно будь-якої точки не залежить від вибору цієї точки й дорівнює моменту цієї пари сил (*теорема про момент пари сил*). Отже, момент пари сил не має певної точки прикладення: незалежно від того, до яких частин твердого тіла прикладені сили пари, для заданих модуля й напрямку моменту пари сил тіло буде рухатись однаково.

З визначення моменту $\vec{M}$ пари сил випливає, що його можна написати як векторний добуток двох векторів: *вектора плеча пари сил* — вектора, який напрямлений до точки прикладення вибраної сили, а його довжина дорівнює плечу пари сил, й цієї *сили* пари.

Визначимо момент пари сил $\vec{F}_{2||}$ і $\vec{F}_{4||}$.

Для цього побудуємо вектор $\vec{r}$, напрямлений від сили $\vec{F}_{2||}$ до сили $\vec{F}_{4||}$, модуль якого дорівнює плечу пари сил: $|\vec{r}| = a$. Тоді $\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}_{4||}\right]$ (див. рис. 3.15). Якщо побудувати вектор $\vec{r}' = -\vec{r}$, напрямлений від сили $\vec{F}_{4||}$ до сили $\vec{F}_{2||}$, тоді $\vec{M} = \left[\vec{r}', \vec{F}_{2||}\right]$.

Отже, **обертальний момент пари сил** $\vec{F}_{2||}$ і $\vec{F}_{4||}$ можна написати як

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}_{4||}\right] \text{ або } \vec{M} = \left[\vec{r}', \vec{F}_{2||}\right], \qquad (3.23)$$

модуль моменту пари сил (див. підрозділ 3.3 (визначення векторного добутку двох векторів))

$$M = aF_{4||}\sin 90^0 = aF_{4||} = aF\sin\alpha = aIbB\sin\alpha = IBS\sin\alpha,$$

$$\boxed{M = IBS\sin\alpha}, \qquad (3.24)$$

де S – площа рамки.

Поведінку плоскої рамки з постійним струмом у магнітному полі зручно описувати, якщо ввести *векторну фізичну величину* — **магнітний момент** $\vec{p}_m$ (рисунок 3.16) рамки з постійним струмом

$$\boxed{\vec{p}_m = IS\vec{n}}, \qquad (3.25)$$

де I – сила струму в рамці; S – площа рамки; $\vec{n}$ ($|\vec{n}|=1$) – позитивна нормаль до рамки.

В СІ $[p_m] = \text{А} \cdot \text{м}^2$. Розмірність магнітного моменту $\dim p_m = IL^2$.

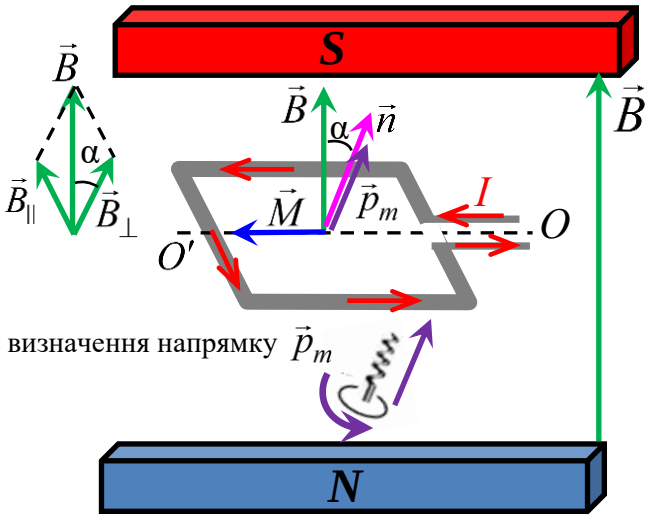


Рисунок 3.16

Враховуючи наведене вище, момент пари сил $\vec{M}$, що діє на рамку з постійним струмом, можна написати як векторний добуток $\vec{p}_m$ і $\vec{B}$

$$\boxed{\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right]}. \qquad (3.26)$$

Модуль моменту сил визначається за формулою

$$M = IBS\sin\alpha = p_m B\sin\alpha, \qquad (3.27)$$

де $p_m = IS$ – модуль магнітного моменту; α – кут між векторами $\vec{p}_m$ і $\vec{B}$.

Напрямок обертального моменту зв'язаний з напрямками векторів $\vec{p}_m$ і $\vec{B}$ **правилом правого свердлика**: якщо вороток свердлика обертати від вектора $\vec{p}_m$ до вектора $\vec{B}$ вздовж дуги, на яку опирається кут α, то напрямок поступального руху свердлика збігатиметься з напрямком вектора $\vec{M}$.

З ф-ли (3.27) випливає, коли $\alpha = 0^o$ $\left(\vec{p}_m \uparrow\uparrow \vec{B}\right)$, тоді момент сил $M = 0$ і рамка перебуває в *стані стійкої рівноваги*. Момент сил також дорівнює нулю $M = 0$, коли $\alpha = 180^o$ $\left(\vec{p}_m \uparrow\downarrow \vec{B}\right)$ і рамка перебуває в *стані нестійкої рівноваги*: найменше відхилення від цього положення викликає появу моменту сил, який намагатиметься відхилити контур ще більше.

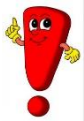
*Підкреслимо, що сили Ампера, які діють на ділянки **1** і **3** рамки:* $\vec{F}_1 = \vec{F}_{1\perp} + \vec{F}_{1\parallel} = \vec{F}_{1\perp}$ *і* $\vec{F}_3 = \vec{F}_{3\perp} + \vec{F}_{3\parallel} = \vec{F}_{3\perp}$, *перпендикулярні до відповідних ділянок і тільки деформують рамку.*

Визначити обертальний момент, що діє на рамку зі струмом, можна також іншим способом.

Визначимо результівну силу Ампера, яка діє на рамку,

$$\vec{F}_{\text{A}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \left[I\vec{a}_1, \vec{B} \right] + \left[I\vec{b}_1, \vec{B} \right] + \left[I\vec{a}_2, \vec{B} \right] + \left[I\vec{b}_2, \vec{B} \right], \qquad (3.28)$$

де $\vec{F}_1 = \left[I\vec{a}_1, \vec{B} \right]$ – сила Ампера, що діє на ділянку ***1***; $\vec{F}_2 = \left[I\vec{b}_1, \vec{B} \right]$ – сила Ампера, що діє на ділянку ***2***; $\vec{F}_3 = \left[I\vec{a}_2, \vec{B} \right]$ – сила Ампера, що діє на ділянку ***3***; $\vec{F}_4 = \left[I\vec{b}_2, \vec{B} \right]$ – сила Ампера, що діє на ділянку ***4***.



Зазначимо, що $\vec{F}_1 = \vec{F}_{1\perp} + \vec{F}_{1\parallel}$, $\vec{F}_2 = \vec{F}_{2\perp} + \vec{F}_{2\parallel}$, $\vec{F}_3 = \vec{F}_{3\perp} + \vec{F}_{3\parallel}$, $\vec{F}_4 = \vec{F}_{4\perp} + \vec{F}_{4\parallel}$, *де* $\vec{F}_{i\perp}$ *і* $\vec{F}_{i\parallel}$ *(*i = 1, 2, 3, 4*) – складові відповідних сил* (див. ф-ли 3.12 ÷ 3.15, 3.16 ÷ 3.19).

Магнітне поле однорідне, тому вектор $\vec{B}$ можна винести за дужки

$$\vec{F}_{\text{A}} = \left[I\vec{a}_1, \vec{B} \right] + \left[I\vec{b}_1, \vec{B} \right] + \left[I\vec{a}_2, \vec{B} \right] + \left[I\vec{b}_2, \vec{B} \right] = I\left[\left(\vec{a}_1 + \vec{b}_1 + \vec{a}_2 + \vec{b}_2 \right), \vec{B} \right],$$

сума векторів

$$\vec{a}_1 + \vec{b}_1 + \vec{a}_2 + \vec{b}_2 = 0$$

і

$$\vec{F}_{\text{A}} = I\left[\left(\vec{a}_1 + \vec{b}_1 + \vec{a}_2 + \vec{b}_2 \right), \vec{B} \right] = 0. \qquad (3.29)$$

Результівна амперових сил, що діють на рамку, дорівнює нулю.

Примітка: З механіки відомо, якщо результівна сил, що діють на систему, дорівнює нулю, сумарний момент сил не залежить від точки, відносно якої визначаються моменти цих сил.

Отже, вираз для моменту амперових сил можна отримати, визначаючи момент сил як векторну суму моментів сил, що діють на сторони рамки, відносно довільної точки.

Вибір способу отримання виразу для моменту сил, що діють на рамку зі струмом, який був використаний, зумовлений бажанням показати, що в загальному випадку рамка з постійним струмом в однорідному стаціонарному полі під дією амперових сил не тільки обертається, але й деформується.

3.5.2. ПЛОСКА РАМКА ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ З ПОСТІЙНИМ СТРУМОМ У СТАЦІОНАРНОМУ ОДНОРІДНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ

Для плоскої рамки довільної форми з постійним струмом вираз (3.28) набуває вигляду

$$\vec{F}_{\text{A}} = \oint_l \left[Id\vec{l}\,, \vec{B} \right] = I\vec{B} \oint_l d\vec{l}\,. \tag{3.30}$$

Отже, задача полягає в визначенні векторного інтеграла $\oint_l d\vec{l}$. Цей інтеграл є замкненим ланцюжком елементарних векторів $d\vec{l}$, тому $\oint_l d\vec{l} = 0$ й

$$\vec{F}_{\text{A}} = \oint_l \left[Id\vec{l}\,, \vec{B} \right] = 0. \tag{3.31}$$

Момент амперових сил, що діють на контур

$$\vec{M} = \oint \left[\vec{r}\,, d\vec{F}_{\text{A}} \right], \tag{3.32}$$

де $d\vec{F}_{\text{A}} = \left[Id\vec{l}\,, \vec{B} \right]$, $\vec{r}$ – радіус-вектор точки прикладення сили $d\vec{F}_{\text{A}}$ відносно заданої точки О.

Розрахунок $\vec{M}$ за формулою (3.32) досить складний, але остаточно отримаємо ф-лу (3.26)

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B} \right],$$

де $\vec{p}_m$ – магнітний момент контуру з постійним струмом.
Модуль моменту сил визначається за формулою (3.27)

$$M = ISB \sin\alpha = p_m B \sin\alpha\,,$$

де I – сила струму в контурі; S – площа контуру; α – кут між магнітним моментом рамки $\vec{p}_m$ і вектором $\vec{B}$.

3.5.3. ПЛОСКА РАМКА ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ З ПОСТІЙНИМ СТРУМОМ У СТАЦІОНАРНОМУ НЕОДНОРІДНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ

Визначення моменту сил за формулою (3.26) справедливе також і для плоскої рамки з постійним струмом, яка знаходиться в неоднорідному магнітному полі за умови, що розміри рамки настільки малі, що впливом неоднорідності магнітного поля на визначення $\vec{M}$ можна знехтувати.

Такій умові задовольняє елементарний контур із постійним струмом, який ми використали при визначенні магнітної індукції $\vec{B}$ поля.

Обертання плоскої рамки з постійним струмом у стаціонарному магнітному полі використовується в багатьох приладах і пристроях. Розглянемо деякі з них.

3.6. ЕЛЕКТРОДВИГУН

Електродвигун — *пристрій для ефективного перетворення електричної енергії в механічну.* Робота електродвигуна базується на дії стаціонарного магнітного поля на провідник із постійним струмом, тобто на використанні сили Ампера.

Класифікація електродвигунів виконується за різними ознаками, основні з яких — тип живлення й принцип роботи.

За **типом живлення** електродвигуни поділяються на *AC* і *DC* електродвигуни.

Електродвигуни класу AC працюють від джерела змінного струму (живлення від електричної мережі).

Електродвигуни класу AD працюють від джерела постійного струму (акумулятори, батарейки *тощо*).

Універсальні електродвигуни працюють від джерел обох типів.

За принципом роботи електродвигуни поділяють на синхронні й асинхронні.

Розглянемо **принцип дії** (рисунок 3.17) **та будову** (рисунок 3.18) **електродвигуна постійного струму (синхронного електродвигуна).**

Розташуємо рамку так, щоб її площина була паралельна вектору $\vec{B}$ (див. рис. 3.17, *а*). При пропусканні постійного електричного струму в рамці, вона буде повертатись (див. рис. 3.17, *б*). Якщо в момент, коли рамка буде підходити до положення, в якому $\vec{p}_m \uparrow\uparrow \vec{B}$ (див. рис. 3.17, *в*), струм вимкнути,

то рамка пройде це положення за інерцією й буде продовжувати рух доки не повернеться у вихідне положення (див. рис. 3.17, *а*). Якщо тепер знову ввімкнути струм, процес повториться. Якщо проходження струму по рамці регулювати так, щоб він виникав, коли рамка знаходиться в положенні *а*, а вимикати, коли рамка знаходиться в положенні *в*, то рамка буде обертатись неперервно. Це *модель електричного двигуна*.

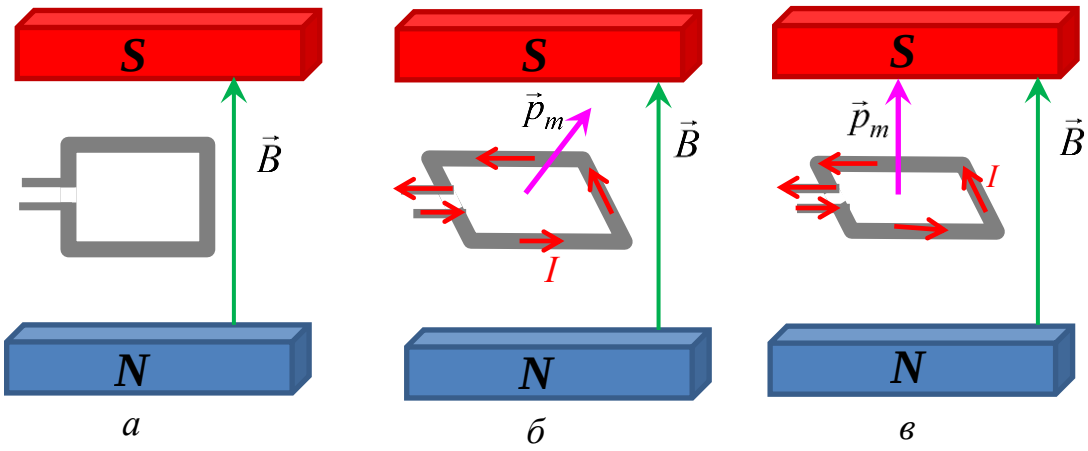
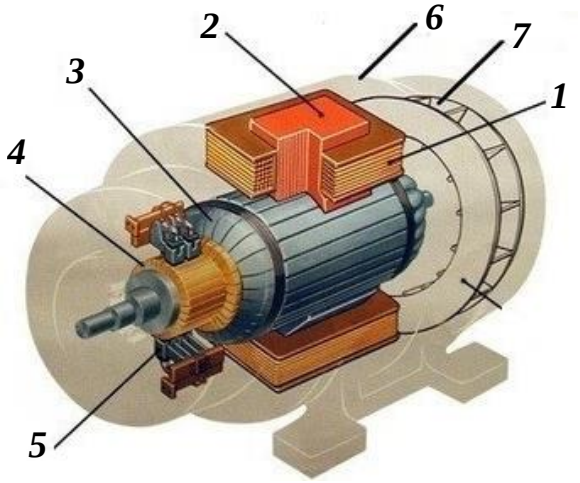


Рисунок 3.17

Розглянемо будову й роботу **електродвигуна** (рисунок 3.18), який працює за розглянутою моделлю.

ОСНОВНІ СКЛАДНИКИ ЕЛЕКТРОДВИГУНА



1 – індуктор; *2* – осердя індуктора; *3* – якір; *4* – колектор; *5* – електричні щітки; *6* – корпус; *7* – вентилятор

Рисунок 3.18

➢ **Індуктор** — нерухома частина — постійний магніт або електромагніт, який створює постійне магнітне поле. В більшості електродвигунів використовуються електромагніти (див. рис. 3.18).

Електромагніт складається з феромагнітного осердя, на яке намотаний щільно виток до витка дріт — *обмотка електромагніта*. Коли електричний струм тече по обмотці, тоді осердя намагнічується й виникає потужне постійне магнітне поле. Після

вимикання струму намагніченість магніту і, відповідно, магнітне поле зникають.

- **Якір** — рухома частина — феромагнітне осердя з обмотками, по яких протікає постійний струм; кінці осердя мають таку форму, щоб між полюсами магніту й осердя залишався невеликий проміжок, необхідний для обертання.
- **Колектор**, до якого приєднані виводи обмоток якоря. З'єднання обмоток якоря з джерелом постійного струму відбувається за допомогою **електричних щіток** — контактних пластин, що ковзають по колектору.

Частина двигуна (*якір*), яка обертається, називається *ротором*, а нерухома частина (*індуктор*) — *статором*.

http://profil.adu.by/pluginfile.php/3555/mod_book/chapter/9377/Рис.%20188.5.jpg

Рисунок 3.19

При підключенні двигуна до джерела постійного струму й проходженні струму по обмоткам статора (електромагніту) й ротора, ротор почне обертатись навколо своєї осі. Якщо вал ротора з'єднати з навантаженням, наприклад підіймачем вантажів, то можна підіймати вантажі.

Для забезпечення безперервного руху якір має декілька обмоток (рисунок 3.19). Обертальний момент набуває максимального значення, коли відповідна обмотка знаходиться в площині, паралельній напрямку магнітної індукції поля, й дорівнює нулю, коли обмотка знаходиться в площині, перпендикулярній до магнітної індукції. Щоб забезпечити тривале обертання якоря при незмінному напрямку обертального моменту, напрямок електричного струму в обмотці повинен змінюватись через кожний півоберт. Для цього при обертанні якоря колектор відключає електричні щітки від однієї обмотки й підключає до іншої. Це забезпечує в кожний момент часу проходження струму по обмотці якоря, яка знаходиться в площині, паралельній магнітній індукції поля. Отже, обертальний момент зберігає свій напрямок і якір обертається в одному напрямку. Змінюючи силу струму в обмотках якоря, можна регулювати величину кутової швидкості (швидкості обертання). Напрямок обертання можна змінювати, змінюючи напрямок струму в обмотках якоря або індуктора.

Електродвигуни набули широкого використання як приводні двигуни для прокатних станів, гребних гвинтів кораблів, підіймальних машин, в електрифікованому магістральному, міському й заводському транспорті,

дорожньо-будівельних машинах *тощо*. Вдома кожен теж може виявити електродвигуни в різних пристроях: у годиннику, вентиляторі мікрохвильової печі, пральній машині, комп'ютерному вентиляторі, кондиціонері, соковитискачі *тощо*.

3.7. ЕЛЕКРОВИМІРЮВАЛЬНІ ПРИЛАДИ МАГНІТОЕЛЕКТРИЧНОЇ СИСТЕМИ

Електровимірювальний прилад — *технічний пристрій, призначений для порівнювання електричної величини з однорідною величиною, що прийнята за одиницю.*

Електровимірювальні прилади поділяють на прилади безпосередньої оцінки й прилади порівняння. Для вимірювання електричних величин у приладах безпосередньої оцінки переважно використовують фізичні процеси, що створюють обертальний момент і переміщення рухомої частини приладу. Залежно від фізичної взаємодії, що використовується в приладі, вони поділяються на магнітоелектричні, електромагнітні, електродинамічні, індукційні, електростатичні та деякі інші системи.

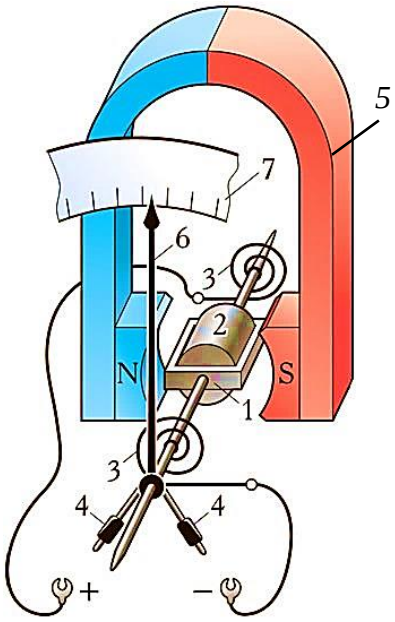


Рисунок 3.20

Вимірювальний прилад магнітоелектричної системи має будову, показану на рисунку 3.20. На легкій алюмінієвій рамці прямокутної форми намотана котушка *1*, яка складається з декількох десятків витків ізольованого дроту. Котушка може переміщуватися у вузькому проміжку між полюсними наконечниками *N* і *S* постійного магніту *5* і циліндром *2*, який виготовлений з магнітом'якого заліза. Рамка з котушкою жорстко закріплена на двох півосях, до однієї з яких прикріплена вказівна стрілка *6*. На півосях також встановлені електрично ізольовані одна від іншої дві спіральні пружини *3*, які забезпечують підведення струму, що вимірюється, до котушки й створюють протидійний момент. Загострені кінці півосей (керни) опираються на підп'ятники з агату, рубіну чи іншого твердого каменю. Для врівноваження

рухомої частини приладу в полі сили тяжіння в будь-якому положенні вказівної стрілки використовуються противаги *4*.

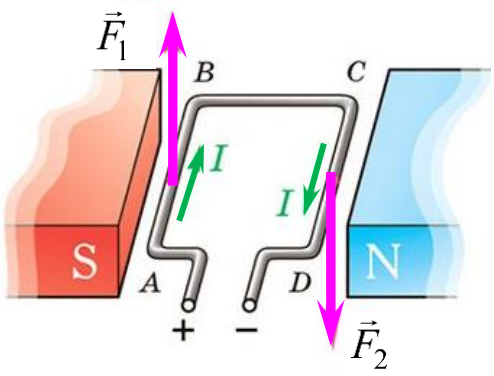


Рисунок 3.21

В початковому стані пружини *3* утримують рамку в певному положенні рівноваги, при якому стрілка *6* приладу вказує на нульову поділку шкали. Коли струм проходить по обмотці котушки, сили Ампера, які діють на прямолінійні ділянки («активні» ділянки) котушки, що паралельні півосям приладу (рисунок 3.21), створюють обертальний момент $M_{об1}$ і рамка повертається на деякий кут. В однорідному магнітному полі модуль обертального моменту (див. ф-лу (3.27)) $M_{об1} = p_m NB\sin\varphi = ISNB\sin\varphi$ (p_m – модуль магнітного моменту витка котушки; N – кількість витків котушки; B – модуль магнітної індукції; φ – кут між магнітною індукцією $\vec{B}$ й позитивною нормаллю $\vec{n}$ до витка (між $\vec{B}$ й магнітним моментом витка $\vec{p}_m$); S – площа витка). Використання магнітів із полюсними наконечниками спеціальної форми й циліндра з магнітом'якого матеріалу забезпечує створення магнітного поля з радіальними силовими лініями в області, де переміщується котушка. Внаслідок цього при незмінній силі струму, що вимірюється, залишаються постійними модуль індукції магнітного поля, модуль сил Ампера, що діють на «активні» ділянки котушки, та їхнє плече для будь-якого положення котушки в секторі, де відбувається вимірювання.

При повороті котушки пружини *3* деформуються; в них виникають сили пружності, які створюють обертальний момент $M_{об2}$, що протидіє обертальному моменту $M_{об1}$. В стані рівноваги момент сил пружності врівноважує момент сил Ампера: $M_{об2} + M_{об1} = 0$. Отже, обертальний момент $M_{об2}$ пропорційний куту φ повороту рамки, а шкала приладу рівномірна.

Заспокоювачем вимірювального механізму є алюмінієвий каркас рамки. При коливаннях рамки в магнітному полі в ньому виникають вихрові струми, взаємодія яких із магнітним полем постійного магніту створює гальмівний момент, що гасить коливання рамки й вказівної стрілки.

Примітка: Походження вихрових струмів та їхня взаємодія з магнітним полем детально будуть розглянуті в підрозділі 5.2.

3.8. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 7

Квадратна дротяна рамка закріплена на горизонтальній осі так, що може вільно обертатися навколо однієї з її сторін. Площа поперечного перетину дроту $S = 4$ мм^2, густина матеріалу дроту $\rho = 8{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3. Рамка міститься в однорідному магнітному полі індукцією $\vec{B}$ з вертикальними силовими лініями. Коли по рамці тече постійний струм силою $I = 5$ А, тоді вона відхиляється від вертикальної площини на кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити індукцію магнітного поля. Прискорення вільного падіння прийняти 10 м/с^2.

Аналіз

На провідник із постійним струмом в однорідному магнітному полі діє сила Ампера (див. підрозділ 3.3)

$$\vec{F}_{\text{A}} = I\left[\vec{l}, \vec{B}\right], \qquad (1)$$

де I – сила струму в провіднику; $\vec{B}$ – магнітна індукція; $\vec{l}$ – вектор, модуль якого дорівнює довжині провідника $\left|\vec{l}\right| = l$, а напрямок збігається з напрямком струму в провіднику. Напрямок вектора $\vec{F}_{\text{A}}$ можна визначити *за правилом правого свердлика* або *за правилом лівої руки*.

Модуль сили

$$F_{\text{A}} = IlB\sin\alpha, \qquad (2)$$

де α – кут між векторами $\vec{l}$ і $\vec{B}$.

Напочатку рамка висить вертикально (рисунок 1, *а*). На її бокові ділянки не буде діяти сила Ампера внаслідок того, що кут між $\vec{l}$ і $\vec{B}$ для лівої ділянки дорівнює 180°, для правої ділянки — 0°, тому $\sin\alpha = 0$. Отже, сили Ампера будуть діяти тільки на верхню й нижню ділянки. Ці сили — $\vec{F}_{\text{A1}}$ і $\vec{F}_{\text{A2}}$ — перпендикулярні до площини рамки й викликають її обертання. Проте сила $\vec{F}_{\text{A2}}$, що діє на сторону рамки, яка збігається з віссю обертання, обертання не

викликає, оскільки її лінія дії перетинає вісь. Отже, рамка обертається під дією сили $\vec{F}_{A1}$. При руху рамки на її бокові ділянки теж починають діяти сили Ампера: $\vec{F}_{A3}$ і $\vec{F}_{A4}$. Лінії дії сил $\vec{F}_{A3}$ і $\vec{F}_{A4}$ знаходяться в площині рамки, перпендикулярні до відповідних сторін і викликають тільки її деформацію (див. пункт 3.5.1, рис. 1, *б*). Отже, рамка буде обертатись навколо осі під дією сили $\vec{F}_{A1}$ (див. рис. 1, *б*, *в*).

Модуль сили $\vec{F}_{A1}$

$$F_{A1} = IBl\sin 90^{o} = IBl, \qquad (3)$$

де l – довжина сторони рамки.

Як зазначалося раніше (див. задачу 5), сила Ампера прикладена в центрі мас однорідного прямого провідника: посередині ділянки *CD*.

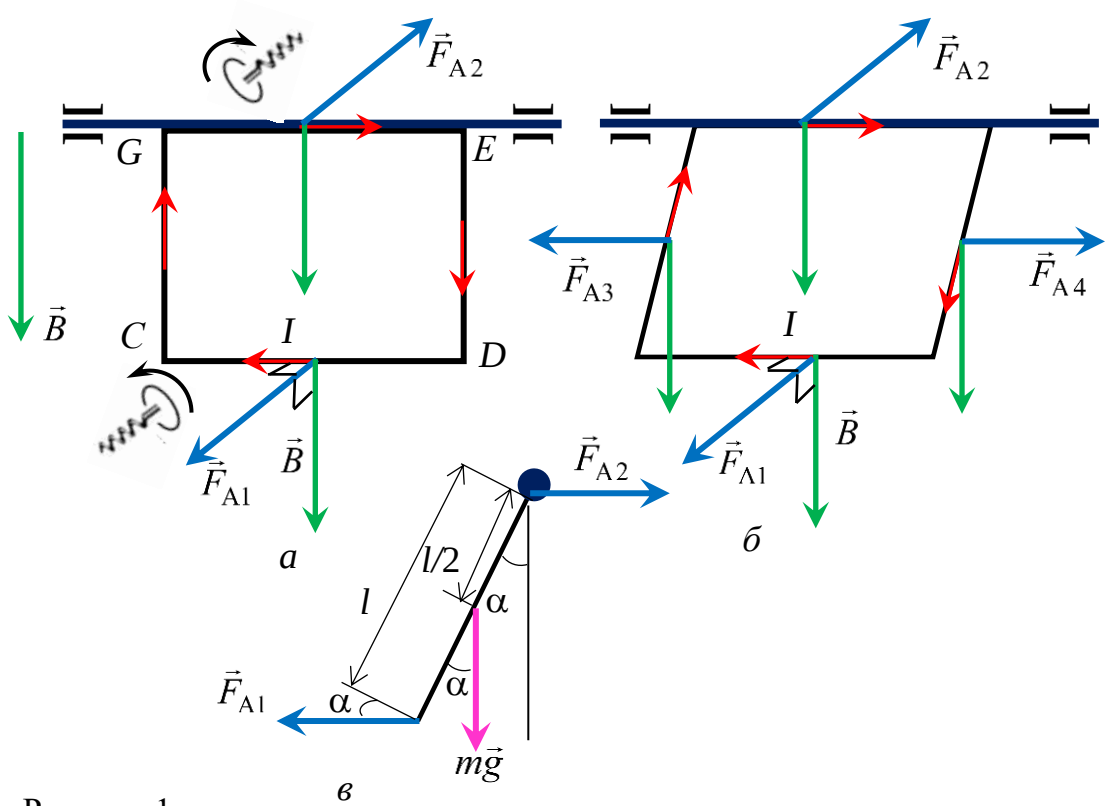


Рисунок 1

До рамки, окрім сили Ампера, прикладена також сила тяжіння $m\vec{g}$ (m – маса рамки; $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння). Зауважимо, що за умовою задачі рамка квадратна. Можна показати, що центр мас (відповідно й центр тяжіння) такої рамки знаходиться на перетині її діагоналей, тобто знаходиться на

однаковій відстані $l/2$ (l – довжина сторони рамки) від усіх сторін рамки. Сила тяжіння прикладена в центрі тяжіння рамки.

Отже, точки прикладення сили Ампера й тяжіння знаходяться на одній лінії, що перпендикулярна до осі обертання й проходить крізь центр тяжіння рамки.

Рамка буде знаходитись у стані рівноваги при виконанні умови: алгебраїчна сума моментів сил, прикладених до рамки, дорівнює нулю

$$M_1 + M_2 = 0, \tag{4}$$

де M_1 – момент сили тяжіння, M_2 – момент сили Ампера відносно осі обертання.

Визначимо моменти сил відносно осі обертання, беручи зі знаком «+» момент сили, що викликає обертання рамки за годинниковою стрілкою, й зі знаком «–» момент сили, що викликає обертання рамки проти годинникової стрілки.

Модуль моменту сили M дорівнює

$$M = F \cdot d, \tag{5}$$

де F – модуль сили; d – плече сили.

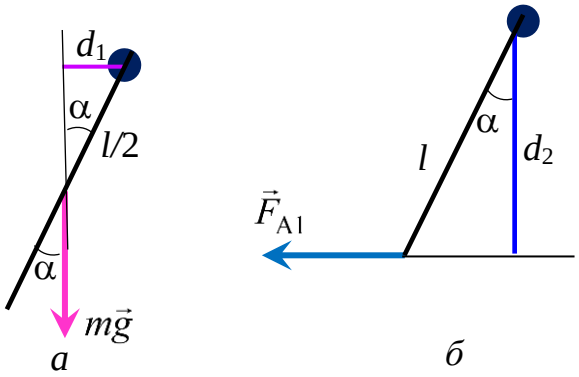


Рисунок 2

Моменти

сили тяжіння (рисунок 2, *а*)

$$M_1 = -mgd_1 = -\frac{mgl\sin\alpha}{2}, \tag{6}$$

сили Ампера (див. рис. 2, *б*)

$$M_2 = F_{A1}d_2 = F_{A1}l\cos\alpha = IBll\cos\alpha = IBl^2\cos\alpha. \tag{7}$$

Отже,

$$-\frac{mgl\sin\alpha}{2}+IBl^2\cos\alpha=0 \qquad (8)$$

або

$$\frac{mg\sin\alpha}{2}=IBl\cos\alpha\,. \qquad (9)$$

Звідси

$$B=\frac{mg\sin\alpha}{2Il\cos\alpha}=\frac{mg\mathrm{tg}\alpha}{2Il}\,. \qquad (10)$$

Маса рамки

$$m=4\rho Sl\,, \qquad (11)$$

де ρ – густина матеріалу дроту; l – довжина сторони рамки; S – площа поперечного перетину дроту.

Тоді

$$B=\frac{4\rho Slg\mathrm{tg}\alpha}{2Il}=\frac{2\rho Sg\mathrm{tg}\alpha}{I}\,. \qquad (12)$$

Перевіримо формулу (12):

$$[B]=\text{Тл}=\text{кг}\cdot\text{А}^{-1}\text{с}^{-2};\quad [S]=\text{м}^2;[\rho]=\text{кг}\cdot\text{м}^{-3};\quad [g]=\text{м}\cdot\text{с}^{-2};\quad [I]=A;[\mathrm{tg}\alpha]=1;$$

$$\left[\frac{\rho Sg}{I}\right]=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}}{\text{м}^3\cdot A\cdot\text{с}^2}=\frac{\text{кг}}{\text{с}^2\cdot A}=\text{кг}\cdot\text{А}^{-1}\text{с}^{-2}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$\rho=8{,}6\cdot10^3$ кг/м^3		$B=\dfrac{2\cdot8{,}6\cdot10^3\cdot4\cdot10^{-6}\cdot10\cdot\mathrm{tg}30^\circ}{5}=$
$S=4$ мм^2	$4\cdot10^{-6}$ м^2	$=7{,}9\cdot10^{-2}$ Тл$=79\cdot10^{-3}$ Тл$=79$ мТл.
$\alpha=30^\circ$		
$I=5$ А		
$g=10$ м/с^2		
$B-?$		**Відповідь:** $B=79$ мТл.

3.9. СИЛА ЛОРЕНЦА

На заряджену частинку, що рухається з постійною швидкістю в стаціонарному магнітному полі, діє сила. Ця сила називається **магнітною силою Лоренца** $\vec{F}_Л$.

Магнітна сила Лоренца, що діє на позитивно заряджену частинку (рисунок 3.22),

$$\vec{F}_Л = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right], \tag{3.33}$$

де q – заряд частинки; $\vec{v}$ – швидкість частинки; $\vec{B}$ – магнітна індукція.

Модуль **магнітної сили Лоренца**

$$F_Л = qvB\sin\alpha, \tag{3.34}$$

де B – модуль магнітної індукції; v – модуль швидкості; α – кут між векторами $\vec{v}$ і $\vec{B}$.

Напрямок сили визначається за *правилом правого свердлика* (див. рис. 3.22, *б*) або *за правилом лівої руки* (див. рис. 3.22, *а*).

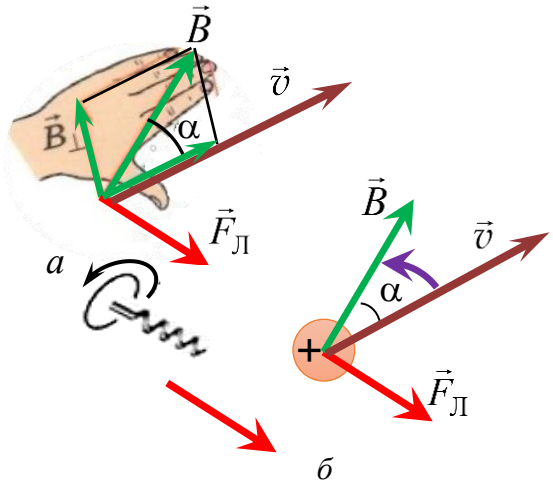


Рисунок 3.22

Правило правого свердлика: якщо вороток свердлика обертати від вектора $\vec{v}$ до вектора $\vec{B}$ вздовж дуги, на яку опирається кут α, напрямок його поступального руху буде збігатися з напрямком магнітної сили Лоренца. Тобто, якщо дивитись з кінця вектора $\vec{F}_Л$, тоді поворот від вектора $\vec{v}$ до вектора $\vec{B}$ відбувається проти годинникової стрілки.

Правило лівої руки: якщо ліву руку розташувати так, щоб чотири пальці були напрямлені вздовж швидкості $\vec{v}$ частинки, а складова магнітної індукції $\vec{B}_\perp$ (складова, що перпендикулярна до швидкості частинки) входила в долоню, відігнутий на 90° великий палець вказуватиме напрямок сили Лоренца $\vec{F}_Л$.

Магнітна сила Лоренца, яка діє на негативно заряджену частинку, що рухається з постійною швидкістю, *напрямлена в бік, протилежний напрямку сили, яка діє на позитивно заряджену частинку, що рухається з такою ж швидкістю* (рисунок 3.23).

Магнітна сила Лоренца перпендикулярна до швидкості $\vec{v}$ зарядженої частинки, отже, роботи над нею не виконує.

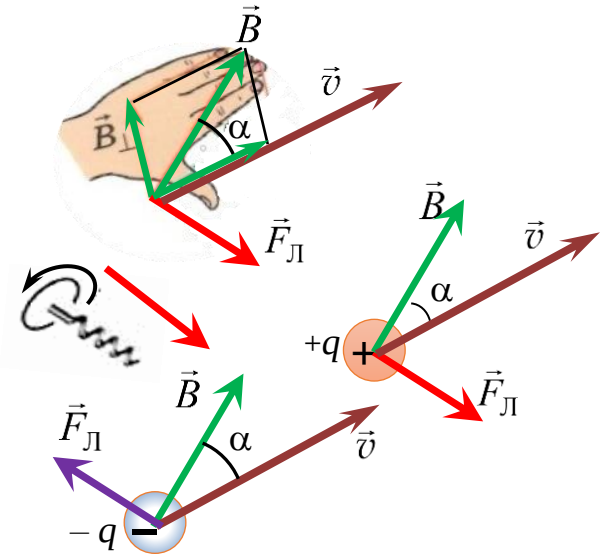


Рисунок 3.23

3.10. РУХ ЗАРЯДЖЕНОЇ ЧАСТИНКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ Й МАГНІТНОМУ ПОЛЯХ

Надалі будемо розглядати рух зарядженої частинки в перехрещених взаємно перпендикулярних електричному й магнітному полях, тому пригадаймо особливості руху такої частинки в стаціонарному електричному полі. Також корисно буде порівняти рухи зарядженої частинки в однорідному стаціонарному електричному та однорідному стаціонарному магнітному полях.

3.10.1. РУХ ЗАРЯДЖЕНОЇ ЧАСТИНКИ В СТАЦІОНАРНОМУ ОДНОРІДНОМУ ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ

На заряджену частинку, яка рухається в електричному полі, діє електрична сила

$$\vec{F}_e = q\vec{E}, \qquad (3.35)$$

де q – заряд частинки; $\vec{E}$ – напруженість електричного поля.

На частинку діє також сила тяжіння $\vec{F}_т = m\vec{g}$ (m – маса частинки; $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння). В типових випадках, які зазвичай мають місце в реальних умовах, $F_т << F_e$ (прийнятне значення $\frac{F_e}{F_т} > 10$). Тоді силою тяжіння можна знехтувати. Надалі будемо розглядати саме такі випадки.

1. Частинка зарядом q і масою m влітає з початковою швидкістю $\vec{v}_0$ в однорідне електростатичне поле вздовж силової лінії (тобто вздовж напруженості $\vec{E}$).

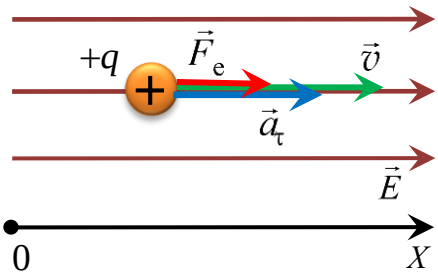


Рисунок 3.24

Для однозначності розглянемо рух *позитивно зарядженої частинки* (рисунок 3.24).

За другим законом Ньютона сила $\vec{F}_e$ надає частинці прискорення $\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m} = \frac{q\vec{E}}{m}. \tag{3.36}$$

Отже, рух частинки прямолінійний рівнозмінний (у випадку, що розглядається, рух частинки рівноприскорений).

Швидкість частинки змінюється з часом t за законом

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \tag{3.37}$$

модуль швидкості

$$v = v_0 + at, \tag{3.38}$$

переміщення частинки за час t вздовж силової лінії

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \tag{3.39}$$

довжина S шляху, пройденого частинкою за час t,

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{3.40}$$

Визначимо рівняння траєкторії частинки.

Нехай вісь $0X$ паралельна траєкторії частинки (див. рис. 3.24). Приймаємо, що в початковий момент часу $t_0 = 0$ координата частинки $x_0 = 0$. Тоді рівняння руху частинки

$$x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}, \tag{3.41}$$

де v_{0x} – проєкція початкової швидкості, a_x – проєкція прискорення на вісь $0X$. Або, враховуючи характер руху,

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \qquad (3.42)$$

Примітка: Особливості руху (рівноприскорений чи рівносповільнений і відповідно конкретний вид рівнянь 3.38, 3.40, 3.42) будуть залежати від того, як напрямлена початкова швидкість $\vec{v}_0$ частинки зі зарядом певного знаку відносно напруженості $\vec{E}$, а також, у загальному випадку, від знаку заряду.

2. Частинка зарядом *q* і масою *m* влітає в однорідне електростатичне поле з початковою швидкістю $\vec{v}_0$ перпендикулярно до силових ліній (тобто перпендикулярно до напруженості $\vec{E}$).

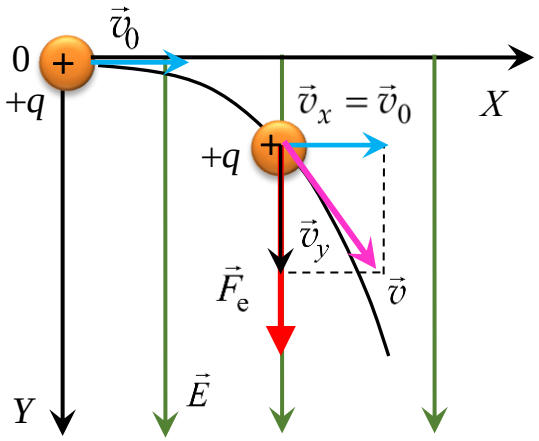


Рисунок 3.25

Для однозначності розглянемо рух позитивно зарядженої частинки (рисунок 3.25).

Раніше, в пункті 1.2.9, розглядалась аналогічна задача (задача 20). Було показано, що в такому випадку рух частинки подібний до руху тіла (матеріальної точки), яке кинуте горизонтально (тіло рухається в полі сили тяжіння). В обох випадках тіло (частинка) рухається під дією сили, яка перпендикулярна до початкової швидкості тіла (частинки).

Нагадаємо основні етапи розв'язку задачі й висновки. Рух частинки можна розглядати як суперпозицію двох рухів: вздовж осі $0X$, перпендикулярної до напруженості електричного поля $\vec{E}$, і вздовж осі $0Y$, паралельної напруженості електричного поля $\vec{E}$.

В будь-яку мить швидкість $\vec{v}$ частинки

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y, \qquad (3.43)$$

де $\vec{v}_x$ – складова швидкості вздовж осі $0X$; $\vec{v}_y$ – складова швидкості вздовж осі $0Y$.

Рух частинки вздовж осі $0Y$ здійснюється під дією електричної сили $\vec{F}_{\text{e}} = q\vec{E}$, яка надає частинці прискорення $\vec{a}_y$

$$\vec{a}_y = \frac{\vec{F}_{\text{e}}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m}. \tag{3.44}$$

Отже, рух частинки вздовж осі $0Y$ — рівнозмінний прямолінійний (у випадку, що розглядається, рух частинки рівноприскорений).

Частинка влітає перпендикулярно до силових ліній поля. Сила $\vec{F}_{\text{e}}$ перпендикулярна до початкової швидкості $\vec{v}_0$ частинки. Тому рух частинки вздовж осі $0X$ — рівномірний прямолінійний зі швидкістю $\vec{v}_0$.

Отже, рух частинки можна розглядати як суперпозицію рівномірного прямолінійного руху й рівноприскореного прямолінійного руху, які відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках.

Нехай в початковий момент часу $t_0 = 0$ координати частинки $x_0 = y_0 = 0$, тоді

координата частинки в момент часу t

$$x = v_0 t, \tag{3.45}$$

координата y частинки в момент часу t

$$y = \frac{a_y t^2}{2}. \tag{3.46}$$

Модуль прискорення

$$a_y = \frac{qE}{m}. \tag{3.47}$$

З ф-л (3.45) ÷ (3.47) отримуємо рівняння траєкторії частинки

$$y = \frac{qEx^2}{2mv_0^2}. \tag{3.48}$$

Траєкторія частинки — **парабола.**

Якщо заряджена частинка влітає в однорідне електростатичне поле так, що вектор $\vec{v}_0$ утворює кут α з напруженістю $\vec{E}$ електричного поля, її рух можна розглядати як суперпозицію (накладання) двох рухів: із початковою швидкістю $\vec{v}_{0\parallel}$, що паралельна вектору $\vec{E}$, й початковою

швидкістю $\vec{v}_{0\perp}$, що перпендикулярна до $\vec{E}$, які зв'язані співвідношенням $\vec{v}_0 = \vec{v}_{0\parallel} + \vec{v}_{0\perp}$.

3.10.2. РУХ ЗАРЯДЖЕНОЇ ЧАСТИНКИ В СТАЦІОНАРНОМУ ОДНОРІДНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ

На заряджену частинку, що рухається зі швидкістю $\vec{v}$ в магнітному полі індукцією $\vec{B}$, діє магнітна сила Лоренца (див. підрозділ 3.9).

На частинку діє також сила тяжіння $\vec{F}_т = m\vec{g}$ (m – маса частинки; $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння). В типових випадках, які зазвичай мають місце в реальних умовах, $F_т << F_Л$ (прийнятне $\frac{F_Л}{F_т} > 10$). Тоді силою тяжіння можна знехтувати. Надалі будемо розглядати саме такі випадки.

1. Частинка зарядом $+q$ і масою m влітає зі швидкістю $\vec{v}$ паралельно силовим лініям стаціонарного однорідного магнітного поля (рисунок 3.26).

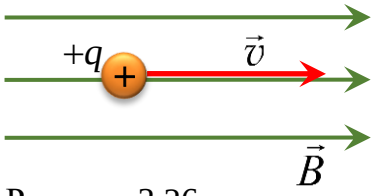


Рисунок 3.26

На частинку діє магнітна сила Лоренца $\vec{F}_Л$

$$\vec{F}_Л = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]. \qquad (3.49)$$

Модуль магнітної сили Лоренца $F_Л$

$$F_Л = qvB\sin\alpha = qvB\sin 0^o = 0, \qquad (3.50)$$

де α – кут між векторами $\vec{v}$ і $\vec{B}$.

Отже, **частинка рухається вздовж силової лінії рівномірно прямолінійно зі швидкістю** $\vec{v}$.

2. Частинка зарядом $+q$ і масою m влітає зі швидкістю $\vec{v}$ перпендикулярно до силових ліній стаціонарного однорідного магнітного поля (рисунок 3.27).

На частинку діє магнітна сила Лоренца $\vec{F}_Л$

$$\vec{F}_Л = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right], \qquad (3.51)$$

модуль якої дорівнює

$$F_Л = qvB\sin 90^o = qvB. \qquad (3.52)$$

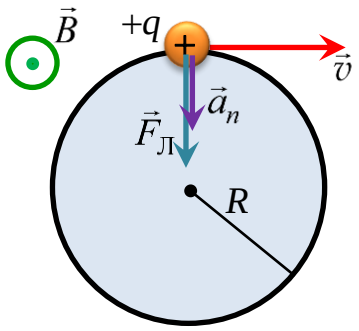


Рисунок 3.27

Сила $\vec{F}_Л$ перпендикулярна до швидкості $\vec{v}$. Прискорення, яке вона надає частинці, також перпендикулярне до $\vec{v}$. Отже, за другим законом Ньютона сила Лоренца надає частинці нормальне прискорення

$$\vec{a}_n = \frac{\vec{F}_Л}{m}. \qquad (3.53)$$

Швидкість частинки буде змінюватись тільки за напрямком.

Отже, **рух частинки буде рівномірним рухом по колу.**

Визначимо радіус R кола, по якому рухається частинка, й період T обертання частинки.

Модуль нормального прискорення

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \qquad (3.54)$$

З іншого боку (див. ф-ли (3.53, 3.52)

$$a_n = \frac{F_Л}{m} = \frac{qvB}{m}. \qquad (3.55)$$

З (3.54) і (3.55) отримуємо

$$\frac{v^2}{R} = \frac{qvB}{m}. \qquad (3.56)$$

Звідси

$$R = \frac{mv}{qB}. \qquad (3.57)$$

Повний оберт частинка здійснить за час T, який називається *періодом обертання*. За період обертання частинка пройде шлях довжиною S, який дорівнює довжині кола $S = 2\pi R$.

Отже, **період обертання**

$$T = \frac{S}{v} = \frac{2\pi R}{v}. \qquad (3.58)$$

Врахувавши співвідношення (3.57), отримуємо

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m v}{vqB} = \frac{2\pi m}{qB},$$

$$T = \frac{2\pi m}{qB}. \qquad (3.59)$$

Зазначимо, що ***період обертання частинки не залежить від її швидкості.***

3. Частинка зарядом $+q$ і масою m влітає зі швидкістю $\vec{v}$ в стаціонарне однорідне магнітне поле під $\angle\alpha \neq 90^{o}$ до силових ліній (рисунок 3.28).

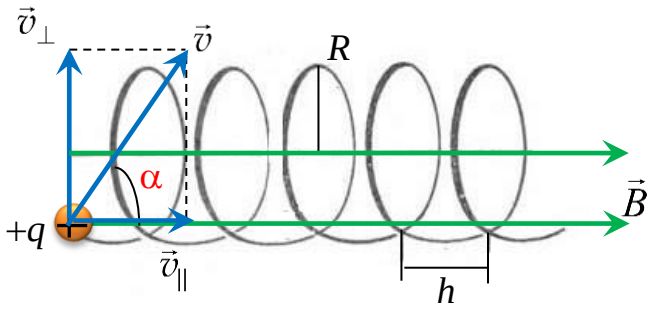


Рисунок 3.28

Рух частинки можна розглядати як суперпозицію (накладання) двох рухів: руху вздовж силової лінії зі швидкістю $\vec{v}_\parallel$ — складовою швидкості $\vec{v}$ вздовж вектора $\vec{B}$, і руху в площині, перпендикулярній до вектора $\vec{B}$, зі швидкістю $\vec{v}_\perp$ – складовою швидкості вздовж напрямку, перпендикулярного до силової лінії (див. рис. 3.28).

Раніше (див. випадок 1) було показано, що рух частинки вздовж силової лінії стаціонарного однорідного магнітного поля буде рівномірним прямолінійним. Отже, у цьому випадку частинка буде рухатись рівномірно прямолінійно зі швидкістю $v_\parallel = v\cos\alpha$ (див. рис. 3.28). В площині, перпендикулярній до силової лінії (див. випадок 2), частинка буде рухатись рівномірно по колу зі швидкістю $v_\perp = v\sin\alpha$ (див. рис. 3.28).

Радіус кола (див. ф-лу (3.57))

$$R = \frac{mv_\perp}{qB} = \frac{mv\sin\alpha}{qB}. \qquad (3.60)$$

Період обертання (див. ф-лу (3.59))

$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m v_\perp}{v_\perp qB} = \frac{2\pi m}{qB}. \qquad (3.61)$$

За період обертання частинка пройде в напрямку силової лінії шлях довжиною

$$h = v_{||}T = \frac{2\pi m v \cos\alpha}{qB}. \qquad (3.62)$$

Отже, траєкторією частинки буде **гвинтова лінія радіусом** $R = \frac{mv\sin\alpha}{qB}$ і **кроком** $h = \frac{2\pi m v \cos\alpha}{qB}$ (див. рис. 3.28).

3.11. ПРАКТИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ СИЛИ ЛОРЕНЦА

В багатьох сучасних приладах і установках застосовується рух заряджених частинок у магнітному полі. Розглянемо деякі з них.

3.11.1. МАГНІТНА ЛІНЗА

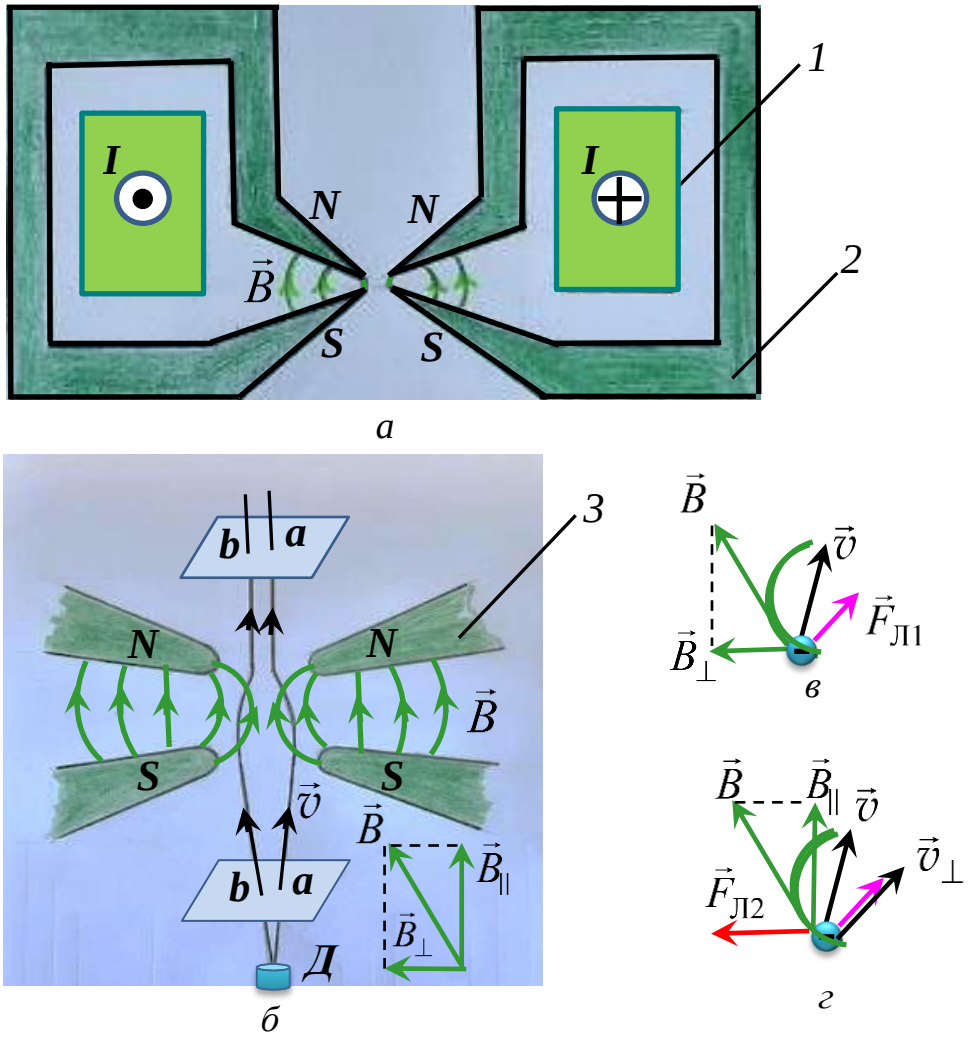
Магнітна лінза використовується для фокусування потоку електронів у деяких електронних приладах. Магнітні лінзи бувають короткі й довгі. Короткі магнітні лінзи, які дають можливість отримати зменшене чи збільшене зображення предмета, набули ширшого використання. Зокрема, короткі магнітні лінзи є складовою частиною електронного мікроскопа. Розглянемо принцип дії короткої магнітної лінзи.

Коротка магнітна лінза — зазвичай циліндричний симетричний електромагніт із дуже гострими кільцевими наконечниками полюсів (рисунок 3.29, *а*). Така конфігурація полюсів забезпечує створення в невеликій області сильно неоднорідного магнітного поля. Поле фокусує потік електронів, які летять через цю область (див. рис. 3.29, *б*).

Отже, у короткій магнітній лінзі електрони рухаються в сильно неоднорідному магнітному полі.

Раніше ми розглянули рух зарядженої частинки в однорідному магнітному полі: частинка рухається по гвинтовій траєкторії, яка має постійний радіус R (див. ф-лу 3.60) і крок h (див. ф-лу (3.62)).

Розглянемо **механізм фокусування** потоку електронів. Нехай два електрони *a* й *b* вилітають із джерела *Д* під деяким кутом до вертикальної осі (площинки на рис. 3.29, *б* використовуються для того, щоб показати розбіжність напрямків електронів (нижня) й паралельність напрямків електронів (верхня)).



а: *1* – обмотка електромагніта, в якій тече струм силою *I*,
2 – феромагнітне осердя
б: *3* – полюси магніта, *Д* – джерело електронів

Рисунок 3.29

Магнітну індукцію $\vec{B}$ поля в будь-якій точці можна розкласти на складові: вздовж осі лінзи $\vec{B}_{||}$ й перпендикулярну до осі лінзи $\vec{B}_{\perp}$ (див. рис. 3.29, *б*). Наявність складової магнітної індукції $\vec{B}_{||}$ зумовлює рух електронів по гвинтовій траєкторії вздовж осі лінзи (вертикально вгору згідно з рис. 3.29, *б*; на рис. показані тільки напрямки руху електронів). Проте внаслідок неоднорідності поля радіус і крок гвинтової лінії не будуть постійними. Зокрема, радіус траєкторії буде зменшуватись. Розглянемо причину цього на прикладі руху електрона *а*. При потраплянні електрона *а* в область магнітного поля, магнітна сила Лоренца, яка зумовлена складовою $\vec{B}_{\perp}$: $\vec{F}_{Л1} = -e\left[\vec{v}, \vec{B}_{\perp}\right]$, відхилить його в

напрямку «від нас» (див. рис. 3.29, *в*). Отже, електрон отримає швидкість $\vec{v}_\perp$, перпендикулярну до магнітної індукції (див. рис. 3.29, *г*). Швидкість $\vec{v}_\perp$ має назву *бокової швидкості*. Тоді магнітна сила Лоренца, яка зумовлена складовою магнітної індукції $\vec{B}_\parallel$ й швидкістю $\vec{v}_\perp$: $\vec{F}_{Л2} = -e\left[\vec{v}_\perp, \vec{B}_\parallel\right]$, відхилить електрон до осі електромагніта (див. рис. 3.29, *г*). Коли електрон буде виходити з області магнітного поля, тоді сила Лоренца $\vec{F}_{Л1} = -e\left[\vec{v}, \vec{B}_\perp\right]$ відхилить електрон у напрямку «до нас». Отже, остаточним ефектом впливу неоднорідного магнітного поля на рух електрона буде відхилення його до осі електромагніта. Внаслідок цього радіус траєкторії зменшується. **Траєкторія електрона — гвинтова лінія, радіус якої зменшується при руху електрона в лінзі** (рисунок 3.30). На електрон *b* діють ті ж сили, але в протилежному напрямку, тому він також відхиляється до осі. Отже, розбіжні електрони, які виходять із джерела, збираються в паралельний пучок.

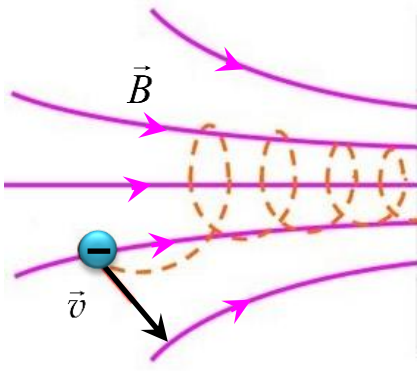


Рисунок 3.30

Маємо аналогію в оптиці: **збиральну лінзу**, в фокусі якої знаходиться джерело світла. Якщо за магнітною лінзою поставити таку ж магнітну лінзу, тоді в фокусі другої лінзи отримаємо зображення джерела електронів *Д*.

3.11.2. ЦИКЛОТРОН

Циклотрон — циклічний прискорювач нерелятивістських важких частинок (протонів, іонів) (рисунок 3.31, *а*).

Примітка: Нерелятивістська частинка — частинка, яка рухається зі швидкістю v набагато меншою за швидкість світла c у вакуумі: $v << c$.

Швидкість світла у вакуумі $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Заряджені частинки, які прискорені у високочастотному електричному полі, рухаються в стаціонарному однорідному магнітному полі (див. рис. 3.31). В основу принципу дії циклотрона покладена незалежність періоду обертання зарядженої частинки в стаціонарному (постійному) однорідному магнітному полі від швидкості частинки (див. ф-лу 3.61).

Перший циклотрон, розрахований на енергію протонів до 1 МеВ, був розроблений *американським фізиком Е. Лоуренсом* у 1930 р. Його діаметр складав усього 25 см.

Схема будови циклотрона показана на рисунках 3.31 і 3.32.

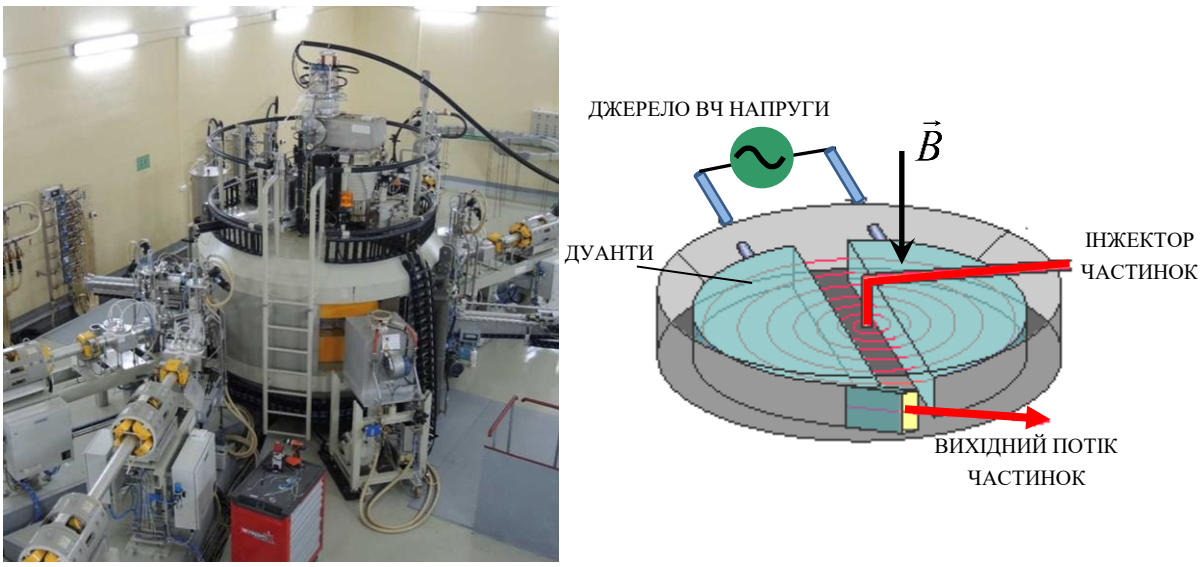
До складу циклотрона входять дві *D*-подібні порожнисті металеві (зазвичай мідні) коробки, які обернені одна до іншої відкритими частинами, — електроди (див. рис. 3.31, *б*, рис. 3.32, *б*, *в*). Ці електроди називаються **дуантами**. Вони знаходяться у вакуумованій камері (тиск у камері $P \sim 10^{-5} \div 10^{-4}$ мм рт. ст.). Дуанти розташовані так, що між їхніми відкритими частинами залишається вузький проміжок. За допомогою спеціальних пристроїв — **резонаторів** — дуанти підключаються до джерела змінної напруги фіксованої високої частоти (ВЧ) й високої напруги $10^4 \div 10^5$ В (див. рис. 3.31, *б*, рис. 3.32, *б*). Це джерело створює в проміжку між дуантами прискорювальне електричне поле саме в той момент, коли через проміжок проходять частинки. Камера знаходиться між полюсами потужного **електромагніта**, що створює стаціонарне однорідне магнітне поле, силові лінії якого перпендикулярні до площини дуантів (див. рис. 3.32, *а*, *б*).

Важкі заряджені частинки (протони, іони) потрапляють з інжектора в камеру поблизу її центра й прискорюються електричним полем (див. рис. 3.32, *д*). Як зазначалося, індукція $\vec{B}$ магнітного поля перпендикулярна до площини дуантів, тобто до площини руху частинок (див. рис. 3.32, *а*, *б*). З боку магнітного поля на частинку діє магнітна сила Лоренца $\vec{F}_{\text{Л}} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$ (q – заряд частинки; $\vec{v}$ – швидкість частинки), яка зумовлює рівномірний рух частинки по колу (див. рис. 3.32, *е*).

Визначення радіуса R траєкторії нерелятивістської частинки було наведене раніше (див. виведення ф-ли (3.57)). Якщо розглядати рух релятивістської частинки ($v \approx c$ (c – швидкість світла у вакуумі)), то радіус траєкторії

$$R = \frac{mv}{qB}\gamma = \frac{mv}{ZeB}\gamma, \qquad (3.63)$$

де m – маса частинки; Z – порядковий номер елемента в Періодичній таблиці; e – елементарний заряд; $\gamma = \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$ – релятивістський фактор.



а – **Cyclone 30 XP** (виробник IBA, США) – циклотрон, в якому прискорюються протони (від 15 МеВ до 30 МеВ), дейтрони (від 8 МеВ до 15 МеВ) й альфа-частинки (30 МеВ). URI: https://www.iba-

б – будова циклотрона й зона руху частинок у циклотроні

Рисунок 3.31

Отже, в циклотроні **радіус орбіти нерелятивістської частинки ($\gamma \approx 1$), яка рухається в однорідному стаціонарному магнітному полі, пропорційний її швидкості.**

В області електричного поля **I** (див. рис. 3.32, *б*) частинка отримує прискорення, яке визначається за другим законом Ньютона,

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m} = \frac{Ze\vec{E}}{m}, \tag{3.64}$$

модуль її швидкості зростає

$$v = v_0 + at, \tag{3.65}$$

де v_0 – початкова швидкість.

Після того, як швидкість частинки зросла, вона буде рухатись по траєкторії більшого радіуса. Коли частинка потрапляє в проміжок **II** (див. рис. 3.32, *б*) між дуантами, тоді для її прискорення напрямок напруженості електричного поля повинен бути протилежним напрямку напруженості в проміжку **I**, оскільки частинка рухається в напрямку, протилежному напрямку руху в проміжку **I**. Це забезпечується підбором відповідної частоти ВЧ напруги.

Отже, на кожному оберті зростає швидкість частинок і **вони рухаються по спіралі з висхідним радіусом.**

Відповідно на кожному оберті зростає кінетична енергія кожної частинки

$$W_k = \frac{mv^2}{2}. \tag{3.66}$$

Період обертання частинки (див. ф-лу (3.59))

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi mv}{vqB} = \frac{2\pi m}{qB}. \tag{3.67}$$

Частота ν *обертання* частинки, яка називається **циклотронною частотою**, визначається за формулою

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{ZeB}{2\pi m}. \tag{3.68}$$

й **не залежить від швидкості частинки, а отже, від її кінетичної енергії.**

Частота ВЧ напруги дорівнює циклотронній частоті.

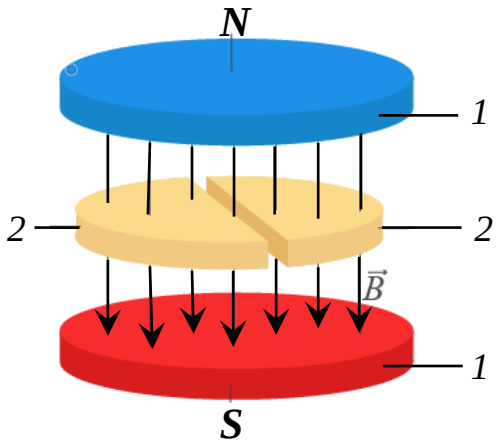
Частинки рухаються доки не досягнуть максимальної швидкості й відповідно максимальної енергії. На останньому витку спіралі вмикається **дефлектор** — відхилювальний електрод (див. рис. 3.32, *б*, *г*), в якому створюється відхилювальне електричне поле, що виводить частинки назовні.

Недоліком циклотрона є обмеження нерелятивістськими енергіями частинок, бо навіть невелике значення релятивістської поправки викликає порушення синхронності прискорення на різних витках і частинки зі значно зрослими енергіями вже не встигають потрапляти в проміжки між дуантами у фазі електричного поля, потрібній для прискорення. В звичайних циклотронах протони можна прискорювати до енергій 20 ÷ 25 МеВ.

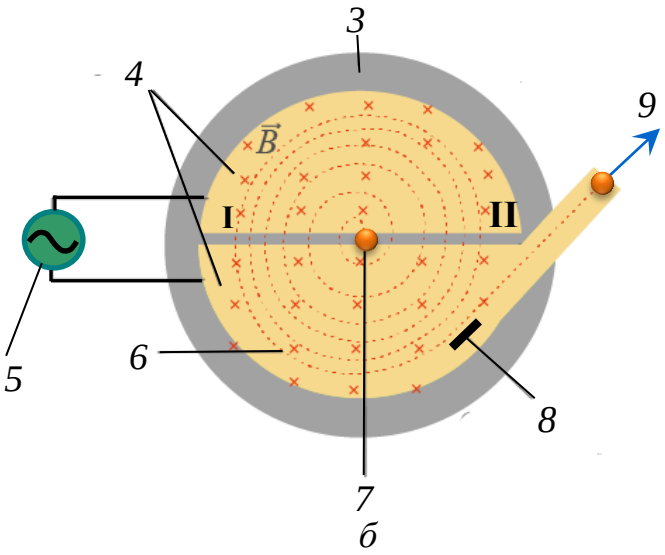
Для прискорення важких частинок до енергій 1 ГеВ використовують ізохронний циклотрон або фазотрон. В ізохронному циклотроні релятивістські ефекти компенсуються радіальним зростанням магнітного поля.

Циклотрони широко використовуються у виробництві радіонуклідів для потреб фармацевтики й медицини. Медичні ізотопи виробляються з нерадіоактивних матеріалів (стабільних ізотопів), які бомбардуються протонами високих енергій, що отримані в циклотроні. Коли протонний пучок взаємодіє зі стабільними ізотопами, тоді відбувається ядерна реакція, кінцевим результатом якої є утворення радіоактивних ізотопів. Деякі лікарні мають власні

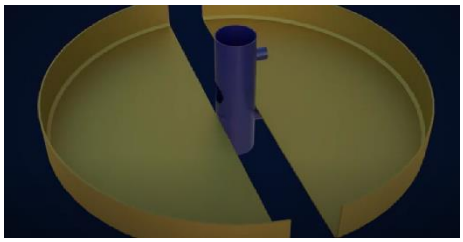
циклотрони, завдяки чому короткоживучі ізотопи виробляються безпосередньо на місцях.



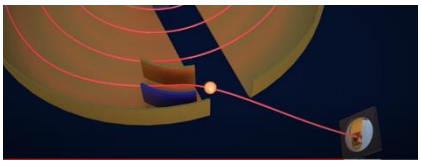
а



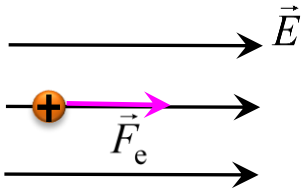
б



в



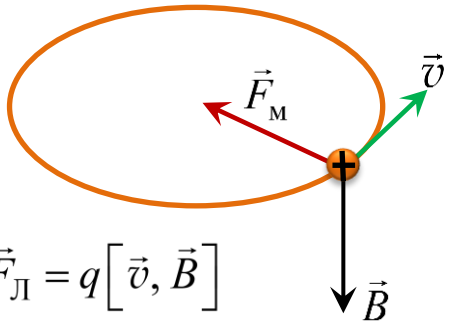
г



$$\vec{F}_e = q\vec{E} = Ze\vec{E} = m\vec{a}$$

Z – порядковий номер хімічного елемента; *e* – елементарний заряд, *m* – маса, $\vec{a}$ – прискорення частинки

д



$$\vec{F}_Л = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$$

е

***а* – вигляд з боку**: *1* – постійний магніт; *2* – дуанти; ***б* – вигляд зверху**: *3* – вакуумна камера; *4* – дуанти; *5* – джерело високочастотної напруги; *6* – траєкторія частинки; *7* – джерело частинок; *8* – дефлектор (відхилювальний електрод); *9* – прискорений пучок частинок; ***в* – дуанти в розрізі**; ***г* – конструкція дефлектора**; ***д* – рух частинки в прискорювальному електричному полі**; ***е* – траєкторія частинки в стаціонарному однорідному магнітному полі**

Рисунок 3.32

Радіофармацевтичні препарати, які були отримані за допомогою циклотронів, виявились дуже ефективними в діагностуванні різних видів раку.

Радіоізотопи, отримані на циклотронах, використовуються також у позитронно-емісійній томографії (ПЕТ) та однофотонній емісійній комп'ютерній томографії (ОФЕКТ). Зазначимо, що радіоізотопи можна також отримувати за допомогою дослідницьких ядерних реакторів. Однак, такий метод, на відміну від циклотронного, є більш небезпечним з погляду радіаційної безпеки.

3.11.3. МАС-СПЕКТРОМЕТР

Мас-спектрометр (рисунок 3.33) — прилад, який дозволяє розділяти в просторі або в часі частинки, що рухаються в електричному й магнітному полях, за їхніми *питомими зарядами* q/m (q – заряд, m – маса частинки) й визначати масу молекул (атомів) та відносний вміст елементів у досліджуваному зразку.

Мас-спектрометр QTRAP 6500+ LC-MS/MS, SCIEX https://khimexpert.com/product/mass-spektrometr-qtrap-6500-lc-ms-ms-sciex/

Рисунок 3.33

Перший мас-спектрограф був розроблений в 1912 р. *англійським фізиком Дж. Дж Томсоном.*

Існує багато різновидів мас-спектрометрів, проте в основу їхньої роботи покладено єдиний принцип, за яким відбувається аналіз речовини. Блок-схема мас-спектрометра наведена на рисунку 3.34.

Розглянемо основні вузли мас-спектрометра, наголосивши на характерних загальних особливостях кожного вузла.

Зазначимо, що у всіх видах мас-спектрометрів для того, щоб мінімізувати зіткнення іонів досліджуваної речовини з іншими атомами й молекулами, аналіз виконують у вакуумі.

ОСНОВНІ СКЛАДНИКИ МАС-СПЕКТРОМЕТРА

➢ **Система напуску.** Досліджувана речовина вводиться в іонізатор. Кількість досліджуваного зразка не перевищує кілька мікромолів, щоб не порушувати вакуум у приладі. Спосіб введення залежить від особливостей досліджуваної речовини. При *непрямому способі* пробу вводять в іонізатор у газоподібному стані. При дослідженні речовини в рідкому чи твердому стані вона попередньо випаровується шляхом нагрівання до температури близько

500 °С в умовах вакууму (тиск 10^{-4} мм рт. ст.). Зразок випаровують у спеціальній камері, з якої пара як молекулярний пучок надходить через отвір в іонізатор. При *прямому введенні* речовина, яка важко випаровується, вводиться безпосередньо в іонізатор. З огляду на незначні втрати, при такому способі достатньо декілька нанограмів речовини.

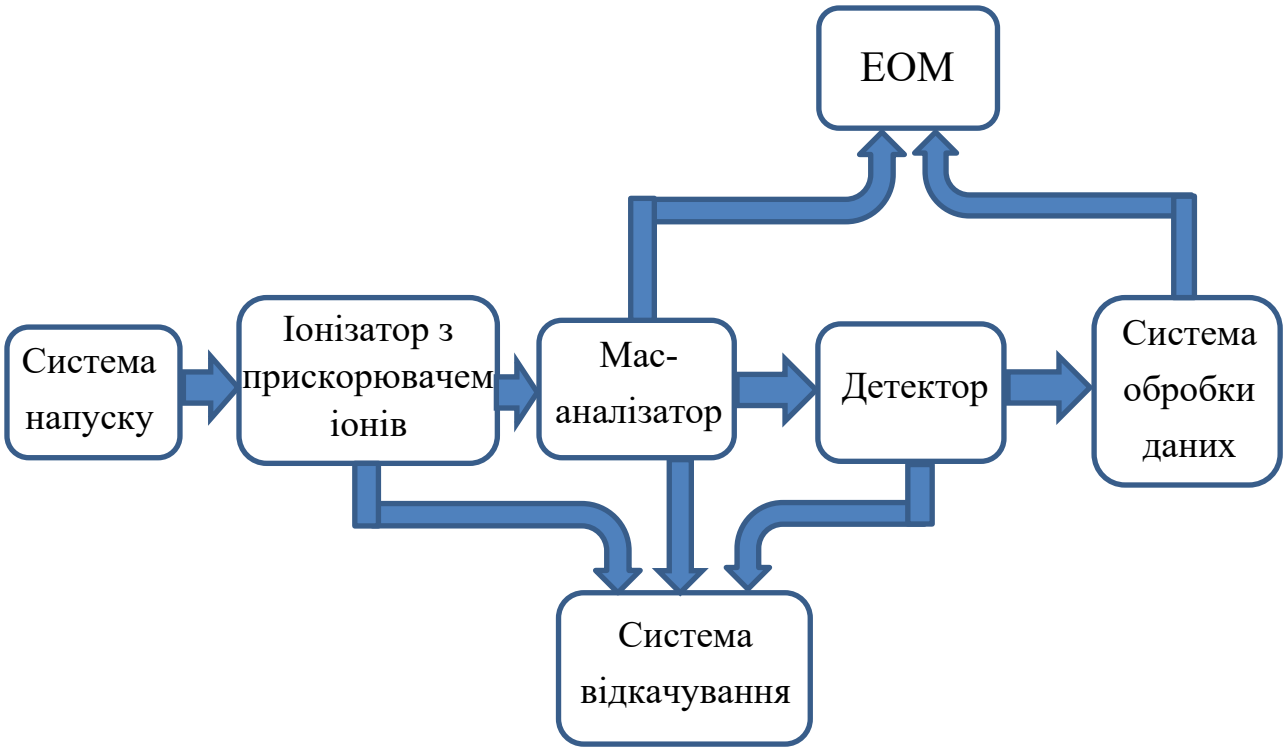


Рисунок 3.34

➢ **Іонізатор.** В іонізаторі (див. рис. 3.34, рис. 3.35) відбувається **іонізація атомів речовини.** Тиск в іонізаторі підтримується на рівні $10^{-3} \div 10^{-4}$ мм рт. ст. На цей час використовується декілька способів іонізації. Серед них

- електронна іонізація;
- фотоіонізація;
- хімічна іонізація;
- польова іонізація *тощо*.

При **електронній іонізації** відбувається іонізація атомів і молекул речовини при зіткненні з *високоенергетичними електронами*. Молекули можуть розпадатися на заряджені фрагменти за певним для кожної сполуки механізмом. Джерелом електронів є розжарена вольфрамова нитка. Цей метод широко використовується в мас-спектрометрах донині.

Фотоіонізація *відбувається під дією монохроматичного випромінювання* енергією $7 \div 15$ еВ. Для отримання такого світлового потоку зазвичай використовують ультрафіолетове випромінювання розряду в інертних газах He, Ar, Kr, Xe, Rn й дифракційну решітку для виділення випромінювання потрібної довжини хвилі.

Хімічна іонізація — іонізація в іонно-молекулярних реакціях. Вона базується на взаємодії атомів досліджуваної речовини з іонами газу-реагенту. Зазвичай використовують газ метан. Газ іонізують електронним ударом.

Іонізація електричним полем — польова іонізація — молекул відбувається під дією сильного неоднорідного електричного поля. Як електрод використовується вістря або тонкий дріт. В основі методу полягає квантово-механічний ефект — *тунелювання електрона з молекули до електрода* (тунельний ефект). Позитивно заряджений молекулярний іон виштовхується полем. Ймовірність тунелювання зростає зі зростанням напруженості електричного поля. Це явище має назву **автоіонізації.**

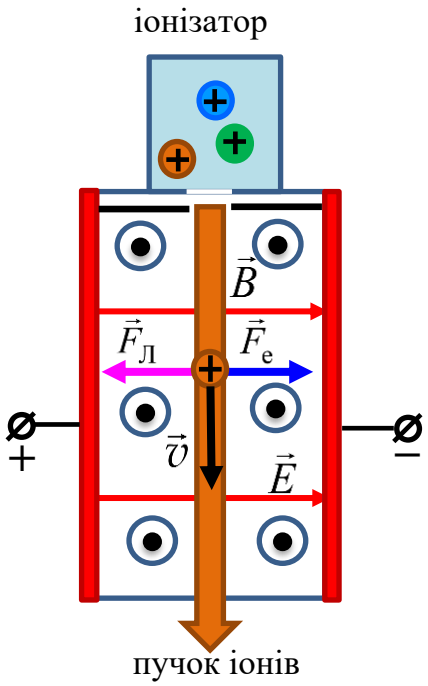


Рисунок 3.35

Далі пучок іонів проходить через **селектор швидкостей**, де відбувається виділення з пучка іонів із визначеним значенням швидкості, тобто моноенергетичної фракції іонів, та їхнє прискорювання. В селекторі іони проходять через область, де існують взаємно перпендикулярні електричне й магнітне поля, які відхиляють іони в протилежних напрямках (див. рис. 3.35). Через вихідну вузьку щілину проходять тільки іони, для яких виконується умова

$$F_Л = F_e \quad \text{або} \quad qvB = qE, \qquad (3.69)$$

де $F_Л$ – модуль магнітної сили Лоренца; F_e – модуль електричної сили; q – заряд позитивно зарядженого іона; υ – модуль швидкості іона; B – модуль магнітної індукції; E – модуль напруженості електричного поля.

Отже, з селектора виходить пучок іонів зі швидкістю $v = \dfrac{E}{B}$ (див. ф-лу 3.69).

Мас-аналізатор — основна частина мас-спектрометра. В ньому підтримується тиск $10^{-3} \div 10^{-8}$ мм рт. ст. Саме тут під дією магнітної сили Лоренца відбувається розділення іонів за їхніми питомими зарядами.

Розглянемо принцип дії магнітного мас-аналізатора (рисунок 3.36). До речі, перший магнітний мас-спектрометр був сконструйований в 1918 році *американським фізиком і хіміком А. Д. Демпстером*.

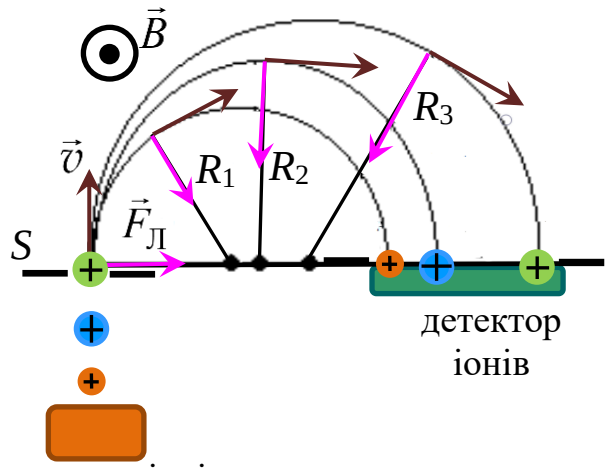


Рисунок 3.36

Вузький пучок моноенергетичних іонів із джерела іонів потрапляє в мас-аналізатор через вхідну щілину S. В мас-аналізаторі створене магнітне поле, індукція $\vec{B}$ якого перпендикулярна до швидкості $\vec{v}$ іонів. З боку магнітного поля на іони діє магнітна сила Лоренца $\vec{F}_Л = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$, яка перпендикулярна до площини, в якій знаходяться вектори $\vec{B}$ і $\vec{v}$. Як показано в пункті 3.10.2. іон буде рухатись по колу з нормальним прискоренням $a_n = \dfrac{v^2}{R}$, де R – радіус кола.

Пригадаймо основні моменти опису руху зарядженої частинки в магнітному полі.

За другим законом Ньютона

$$\vec{F}_Л = m\vec{a}_n, \tag{3.70}$$

де m – маса, $\vec{a}_n$ – нормальне прискорення іона.

Внаслідок того, що $\vec{v} \perp \vec{B}$, модуль сили Лоренца

$$F_Л = qvB, \tag{3.71}$$

тоді

$$qvB = \frac{mv^2}{R}.$$

Звідси

$$R = \frac{m}{q}\frac{v}{B}, \qquad (3.72)$$

де $\frac{q}{m}$ – **питомий заряд іона.**

Отже, іони з різними питомими зарядами будуть рухатись по траєкторіях різних радіусів.

Пройшовши півкола, іони потрапляють на детектор.

Детектор. У мас-спектрометрах перших поколінь для фіксування іонів широко використовувались *фотопластинки* — скляні пластинки, вкриті шаром фотоемульсії. На місці потрапляння іонів із певним значенням q/m на фотопластинці утворюється штрих (після проявлення фотопластинки штрих набуває чорного кольору). Інтенсивність почорніння пропорційна кількості іонів, що потрапили до цієї області. По закінченню дослідження пластинка обробляється. Отримана картина має вигляд системи штрихів, кожний з яких відповідає певному значенню q/m. Ця картина називається *мас-спектрограмою*. Далі вона вивчається за допомогою фотометрії. Приклад мас-спектрограми наведено на рисунку 3.37.

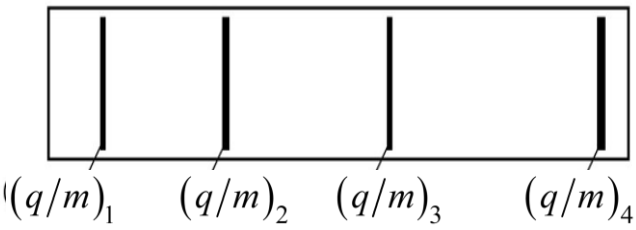
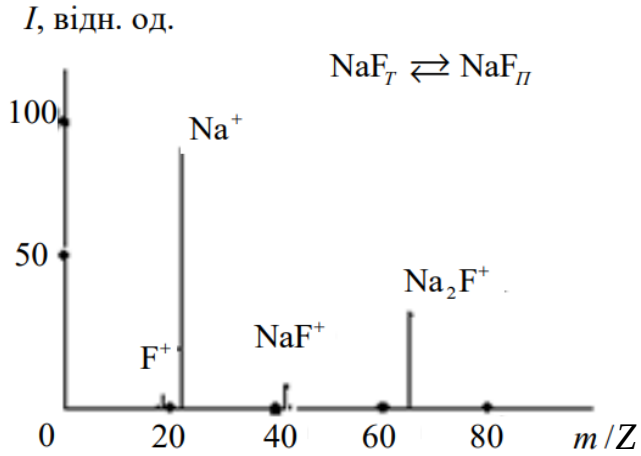


Рисунок 3.37



Мас-спектр пари фториду натрію [3]

Рисунок 3.38

В сучасних мас-спектрометрах як детектори використовуються динодні вторинно-електронні помножувачі (ВЕП). ВЕП має систему електродів (динодів), між якими створені електричні поля, що прискорюють електрони. При потраплянні іона на перший динод вибивається пучок електронів. Електрони, пройшовши прискорювальне електричне поле, потрапляють на другий динод і вибивають ще більше електронів. Далі процес багаторазово повторюється. Як результат утворюється лавина електронів.

Детекторами можуть слугувати також мікроканальні помножувачі, діодні матриці й колектори Фарадея.

В цьому випадку мас-спектр (рисунок 3.38) має вигляд графіка залежності сили іонного струму від відношення m/Z (m – маса іона; $Z = q/e$, де e – елементарний заряд).

МАС-СПЕКТРОМЕТРІЯ ВИКОРИСТОВУЄТЬСЯ МАЙЖЕ У ВСІХ ВИДАХ ДІЯЛЬНОСТІ ЛЮДИНИ:

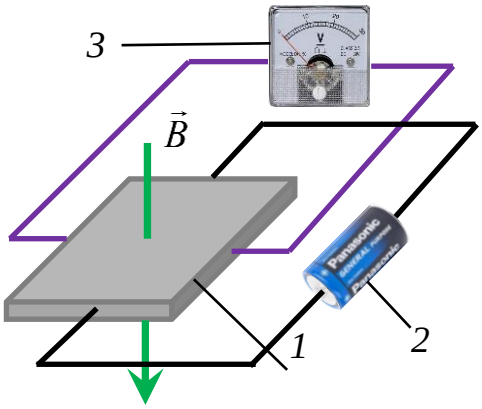
- **фармацевтика**: створення нових ліків, контроль за їхнім виробництвом, біохімія, генна інженерія, аналіз токсичних препаратів і контроль за поширенням наркотичних і психотропних ліків;
- **медицина:** діагностика інфекцій, визначення наявності допінгу в крові спортсменів;
- **безпека країни:** пошук терористів шляхом визначення походження вибухівки, боротьба з наркотрафіком, захист економічної безпеки країни шляхом перевірки товарів на кордоні;
- **нафтогазова промисловість:** пошук нових нафтових копалин, оптимізація процесів добутку, пошук винних в екологічних катастрофах;
- **ядерна енергетика:** визначення ступеню збагачення, а також чистоти матеріалів.

Це не остаточний перелік застосувань мас-спектрометрії. Неможливо назвати хоча б одну область діяльності людини, де б не використовувався цей метод аналізу.

3.11.4. ЕФЕКТ ХОЛЛА. ДАТЧИКИ ХОЛЛА

Ефект Холла *виникає, коли провідник (напівпровідник) із постійним струмом міститься в стаціонарному однорідному магнітному полі. Він полягає у виникненні в провіднику (напівпровіднику) додаткового електричного поля, напруженість* $\vec{E}_H$ *якого перпендикулярна до напрямків струму й магнітної індукції* $\vec{B}$*. Це додаткове електричне поле називається* **холлівським електричним полем.**

Розглянемо процес виникнення холлівського електричного поля в металевому зразку. Схема спостереження ефекту Холла наведена на рисунку 3.39.



1 – тонка металева пластина; *2* – джерело постійного струму; *3* – вольтметр

Рисунок 3.39

До металів відносяться елементи 1-ї й 2- ї груп Періодичної системи. При кристалізації металів атоми віддають валентні електрони в загальне користування. Позитивно заряджені атомні залишки утворюють кристалічну решітку, яка характеризується тривимірною періодичністю. Узагальнені електрони можуть вільно рухатись по всьому зразку. Поведінка електронів може бути описана на основі моделі ідеального газу. Кристалічна решітка металу наведена на рисунку 3.40, *а*.

Нехай до пластини прикладена напруга U (див. рис. 3.40, *б*), яка створює в ній електричне поле напруженістю $\vec{E}$. Електричне поле зумовлює електричний струм густиною $\vec{j}$. Зазначимо, що за відсутності магнітного поля зберігається в середньому рівномірний розподіл електронів по всьому об'єму зразка.

З боку електричного поля на електрон діє сила

$$\vec{F}_{\text{e}} = -e\vec{E}, \tag{3.73}$$

де e – модуль заряду електрона.

За другим законом Ньютона електрон набуває прискорення

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{e}}}{m} = \frac{-e\vec{E}}{m}, \tag{3.74}$$

де m – маса електрона,

в напрямку, протилежному вектору $\vec{E}$.

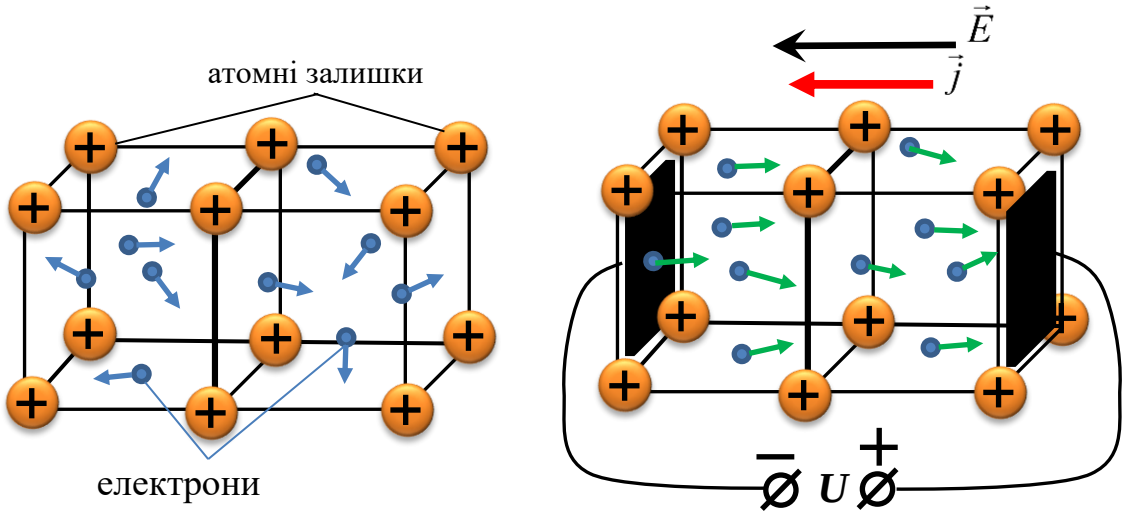
Електрони набувають **дрейфової швидкості**

$$\vec{u} = \mu_{-}\vec{E}, \tag{3.75}$$

де μ_{-} – **рухливість електронів** — *фізична величина, що чисельно дорівнює швидкості електронів, яку вони набувають в електричному полі напруженістю* 1 В/м.

В СІ $[\mu] = \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{м}^2}$. $[\mu] = \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}}$.

Розмірність рухливості $\dim\mu = ML^2 I^{-1} T^{-3}$.



Кристалічна решітка металу: ⊕ – атомний залишок; ● – електрон; → – теплова швидкість електронів; → – дрейфова швидкість електронів

Рисунок 3.40

Зразок знаходиться також в стаціонарному однорідному магнітному полі, індукція $\vec{B}$ якого перпендикулярна до напрямку $\vec{j}$ (рисунок 3.41).

З боку магнітного поля на електрон, який рухається з дрейфовою швидкістю $\vec{u}$, діє магнітна сила Лоренца

$$\vec{F}_{\text{Л}} = -e\left[\vec{u}, \vec{B}\right], \tag{3.76}$$

яка перпендикулярна до векторів $\vec{u}$ та $\vec{B}$ і надає електрону нормальне прискорення в цьому напрямку (див. рис. 3.41, *б*).

Отже, на прямолінійний рух електрона в напрямку $-\vec{E}$ накладається обертальний рух у площині, перпендикулярній до $\vec{E}$, зумовлений магнітною силою Лоренца. Результівна траєкторія електрона — гвинтова лінія (див. рис. 3.41, *в*).

Магнітне поле, при якому радіус кривини траєкторії набагато більший за довжину вільного пробігу електрона, називають *слабким*.

Довжина вільного пробігу електрона — *довжина шляху між двома послідовними зіткненнями електрона з дефектами кристалічної решітки, з іншими електронами тощо.*

Надалі будемо розглядати рух електрона в слабкому магнітному полі (див. рис. 3.41).

Під дією сили Лоренца електрони відхиляються до бокової поверхні зразка (див. рис. 3.41, *а*) й на ній утворюється надлишок негативного заряду. Відповідно на протилежному боці буде нестача негативного заряду, тобто утворюється надлишок позитивного заряду. Отже, між цими поверхнями зразка виникає електричне поле напруженістю $\vec{E}_H$ (поле Холла) й, відповідно, напруга U_H, яка називається **холлівською напругою.** З боку електричного поля Холла на електрон діє сила (рис. 3.41, *г*)

$$\vec{F}_H = -e\vec{E}_H, \tag{3.77}$$

яка напрямлена протилежно силі $\vec{F}_Л$.

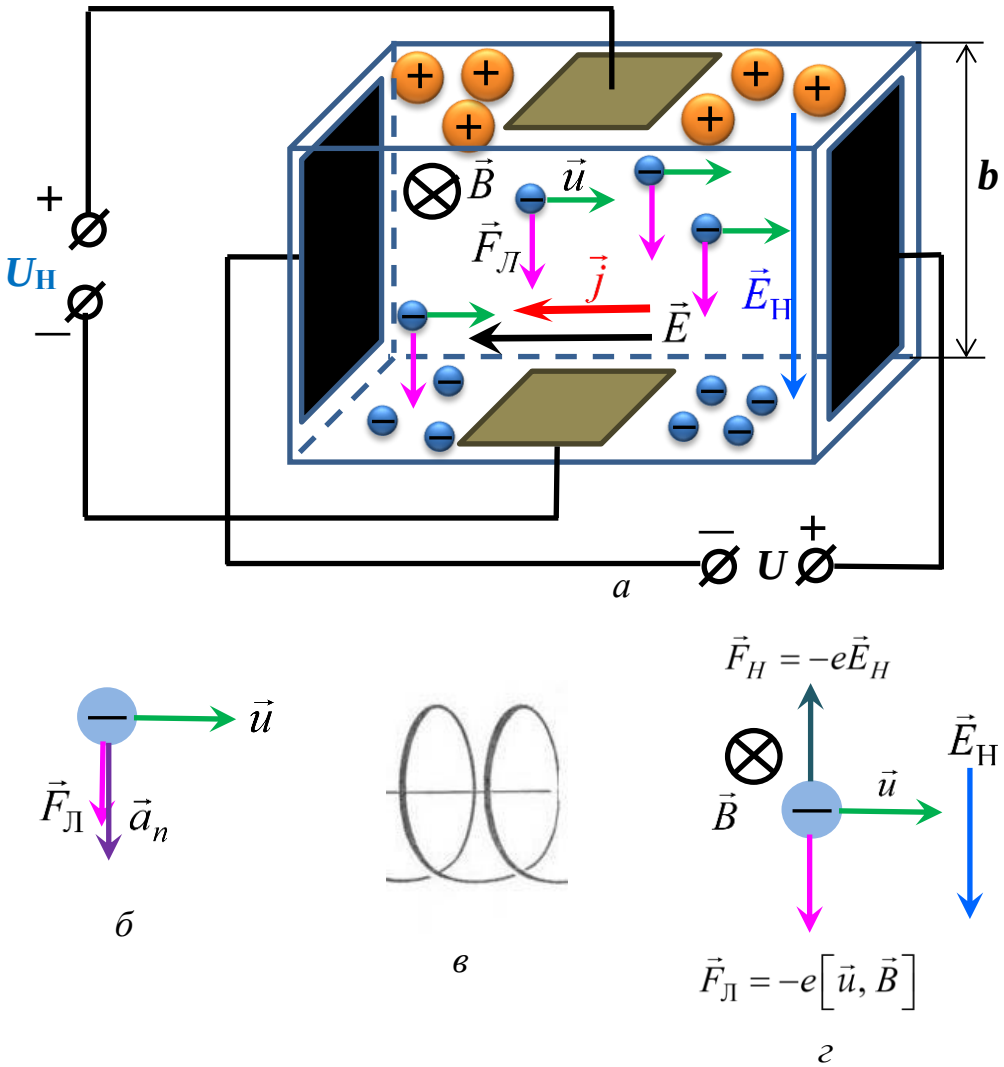


Рисунок 3.41

Розділення зарядів відбуватиметься доки не буде виконана умова

$$\vec{F}_H + \vec{F}_Л = 0, \quad \vec{F}_H = -\vec{F}_Л \tag{3.78}$$

або

$$eE_H = euB. \tag{3.79}$$

Звідси **напруженість електричного поля Холла**

$$E_H = uB, \tag{3.80}$$

холлівська напруга

$$U_H = E_H b = uBb, \tag{3.81}$$

де b – відстань між поверхнями (ширина зразка).

Модуль густини струму

$$j = enu, \tag{3.82}$$

де e – елементарний заряд; n – концентрація, u – дрейфова швидкість електронів. Звідси

$$u = \frac{j}{en}, \tag{3.83}$$

тоді **холлівська напруга**

$$U_H = \frac{jBb}{en} = RjBb, \tag{3.84}$$

де $R = \frac{1}{en}$ – **постійна Холла.** **В СІ** $[R] = \frac{\text{м}^3}{\text{Кл}}$.

Ефект Холла спостерігається також у напівпровідниках.

На основі ефекту Холла розроблені **датчики Холла**, які широко використовуються в науці та техніці. Перш за все, це лінійні датчики Холла, в яких напруга Холла прямо пропорційна густині магнітного потоку.

ДЕЯКІ ОБЛАСТІ ВИКОРИСТАННЯ ДАТЧИКІВ ХОЛЛА

Наука: визначення знаку, концентрації та рухливості носіїв заряду в металах та напівпровідниках на основі сумісних вимірювань холлівської напруги та електропровідності зразка.

Техніка:

- **встановлення наявності магнітного поля й вимірювання напруженості магнітного поля**: в першому випадку використовують ключі Холла, які спрацьовують при перевищенні напруженості магнітного поля певного значення; в другому випадку використовують лінійні датчики Холла;

- **застосування в струмових кліщах**, за допомогою яких можна вимірювати силу струму від 250 мА до кількох тисяч ампер; перевагою таких кліщів є відсутність механічного контакту між ними й електричним колом, в якому вимірюється сила струму;

- **автомобілебудування:** вимірювання швидкості обертання коліс і валів, наприклад, для синхронізації запалювання двигуна внутрішнього згоряння, тахометрів та антиблокувальної гальмівної системи (системи, яка запобігає блокуванню коліс автомобіля під час гальмування); визначення справності системи запалювання й старту;

- **електронні гаджети:** в *смартфонах*: визначення наявності магнітного поля й разом із магнітним сенсором забезпечення роботи компаса; *оптимізація взаємодії гаджета з різними аксесуарами*: наприклад, у моделях із розкладною конструкцією для вмикання та вимикання екрана при відкриванні й закриванні кришки; в *клавіатурах*; у *джойстиках*, за допомогою яких керують роботами, кар'єрними самоскидами, кранами, екскаваторами *тощо*;

- **електротехніка:** керування *електродвигунами*: деякі типи електричних двигунів використовують датчики Холла для визначення положення ротора та передачі даних на контролер керування мотором.

Звичайно, наведені далеко не всі можливі використання датчиків Холла.

3.12. РУХ ЗАРЯДЖЕНОЇ ЧАСТИНКИ В ПЕРЕХРЕЩЕНИХ (ВЗАЄМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИХ) ЕЛЕКТРИЧНОМУ Й МАГНІТНОМУ ПОЛЯХ

Рух електронів у перехрещених (взаємно перпендикулярних) електричному й магнітному полях використовується в деяких електровакуумних приладах (ЕВП). Такі прилади можуть мати або однорідне електричне поле, яке створюється системою паралельних електродів (рисунок 3.42), або радіальне електричне поле, яке створюється системою коаксіальних циліндричних електродів (рисунок 3.43). Зазвичай такі прилади використовуються для підсилення й генерації електромагнітного випромінювання надвисоких частот (НВЧ).

Розглянемо рух електрона в перехрещених полях, конфігурація яких показана на рис. 3.42 і рис. 3.44, спочатку на якісному рівні.

Нехай електричне поле створюється однорідно різнойменно зарядженими плоскими паралельними нескінченними пластинами, які мають однакову за модулем поверхневу густину заряду. Як відомо, таке поле є однорідним. Напруженість електричного поля $\vec{E}$ перпендикулярна до пластин. Електрод, який має негативний потенціал, називається *катодом*, електрод, який має позитивний потенціал, називається *анодом*. Індукція однорідного магнітного поля $\vec{B}$ паралельна пластинам.

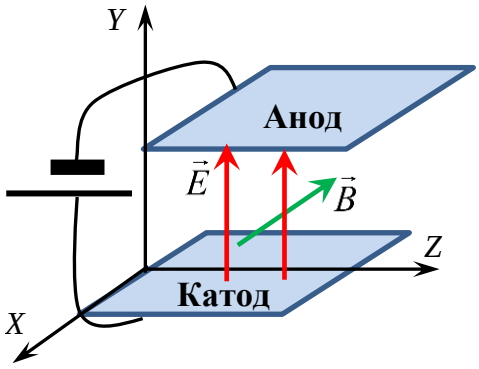


Рисунок 3.42

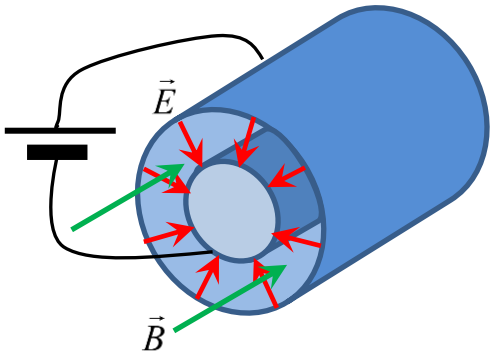


Рисунок 3.43

Нехай електрон вилітає з катода з дуже малою (практично нульовою) швидкістю й рухається вертикально в напрямку анода (див. рис. 3.44). На електрон з боку електричного поля діє сила $\vec{F}_e = -e\vec{E}$ (e = 1,6·10^{-19} Кл – модуль заряду електрона; $\vec{E}$ – напруженість електричного поля), а з боку магнітного поля — магнітна сила Лоренца $\vec{F}_Л = -e\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$ (e – модуль заряду електрона; $\vec{v}$ – швидкість електрона; $\vec{B}$ – магнітна індукція). На малій ділянці траєкторії швидкість електрона зросте незначно, отже, сила Лоренца теж буде малою, тому ця ділянка траєкторії електрона є майже прямою лінією. В міру наближення електрона до анода його швидкість зростає, тому зростає також сила Лоренца, яка спричиняє вигин траєкторії. Коли індукція магнітного поля мала, тоді електрон, попри вигин траєкторії, неодмінно досягає анода (крива ***1*** на рис. 3.44),

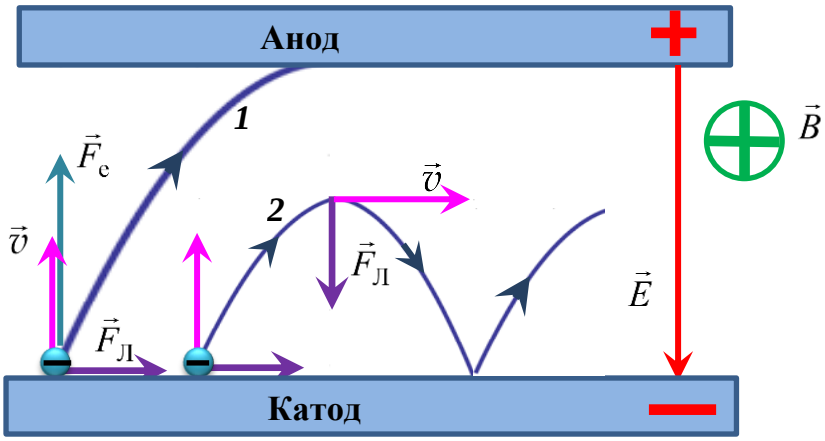


Рисунок 3.44

тобто в колі катод-анод тече струм. У сильному магнітному полі електрон не буде досягати анода (крива ***2*** на рис. 3.44), тобто в колі катод-анод струм відсутній. Коли швидкість електрона стає паралельною електродам, електрон починає рух до катода. Тепер він буде рухатись проти електричного поля (в напрямку, протилежному напруженості електричного поля $\vec{E}$) і його швидкість буде зменшуватись. Коли електрон досягає катода, його швидкість наближається до нуля. Далі все повторюється з початку. Траєкторія електрона — плоска крива.

Як зазначалося раніше, в ЕВП НВЧ використовується також система коаксіальних електродів: коаксіальних катода й анода (див. рис. 3.43 і рис. 3.45). Маємо подібну ситуацію: при малих значеннях індукції магнітного поля в ланцюзі катод-анод існує струм; при великих значеннях індукції магнітного поля в ланцюзі катод-анод струм відсутній.

Зазначимо, що ЕВП НВЧ працюють у *режимі, коли струм у колі катод-анод відсутній*. Тут можливі два варіанти. *По-перше*, рух електронів може супроводжуватися випромінюванням електромагнітних хвиль, що використовується в *генераторах електромагнітних хвиль надвисоких частот*. *По-друге*, рух електронів може відбуватись без генерації електромагнітного випромінювання. Якщо плоский анод (див. рис. 3.42) достатньо довгий, то в просторі між ним і катодом накопичується досить значна кількість електронів. Таку систему можна використовувати як *електронно-променеву гармату в будь-якому ЕВП*, де потрібен щільний електронний потік. Аналогічно можна використовувати й коаксіальну систему електродів. Тоді катоду й аноду надають незначну конусність.

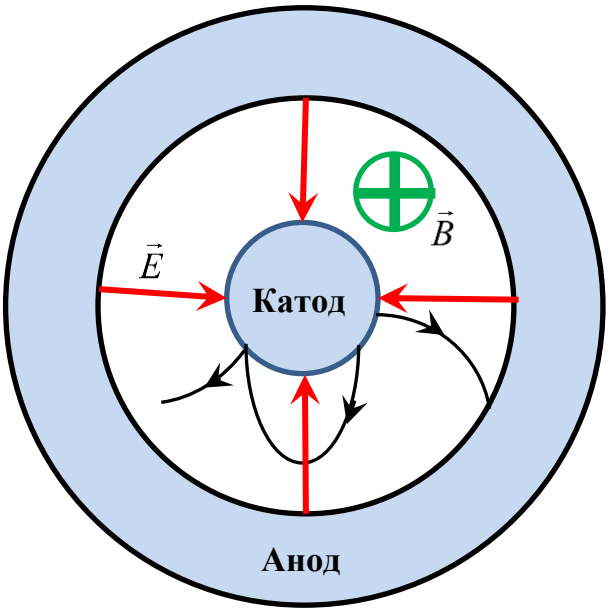


Рисунок 3.45

Точний розрахунок траєкторії електрона в перехрещених (взаємно перпендикулярних) електричному й магнітному полях можна отримати, записавши та

розв'язавши систему диференціальних рівнянь руху для трьох координат: *x, y, z* (рисунок 3.46).

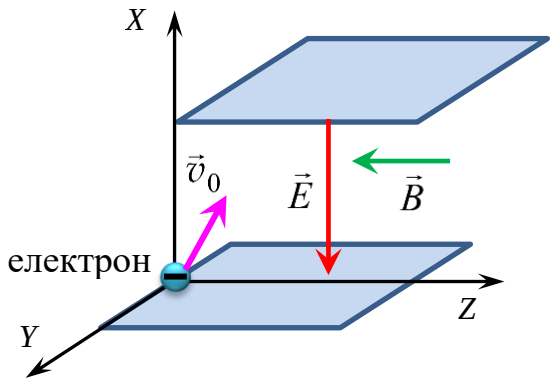


Рисунок 3.46

Нехай електрон влітає з початковою швидкістю $\vec{v}_0$ в область, де створені взаємно перпендикулярні електричне й магнітне поля

$$E_x = -E = \text{const}; B_z = -B = \text{const};$$
$$E_y = E_z = 0; B_x = B_y = 0. \quad (3.85)$$

Початкові умови для електрона (в момент часу $t = 0$)

$$x(0) = 0; y(0) = 0; z(0) = 0;$$
$$v_x(0) = v_{0x}; v_y(0) = v_{0y}; v_z(0) = v_{0z}. \quad (3.86)$$

На електрон діють сили:

з боку електричного поля *електрична сила*

$$\vec{F}_\text{е} = -e\vec{E}, \quad (3.87)$$

з боку магнітного поля *магнітна сила Лоренца*

$$\vec{F}_\text{Л} = -e\left[\vec{v}, \vec{B}\right], \quad (3.88)$$

де e – модуль заряду, $\vec{v}$ – швидкість електрона в довільний момент часу t.

Рівнодіюча сила, що діє на електрон у довільний момент часу t,

$$\vec{F} = \vec{F}_\text{е} + \vec{F}_\text{Л} = -e\vec{E} - e\left[\vec{v}, \vec{B}\right]. \quad (3.89)$$

За другим законом Ньютона

$$\vec{F} = -e\vec{E} - e\left[\vec{v}, \vec{B}\right] = m\vec{a}, \quad (3.90)$$

де m – маса, $\vec{a}$ – прискорення електрона.

Звідси

$$\vec{a} = \frac{-e\vec{E} - e\left[\vec{v}, \vec{B}\right]}{m} = -\frac{e\vec{E}}{m} - \frac{e\left[\vec{v}, \vec{B}\right]}{m} = -\eta\vec{E} - \eta\left[\vec{v}, \vec{B}\right], \quad (3.91)$$

де $\eta = \frac{e}{m}$.

В декартовій системі координат

$$\vec{v} = \vec{i}\, v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z = \vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} + \vec{k}\,\frac{dz}{dt}; \qquad (3.92)$$

$$\vec{a} = \vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z = \vec{i}\,\frac{dv_x}{dt} + \vec{j}\,\frac{dv_y}{dt} + \vec{k}\,\frac{dv_z}{dt} = \vec{i}\,\frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j}\,\frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k}\,\frac{d^2z}{dt^2}, \qquad (3.93)$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}, \vec{k}$ – орти осей $0X$, $0Y$, $0Z$ відповідно; x, y, z – координати електрона; v_x, v_y, v_z – проєкції швидкості, a_x, a_y, a_z – проєкції прискорення електрона на відповідні осі.

Примітка:

Векторний добуток векторів можна надати в матричній формі

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) + \vec{j}\left(a_x b_z - a_z b_x\right) + \vec{k}\left(a_x b_y - a_y b_x\right).$$

Отже, векторний добуток $\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$ можна надати як

$$\left[\vec{v}, \vec{B}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(v_y B_z - v_z B_y\right) + \vec{j}\left(v_x B_z - v_z B_x\right) + \vec{k}\left(v_x B_y - v_y B_x\right), \qquad (3.94)$$

Напруженість електричного поля можна написати як

$$\vec{E} = \vec{i} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z, \qquad (3.95)$$

де E_x, E_y, E_z – проєкції вектора $\vec{E}$ на відповідні координатні осі.

Тоді з (3.91), (3.93), (3.94) і (3.95) випливає

$$\vec{i}\,\frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j}\,\frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k}\,\frac{d^2z}{dt^2} = -\eta\vec{i}E_x - \eta\vec{j}E_y - \eta\vec{k}E_z -$$
$$-\eta\vec{i}\left(v_y B_z - v_z B_y\right) - \eta\vec{j}\left(v_x B_z - v_z B_x\right) - \eta\vec{k}\left(v_x B_y - v_y B_x\right).$$

Звідси

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\eta E_x - \eta\left(v_y B_z - v_z B_y\right); \qquad (3.96)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\eta E_y - \eta\left(v_x B_z - v_z B_x\right); \tag{3.97}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\eta E_z - \eta\left(v_x B_y - v_y B_x\right). \tag{3.98}$$

Врахувавши дані (3.85), отримуємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\eta E_x - \eta v_y B_z = \eta E + \eta B \frac{dy}{dt};$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \eta E + \eta B \frac{dy}{dt}; \tag{3.99}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\eta v_x B_z = \eta B \frac{dx}{dt};$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \eta B \frac{dx}{dt}; \tag{3.100}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0. \tag{3.101}$$

Розв'язавши систему рівнянь (3.99 ÷ 3.101), отримаємо рівняння траєкторії електрона. Розв'язок досить складний. За потреби його можна знайти в будь-якому підручнику за темою «Електропроменеві прилади». Наведемо тільки результати.

З рівнянь руху випливає, що вздовж осі $0Z$ електрон рухається прямолінійно рівномірно зі швидкістю v_{0z}. Проєкцією траєкторії електрона на площину $X0Y$ є плоска крива *трохоїда* (рисунок 3.47) — траєкторія точки, яка закріплена на подовженні радіуса кола, що котиться без ковзання, площина якого перпендикулярна до напрямків $\vec{E}$ і $\vec{B}$ (або видовжена циклоїда, радіус (b на рис. 3.47) якої залежить від значень напруженості електричного поля E та індукції магнітного поля B). Центр кола переміщується рівномірно в напрямку осі $0Y$ зі швидкістю $V = \frac{E}{B}$.

Примітка: ***Циклоїда*** — крива, яку описує будь-яка точка колеса, що котиться без ковзання.

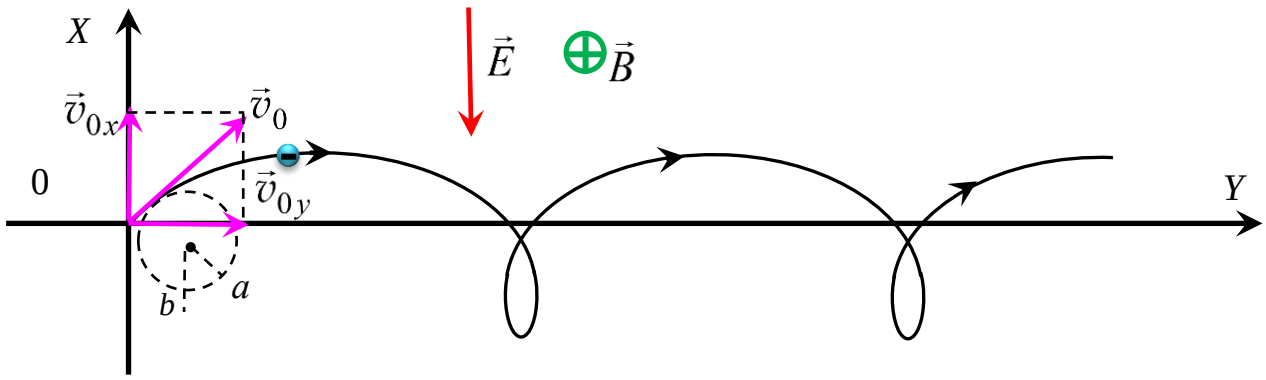
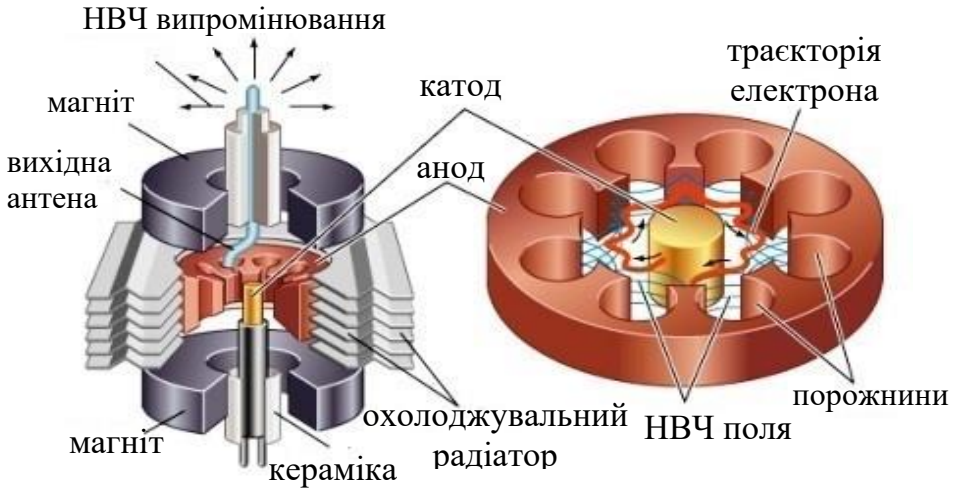


Рисунок 3.47

3.13. МАГНЕТРОН

Рух електронів у перехрещених (взаємно перпендикулярних) електричному й магнітному полях застосовується в магнетронах (рисунок 3.48). Магнетрони слугують для отримання електромагнітних хвиль надвисоких частот (НВЧ). До НВЧ-діапазону відносяться коливання з частотами ν = 300 МГц ÷ 300 ГГц.



Будова магнетрона Schwefellampe_Max_Volhard (www.fh-muenster.de)

Рисунок 3.48

В 1921 р. *американський фізик А. Халл* опублікував результати теоретичних і експериментальних досліджень роботи магнетрона в статичному режимі, де вперше використав саму назву «магнетрон». Генерування електромагнітних коливань у дециметровому діапазоні хвиль за допомогою магнетрона відкрив і запатентував у 1924 р. *чеський фізик А. Жачек.* У 1940 р. *британські фізики Д. Рендалл і Г. Бут* розробили багаторезонаторний магнетрон.

Зазначимо, що магнетрон має циліндричну, а не плоску конструкцію електродів; окрім цього, енергія електронів, що рухаються в ньому, зростає або зменшується. Тому процеси в магнетроні складніші за розглянуті в підрозділі 3.12, але вони підпорядковані загальним закономірностям, характерним для руху електрона в перехрещених стаціонарних електричному й магнітному полях.

Основний вузол магнетрона (див. рис. 3.48) — **анодний блок.** Анод — це товстостінний невисокий мідний циліндр, в якому вирізані отвори, паралельні осі циліндра. Разом із щілинами, що з'єднують ці отвори з центральним отвором, вони утворюють **об'ємні резонатори.** В одному з резонаторів міститься вихідна антена для виведення енергії НВЧ коливань споживачу. В центральному отворі розташований циліндричний підігрівний катод, який випускає електрони. Кільцевий простір між анодним блоком і катодом називається *простором взаємодії*. Торці анода герметично закриті мідними кришками. Всередині блока створюється високий вакуум. Ефективне охолодження блока забезпечується ребристими радіаторами, що розташовані на його поверхні. Між катодом й анодом прикладена напруга: на аноді — позитивний потенціал, на катоді — негативний. Отже, між анодом і катодом створюється радіальне електричне поле. Анодний блок розташований в стаціонарному однорідному магнітному полі, індукція $\vec{B}$ якого напрямлена вздовж осі анода, тобто перпендикулярно напруженості $\vec{E}$ електричного поля. Окрім стаціонарних електричного й магнітного полів у просторі взаємодії створюється також змінне електричне поле, яке необхідне для напрямленої передачі енергії електронним потоком полю резонаторів. Значення E і B підбираються так, щоб електрони не потрапляли на анод. У просторі між катодом і анодом утворюється електронна хмара з язиками (електронними спицями), яка обертається. Електрони в спицях рухаються по складним петлеподібним траєкторіям, бо характер їхнього руху визначається сумарною дією постійного та змінного електричних полів і постійного магнітного поля. Пролітаючи повз щілини об'ємних резонаторів анода, електрони збуджують в них високочастотні коливання. Кожний з об'ємних резонаторів є коливальною системою з розподіленими параметрами. Електричне поле концентрується біля щілин, магнітне — всередині порожнин. Як зазначалося, енергія коливань виводиться до споживача за допомогою

Магнетрон у мікрохвильовій пічці
https://www.instructables.com/Microwave-Electromagnet/

Рисунок 3.49

багатовиткової рамки, яка розташована у порожнині одного з резонаторів і з'єднана з коаксіальною лінією або хвилеводом.

Магнетрони використовуються у радіолокаційних станціях, для діелектричного нагрівання, для прискорення заряджених частинок *тощо*. Починаючи з 1960-х років, магнетрони почали використовуватись у мікрохвильових пічках (рисунок 3.49) для домашнього використання.

3.14. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 8

Електрон влітає зі швидкістю $5 \cdot 10^6$ м/с в однорідне магнітне поле з магнітною індукцією $B = 10$ мкТл під кутом 30^o до силових ліній. Визначити період обертання, радіус і крок траєкторії електрона.

Аналіз

На позитивно заряджену частинку, що рухається в однорідному магнітному полі, діє магнітна сила Лоренца (див. ф-лу 3.33)

$$\vec{F}_Л = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right], \qquad (1)$$

де q – заряд, $\vec{v}$ – швидкість частинки; $\vec{B}$ – магнітна індукція. Напрямок сили Лоренца визначається за *правилом правого свердлика* або *за правилом лівої руки* (див. підрозділ 3.9). Сила Лоренца, що діє на *негативно заряджену частинку* (зокрема, електрон), має напрямок протилежний напрямку сили, що діє на позитивно заряджену частинку, яка рухається з тією ж швидкістю (рисунок 1).

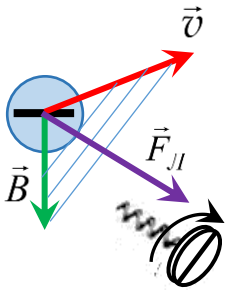


Рисунок 1

Модуль сили Лоренца

$$F_Л = qvB\sin\alpha, \qquad (2)$$

де α – кут між $\vec{v}$ і $\vec{B}$.

Електрон влітає з початковою швидкістю $\vec{v}_0$ у магнітне поле **під кутом** $\angle\alpha \neq 90^o$. Швидкість $\vec{v}_0$ руху електрона можна розкласти на дві складові (рисунок 2): поперечну складову $\vec{v}_{0\perp}$, перпендикулярну до магнітної індукції $\vec{B}$ й поздовжню складову $\vec{v}_{0\parallel}$, напрямлену вздовж вектора $\vec{B}$. Складова швидкості $\vec{v}_{0\perp}$ $v_{0\perp} = v_0 \sin\alpha$ забезпечує рівномірний рух електрона по колу в площині, перпендикулярній до вектора $\vec{B}$. Складова швидкості $\vec{v}_{0\parallel}$ $v_{0\parallel} = v_0 \cos\alpha$ зумовлює його рівномірний прямолінійний рух вздовж силової лінії (вздовж вектора $\vec{B}$). Внаслідок цього електрон буде рухатись по гвинтовій траєкторії радіусом R і кроком h (див. рис. 2).

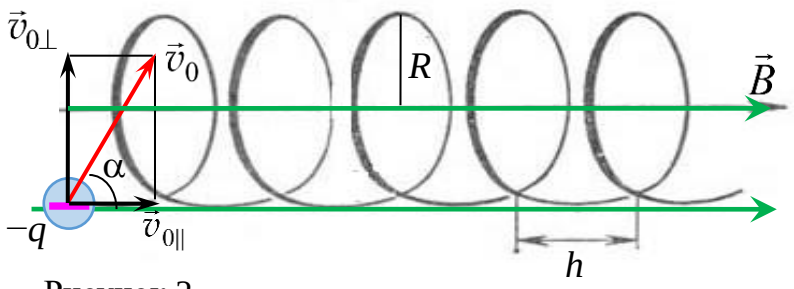


Рисунок 2

Модуль сили Лоренца

$$F_Л = qv_0 B\sin\alpha = qv_{0\perp}B. \qquad (3)$$

Ця сила надає електрону нормальне прискорення $\vec{a}_n$, модуль якого

$$a_n = \frac{v_{0\perp}^2}{R}. \qquad (4)$$

За другим законом Ньютона

$$F_Л = ma_n = \frac{mv_{0\perp}^2}{R}, \qquad (5)$$

де m – маса електрона.

З (3) і (5) отримуємо

$$qv_{0\perp}B = \frac{mv_{0\perp}^2}{R}. \qquad (6)$$

Звідси радіус кола

$$R = \frac{mv_{0\perp}}{qB} = \frac{mv_0 \sin\alpha}{qB}. \qquad (7)$$

Період T обертання — інтервал часу, за який електрон виконує повний оберт, — визначимо з наступних міркувань. За час T електрон проходить шлях, довжина якого дорівнює довжині кола $2\pi R$. Рух по колу рівномірний зі швидкістю $v_{0\perp}$, тому

$$T = \frac{2\pi R}{v_{0\perp}} = \frac{2\pi m v_{0\perp}}{v_{0\perp} qB} = \frac{2\pi m}{qB}. \qquad (8)$$

Крок h гвинтової лінії — відстань, яку електрон проходить за період обертання вздовж силової лінії, рухаючись рівномірно прямолінійно зі швидкістю $v_{0\|}$. Отже,

$$h = v_{0\|} T = \frac{2\pi m v_0 \cos\alpha}{qB}. \qquad (9)$$

Перевіримо формули (7), (8), (9):

(7) $[R] = \text{м}; [m] = \text{кг}; [v] = \frac{\text{м}}{\text{с}}; [q] = \text{Кл} = \text{А} \cdot \text{с}; [B] = \text{Тл} = \text{кг} \cdot \text{А}^{-1}\text{с}^{-2}; [\sin\alpha] = 1;$

$$\left[\frac{mv_0 \sin\alpha}{qB}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{А} \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{кг}} = \text{м};$$

(8) $[T] = \text{с}; [m] = \text{кг}; [q] = \text{А} \cdot \text{с}; [B] = \text{Тл} = \text{кг} \cdot \text{А}^{-1}\text{с}^{-2};$

$$\left[\frac{m}{qB}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{А} \cdot \text{с}^2}{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{кг}} = \text{с};$$

(9) $[h] = \text{м}; [m] = \text{кг}; [v] = \frac{\text{м}}{\text{с}}; [q] = \text{Кл} = \text{А} \cdot \text{с}; [B] = \text{Тл} = \text{кг} \cdot \text{А}^{-1}\text{с}^{-2}; [\cos\alpha] = 1;$

$$\left[\frac{mv_0 \cos\alpha}{qB}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{А} \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{кг}} = \text{м}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$v = 5\cdot10^6$ м/с		$R=\dfrac{9{,}1\cdot10^{-31}\cdot5\cdot10^6\cdot\sin30^\circ}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot10^{-5}}=1{,}42$ м;
$B = 10$ мкТл	10^{-5} Тл	$T=\dfrac{2\pi\cdot9{,}1\cdot10^{-31}}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot10^{-5}}=35{,}8\cdot10^{-7}$ с $=3{,}58$ мкс;
$\alpha=30^\circ$		
$m=9{,}1\cdot10^{-31}$кг		$h=\dfrac{2\pi\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\cdot5\cdot10^6\cdot\cos30^\circ}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot10^{-5}}=15{,}5$ м.
$q=e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл		
$R-?$		**Відповідь:**
$T-?$		$R=1{,}42$ м; $T=3{,}58$ мкс; $h=15{,}5$ м.
$h-?$		

Задача 9

В однорідне магнітне поле перпендикулярно до силових ліній влітають протон і альфа-частинка (α-частинка). Порівняти радіуси кіл, по яким рухаються протон і альфа-частинка, їхні періоди обертання й кутові швидкості, якщо вони мають: однакові швидкості; однакові кінетичні енергії. Швидкості частинок $v_1 << c, v_2 << c$ ($c=3\cdot10^8$ м/с – швидкість світла у вакуумі).

Аналіз

В магнітному полі на позитивно заряджену частинку діє магнітна сила Лоренца $\vec{F}_Л$

$$\vec{F}_Л = q\left[\vec{v},\vec{B}\right], \qquad (1)$$

модуль якої дорівнює

$$F_Л = qvB\sin\alpha, \qquad (2)$$

де q – заряд, $\vec{v}$ – швидкість частинки; α – кут між векторами $\vec{v}$ і $\vec{B}$.

Напрямок сили Лоренца можна визначити або *за правилом правого свердлика*, або *за правилом лівої руки* (рисунок 1). Протон і α-частинка мають позитивний заряд.

За умовою задачі α = 90°, тому

$$F_Л = qvB\sin90^\circ = qvB. \qquad (3)$$

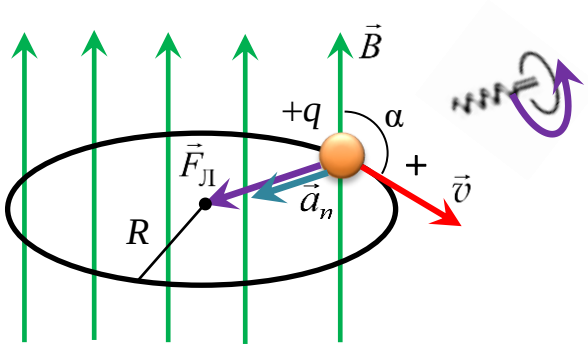


Рисунок 1

Сила $\vec{F}_Л$ напрямлена перпендикулярно до швидкості $\vec{v}$. Прискорення, яке вона надає частинці, також перпендикулярне до $\vec{v}$, тобто це нормальне прискорення. За другим законом Ньютона прискорення

$$\vec{a}_n = \frac{\vec{F}_Л}{m}. \tag{4}$$

Отже, **рух частинки буде рівномірним рухом по колу.**

Визначимо радіус R кола, по якому рухається частинка, та період T обертання частинки.

Модуль нормального прискорення

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \tag{5}$$

З іншого боку (див. ф-ли (3, 4))

$$a_n = \frac{F_Л}{m} = \frac{qvB}{m}. \tag{6}$$

З (5) і (6) отримуємо

$$\frac{v^2}{R} = \frac{qvB}{m}. \tag{7}$$

Звідси

$$R = \frac{mv}{qB}. \tag{8}$$

Повний оберт частинка здійснить за час T, який називається **періодом обертання**. За період обертання частинка пройде шлях довжиною S, який дорівнює $S = 2\pi R$.

Отже, період обертання

$$T = \frac{S}{v} = \frac{2\pi R}{v}. \tag{9}$$

Врахувавши співвідношення (8), отримуємо

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m v}{vqB} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (10)$$

Кутова швидкість ω обертання частинки

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (11)$$

Врахувавши співвідношення (10), отримуємо

$$\omega = \frac{2\pi qB}{2\pi m} = \frac{qB}{m}. \quad (12)$$

Позначимо як q_1 – заряд, m_1 – масу, v_1 – модуль швидкості однієї частинки; q_2 – заряд, m_2 – масу, v_2 – модуль швидкості іншої частинки, тоді

відношення радіусів траєкторії частинок (див. ф-лу (8))

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_1 v_1 q_2 B}{q_1 B m_2 v_2} = \frac{m_1 q_2 v_1}{m_2 q_1 v_2},$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_1 q_2 v_1}{m_2 q_1 v_2}; \quad (13)$$

відношення періодів обертання (див. ф-лу (10))

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi m_1 q_2 B}{q_1 B 2\pi m_2} = \frac{m_1 q_2}{m_2 q_1},$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1 q_2}{m_2 q_1}; \quad (14)$$

відношення кутових швидкостей обертання (див. ф-лу (11))

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2\pi \cdot T_2}{2\pi \cdot T_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2 q_1}{m_1 q_2}.$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m_2 q_1}{m_1 q_2}. \quad (15)$$

Розглянемо випадки:

1. **Частинки мають однакові швидкості**: $v_1 = v_2$, тоді

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_1 q_2}{m_2 q_1}, \quad (16)$$

Відношення періодів визначається за формулою (14), кутових щвидкостей — за формулою (15).

2. **Частинки мають однакові кінетичні енергії:** $W_{k1} = W_{k2}$.

За умовою задачі $v_1 << c, v_2 << c$ ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла у вакуумі), тобто рух частинок підпорядкований законам класичної механіки.

Кінетична енергія нерелятивістської частинки

$$W_k = \frac{mv^2}{2}. \tag{17}$$

Звідси

$$v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}}, \tag{18}$$

тоді

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_1 q_2 \sqrt{\frac{2W_{k1}}{m_1}}}{m_2 q_1 \sqrt{\frac{2W_{k2}}{m_2}}} = \frac{q_2 \sqrt{W_{k1} m_1}}{q_1 \sqrt{W_{k2} m_2}} = \frac{q_2}{q_1} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}},$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{q_2}{q_1} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}. \tag{19}$$

Відношення періодів визначається за формулою (14), кутових щвидкостей – за формулою (15).

Дано:

протон:

$q_1 = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$m_1 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг

α-частинка:

$q_2 = 2e = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл

$m_2 = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ кг

$\frac{R_1}{R_2} - ?$ $\frac{T_1}{T_2} - ?$ $\frac{\omega_1}{\omega_2} - ?$

Розв'язок:

1. $v_1 = v_2$; $\frac{R_1}{R_2} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-19}}{6{,}64 \cdot 10^{-27} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 0{,}5;$

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-19}}{6{,}64 \cdot 10^{-27} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 0{,}5;$

$\omega_1/\omega_2 = T_2/T_1 = 1/0{,}5 = 2;$

2. $W_{k1} = W_{k2}$; $\frac{R_1}{R_2} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-19}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} \sqrt{\frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}}{6{,}64 \cdot 10^{-27}}} = 1;$

$T_1/T_2 = 0{,}5;$ $\omega_1/\omega_2 = T_2/T_1 = 2.$

Відповідь:

1. $v_1 = v_2,\ R_1 = 0{,}5R_2;\ T_1 = 0{,}5T_2;\ \omega_1 = 2\omega_2;$

2. $W_{k1} = W_{k2},\ R_1 = R_2;\ T_1 = 0{,}5T_2;\ \omega_1 = 2\omega_2.$

Задача 10

Силові лінії однорідного електричного поля й однорідного магнітного поля взаємно перпендикулярні. Напруженість електричного поля 1 кВ/м, індукція магнітного поля 1 мТл. Якими повинні бути напрямок і модуль швидкості електрона, щоб його траєкторія була прямою лінією?

Аналіз

За умовою задачі електрон рухається в перехрещених (взаємно перпендикулярних) електричному й магнітному однорідних полях (рисунок 1). На електрон діють сили:

з боку електричного поля *електрична сила*

$$\vec{F}_e = -e\vec{E}, \qquad (1)$$

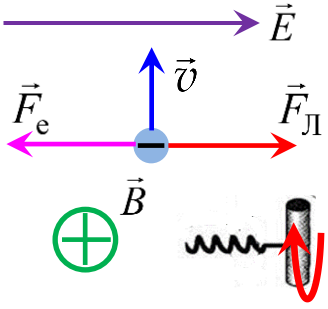


Рисунок 1

де e – модуль заряду електрона; $\vec{E}$ – напруженість електричного поля,

яка зумовлює прямолінійний рівноприскорений рух електрона в напрямку, протилежному силовій лінії електричного поля;

модуль сили

$$F_e = eE; \qquad (2)$$

з боку магнітного поля *магнітна сила Лоренца*

$$\vec{F}_Л = -e\left[\vec{v}, \vec{B}\right], \qquad (3)$$

де $\vec{v}$ – швидкість електрона; $\vec{B}$ – магнітна індукція,

модуль якої

$$F_Л = evB\sin\alpha, \qquad (4)$$

де α – кут між векторами $\vec{v}$ і $\vec{B}$.

Сила $\vec{F}_Л$, яка перпендикулярна до векторів $\vec{v}$ і $\vec{B}$, зумовлює рух електрона по колу.

Для того, щоб електрон рухався прямолінійно, необхідно виконання умови

$$\vec{F}_{\text{е}} + \vec{F}_{\text{Л}} = 0$$

або

$$\vec{F}_{\text{е}} = -\vec{F}_{\text{Л}}, \tag{5}$$

тобто сили повинні бути напрямлені вздовж однієї лінії в протилежні боки, а їхні модулі — рівними. Виконання цієї умови можливе тільки, коли електрон влітає в область, де існують поля, перпендикулярно до напруженості $\vec{E}$ електричного поля й до магнітної індукції $\vec{B}$. Застосувавши *правило правого свердлика* або *правило лівої руки*, визначимо *напрямок швидкості*, врахувавши, що електрон має негативний заряд. (див. рис. 1).

Врахувавши, що $\alpha = 90^{\text{o}}$, визначимо *модуль швидкості* з рівняння для модулів сил

$$eE = evB\sin 90^{\text{o}} = evB. \tag{6}$$

Звідси

$$v = \frac{E}{B}. \tag{7}$$

Перевіримо формулу (7):

$$[v] = \frac{\text{м}}{\text{с}}; [E] = \frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^3\cdot\text{А}}; \; [B] = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2\cdot\text{А}};$$

$$\left[\frac{E}{B}\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2\cdot\text{А}}{\text{с}^3\cdot\text{А}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Дано:	**СІ**
$E = 1$ кВ/м	10^3 В/м
$B = 1$ мТл	10^{-3} Тл
$v - ?$	

Розв'язок:

$$v = \frac{10^3}{10^{-3}} = 10^6 \text{ м/с}.$$

Відповідь: електрон повинен влітати в область, де існують перехрещені електричне й магнітне поля, зі швидкістю $v = 10^6$ м/с, перпендикулярною до напруженості $\vec{E}$ електричного поля й до магнітної індукції $\vec{B}$ магнітного поля.

Задача 11

В мас-спектрометрі позитивно заряджені частинки, що мають однаковий заряд і масу, пройшовши прискорювальну різницю потенціалів 10 кВ, влітають в однорідне магнітне поле індукцією 1 Тл, описують півколо радіусом 20 см і потрапляють на фотопластинку. Визначити питомий заряд частинки. Початкову швидкість частинок вважати рівною нулю.

Аналіз

Прискорювальне електричне поле виконує роботу при переміщенні зарядженої частинки зі зарядом q

$$A = qU, \tag{1}$$

де U – напруга на ділянці, яку проходить частинка.

За *теоремою про зміну кінетичної енергії* внаслідок роботи поля зростає кінетична енергія частинки

$$A = W_{k2} - W_{k1}\ , \tag{2}$$

де W_{k1} і W_{k2} – початкова й кінцева кінетичні енергії частинки відповідно.

Кінетична енергія

$$W_k = \frac{mv^2}{2}, \tag{3}$$

де m – маса, v – швидкість частинки.

За умовою задачі іони влітають в область електричного поля з початковою швидкістю $v_0 = 0$. Отже, $W_{k1} = 0$, тоді

$$qU = W_k = \frac{mv^2}{2}. \tag{4}$$

Звідси

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}. \tag{5}$$

В магнітному полі на частинку з зарядом q діє магнітна сила Лоренца

$$\vec{F}_Л = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right], \tag{6}$$

де $\vec{B}$ – магнітна індукція.

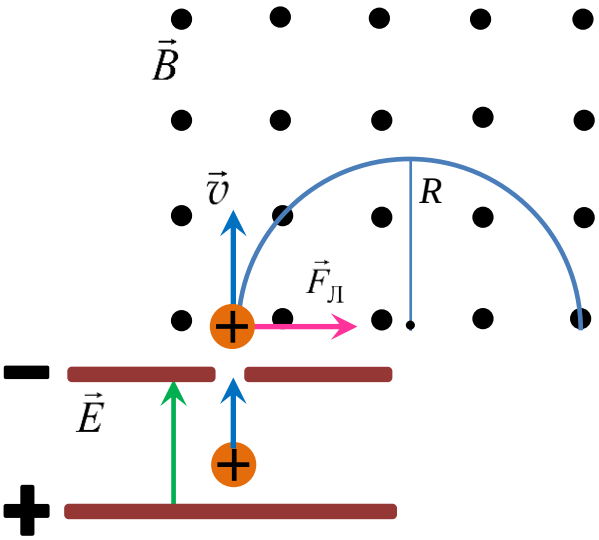


Рисунок 1

За умовою задачі, потрапивши в однорідне магнітне поле заряджені частинки рухаються по колу радіусом R і описують половину кола. Рух частинки по колу можливий, коли швидкість $\vec{v}$ частинки перпендикулярна до магнітної індукції $\vec{B}$ (рисунок 1), бо в такому випадку відсутній рух частинки вздовж силової лінії магнітного поля. Сила Лоренца надає частинці нормальне прискорення $\vec{a}_n$

$$\vec{F}_Л = m\vec{a}_n \tag{7}$$

або

$$F_Л = ma_n. \tag{8}$$

Модуль нормального прискорення

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \tag{9}$$

де R – радіус кола,
модуль сили Лоренца

$$F_Л = qvB\sin\alpha = qvB, \tag{10}$$

α – кут між векторами $\vec{v}$ і $\vec{B}$: в даному випадку $\alpha = 90^o$.
З (9) і (10)

$$qvB = m\frac{v^2}{R}. \tag{11}$$

Врахувавши (5), отримуємо

$$qB = \frac{mv}{R} = \frac{\sqrt{2qUm}}{R}. \qquad (12)$$

Звідси *питомий заряд частинки — заряд, який припадає на одиницю маси* частинки

$$\frac{q}{m} = \frac{2U}{R^2B^2}. \qquad (13)$$

Перевіримо формулу (13):

$$\left[\frac{q}{m}\right] = \frac{\text{Кл}}{\text{кг}} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}}{\text{кг}};$$

$$[U] = B = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}};$$

$$[R] = \text{м};\ [B] = \text{Тл} = \frac{\text{кг}}{\text{А}\cdot\text{с}^2};$$

$$\left[\frac{U}{R^2B^2}\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{А}^2\cdot\text{с}^4}{\text{с}^3\cdot\text{А}\cdot\text{м}^2\cdot\text{кг}^2} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}}{\text{кг}}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$U = 10$ кВ	10^4 В	$\frac{q}{m} = \frac{2\cdot 10^4}{(0{,}2\cdot 1)^2\cdot 1^2}. = 5\cdot 10^5\ \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}.$
$B = 1$ Тл		
$R = 20$ см	0,2 м	
$\frac{q}{m}$ — ?		**Відповідь:** $\frac{q}{m} = 5\cdot 10^5\ \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}.$

3.15. ЗАКОН БІО-САВАРА-ЛАПЛАСА. МАГНІТНЕ ПОЛЕ ЗАРЯДЖЕНОЇ ЧАСТИНКИ, ЩО РУХАЄТЬСЯ. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦІЇ МАГНІТНИХ ПОЛІВ

Індукцію магнітного поля провідника довільної форми з постійним струмом можна розрахувати за допомогою **закону Біо-Савара-Лапласа й принципу суперпозиції магнітних полів.**

Провідник із постійним струмом можна розглядати як умовну сукупність послідовно з'єднаних елементів струму.

Нагадаємо, що **елементом струму** називається добуток $Id\vec{l}$, де I – сила струму в провіднику; $d\vec{l}$ – вектор, довжина якого дорівнює довжині dl елементарної (нескінченно малої) ділянки провідника, а напрямок збігається з напрямком струму.

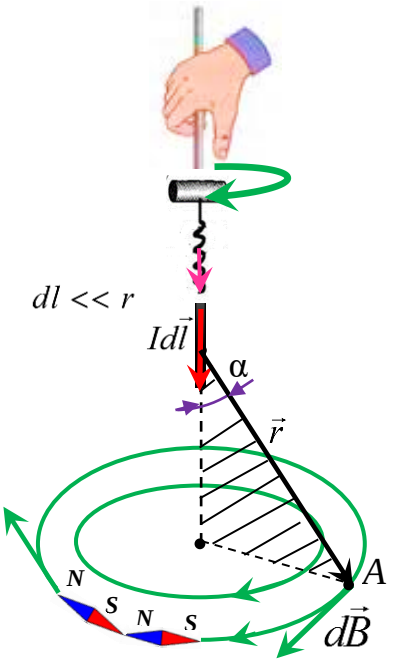


Рисунок 3.50

ЗАКОН БІО-САВАРА-ЛАПЛАСА:

Індукція $d\vec{B}$ магнітного поля, яке створюється елементом струму $Id\vec{l}$ у даній точці простору (рисунок 3.50) на відстані r ($dl << r$) від нього визначається співвідношенням

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3}, \qquad (3.102)$$

модуль вектора $d\vec{B}$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idlr\sin\alpha}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2},$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}, \qquad (3.103)$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна стала; $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від елемента струму до даної точки простору; α – кут між векторами $Id\vec{l}$ та $\vec{r}$; $r = |\vec{r}|$.

Напрямок вектора $d\vec{B}$ можна визначити за *правилом правого свердлика* або *за правилом правої руки* (див. рис. 3.50).

Правило правого свердлика: напрямок магнітної індукції $d\vec{B}$ збігається з напрямком руху воротка свердлика, що рухається поступально вздовж напрямку струму.

Правило правої руки: якщо напрямити великий палець правої руки вздовж напрямку струму, то загнуті інші чотири пальці покажуть напрямок магнітної індукції.

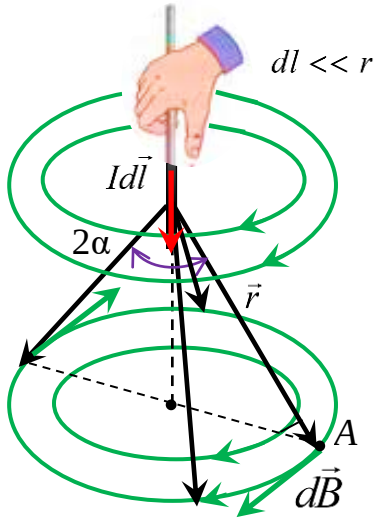


Рисунок 3.51

Отже, вектор $d\vec{B}$ перпендикулярний до площини, яка містить вектори $\vec{r}$ та $Id\vec{l}$ (див. рис. 3.50).

З закону Біо-Савара-Лапласа випливає, що магнітна індукція $d\vec{B}$ в будь-якій точці основи конуса (рисунок 3.51), твірна якого дорівнює r, а кут при вершині — 2α, буде мати однаковий модуль. Отже, **силові лінії магнітного поля**, яке створюється елементом струму, мають форму концентричних кіл, площина яких перпендикулярна до лінії, що є продовженням елемента dl провідника. Центр кіл знаходиться на цій лінії (див. рис. 3.51).

МАГНІТНЕ ПОЛЕ ЗАРЯДЖЕНОЇ ЧАСТИНКИ, ЯКА РІВНОМІРНО РУХАЄТЬСЯ

Як відомо, електричним струмом називається впорядкований рух заряджених частинок. Коли струм постійний, тоді частинки рухаються з постійною швидкістю (дрейфовою швидкістю). Вони створюють статичне магнітне поле (див. *досліди Ампера* в підрозділі 3.1). Отже, можна зробити висновок, що результівне магнітне поле провідника з постійним струмом є суперпозицією магнітних полів, що створює кожна частинка окремо. Застосувавши закон Біо-Савара-Лапласа, можна визначити магнітну індукцію

поля, яке створює окрема частинка, що рухається з певною швидкістю. Обмежимось випадком нерелятивістської частинки, тобто частинки, яка рухається зі швидкістю $v << c$ (c – швидкість світла у вакуумі).

Розглянемо спочатку випадок впорядкованого руху позитивно заряджених частинок із зарядом q. Як відомо, напрямок електричного струму збігається з напрямком руху позитивно заряджених частинок, тобто з напрямком дрейфової швидкості $\vec{u}$ таких частинок.

Сила струму

$$I = jS = qnuS, \qquad (3.104)$$

де j – густина струму; S – площа поперечного перетину провідника; n – концентрація частинок; u – модуль дрейфової швидкості частинок.

Модуль магнітної індукції поля, яке створює елемент струму $Id\vec{l}$ у точці, що задається радіусом-вектором $\vec{r}$ (див. ф-лу 3.103)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qnuSdl\sin\alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qundV\sin\alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qNu\sin\alpha}{r^2}, \qquad (3.105)$$

де dV – елементарний об'єм провідника; N – кількість частинок в об'ємі dV; α – кут між напрямком струму чи швидкості частинки $\vec{u}$ й радіусом-вектором $\vec{r}$.

Тоді модуль магнітної індукції поля, яке створюється однією зарядженою частинкою, що рухається з постійною за модулем швидкістю u

$$B = \frac{dB}{N} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qNu\sin\alpha}{Nr^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qu\sin\alpha}{r^2}. \qquad (3.106)$$

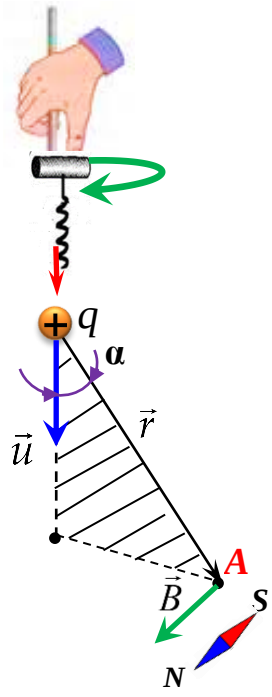


Рисунок 3.52

Враховуючи взаємне розташування векторів $\vec{u}$, $\vec{r}$ і $\vec{B}$, можна написати вираз *для* **магнітної індукції $\vec{B}$ поля, яке створюється частинкою зарядом q, що рухається з постійною швидкістю $\vec{u}$** (рисунок 3.52)

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{q[\vec{u},\vec{r}]}{r^3}}, \qquad (3.107)$$

де $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м – магнітна стала; $\vec{r}$ – радіус-вектор, який проведений від заряду q до даної точки простору; $r = |\vec{r}|$; α – кут між векторами $\vec{u}$ і $\vec{r}$.

Модуль вектора $\vec{B}$ визначається за формулою (3.106).

Напрямок вектора $\vec{B}$ можна визначити або за *правилом правого свердлика*, або за *правилом правої руки*, або *за допомогою магнітної стрілки* (див. рис. 3.52).

Правило правого свердлика: напрямок магнітної індукції $\vec{B}$ збігається з напрямком руху воротка свердлика, що рухається поступально в напрямку швидкості $\vec{u}$ носія заряду.

Правило правої руки: якщо великий палець правої руки напрямити вздовж вектора $\vec{u}$, то загнуті інші чотири пальці покажуть напрямок вектора $\vec{B}$.

Кінець вектора $\vec{r}$ нерухомий, а його початок рухається зі швидкістю $\vec{u}$, тому вектор $\vec{B}$ в даній системі відліку залежить не тільки від положення точки спостереження, але й від часу.

Електричний струм може створюватись як позитивно, так і негативно зарядженими частинками, що рухаються з постійною швидкістю. За формулами (3.106) і (3.107) можна також визначити модуль та напрямок магнітної індукції поля, яке створює негативно заряджена частинка, що рухається з постійною швидкістю.

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦІЇ МАГНІТНИХ ПОЛІВ

Магнітна індукція $\vec{B}$ поля в даній точці простору, що створюється n постійними струмами (n зарядженими частинками, які рівномірно рухаються) дорівнює векторній сумі магнітних індукцій $\vec{B}_1, \vec{B}_2, ..., \vec{B}_n$, які створюються кожним струмом (зарядженою частинкою) окремо

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + ... + \vec{B}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \,. \qquad (3.108)$$

МАГНІТНЕ ПОЛЕ ПРОВІДНИКА ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ З ПОСТІЙНИМ СТРУМОМ

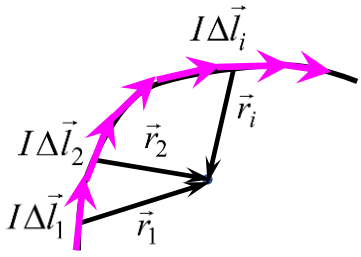


Рисунок 3.53

Провідник довільної форми з постійним струмом будемо розглядати як умовну сукупність n послідовних елементів струму $I\Delta\vec{l}_i$ (i = 1, 2, 3,…, n) (рисунок 3.53). За принципом суперпозиції магнітна індукція $\vec{B}$ поля в кожній точці поля визначається як векторна сума магнітних індукцій полів $\Delta\vec{B}_i$, що

створюються кожним елементом струму $I\Delta\vec{l}_i$ окремо. Чим менша довжина Δl ланки, тим ближча ламана лінія до форми дійсного провідника. Отже, результівна магнітна індукція

$$\vec{B} = \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{B}_i = \int_l d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3}.$$

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3}. \qquad (3.109)$$

Магнітна індукція визначається як результат інтегрування виразу (3.102) по довжині l провідника

Розрахунок магнітної індукції поля провідника довільної конфігурації зі струмом за цією формулою складна задача. Але розрахунок магнітного поля суттєво полегшується, коли провідник (просторовий розподіл струму) має певну симетрію.

3.16. МАГНІТНЕ ПОЛЕ ПРОСТИХ СИСТЕМ

3.16.1. МАГНІТНЕ ПОЛЕ ПРЯМОГО ПРОВІДНИКА ЗІ СТРУМОМ (ПРЯМОГО СТРУМУ)

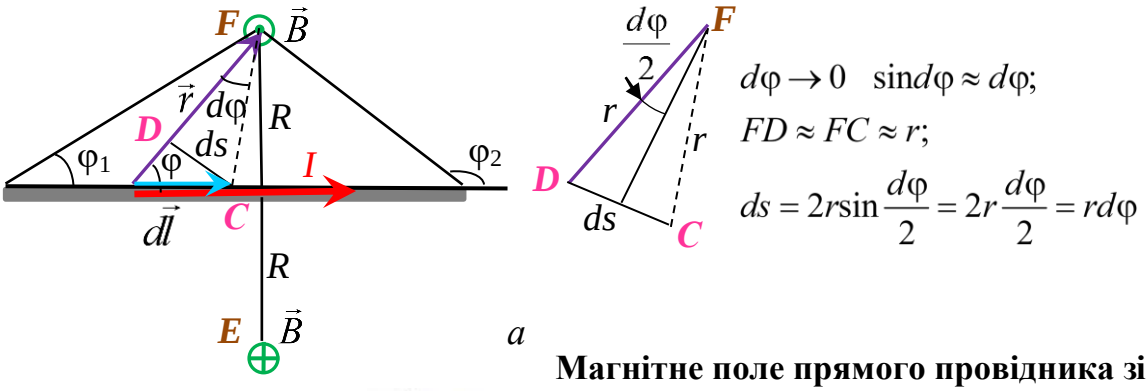
Нехай в ділянці прямого провідника довжиною l тече постійний струм силою I (рисунок 3.54).

В попередньому підрозділі **розглядалось** магнітне поле, що створюється елементом струму. Як зазначалося, провідник зі струмом, зокрема прямий провідник, можна розглядати як умовну сукупність послідовних елементів струму. Напрямки магнітних індукцій $d\vec{B}_i$ (i – номер елемента струму) полів, створених кожним елементом струму в даній точці простору, можуть бути визначені за наведеними вище правилами (*правого свердлика* або *правої руки*) й мають однаковий напрямок. Отже, векторна сума магнітних індукцій зводиться до суми модулів магнітних індукцій. Тоді формула (3.109) може бути написана як

$$B = \int_l dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{Idl\sin\alpha}{r^2}. \qquad (3.110)$$

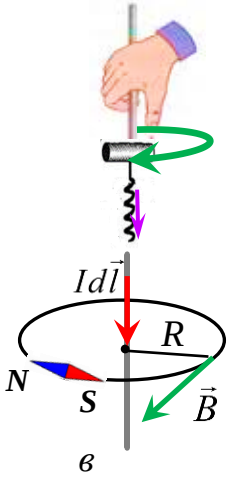
Силові лінії магнітного поля прямого провідника з постійним струмом — *концентричні кола, центри яких містяться на провіднику, а їхні площини перпендикулярні до провідника.*

Визначимо модуль B магнітної індукції в точці F на відстані R від провідника. Зазначимо, що R – радіус силової лінії. В точках E й F (див. рис. 3.54, *а*) вектори $\vec{B}$ перпендикулярні до площини рисунка. Задаємо положення точки F відносно елемента провідника $d\vec{l}$ радіусом-вектором $\vec{r}$. Побудуємо перпендикуляр CD до $\vec{r}$.



а

б



в

Магнітне поле прямого провідника зі струмом:

а – до розрахунку магнітної індукції;

б – візуалізація силових ліній магнітного поля за допомогою мілкої залізної тирси;

в – визначення напрямку вектора $\vec{B}$ за правилом правого свердлика та за правилом правої руки

Рисунок 3.54

Елемент струму $Id\vec{l}$ створює в точці F магнітну індукцію, модуль якої

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin\varphi}{r^2}.$$

Величини $dl \to 0$ і $d\varphi \to 0$, тому $FC \approx FD \approx r$.

Тоді

$$CD = ds = dl \sin\varphi = rd\varphi \text{ (див. рис. 3.53, } a\text{)},$$

$$r\sin\varphi = R; \quad r = \frac{R}{\sin\varphi}; \quad dl = \frac{rd\varphi}{\sin\varphi} = \frac{Rd\varphi}{\sin^2\varphi}$$

і

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IRd\varphi\left(\sin^2\varphi\right)\cdot\left(\sin\varphi\right)}{R^2\sin^2\varphi} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\cdot\sin\varphi d\varphi. \qquad (3.111)$$

Модуль магнітної індукції *B* на відстані *R* від провідника

$$B = \int_l dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin\varphi d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2);$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{4\pi R} I\left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right)}, \qquad (3.112)$$

де $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна стала.

Якщо $R << l$, то **ПРЯМИЙ ПРОВІДНИК** можна вважати **НЕСКІНЧЕННО ДОВГИМ.** Тоді $\varphi_1 \to 0^0$, $\varphi_2 \to 180^0$,

і **модуль магнітної індукції** B

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}}, \qquad (3.113)$$

де R – відстань від провідника до даної точки.

Напрямок вектора $\vec{B}$ можна визначити або *за правилом правого свердлика*, або *за правилом правої руки* (див. рис. 3.54, *в*).

Правило правого свердлика: напрямок магнітної індукції $\vec{B}$ збігається з напрямком руху воротка свердлика, який поступально рухається вздовж напрямку струму.

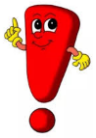
Правило правої руки: якщо напрямити великий палець правої руки вздовж напрямку струму, то загнуті інші чотири пальці покажуть напрямок магнітної індукції $\vec{B}$.

Модуль напруженості магнітного поля

$$\boxed{H = \frac{I}{2\pi R}}. \qquad (3.114)$$

3.16.2. МАГНІТНЕ ПОЛЕ КОЛОВОГО КОНТУРУ З ПОСТІЙНИМ СТРУМОМ (КОЛОВОГО СТРУМУ)

Нехай по коловому контуру тече постійний струм (рисунок 3.55).



Силові лінії магнітного поля колового струму — *концентричні кола, площини яких перпендикулярні до площини контуру, а центри містяться на провіднику* (див. рис. 3.55, *а*, *б*, *в*).

Напрямок магнітної індукції можна визначити *за правилом правого свердлика* або *за правилом правої руки* (див. рис. 3.55, *г*).

Правило правого свердлика: якщо вороток свердлика обертати вздовж напрямку струму, то напрямок його поступального руху збігатиметься з напрямком магнітної індукції.

Правило правої руки: якщо великий палець правої руки напрямити вздовж напрямку струму, то загнуті інші чотири пальці покажуть напрямок магнітної індукції.

МАГНІТНА ІНДУКЦІЯ В ЦЕНТРІ КОЛОВОГО СТРУМУ

Нехай по коловому контуру радіусом R тече струм силою I (див. рис. 3.55, *д*). Контур зі струмом можна розглядати як умовну сукупність послідовно з'єднаних елементів струму. Елемент струму $Id\vec{l}$ створює в центрі витка магнітну індукцію

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3}, \qquad (3.115)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, модуль якого дорівнює радіусу R контуру: $r = \left|\vec{r}\right| = R$.

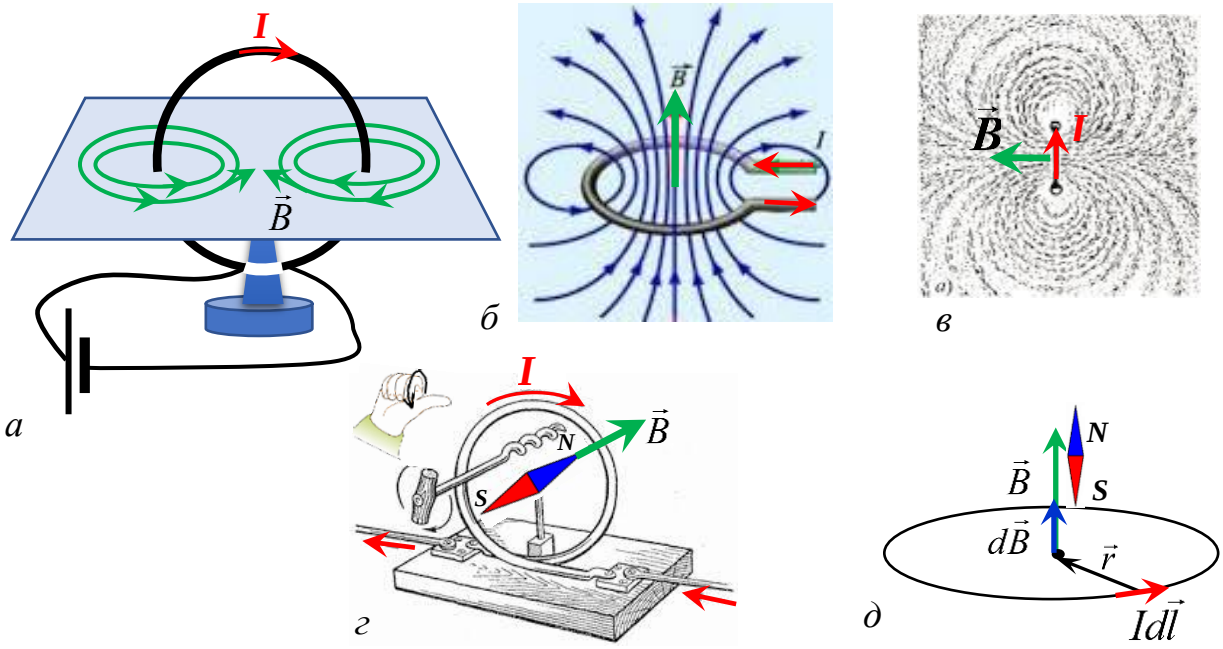
Магнітна індукція $d\vec{B}_i$ (i – номер елемента струму), що створюється кожним елементом струму, напрямлена перпендикулярно до площини контуру. Результівна магнітна індукція, яку створює контур зі струмом (див. ф-лу (3.109))

$$\vec{B} = \oint_l d\vec{B}. \qquad (3.116)$$

Всі вектори $d\vec{B}_i$ (i – номер елемента струму) напрямлені вздовж однієї лінії, тому від векторного інтеграла (3.116) можна перейти до скалярного

$$B = \oint_l dB = \oint_l \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{r^2 4\pi} \oint_l dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{2\pi r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

де l – довжина контуру.



Магнітне поле колового струму:

а, б – силові лінії магнітного поля колового контуру зі струмом; ***в*** – візуалізація силових ліній магнітного поля за допомогою мілкої залізної тирси — вигляд зверху (площина контуру перпендикулярна до площини рисунка); ***г*** – визначення напрямку вектора в центрі колового струму за правилами правого свердлика та правої руки й за допомогою магнітної стрілки; ***д*** – до розрахунку модуля магнітної індукції в центрі колового струму

Рисунок 3.55

Отже, **модуль магнітної індукції**

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2R}}, \qquad (3.117)$$

модуль напруженості *H* магнітного поля

$$\boxed{H = \frac{I}{2R}}. \qquad (3.118)$$

де R – радіус контуру.

3.17. ЗАКОН ПОВНОГО СТРУМУ ДЛЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ У ВАКУУМІ. ВИХРОВИЙ ХАРАКТЕР МАГНІТНОГО ПОЛЯ

Виберемо в магнітному полі довільний замкнений контур Γ (рисунок 3.56).

Циркуляцією вектора $\vec{B}$ *називається криволінійний інтеграл по замкненому контуру* Γ

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} B dl \cos\alpha , \qquad (3.119)$$

де $d\vec{l}$ – вектор, довжина якого дорівнює довжині dl елементарної ділянки контуру, а напрямок збігається з напрямком обходу контуру; α – кут між векторами $d\vec{l}$ і $\vec{B}$.

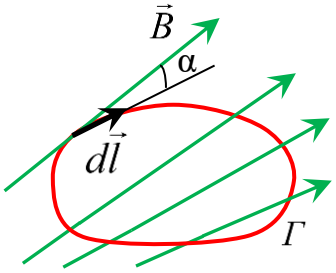


Рисунок 3.56

ЗАКОН ПОВНОГО СТРУМУ ДЛЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ У ВАКУУМІ

Циркуляція магнітної індукції $\vec{B}$ у вакуумі по довільному контуру Γ дорівнює алгебраїчній сумі струмів, що охоплені контуром, помноженій на μ_0

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i . \qquad (3.120)$$

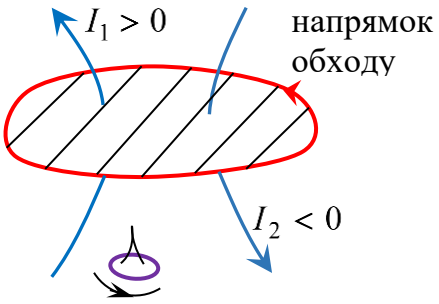


Рисунок 3.57

Струм вважається додатним, якщо його напрямок зв'язаний з напрямком обходу контуру **правилом правого свердлика:** якщо вороток свердлика обертати за напрямком обходу контуру, то напрямок його поступального руху збігатиметься з напрямком додатного струму (рисунок 3.57).

Факт, що циркуляція вектора $\vec{B}$ не дорівнює нулю, означає, що магнітне поле не є потенціальним. Таке поле називається **вихровим** або **соленоїдальним.**

Використовуючи закон повного струму, можна розрахувати магнітні поля деяких простих систем.

3.18. ЗАСТОСУВАННЯ ЗАКОНУ ПОВНОГО СТРУМУ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ МАГНІТНИХ ПОЛІВ

3.18.1. МАГНІТНЕ ПОЛЕ ТОРОЇДА

Тороїд (*тороїдальна котушка*) — *тороїдальний каркас, на який щільно* (*виток до витка*) *намотаний дріт* (*обмотка тороїда*) (рисунок 3.58, *а*).

Вважається, що товщиною ізоляції дроту можна знехтувати.

Експериментально встановлено, що магнітне поле тороїда фактично зосереджене всередині нього. Отже, магнітним полем поза тороїдом можна знехтувати.

Внутрішня область тороїда може бути порожньою (тороїд без осердя) або заповненою речовиною (тороїд з осердям).

Розглянемо спочатку магнітне поле тороїда без осердя (див. рис. 3.58).

Обмотку тороїда можна розглядати як сукупність послідовно з'єднаних однакових витків зі струмом. Будемо вважати, що площини всіх витків перпендикулярні до осі тороїда (вісь, яка збігається з середньою лінією тороїда). Магнітне поле колового струму було розглянуте в пункті 3.16.2. Якщо побудувати вектор $\vec{B}$ в довільних, але однаково розташованих точках площин витків (наприклад, в їхньому центрі) та провести силову лінію, то отримаємо коло з центром на осі тороїда (див. рис. 3.58, *б*).

Отже, **силові лінії магнітного поля тороїда** — *концентричні кола, центри яких знаходяться на осі тороїда* (див. рис. 3.58, *б*).

Як замкнений контур Γ виберемо коло радіуса R, що збігається з середньою силовою лінією — лінією, що проходить крізь центри витків. Пригадаємо, що вектор $\vec{B}$ перпендикулярний до площини відповідного витка.

Рисунок 3.58

Контур охоплює N витків. За законом повного струму

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} Bdl = Bl = 2\pi RB = N\mu_0 I, \qquad (3.121)$$

де $l = 2\pi R$ – довжина силової лінії.

Звідси

модуль *B* індукції магнітного поля в тороїді

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} = \mu_0 nI, \qquad (3.122)$$

модуль напруженості *H* магнітного поля в тороїді

$$H = nI, \qquad (3.123)$$

де N – кількість витків обмотки тороїда; n – **лінійна щільність витків**; I – сила струму в обмотці.

Лінійна щільність витків n — кількість витків на одиниці довжини тороїда

$$n = \frac{N}{l} = \frac{1}{d}, \qquad (3.124)$$

де d – діаметр дроту обмотки.

Якщо **тороїд має осердя**, то

$$B = \mu_0 \mu nI, \qquad (3.125)$$

$$H = nI. \qquad (3.126)$$

де μ – відносна магнітна проникність матеріалу осердя.

Примітка 1: Якщо виберемо замкнений контур Γ поза тороїдом, то він не буде охоплювати жодного струму. Отже, $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ й магнітна індукція поза тороїдом дорівнює нулю.

Примітка 2: При виведенні формули для магнітної індукції поля тороїда припускалось, що витки розташовані в площинах, які перпендикулярні до осі тороїда. Насправді витки (лінії струму) не знаходяться строго в цих площинах, а нахилені під деяким кутом. Отже, існує компонента струму силою I вздовж середньої лінії тороїда, яка створює додаткове магнітне поле, подібне до поля колового струму. Ця компонента струму називається *ефективним струмом*

3.18.2. МАГНІТНЕ ПОЛЕ ДОВГОГО СОЛЕНОЇДА

Соленоїд (котушка індуктивності) — *циліндричний каркас (зазвичай пластиковий), на який щільно виток до витка намотаний дріт (обмотка соленоїда)* (рисунок 3.59, *а*).

Довгий соленоїд — *соленоїд, довжина l якого набагато більша за діаметр D його поперечного перетину*: $l \gg D$.

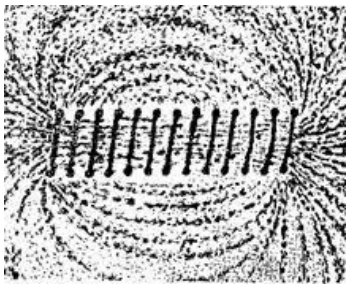
Внутрішня область соленоїда може бути порожньою (соленоїд без осердя) або заповненою речовиною (соленоїд з осердям).

Розглянемо спочатку **магнітне поле довгого соленоїда без осердя.**

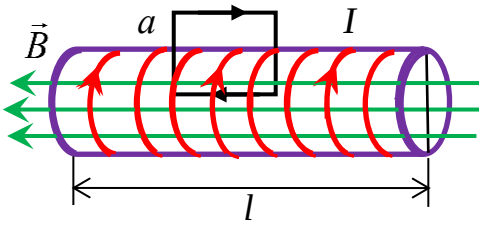
Подібно до магнітного поля тороїда індукція магнітного поля довгого соленоїда зі струмом поза соленоїдом значно менша за індукцію магнітного поля всередині соленоїда. Відповідно магнітним полем поза соленоїдом можна знехтувати: $\vec{B} = 0$. Отже, будемо вважати, що магнітне поле зосереджене всередині соленоїда. Обмотку соленоїда можна розглядати як сукупність послідовно з'єднаних однакових витків зі струмом. Припустимо, що площини всіх витків перпендикулярні до осі соленоїда. Магнітне поле колового струму було розглянуте в пункті 3.16.2. Якщо побудувати вектор $\vec{B}$ в довільних, але однаково розташованих точках площин витків і провести силові лінії, то отримаємо лінії, паралельні осі соленоїда (див. рис. 3.59, *в*). Візуалізувати силові лінії магнітного поля можна за допомогою мілкої залізної тирси (див. рис. 3.59, *б*). З рис. 3.59, *б* випливає, що магнітне поле в соленоїді є однорідним, а силові лінії поля паралельні осі соленоїда.

Застосуємо *закон повного струму для розрахунку магнітної індукції всередині соленоїда* (див. ф-лу 3.120).

а



б



в

Магнітне поле довгого соленоїда: ***а*** – довгий соленоїд; ***б*** – візуалізація силових ліній магнітного поля соленоїда за допомогою мілкої залізної тирси; ***в*** – до розрахунку магнітної індукції всередині соленоїда

Рисунок 3.59

Виберемо замкнений контур як квадратний контур стороною ***a*** так, щоб дві його сторони були паралельні осі соленоїда, а дві — перпендикулярні до неї (див. рис. 3.59, *в*). Контур охоплює ***na*** (*n* – лінійна щільність витків) витків обмотки. Будемо обходити контур за годинниковою стрілкою.

Циркуляція вектора $\vec{B}$ по контуру

$$Ba + 0 + 0 + 0 = \mu_0 naI\,. \qquad (3.127)$$

Звідси

модуль магнітної індукції *B*

$$\boxed{B = \mu_0 nI}\,, \qquad (3.128)$$

модуль напруженості магнітного поля

$$\boxed{H = nI}\,, \qquad (3.129)$$

де μ_0 – магнітна стала; *n* – лінійна щільність витків, *I* – сила струму в обмотці.

Лінійна щільність витків обмотки соленоїда

$$n = \frac{N}{l} = \frac{1}{d}, \qquad (3.130)$$

де N – кількість витків обмотки; l – довжина соленоїда; *d* – діаметр дроту.

Примітка 1: Якщо умова $l \gg D$ не виконується, тобто соленоїд не можна вважати довгим, то необхідно враховувати крайові ефекти (рисунок 3.60). В цьому випадку точність розрахунку магнітної індукції *B* за формулою (3.128) визначається співвідношенням між довжиною соленоїда *l* і діаметром *D* його поперечного перетину.

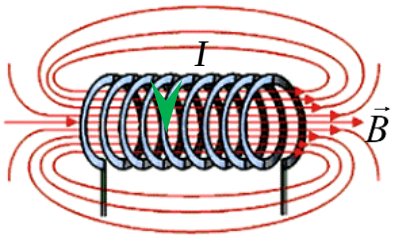


Рисунок 3.60

Примітка 2: При виведенні формули для розрахунку магнітної індукції в соленоїді припускалось, що витки строго паралельні між собою й перпендикулярні до осі соленоїда. Насправді вони розташовані під деяким кутом до осі соленоїда. Отже існує компонента струму силою *I*, паралельна осі соленоїда, яка створює додаткове магнітне поле, подібне до магнітного поля нескінченно довгого прямого струму.

3.19. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 12

Колова рамка радіусом 5 см розташована в одній площині з прямим нескінченним провідником і дотична до нього. Сила струму в прямому провіднику 2 А, в коловому провіднику — 4 А. Провідники знаходяться в повітрі. Визначити напруженість магнітного поля в точці M, яка знаходиться в центрі кільця.

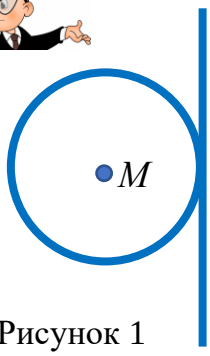


Рисунок 1

Аналіз

Маємо систему провідників, яка складається з прямого нескінченного провідника з постійним струмом і колового контуру (кільця) з постійним струмом (рисунок 1). Кожен із двох струмів створює магнітне поле. *За принципом суперпозиції магнітних полів* магнітна індукція $\vec{B}$ результівного магнітного поля в будь-якій точці простору

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \qquad (1)$$

де $\vec{B}_1$ – магнітна індукція поля, створеного одним провідником зі струмом, $\vec{B}_2$ – магнітна індукція поля, створеного іншим провідником зі струмом у цій точці.

Для повітря (за магнітними властивостями повітря тотожне вакууму) $\mu = 1$, отже,

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \qquad (2)$$

де μ_0 – магнітна стала; $\vec{H}$ – напруженість магнітного поля,

тому напрямки $\vec{B}$ й $\vec{H}$ збігаються.

Отже, напруженість $\vec{H}$ результівного магнітного поля в деякій точці простору

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2, \qquad (3)$$

де $\vec{H}_1$ – напруженість магнітного поля, створеного одним провідником зі струмом, $\vec{H}_2$ – напруженість магнітного поля, створеного іншим провідником зі струмом у заданій точці.

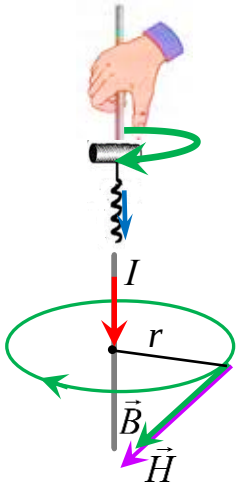


Рисунок 2

Для визначення $\vec{H}$ потрібно побудувати вектори $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$ в заданій точці.

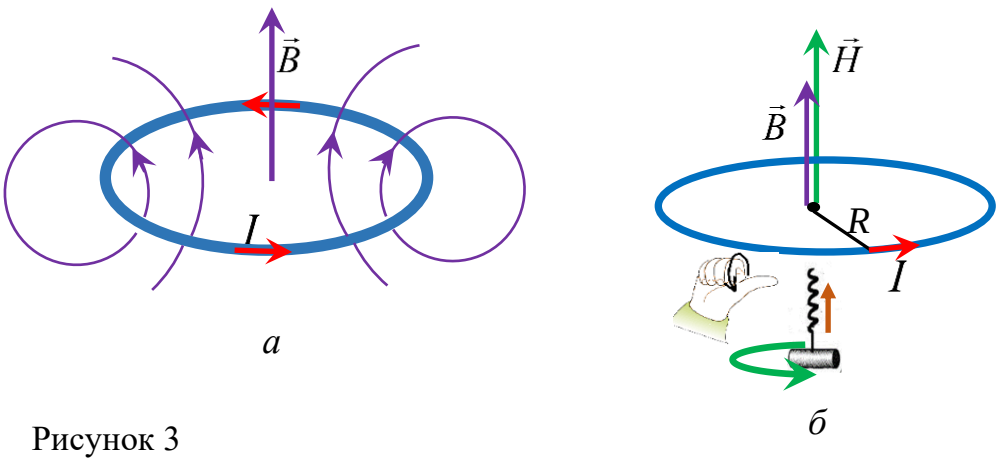
Силові лінії магнітного поля прямого нескінченного провідника з постійним струмом мають характер концентричних кіл, центри яких знаходиться на провіднику, а площини перпендикулярні до провідника (рисунок 2). Вектор $\vec{B}$ дотичний до силової лінії. Отже, (див. ф-лу 2) вектор $\vec{H}$ теж дотичний до силової лінії. Напрямок магнітної індукції $\vec{B}$ (а також вектора $\vec{H}$) можна визначити або *за правилом правого свердлика*, або *за правилом правої руки*. *Правило правого свердлика*: якщо поступальний рух свердлика збігається з напрямком струму, то вороток свердлика обертається в напрямку вектора $\vec{B}$ (вектора $\vec{H}$). *Правило правої руки*: якщо напрямити великий палець правої руки вздовж напрямку струму, то зігнуті інші чотири пальці покажуть напрямок вектора $\vec{B}$ (вектора $\vec{H}$).

Модуль напруженості магнітного поля на відстані r від провідника

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \tag{4}$$

де I – сила струму в провіднику.

Силові лінії магнітного поля кільця з постійним струмом (рисунок 3) — концентричні кола, площини яких перпендикулярні до площини кільця, а центр знаходиться на провіднику (див. рис. 3, *а*). Напрямок магнітної індукції $\vec{B}$ (напруженості магнітного поля $\vec{H}$) можна визначити або *за правилом правого свердлика*, або *за правилом правої руки* (див. рис. 3, *б*). Вектор $\vec{B}$ (вектор $\vec{H}$)



а *б*

Рисунок 3

перпендикулярний до площини кільця у всіх її точках, зокрема, в центрі (див. рис. 3).

Модуль напруженості магнітного поля в центрі кільця

$$H = \frac{I}{2R}, \tag{5}$$

де I – сила струму в кільці; R – радіус кільця.

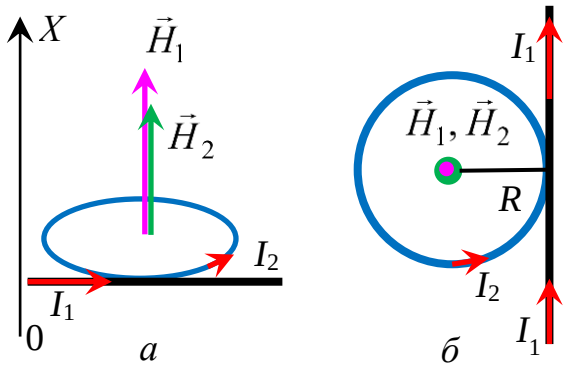


Рисунок 4

Нехай $\vec{H}_1$ — напруженість магнітного поля, створеного прямим нескінченним провідником зі струмом, $\vec{H}_2$ — напруженість магнітного поля, створеного коловим контуром зі струмом. Побудуємо вектори $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$ в центрі кільця. Для такої конфігурації провідників може бути два випадки взаємних напрямків струмів у провідниках: напрямок струму в кільці збігається з напрямком струму в прямому провіднику (рисунок 4); напрямок струму в кільці протилежний напрямку струму в прямому провіднику (рисунок 5). Більш наочним і зручним для розрахунків є зображення системи провідників, яке наведене на рис. 4, *б* і рис. 5, *б*, де відсутні просторові спотворення зображення провідників: у цьому випадку вектори $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$ перпендикулярні до площини рисунка. Умовилися використовувати для показу напрямку вектора $\vec{H}$ знак $\oplus$, якщо вектор напрямлений від нас, і знак $\odot$, якщо вектор напрямлений до нас. Для напрямків струмів, що наведені на рис. 4, вектори $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$ напрямлені до нас. Для напрямків струмів, що наведені на рис. 5, вектор $\vec{H}_1$ напрямлений від нас, вектор $\vec{H}_2$ напрямлений до нас.

1. Розглянемо випадок, наведений на рис. 4.

В проєкціях на вісь $0X$, яка перпендикулярна до площини кільця, вираз (3) набуває вигляду

$$H_x = H_{1x} + H_{2x} = H_1 + H_2, \tag{6}$$

де H_1 і H_2 – модулі напруженостей $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$ відповідно. Вони визначаються як

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi R}, \tag{7}$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2R}, \tag{8}$$

де I_1 і I_2 – сили струмів у прямому провіднику й кільці відповідно.

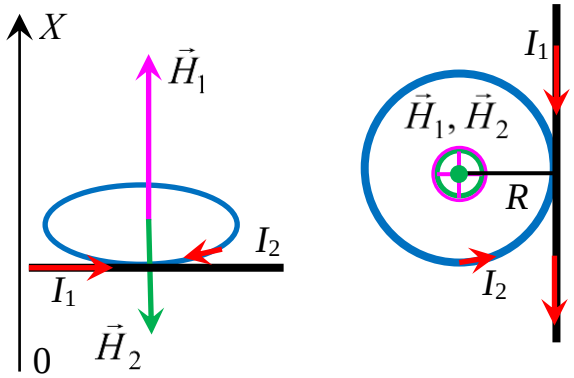
Отже,

$$H_x = \frac{I_1}{2\pi R} + \frac{I_2}{2R} \tag{9}$$

або

$$H_x = \frac{1}{2R}\left(\frac{I_1}{\pi} + I_2\right). \tag{10}$$

2. Розглянемо випадок, наведений на рис. 5.



а *б*

Рисунок 5

В проєкціях на вісь $0X$, яка перпендикулярна до площини кільця, вираз (3) набуває вигляду

$$H_x = H_{1x} + H_{2x} = H_1 - H_2, \tag{11}$$

де H_1 і H_2 – модулі напруженостей $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$ відповідно. Вони визначаються за формулами (7) і (8).

Отже,

$$H_x = \frac{I_1}{2\pi R} - \frac{I_2}{2R} = \frac{1}{2R}\left(\frac{I_1}{\pi} - I_2\right). \tag{12}$$

Формули (10) і (12) за своєю структурою подібні, тому достатньо перевірити одну формулу: наприклад, формулу (10).

Перевіримо формулу (10):

$$[H] = \frac{\text{А}}{\text{м}}; [I] = \text{А}; [R] = \text{м}; \quad \left[\frac{I}{R}\right] = \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$I_1 = 2\,\text{А}$		$1.\ H_x = \frac{1}{2\cdot 5\cdot 10^{-2}}\left(\frac{2}{\pi}+4\right) = 46\ \frac{\text{А}}{\text{м}};$
$I_2 = 4\,\text{А}$		
$R = 5\,\text{см}$	$5\cdot 10^{-2}\,\text{м}$	$2.\ H_x = \frac{1}{2\cdot 5\cdot 10^{-2}}\left(\frac{2}{\pi}-4\right) = -34\frac{\text{А}}{\text{м}}.$
$H - ?$		**Відповідь:**
		$1.\ H = \lvert H_x\rvert = 46\ \frac{\text{А}}{\text{м}};\ 2.\ H = \lvert H_x\rvert = 34\ \frac{\text{А}}{\text{м}}.$

Від'ємне значення H_x у другому випадку означає, що результівний вектор $\vec{H}$ напрямлений в бік вектора $\vec{H}_2$.

Задача 13

По двох нескінченно довгих паралельних провідниках у протилежних напрямках течуть струми силами $I_1 = 2$ А, $I_2 = 2$ А. Відстань між провідниками $a = 10$ см. Провідники знаходяться у вакуумі. Визначити магнітну індукцію $\vec{B}$ результівного поля в точці M, яка знаходиться на відстані 2 см від другого провідника на лінії, що перпендикулярна до провідників.

Аналіз

Як зазначалося раніше, при розв'язуванні задач на суперпозицію магнітних полів важливо нарисувати провідники з постійними струмами так, щоб силові лінії створених ними магнітних полів зазнали найменшого просторового спотворення. В даній задачі маємо систему, яка складається з двох прямих нескінченно довгих паралельних провідників.

Силові лінії магнітного поля прямого нескінченно довгого провідника з постійним струмом мають характер концентричних кіл, центр яких знаходиться на провіднику, а площини перпендикулярні до провідника (див. рис. 2 задачі 1). Вектор $\vec{B}$ дотичний до силової лінії. Тому найбільш прийнятним є зображення провідників, яке надане на рисунку 1: провідники перпендикулярні до площини рисунка. Тоді силові лінії магнітних полів обох провідників знаходяться в площині рисунка (або знаходяться в площинах, паралельних площині рисунка). Умовилися використовувати для зображення напрямку струму знак $\oplus$, якщо струм напрямлений від нас, і знак $\odot$, якщо струм

напрямлений до нас. Зауважимо, що не має значення як напрямлений струм: до нас чи від нас, головне, щоб струми мали протилежні напрямки.

За принципом суперпозиції магнітних полів магнітна індукція $\vec{B}$ результівного магнітного поля в будь-якій точці простору дорівнює

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \qquad (1)$$

де $\vec{B}_1$ – магнітна індукція поля, створеного першим струмом, $\vec{B}_2$ – магнітна індукція поля, створеного другим струмом у даній точці простору.

Побудуємо вектори $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ в заданій точці M *за правилом правого свердлика* чи *за правилом правої руки* (див. рис. 2 задачі 12). Зазначаємо, що точка M може знаходитись як між провідниками (тобто ліворуч від другого провідника), так і праворуч від другого провідника. Розглянемо другий випадок: точка M знаходиться поза системою провідників.

Напишемо рівняння (1) в проєкціях на вісь $0X$, яка міститься в площині рис. 1 і перпендикулярна до лінії, що з'єднує провідники (див. рис. 1).

Припустимо, що результівний вектор $\vec{B}$ напрямлений в бік вектора $\vec{B}_2$.

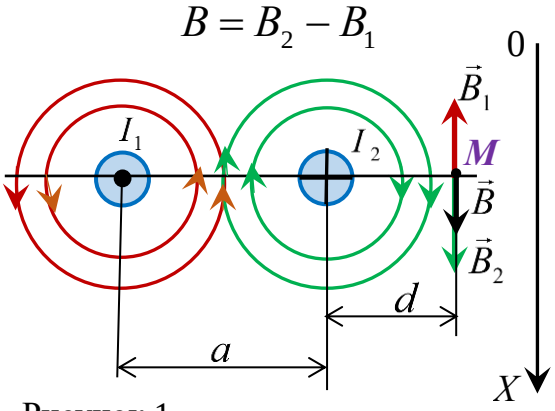


Рисунок 1

В скалярній формі вираз (1) має вигляд

$$B_x = B_{2x} + B_{1x} = B_2 - B_1, \qquad (2)$$

де B_1 і B_2 – модулі магнітних індукцій $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ відповідно.

Якщо наприкінці розрахунків отримаємо $B_x > 0$, то $B_2 > B_1$ й вектор $\vec{B}$ напрямлений вниз (як це показано на рис. 1). Якщо отримаємо $B_x < 0$, то $B_2 < B_1$ й вектор $\vec{B}$ напрямлений вгору (в бік вектора $\vec{B}_1$).

Модуль магнітної індукції поля на відстані r від прямого провідника з постійним струмом

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \qquad (3)$$

де I – сила струму в провіднику; μ_0 – магнітна стала.

Модуль магнітної індукції поля провідника зі струмом силою I_1 у точці M

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+d)}, \tag{4}$$

модуль магнітної індукції поля провідника зі струмом силою I_2 в точці M

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}, \tag{5}$$

тоді проєкція B_x результівної магнітної індукції поля в точці M

$$B_x = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} - \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+d)}, \tag{6}$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_2}{d} - \frac{I_1}{(a+d)}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{(a+d)}\right). \tag{7}$$

Перевіримо формулу (7):

$$[B] = \text{Тл} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}}; \quad [I] = \text{А}, \quad [R] = \text{м}; \quad [\mu_0] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2},$$

$$\left[\mu_0\left(\frac{I}{d}\right)\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{А}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}}.$$

Дано:	**СІ**
$I_1 = I_2 = I = 2\,\text{А}$	
$a = 10\,\text{см}$	$10 \cdot 10^{-2}$ м
$d = 2\,\text{см}$	$2 \cdot 10^{-2}$ м
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$	
$B - ?$	

Розв'язок:

$$B_x = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi}\left(\frac{1}{2 \cdot 10^{-2}} - \frac{1}{\left(10 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-2}\right)}\right) =$$

$$= 1{,}67 \cdot 10^{-5}\,\text{Тл} = 16{,}7\ \text{мкТл}.$$

Відповідь: $B = |B_x| = 16{,}7$ мкТл.

Ми отримали $B_x > 0$. Отже, вектор $\vec{B}$ напрямлений вниз.

Задача 14

По двох нескінченно довгих паралельних провідниках в одному напрямку течуть струми силами $I_1 = 1\ A$, $I_2 = 2\ A$. Відстань між провідниками a = 10 см. Провідники знаходяться у вакуумі. Визначити магнітну індукцію $\vec{B}$ результівного поля в точці M, яка знаходиться на відстані 10 см від першого провідника й на відстані 15 см від другого провідника.

Аналіз

Як зазначалося раніше, при розв'язуванні задач на суперпозицію магнітних полів важливо нарисувати провідники з постійними струмами так, щоб силові лінії магнітних полів струмів зазнали найменшого просторового спотворення. В даній задачі маємо систему, яка складається з двох прямих нескінченно довгих паралельних провідників.

Силові лінії магнітного поля прямого нескінченно довгого провідника з постійним струмом мають характер концентричних кіл, центр яких знаходиться на провіднику, а площини перпендикулярні до провідника (див. рис. 2 задачі 12). Вектор $\vec{B}$ дотичний до силової лінії. Тому найбільш прийнятним є зображення провідників, яке надане на рисунку 1: провідники перпендикулярні до площини рисунка. Тоді силові лінії магнітних полів обох провідників знаходяться в площині рисунка (або в площинах, паралельних площині рисунка). Умовилися використовувати для зображення напрямку струму знак $\oplus$, якщо струм напрямлений від нас, і знак $\odot$, якщо струм напрямлений до нас. Зауважимо, що не має значення як напрямлений струм: до нас чи від нас, головне, щоб струми мали протилежні напрямки.

За принципом суперпозиції магнітних полів магнітна індукція $\vec{B}$ результівного магнітного поля в будь-якій точці простору дорівнює

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \qquad (1)$$

де $\vec{B}_1$ – магнітна індукція поля, створеного першим струмом, $\vec{B}_2$ – магнітна індукція поля, створеного іншим струмом у даній точці простору.

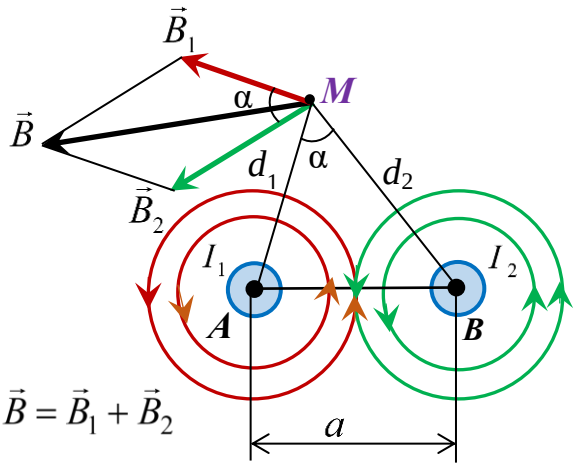


Рисунок 1

Побудуємо вектори $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ в точці M, яка знаходиться на відстані d_1 від провідника зі струмом силою I_1 і на відстані d_2 від провідника зі струмом силою I_2. Як зазначалося, силові лінії нескінченного прямого провідника зі струмом — концентричні кола з центрами на провіднику, площини яких перпендикулярні до провідника. Дотична до кола в даній точці перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку. Зважаючи на це, побудуємо вектори $\vec{B}_1$ $\left(\vec{B}_1 \perp d_1\right)$ і $\vec{B}_2$

$\left(\vec{B}_2 \perp d_2\right)$ (див. рис. 1). Кути зі взаємно перпендикулярними сторонами рівні, тому кут, утворений векторами $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$, дорівнює $\angle AMB = \alpha$.

За теоремою косинусів

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos\left(180^\circ - \alpha\right)} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha}\,. \tag{2}$$

З ΔAMB

$$a^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos\alpha\,, \tag{3}$$

звідси

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - d_1^2 - d_2^2}{2d_1d_2}. \tag{4}$$

Магнітна індукція прямого нескінченно довгого провідника зі струмом силою I на відстані r від нього

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \tag{5}$$

де μ_0 – магнітна стала.

Тоді

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d_1}, \tag{6}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d_2}. \tag{7}$$

Підставимо (4, 6, 7) у ф-лу (2)

$$B = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d_1}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi d_2}\right)^2 + \frac{2\mu_0 I_1}{2\pi d_1}\cdot\frac{\mu_0 I_2}{2\pi d_2}\cdot\frac{\left(a^2 - d_1^2 - d_2^2\right)}{2d_1d_2}} =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{I_1}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{d_2}\right)^2 + \frac{I_1I_2\left(a^2 - d_1^2 - d_2^2\right)}{d_1^2d_2^2}}.$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{I_1}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{d_2}\right)^2 + \frac{I_1I_2\left(a^2 - d_1^2 - d_2^2\right)}{d_1^2d_2^2}}. \tag{8}$$

Перевіримо формулу (8):

$$[B]=\text{Тл}=\frac{\text{кг}}{\text{с}^2\cdot\text{А}};\ [I]=\text{А};\ [d]=\text{м};\ [\mu_0]=\frac{\text{Гн}}{\text{м}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{А}^2};$$

$$\left[\mu_0\sqrt{\left(\frac{I_1}{d_1}\right)^2+\left(\frac{I_2}{d_2}\right)^2+\frac{I_1I_2\left(a^2-d_1^2-d_2^2\right)}{d_1^2d_2^2}}\right]=$$

$$=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{А}^2}\sqrt{\left(\frac{\text{А}}{\text{м}}\right)^2+\left(\frac{\text{А}}{\text{м}}\right)^2+\frac{\text{А}^2\cdot\text{м}^2}{\text{м}^4}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{А}}{\text{с}^2\cdot\text{А}^2\cdot\text{м}}=\frac{\text{кг}}{\text{с}^2\cdot\text{А}}.$$

Дано:	**СІ**
$I_1=1\,\text{А}$	
$I_2=2\,\text{А}$	
$a=10\,\text{см}$	$10\cdot10^{-2}\,\text{м}$
$d_1=10\,\text{см}$	$10\cdot10^{-2}\,\text{м}$
$d_2=15\,\text{см}$	$15\cdot10^{-2}\,\text{м}$
$\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\,\frac{\text{Гн}}{\text{м}}$	
$B-?$	

Розв'язок:

$$B=\frac{4\pi\cdot10^{-7}}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{1}{10\cdot10^{-2}}\right)^2+\left(\frac{2}{15\cdot10^{-2}}\right)^2+\frac{1\cdot2\cdot\left(\left(10\cdot10^{-2}\right)^2-\left(10\cdot10^{-2}\right)^2-\left(15\cdot10^{-2}\right)^2\right)}{\left(10\cdot10^{-2}\right)^2\cdot\left(15\cdot10^{-2}\right)^2}}=$$

$$=2\cdot10^{-7}\cdot10^2\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{2}{15}\right)^2+\frac{1\cdot2\cdot\left(\left(10\cdot10^{-2}\right)^2-\left(10\cdot10^{-2}\right)^2-\left(15\cdot10^{-2}\right)^2\right)}{(10)^2\cdot\left(15\cdot10^{-2}\right)^2}}=$$

$$=2\cdot10^{-5}\cdot\sqrt{10^{-2}+1{,}8\cdot10^{-2}-2\cdot10^{-2}}=1{,}8\cdot10^{-6}\ \text{Тл}=1{,}8\ \text{мкТл}.$$

Відповідь: B = 1,8 мкТл.

Задача 15

Два нескінченно довгих провідника зі струмами силами $I_1 = I_2 = 5$ А розташовані взаємно перпендикулярно в паралельних площинах. Визначити індукцію магнітного поля посередині перпендикуляра, побудованого між провідниками, довжина якого дорівнює d = 6 см.

Аналіз

За принципом суперпозиції магнітних полів магнітна індукція $\vec{B}$ результівного магнітного поля в будь-якій точці простору дорівнює

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \tag{1}$$

де $\vec{B}_1$ – магнітна індукція поля, створеного струмом силою I_1, $\vec{B}_2$ – магнітна індукція поля, створеного струмом силою I_2 в даній точці простору.

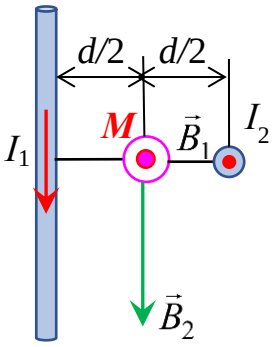
Побудуємо вектори $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$, застосовуючи або *правило правого свердлика*, або *правило правої руки* (рисунок 1, *а*): вектор $\vec{B}_1$ перпендикулярний до площини рисунка, вектор $\vec{B}_2$ міститься в площині рисунка. Модуль результівної магнітної індукції (див. рис. 1, *б*)

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}\,. \tag{2}$$

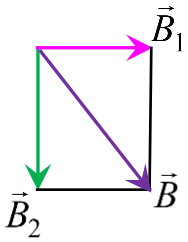
Модуль індукції магнітного поля нескінченно довгого провідника на відстані r від нього

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \tag{3}$$

де μ_0 – магнітна стала; I – сила струму в провіднику.



а



б

Рисунок 1

За умовою задачі точка M, в якій визначається магнітна індукція $\vec{B}$, знаходиться посередині перпендикуляра, побудованого між провідниками, тобто $r_1 = r_2 = d/2$ (r_1 – відстань від точки M до першого провідника; r_2 – відстань від точки M до другого провідника; d – довжина перпендикуляра між провідниками)

Тоді

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = \frac{2\mu_0 I_1}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I_1}{\pi d}, \tag{4}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} = \frac{2\mu_0 I_2}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I_2}{\pi d}, \tag{5}$$

$$B = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I_1}{\pi d}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I_2}{\pi d}\right)^2} = \frac{\mu_0}{\pi d}\sqrt{(I_1)^2 + (I_2)^2}\,,$$

$$B = \frac{\mu_0}{\pi d}\sqrt{(I_1)^2 + (I_2)^2}\ . \qquad (6)$$

Перевіримо формулу (6):

$$[B] = \text{Тл} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}};\ \ [I] = \text{А};\ [d] = \text{м};\ [\mu_0] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2};$$

$$\left[\frac{\mu_0}{d}\sqrt{(I_1)^2 + (I_2)^2}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{м}}\sqrt{(\text{А})^2 + (\text{А})^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{А}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$I_1 = I_2 = 5\text{А}$ $d = 6\,\text{см}$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$	$6 \cdot 10^{-2}$ м	$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi \cdot 6 \cdot 10^{-2}}\sqrt{5^2 + 5^2} = 4{,}7 \cdot 10^{-5}$ Тл $= 47$ мкТл.
$B - ?$		**Відповідь:** $B = 47$ мкТл.

Задача 16

Два колових контури зі струмами силами $I_1 = 4$ А, $I_2 = 8$ А розташовані в одній площині та мають загальний центр. Радіуси контурів $R_1 = 4$ см і $R_2 = 8$ см відповідно. Визначити індукцію магнітного поля в центрі контурів. Розглянути два випадки: струми в контурах течуть в одному напрямку; струми в контурах течуть у протилежних напрямках.

Аналіз

За принципом суперпозиції магнітних полів магнітна індукція $\vec{B}$ результівного магнітного поля в будь-якій точці простору дорівнює

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \qquad (1)$$

де $\vec{B}_1$ – магнітна індукція поля, створеного струмом силою I_1, $\vec{B}_2$ – магнітна індукція поля, створеного струмом силою I_2 в даній точці простору.

1. **Струми в контурах течуть в одному напрямку** (рисунок 1).

Побудуємо вектори $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ в центрі контурів, використовуючи або *правило правого свердлика*, або *правило правої руки* (див. рис. 1). Вектори мають однаковий напрямок.

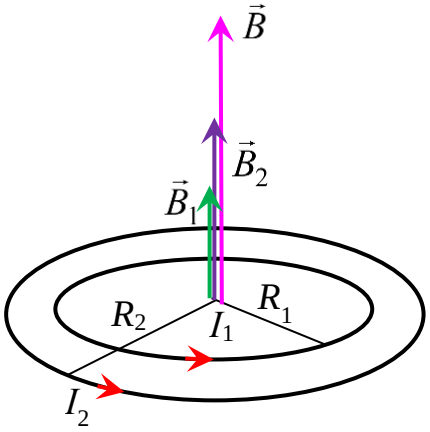


Рисунок 1

Модуль результівного вектора

$$B = B_1 + B_2 . \qquad (2)$$

Модуль магнітної індукції в центрі колового контуру зі струмом

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}, \qquad (3)$$

де μ_0 – магнітна стала; I – сила струму в контурі; R – радіус контуру.

Тоді

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}, \qquad (4)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2R_2}, \qquad (5)$$

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} + \frac{\mu_0 I_2}{2R_2} = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I_1}{R_1} + \frac{I_2}{R_2}\right),$$

$$B = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I_1}{R_1} + \frac{I_2}{R_2}\right). \qquad (6)$$

Перевіримо формулу (6):

$$[B] = \text{Тл} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}}; \quad [I] = \text{А}; \quad [R] = \text{м}; \quad [\mu_0] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2};$$

$$\left[\mu_0 \left(\frac{I}{R}\right)\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{А}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$I_1 = 4\,\text{А}$		$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2}\left(\frac{4}{4 \cdot 10^{-2}} + \frac{8}{8 \cdot 10^{-2}}\right) =$
$I_2 = 8\,\text{А}$		
$R_1 = 4\,\text{см}$	$4 \cdot 10^{-2}$ м	$= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^2}{2} = 12{,}56 \cdot 10^{-5}$ Тл $= 125{,}6$ мкТл.
$R_2 = 8\,\text{см}$	$8 \cdot 10^{-2}$ м	
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м		**Відповідь:** $B = 125{,}6$ мкТл.
$B - ?$		

2. **Струми в контурах течуть у протилежних напрямках** (рисунок 2).

Побудуємо вектори $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ в центрі контурів, використовуючи або *правило правого свердлика*, або *правило правої руки* (див. рис. 2).

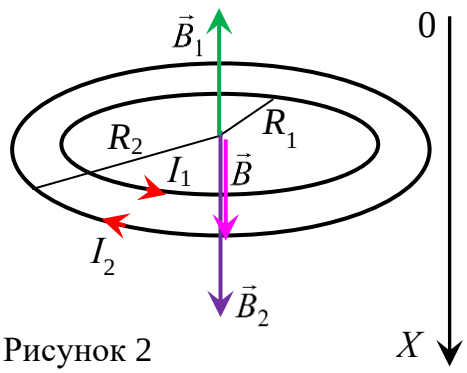


Рисунок 2

Вектори напрямлені протилежно один іншому.

Припустимо, що $B_2 > B_1$, тоді результівний вектор $\vec{B}$ напрямлений в бік вектора $\vec{B}_2$.

Напишемо рівняння (1) в проєкціях на вісь $0X$, що перпендикулярна до площини контурів,

$$B_x = B_{2x} + B_{1x} = B_2 - B_1, \qquad (7)$$

де B_1 і B_2 – модулі векторів $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ відповідно.

Модуль магнітної індукції в центрі кругового контуру зі струмом визначається за формулою (3).

Тоді

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}, \qquad (8)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2R_2}, \qquad (9)$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I_2}{2R_2} - \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I_2}{R_2} - \frac{I_1}{R_1}\right),$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I_2}{R_2} - \frac{I_1}{R_1}\right). \qquad (10)$$

Якщо припущення правильне, то отримаємо $B_x > 0$, якщо ні, то отримаємо $B_x < 0$. Це означає, що вектор $\vec{B}$ напрямлений в бік вектора $\vec{B}_1$.

Перевіримо формулу (10):

$$[B] = \text{Тл} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}}; \quad [I] = \text{А}; \quad [R] = \text{м}; \quad [\mu_0] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2};$$

$$\left[\mu_0 \left(\frac{I}{R}\right)\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{А}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}}.$$

Дано:	**СІ**
$I_1 = 4\,\text{А}$	
$I_2 = 8\,\text{А}$	
$R_1 = 4\,\text{см}$	$4 \cdot 10^{-2}$ м
$R_2 = 8\,\text{см}$	$8 \cdot 10^{-2}$ м
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$	
$B - ?$	

Розв'язок:

$$B_x = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2}\left(\frac{4}{4 \cdot 10^{-2}} - \frac{8}{8 \cdot 10^{-2}}\right) = 0.$$

Відповідь: $B = 0$.

Задача 17

Два колових контури зі струмами силами I_1 = 2 А, I_2 = 3 А розташовані взаємно перпендикулярно й мають загальний центр. Радіуси контурів R_1 = 4 см і R_2 = 6 см відповідно. Визначити напруженість магнітного поля в центрі контурів.

Аналіз

За принципом суперпозиції магнітних полів магнітна індукція $\vec{B}$ результівного магнітного поля в будь-якій точці простору дорівнює

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \qquad (1)$$

де $\vec{B}_1$ – магнітна індукція поля, створеного струмом силою I_1, $\vec{B}_2$ – магнітна індукція поля, створеного струмом силою I_2 в даній точці простору.

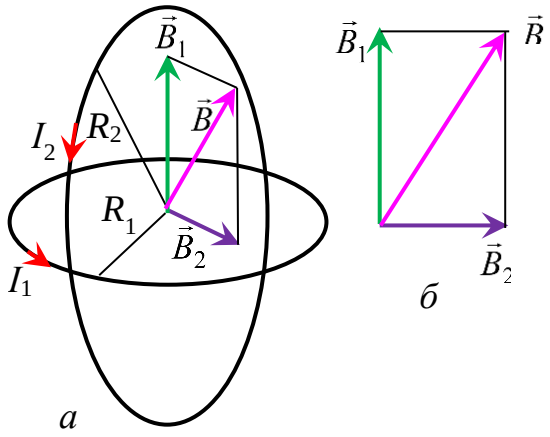
Контури взаємно перпендикулярні й мають загальний центр. Побудуємо вектори $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ в центрі, застосовуючи або *правило правого свердлика*, або *правило правої руки* (рисунок 1). Вектор $\vec{B}_1$ перпендикулярний до площини контуру *1* (I_1), тому міститься в площині контуру *2* (I_2); вектор $\vec{B}_2$ перпендикулярний до площини контуру *2*, тому міститься в площині контуру *1*. Отже, вектори $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ взаємно перпендикулярні (див. рис. 1, *а*, *б*).

Модуль B результівного вектора

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}\,. \qquad (2)$$

Модуль магнітної індукції в центрі колового контуру зі струмом

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}, \qquad (3)$$



а *б*

Рисунок 1

де μ_0 – магнітна стала; I – сила струму в контурі; R – радіус контуру.

Тоді

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}, \qquad (4)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2R_2}, \qquad (5)$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; I_1 – сила струму в контурі радіусом R_1; I_2 – сила струму в контурі радіусом R_2.

Отже, модуль B результівного вектора

$$B = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I_1}{2R_1}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I_2}{2R_2}\right)^2} = \frac{\mu_0}{2}\sqrt{\left(\frac{I_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{R_2}\right)^2},$$

$$B = \frac{\mu_0}{2}\sqrt{\left(\frac{I_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{R_2}\right)^2} \qquad (6)$$

Перевіримо формулу (6)

$$[B] = \text{Тл} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}}; \quad [I] = \text{А}; \quad [R] = \text{м}; \quad [\mu_0] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2};$$

$$\left[\mu_0 \left(\frac{I}{R}\right)\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{А}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}}.$$

Дано:	**СІ**
$I_1 = 2$ А	
$I_2 = 3$ А	
$R_1 = 4$ см	$4 \cdot 10^{-2}$ м
$R_2 = 6$ см	$6 \cdot 10^{-2}$ м
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м	
B – ?	

Розв'язок:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{4 \cdot 10^{-2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{6 \cdot 10^{-2}}\right)^2} =$$

$$= 44{,}4 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} = 44{,}4 \text{ мкТл}$$

Відповідь: $B = 44{,}4$ мкТл.

Задача 18

В обмотках довгого двошарового соленоїда течуть струми силою 2 А. В одному випадку напрямок струмів протилежний, в іншому — однаковий. Відповідні напруженості магнітного поля в соленоїді дорівнюють 2 кА/м і 6 кА/м. Визначити діаметри d_1 і d_2 дротів обмоток.

Аналіз

За принципом суперпозиції магнітних полів магнітна індукція $\vec{B}$ результівного поля в соленоїді (рисунок 1)

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \qquad (1)$$

де $\vec{B}_1$ – магнітна індукція поля, створеного струмом силою I_1, що тече в одній обмотці; $\vec{B}_2$ – магнітна індукція поля, створеного струмом силою I_2, що тече в іншій обмотці.

Соленоїд без осердя, тому магнітна індукція $\vec{B}$ зв'язана з напруженістю $\vec{H}$ магнітного поля співвідношенням

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \qquad (2)$$

де μ_0 – магнітна стала.

Отже, принцип суперпозиції можна переписати як

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2, \qquad (3)$$

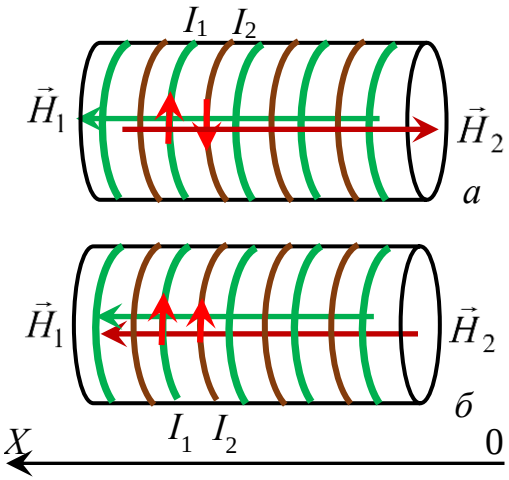
де $\vec{H}_1$ – напруженість магнітного поля, що створює струм силою I_1; $\vec{H}_2$ – напруженість магнітного поля, що створює струм силою I_2; $\vec{H}$ – напруженість результівного магнітного поля.

Розглянемо випадок, коли струми в обмотках течуть в протилежних напрямках (див. рис. 1, *а*). Побудуємо вектори $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$, застосовуючи або *правило правого свердлика*, або *правило правої руки* (рис. 1, *а*). Вектори $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$ напрямлені вздовж однієї лінії в протилежних напрямках.

Проєкція H'_x результівної напруженості на вісь $0X$, яка паралельна осі соленоїда,

$$H'_x = H_{1x} + H_{2x} = H_1 - H_2, \qquad (4)$$

де H_1 і H_2 – модулі векторів $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$ відповідно.



Довгий соленоїд:

одна обмотка, друга обмотка соленоїда

Рисунок 1

Розглянемо випадок, коли струми в обмотках течуть в одному напрямку (див. рис. 1, *б*). Побудуємо вектори $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$, застосовуючи або *правило правого свердлика*, або *правило правої руки* (рис. 1, *б*). Вектори $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$ напрямлені вздовж однієї лінії в один бік.

Проєкція H''_x результівної напруженості на вісь $0X$, яка паралельна осі соленоїда,

$$H''_x = H_{1x} + H_{2x} = H_1 + H_2, \qquad (5)$$

де H_1 і H_2 – модулі векторів $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$ відповідно.

Модуль напруженості H магнітного поля, яке створює струм одношарової обмотки довгого соленоїда,

$$H = nI = \frac{I}{d}, \qquad (6)$$

де I – сила струму в обмотці; n – лінійна щільність витків; d – діаметр дроту обмотки.

Тоді

$$H_1 = \frac{I_1}{d_1}, \qquad (7)$$

де d_1 – діаметр дроту однієї обмотки,

$$H_2 = \frac{I_2}{d_2}, \qquad (8)$$

де d_2 – діаметр дроту іншої обмотки.

Отже,

$$H'_x = \frac{I_1}{d_1} - \frac{I_2}{d_2}, \qquad (9)$$

$$H''_x = \frac{I_1}{d_1} + \frac{I_2}{d_2}. \qquad (10)$$

Додамо ліві й праві частини рівнянь (9) і (10)

$$H'_x + H''_x = \frac{2I_1}{d_1}. \tag{11}$$

Віднімемо ліві і праві частини рівнянь (10) і (9)

$$H''_x - H'_x = \frac{2I_2}{d_2}. \tag{12}$$

Модулі результівних векторів $H' = \left|H'_x\right|;\ H'' = \left|H''_x\right|$. У рівнянні (12) $H''_x - H'_x > 0$.

Отже, можна написати

$$H' + H'' = \frac{2I_1}{d_1}, \tag{13}$$

$$H'' - H' = \frac{2I_2}{d_2}. \tag{14}$$

З (13)

$$d_1 = \frac{2I_1}{H' + H''}. \tag{15}$$

З (14)

$$d_2 = \frac{2I_2}{H'' - H'}. \tag{16}$$

Структури формул (15) і (16) подібні, тому достатньо

перевірити формулу (15):

$[d] = \text{м};\ [I] = \text{А};\ [H] = \frac{\text{А}}{\text{м}};\ \left[\frac{I}{H}\right] = \frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{А}} = \text{м}.$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$I_1 = 2\,\text{А}$ $I_2 = 2\,\text{А}$ $H' = 2\,\frac{\text{кА}}{\text{м}}$ $H'' = 6\,\frac{\text{кА}}{\text{м}}$ $d_1 - ?\ d_2 - ?$	 $2\cdot10^3\,\frac{\text{А}}{\text{м}}$ $6\cdot10^3\,\frac{\text{А}}{\text{м}}$	$d_1 = \frac{2\cdot2}{2\cdot10^3 + 6\cdot10^3} = 0{,}5\cdot10^{-3}\ \text{м} = 0{,}5\ \text{мм};$ $d_2 = \frac{2\cdot2}{6\cdot10^3 - 2\cdot10^3} = 10^{-3}\ \text{м} = 1\ \text{мм}.$ **Відповідь:** $d_1 = 0{,}5\ \text{мм};\ d_2 = 1\ \text{мм}.$

Задача 19

Нескінченно довгий провідник зігнутий під прямим кутом. В провіднику тече струм силою $I = 20$ А. Визначити напруженість магнітного поля в точці, яка знаходиться на бісектрисі кута на відстані 5 см від вершини кута.

Аналіз

Зігнутий провідник можна розглядати як два провідники, з'єднані в точці N (рисунок 1).

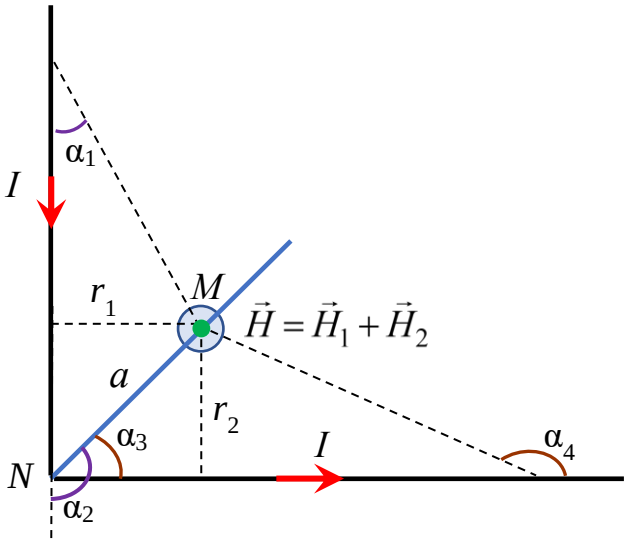


Рисунок 1

За принципом суперпозиції магнітних полів магнітна індукція $\vec{B}$ результівного поля в точці M

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \qquad (1)$$

де $\vec{B}_1$ – магнітна індукція поля, створеного струмом одного провідника; $\vec{B}_2$ – магнітна індукція поля, створеного струмом іншого провідника.

Для повітря магнітна індукція $\vec{B}$ зв'язана з напруженістю $\vec{H}$ магнітного поля співвідношенням

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \qquad (2)$$

їхні модулі зв'язані співвідношенням

$$B = \mu_0 H, \qquad (3)$$

де μ_0 – магнітна стала.

Отже, принцип суперпозиції можна написати як

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2, \qquad (4)$$

де $\vec{H}_1$ – напруженість магнітного поля, створеного струмом в одному провіднику; $\vec{H}_2$ – напруженість магнітного поля, створеного струмом в іншому провіднику; $\vec{H}$ – напруженість результівного магнітного поля.

Побудуємо вектори $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$ в точці M, застосовуючи або *правило правого свердлика*, або *правило правої руки* (див. рис. 1). Вектори $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$ напрямлені

перпендикулярно до площини рис. 1 в один бік (до нас). Тоді від векторної суми (4) можна перейти до скалярної суми модулів векторів

$$H = H_1 + H_2. \tag{5}$$

Визначимо H_1 і H_2, використовуючи ф-лу (3) і ф-лу (3.112),

$$H_1 = \frac{I}{4\pi r_1}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right), \tag{6}$$

$$H_2 = \frac{I}{4\pi r_2}\left(\cos\alpha_3 - \cos\alpha_4\right), \tag{7}$$

де r_1 і r_2 – відстані від точки M до одного та другого провідника відповідно (див. рис. 1).

За умовою задачі точка M знаходиться на бісектрисі прямого кута, тому $\alpha_3 = 45^\circ$, $\cos\alpha_3 = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Кут $\alpha_2 = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$, $\cos\alpha_2 = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Провідники нескінченно довгі: один з боку кута α_1, тому $\alpha_1 = 0$, $\cos\alpha_1 = \cos 0^\circ = 1$; інший з боку кута α_4, тому $\alpha_4 = 180^\circ$, $\cos\alpha_4 = \cos 180^\circ = -1$.

Відстані $r_1 = a\sin\left(90^\circ - \alpha_3\right) = a\cos\alpha_3 = a\cos 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. $r_2 = a\sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Врахувавши наведене, а також (5), (6) і (7), отримуємо

$$H = \frac{I}{4\pi r_1}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right) + \frac{I}{4\pi r_2}\left(\cos\alpha_3 - \cos\alpha_4\right) = \frac{2I}{4\pi a\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) +$$

$$+ \frac{2I}{4\pi a\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = \frac{4I}{4\pi a\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{I}{\pi a\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1{,}21I}{\pi a}.$$

$$H = \frac{1{,}21I}{\pi a}. \tag{8}$$

Перевіримо формулу (8):

$$\left[H\right] = \frac{\text{А}}{\text{м}};\ \ \left[I\right] = \text{А};\ \ \left[a\right] = \text{м};\ \ \left[\frac{I}{a}\right] = \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$I=20\,\text{А}$		$H=\dfrac{1{,}21\cdot 20}{\pi\cdot 5\cdot 10^{-2}}=154{,}1\,\dfrac{\text{А}}{\text{м}}.$
$a=5\,\text{см}$	$5\cdot 10^{-2}$ м	
$H-?$		**Відповідь:** $H=154{,}1\,\dfrac{\text{А}}{\text{м}}.$

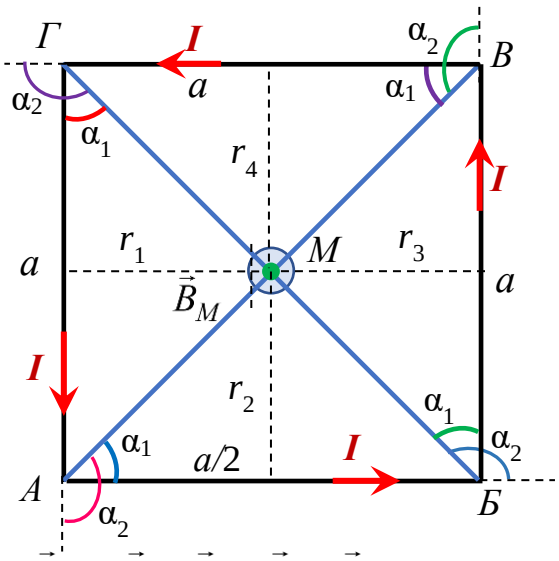
Задача 20

В квадратному контурі стороною 10 см тече струм силою 2 А. Визначити магнітну індукцію в центрі контуру.

Аналіз

Квадратний контур можна розглядати як чотири провідники довжиною a, що з'єднані в вершинах квадрата (рисунок 1).

Центр M квадрата знаходиться в точці перетину його діагоналей.



$\vec{B}_M=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3+\vec{B}_4;$

$\vec{B}_1=\vec{B}_2=\vec{B}_3=\vec{B}_4;$

$r_1=r_2=r_3=r_4=r_0.$

Рисунок 1

За принципом суперпозиції магнітних полів магнітна індукція $\vec{B}$ результівного поля в точці M (див. рис. 1)

$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3+\vec{B}_4, \qquad (1)$$

де $\vec{B}_1$ – магнітна індукція поля, створеного струмом провідника $АБ$; $\vec{B}_2$ – магнітна індукція поля, створеного струмом провідника $БВ$; $\vec{B}_3$ – магнітна індукція поля, створеного струмом провідника $ВГ$; $\vec{B}_4$ – магнітна індукція поля, створеного струмом провідника $ГА$.

Побудуємо вектори $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$ й $\vec{B}_4$ в точці M, застосовуючи або *правило правого свердлика*, або *правило правої руки* (див. рис. 1). Вектори $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$ й $\vec{B}_4$ напрямлені перпендикулярно до площини рис. 1 в один бік (до нас). Тоді від векторної суми (1) можна перейти до скалярної суми модулів векторів

$$B=B_1+B_2+B_3+B_4. \qquad (2)$$

Діагональ квадрата є одночасно бісектрисою, тому $\angle\alpha_1 = 45^\circ$, а $\angle\alpha_2 = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ (див. рис. 1).

Отже, $\Delta AMB = \Delta BMB = \Delta BMG = \Delta GMA$.

Перпендикуляри r_1, r_2, r_3 й r_4, які побудовані з точки M на відповідні сторони квадрата, є висотами відповідних трикутників (див. рис. 1) і тому рівні між собою: . $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_0$.

З рис. 1 випливає

$$r_0 = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha_1. \tag{3}$$

Модулі магнітних індукцій (див. ф-лу (3.112))

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right), \tag{4}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right), \tag{5}$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right), \tag{6}$$

$$B_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right). \tag{7}$$

Отже, модуль результівної магнітної індукції B

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right) + \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right) + \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right) +$$
$$+ \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right) = \frac{4\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right) = \frac{2\mu_0 I}{\pi a \operatorname{tg}\alpha_1}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$

$$B = \frac{2\mu_0 I}{\pi a \operatorname{tg}\alpha_1}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right). \tag{8}$$

Перевіримо формулу (8):

$$[B] = \text{Тл} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}};\quad [I] = \text{А};\ [a] = \text{м};\quad \left[\mu_0\right] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2};\quad [\operatorname{tg}\alpha] = [\cos\alpha] = 1;$$

$$\left[\mu_0\left(\frac{I}{a}\right)\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{А}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$I=2\,\text{А}$ $a=10\,\text{см}$ $\alpha_1=45^\circ$ $\alpha_2=135^\circ$ $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\,\frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ $B-?$	10^{-1} м	$B=\frac{2\cdot4\pi\cdot10^{-7}\cdot2}{\pi\cdot10^{-1}\,\text{tg}45^\circ}\left(\cos45^\circ-\cos135^\circ\right)=$ $=\frac{16\cdot10^{-6}}{1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{16\cdot10^{-6}}{1}\left(\sqrt{2}\right)=$ $=22{,}6\cdot10^{-6}\ \text{Тл}=22{,}6\ \text{мкТл}.$ **Відповідь:** $B=22{,}6\ \text{мкТл}.$

Задача 21

Нескінченний прямий провідник має колову петлю радіусом 10 см. Індукція магнітного поля в центрі петлі 10 мкТл. Визначити силу струму в провіднику.

Аналіз

Провідник, що є джерелом магнітного поля, можна розглядати як *два нескінченних прямих провідника АМ* й *МБ* та *коловий контур*, що з'єднані в точці *М* (рисунок 1, рисунок 2). По провідникам течуть струми силою *I*.

За принципом суперпозиції магнітних полів магнітна індукція $\vec{B}$ результівного поля в точці *М* (див. рис. 1)

$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3, \qquad (1)$$

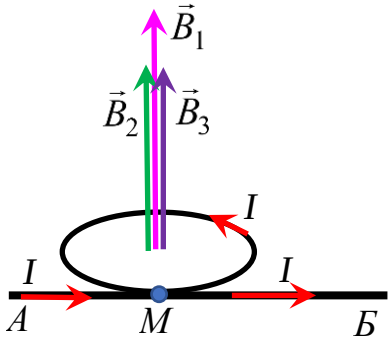


Рисунок 1

де $\vec{B}_1$ – магнітна індукція поля, створеного струмом провідника *АМ*; $\vec{B}_2$ – магнітна індукція поля, створеного струмом провідника *БМ*; $\vec{B}_3$ – магнітна індукція поля, створеного струмом колового контуру.

Побудуємо вектори $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ й $\vec{B}_3$ в точці *М*, застосовуючи або *правило правого свердлика*, або *правило правої руки* (див. рис. 1, рис. 2). Вектори $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ й $\vec{B}_3$ напрямлені перпендикулярно до площини рис. 2 в один бік (до нас). Тоді від векторної суми (1) можна перейти до скалярної суми модулів векторів

$$B=B_1+B_2+B_3. \qquad (2)$$

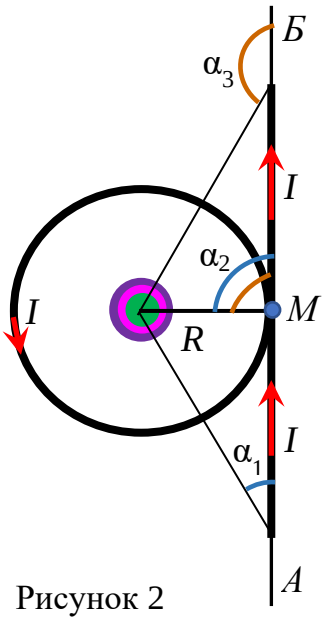


Рисунок 2

Модулі магнітних індукцій $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ визначаються за формулою (3.112). Побудуємо кути, які входять до формули (3.112) (див. рис. 2). Тоді

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right), \tag{3}$$

де μ_0 – магнітна стала; $\alpha_2 = 90^\circ$; провідник AM нескінченний з боку кута α_1, тому $\alpha_1 = 0^\circ$;

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_3\right), \tag{4}$$

де $\alpha_2 = 90^\circ$; провідник $МБ$ нескінченний з боку кута α_3, тому $\alpha_3 = 180^\circ$; R – відстань від провідників AM і $БМ$ до точки, в якій визначається магнітна індукція, тобто R – радіус колового контуру.

Модуль магнітної індукції B_3 в центрі колового струму

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2R}. \tag{5}$$

Тоді

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right) + \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_3\right) + \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\cos\alpha_1 - \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\cos\alpha_2 +$$

$$+ \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\cos\alpha_2 - \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\cos\alpha_3 + \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3\right)}{2\pi} + 1\right).$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3\right)}{2\pi} + 1\right). \tag{6}$$

Врахувавши значення кутів, що входять до формули (6) (див. пояснення до ф-л (3) і (4)), отримуємо

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{\left(\cos 0^\circ - \cos 180^\circ\right)}{2\pi} + 1\right) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right).$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right). \tag{7}$$

Звідси

$$I = \frac{2RB}{\mu_0\left(\frac{1}{\pi}+1\right)}. \qquad (8)$$

Звертаємо увагу, що формула (*7*) *збігається з формулою* (*10*) *задачі 12* (коли визначається одна і та ж величина: або *H*, або *B*) *за умови* $I_1 = I_2$.

Перевіримо формулу (8):

$$[I] = \text{А};\ [B] = \text{Тл} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}};\ [R] = \text{м};\ [\mu_0] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2};$$

$$\left[\frac{RB}{\mu_0}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{А}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{А} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \text{А}.$$

Дано:	**СІ**
$R = 10$ см	10^{-1} м
$B = 10$ мкТл	10^{-5} Тл
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$	
$I - ?$	

Розв'язок:

$$I = \frac{2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-5}}{4\pi \cdot 10^{-7}\left(\frac{1}{\pi}+1\right)} = 1{,}2 \text{ А}.$$

Відповідь: $I = 1{,}2$ А.

3.20. МАГНІТНИЙ ПОТІК. ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ПОЛЯ ВЕКТОРА $\vec{B}$

Нехай в однорідному магнітному полі ($\vec{B} = \text{const}$) розташована плоска площинка площею *S* (рисунок 3.61).

Потік Φ магнітної індукції (магнітний потік, потік вектора $\vec{B}$) крізь площинку *S* визначається співвідношенням

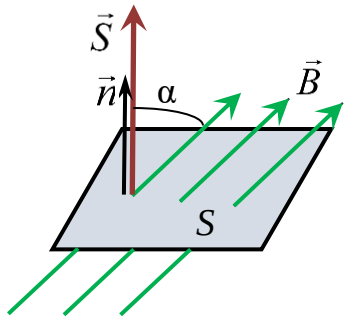


Рисунок 3.61

$$\boxed{\Phi = BS\cos\alpha = \vec{B} \cdot \vec{S}}, \qquad (3.131)$$

де $\vec{S}$ – вектор, модуль якого дорівнює площі *S* площинки, а напрямок збігається з напрямком нормалі $\vec{n}$ до площинки; α – кут між векторами $\vec{B}$ і $\vec{S}$. Знак «·» означає скалярний добуток векторів $\vec{B}$ і $\vec{S}$.

Нормаль $\vec{n}$ до площинки – вектор, перпендикулярний до площинки, довжина якого $|\vec{n}|=1$. У випадку замкненої поверхні нормаль $\vec{n}$ до поверхні береться зовні поверхні.

В СІ $[\Phi]=$ Вб (вебер); $\text{Вб}=\text{Тл}\cdot\text{м}^2=\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{А}\cdot\text{с}^2}$. Розмірність магнітного потоку $\dim\Phi=MT^{-2}I^{-1}L^2$.

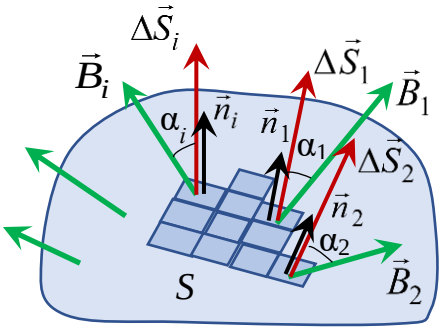


Рисунок 3.62

Визначимо магнітний потік крізь довільну поверхню S в неоднорідному магнітному полі (рисунок 3.62). Замінимо поверхню S умовною поверхнею, яка складається з N однакових площинок площею ΔS (кілька площинок показані на рис. 3.62) і приблизно збігається з первинною поверхнею. В межах кожної площинки магнітне поле будемо вважати однорідним. Напрямок і модуль магнітної індукції змінюється від площинки до площинки, але в межах кожної площинки $\vec{B}_i=\text{const}$. Потік $\Delta\Phi_i$ магнітної індукції крізь i-ту площинку (i = 1, 2, 3…, N – номер площинки)

$$\begin{aligned}
&\Delta\Phi_1 = B_1\Delta S\cos\alpha_1 = \vec{B}_1\cdot\Delta\vec{S}_1,\\
&\Delta\Phi_2 = B_2\Delta S\cos\alpha_2 = \vec{B}_2\cdot\Delta\vec{S}_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta\Phi_N = B_N\Delta S\cos\alpha_N = \vec{B}_N\cdot\Delta\vec{S}_N.
\end{aligned} \qquad (3.132)$$

Магнітний потік Φ_Σ крізь всі площинки

$$\Phi_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} B_i\Delta S\cos\alpha_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{B}_i\cdot\Delta\vec{S}_i, \qquad (3.133)$$

де $\vec{B}_i$ – магнітна індукція в межах i-тої площинки (i = 1, 2, 3…, N – номер площинки); $\Delta\vec{S}_i$ – вектор, довжина якого дорівнює площі ΔS площинки, а напрямок збігається з напрямком нормалі $\vec{n}_i$ до площинки; α_i – кут між $\vec{B}_i$ й $\Delta\vec{S}_i$.

Вираз (3.133) визначає наближене значення магнітного потоку, бо реальну поверхню замінили на поверхню, що складається з однакових плоских площинок. Очевидно, чим менша площа ΔS, тим точніший результат.

Тоді магнітний потік Ф крізь поверхню S

$$\Phi = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{N} B_i \cos\alpha_i \Delta S = \int_S B\cos\alpha dS = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S},$$

$$\boxed{\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}}, \qquad (1.134)$$

де $\int_S$ – інтеграл по поверхні S.

ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ПОЛЯ ВЕКТОРА $\vec{B}$:

Потік вектора $\vec{B}$ крізь довільну замкнену поверхню S дорівнює нулю

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0}, \qquad (3.135)$$

де $\oint_S$ – інтеграл по замкненій поверхні S.

Ця теорема фіксує факт, що **в природі відсутні магнітні заряди**, *на яких би починались і закінчувались силові лінії магнітного поля.*

3.21. РОБОТА МАГНІТНОГО ПОЛЯ ПРИ ПЕРЕМІЩЕННІ ПРОВІДНИКА З ПОСТІЙНИМ СТРУМОМ І КОНТУРУ З ПОСТІЙНИМ СТРУМОМ У МАГНІТНОМУ ПОЛІ

Нехай прямокутний контур із рухомою перетинкою довжиною l міститься в однорідному магнітному полі індукцією $\vec{B}$, силові лінії якого перпендикулярні до площини контуру (рисунок 3.63). В контурі тече постійний струм силою I.

На перетинку діє сила Ампера $\vec{F}_A$, модуль якої дорівнює

$$F_A = IlB\sin 90^o = IlB. \qquad (3.136)$$

Робота A, яку виконує сила $\vec{F}_A$ при переміщенні перетинки (провідника зі струмом) на відстань Δx,

$$A = F_A \Delta x \cos 0^o = IBl\Delta x = IB\Delta S = IB\left(S_2 - S_1\right) = I\left(BS_2 - BS_1\right) = I\left(\Phi_2 - \Phi_1\right) = I\Delta\Phi,$$

$$\boxed{A = I\left(\Phi_2 - \Phi_1\right) = I\Delta\Phi}, \qquad (3.137)$$

де $\Delta S = l\Delta x$ – приріст площі контуру; S_1 – площа початкового контуру *CDFGC*; $S_2 = S_1 + \Delta S$ – площа кінцевого контуру *CDKLC*; Φ_1 – **магнітний потік крізь початковий контур;** Φ_2 **– магнітний потік крізь кінцевий контур;** $\Delta\Phi$ **– приріст магнітного потоку внаслідок переміщення перетинки на відстань** Δx.

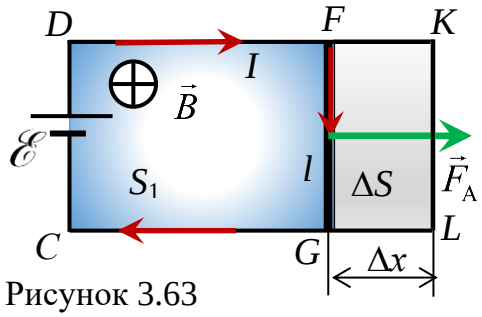


Рисунок 3.63

Для визначення знаку магнітного потоку беруть нормаль $\vec{n}$ до поверхні, обмеженої контуром так, щоб вона утворювала з напрямком струму *правогвинтову систему*: якщо вороток свердлика обертати в напрямку струму, то напрямок його поступального руху збігатиметься з напрямком нормалі $\vec{n}$.

Формулу (1.137) можна узагальнити на випадок переміщення будь-якого плоского контуру з постійним струмом у стаціонарному магнітному полі.

РОБОТА МАГНІТНОГО ПОЛЯ ПРИ ПЕРЕМІЩЕННІ КОНТУРУ З ПОСТІЙНИМ СТРУМОМ

Робота *A* магнітного поля при переміщенні довільного контуру з постійним струмом із початкового положення *1* в кінцеве положення *2*

$$\boxed{A = I\left(\Phi_2 - \Phi_1\right) = I\Delta\Phi}, \qquad (3.138)$$

де $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ – приріст магнітного потоку: Φ_1 і Φ_2 – магнітні потоки крізь контур у початковому й кінцевому станах відповідно.

Якщо магнітне поле неоднорідне, то початковий і кінцевий магнітні потоки визначаються за формулою (1.134).

3.22. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 22

Плоска колова рамка радіусом $R = 2$ см, в якій тече струм силою $I = 1{,}5$ А, розташована в однорідному магнітному полі так, що нормаль до неї утворює кут $\alpha = 30^o$ із силовими лініями. Індукція магнітного

поля B = 0,2 Тл. Визначити роботу A', яку треба виконати, щоб повернути рамку на кут φ = 90° навколо осі, що збігається з діаметром контуру й перпендикулярна до силових ліній.

Аналіз

При повороті рамки зі струмом у магнітному полі силами поля виконується робота

$$A = I\left(\Phi_2 - \Phi_1\right), \tag{1}$$

де Φ_1 – магнітний потік крізь контур у початковому стані (рисунок 1, *а*); Φ_2 – магнітний потік крізь контур у кінцевому стані (див. рис. 1, *б*); I – сила струму в контурі.

Робота A' зовнішніх сил при повороті рамки

$$A' = -A = I\left(\Phi_1 - \Phi_2\right). \tag{2}$$

Магнітні потоки

$$\Phi_1 = BS\cos\alpha_1, \tag{3}$$

$$\Phi_2 = BS\cos\alpha_2, \tag{4}$$

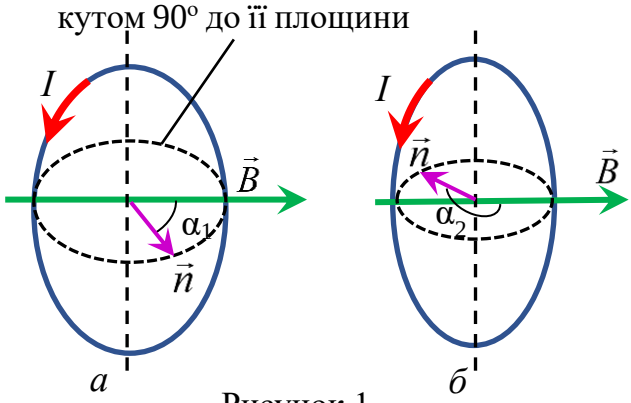


Рисунок 1

де B – модуль магнітної індукції; S – площа рамки; α_1 – кут між нормаллю $\vec{n}$ до рамки й магнітною індукцією в початковому стані; $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$ – кут між нормаллю до рамки й магнітною індукцією в кінцевому стані;

Площа колового контуру

$$S = \pi R^2, \tag{5}$$

де R – радіус контуру.

Отже,

$$A' = I\left(BS\cos\alpha_1 - BS\cos\alpha_2\right) = IBS\left(\cos\alpha_1 - \cos\left(\alpha_1 + \varphi\right)\right) = IB\pi R^2\left(\cos\alpha_1 - \cos\left(\alpha_1 + \varphi\right)\right),$$

$$A' = IB\pi R^2\left(\cos\alpha_1 - \cos\left(\alpha_1 + \varphi\right)\right). \tag{6}$$

Перевіримо формулу (6):

$$[A'] = \text{Дж} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2};\quad [I] = \text{А};\quad [B] = \text{Тл} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2\cdot\text{А}};\quad [R] = \text{м};\quad [\cos\alpha] = 1;$$

$$\left[IBR^2\right] = \frac{\text{А}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{А}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$I = 1{,}5$ А		$A' = 1{,}5\cdot 0{,}2\cdot\pi\cdot\left(2\cdot 10^{-2}\right)^2\left(\cos 30^\circ - \cos\left(30^\circ + 90^\circ\right)\right) =$
$R = 2$ см	$2\cdot 10^{-2}$ м	$= 5{,}15\cdot 10^{-4}$ Дж $= 0{,}52$ мДж.
$B = 0{,}2$ Тл		
$\alpha_1 = 30^\circ$		
$\varphi = 90^\circ$		**Відповідь:** $A' = 0{,}52$ мДж.
$A' - ?$		

Задача 23

Плоска квадратна рамка стороною 5 см, в якій тече струм силою 5 А, вільно встановилась в однорідному магнітному полі індукцією 10 мТл. Визначити роботу зовнішніх сил при переміщенні контуру за межі магнітного поля. .

Аналіз

Поведінку рамки зі струмом у магнітному полі можна охарактеризувати за допомогою магнітного моменту (див. пункт 3.5.1)

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \qquad (1)$$

де I – сила струму в контурі; S – площа контуру; $\vec{n}$ – позитивна нормаль до контуру.

Коли рамка зі струмом вільно підвішена в магнітному полі, тоді вона встановлюється так, щоб $\vec{p}_m \uparrow\uparrow \vec{B}$, бо в цьому положенні потенціальна енергія рамки найменша. Площина рамки перпендикулярна до силових ліній поля (рисунок 1). Отже,

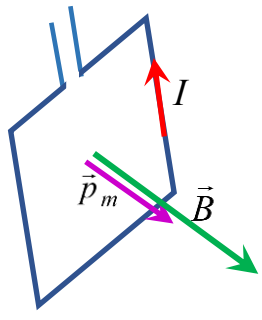


Рисунок 1

$$W_p = -\vec{p}_m\cdot\vec{B} = -p_m B\cos\alpha = -p_m B\cos 0^\circ = -p_m B. \qquad (2)$$

При переміщенні рамки зі струмом у магнітному полі силами поля виконується робота

$$A = I\left(\Phi_2 - \Phi_1\right), \tag{3}$$

де Φ_1 – магнітний потік крізь контур у початковому стані; Φ_2 – магнітний потік крізь контур у кінцевому стані; I – сила струму в контурі.

Робота A' зовнішніх сил при переміщенні рамки за межі магнітного поля

$$A' = -A = I\left(\Phi_1 - \Phi_2\right). \tag{4}$$

Магнітні потоки

в початковому стані

$$\Phi_1 = BS\cos\alpha, \tag{5}$$

в кінцевому стані

$$\Phi_2 = 0, \tag{6}$$

де B – модуль магнітної індукції; α – кут між позитивною нормаллю $\vec{n}$ до рамки й магнітною індукцією: $\alpha = 0$.

Площа квадратної рамки

$$S = a^2, \tag{7}$$

де a – сторона рамки.

Отже,

$$A' = -A = I\Phi_1 = IBS\cos 0^\circ = IBS = IBa^2. \tag{8}$$

Перевіримо формулу (8):

$$\left[A'\right] = \text{Дж} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2};\quad \left[I\right] = \text{А};\quad \left[B\right] = \text{Тл} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2\cdot\text{А}};\quad \left[a\right] = \text{м};$$

$$\left[IBa^2\right] = \frac{\text{А}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{А}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$I = 5$ А		$A' = 5\cdot 10^{-2}\cdot\left(5\cdot 10^{-2}\right)^2 = 125\cdot 10^{-6}$ Дж $= 125$ мкДж.
$a = 5$ см	$5\cdot 10^{-2}$ м	
$B = 10$ мТл	10^{-2} Тл	**Відповідь:** $A' = 125$ мкДж.
$A' - ?$		

3.23. МАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ

3.23.1. МАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ. СТРУМИ НАМАГНІЧУВАННЯ (МОЛЕКУЛЯРНІ СТРУМИ). НАМАГНІЧЕНІСТЬ

Якщо область магнітного поля, що створене постійними струмами в провідниках (струмами провідності), заповнити будь-якою речовиною, то поле зміниться. Це пояснюється тим, що **будь-яка речовина є магнетиком**, тобто здатна намагнічуватися під дією магнітного поля. Намагнічена речовина створює своє магнітне поле індукцією $\vec{B}'$, яке разом із зовнішнім магнітним полем індукцією $\vec{B}_0$ створює результівне магнітне поле індукцією $\vec{B}$

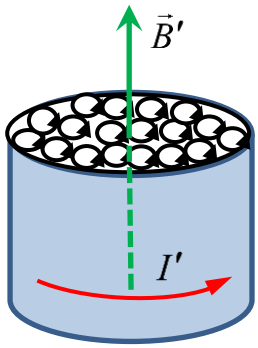
$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \tag{3.139}$$

Для поля в магнетику справедлива теорема Гаусса

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \tag{3.140}$$

СТРУМИ НАМАГНІЧУВАННЯ (МОЛЕКУЛЯРНІ СТРУМИ) I'

Для пояснення намагнічування речовини *Ампер* припустив, що в ній циркулюють колові струми (*молекулярні струми*).



Намагнічений однорідний магнетик: I' – струм намагнічування; $\vec{B}'$ – індукція магнітного поля, створеного струмом намагнічування

Рисунок 3.64

Відомо, що атоми складаються з позитивно зарядженого ядра, навколо якого рухаються негативно заряджені електрони. В нашому випадку можна вважати, що електрони впорядковано рухаються по коловим траєкторіям навколо точкового ядра, створюючи замкнені електричні струми (молекулярні струми). Кожний такий *замкнений коловий молекулярний струм має магнітний момент* (див. пункт 3.5.1). Зовнішнє магнітне поле впорядковує магнітні моменти молекулярних струмів. Як результат *речовина набуває сумарний магнітний момент — намагнічується.*

Візьмемо циліндр з однорідного магнетика, який однорідно намагнічений вздовж своєї осі (рисунок 3.64). В сусідніх атомах молекулярні струми в місцях їхнього дотику течуть у протилежних напрямках і компенсують один іншого. Залишаються тільки молекулярні струми, що виходять на бокову поверхню. Ці струми створюють макроскопічний поверхневий *струм намагнічування* I', який тече по боковій поверхні циліндра. Струм I' створює макроскопічне поле $\vec{B}'$.

Ступінь намагнічування магнетика характеризується **намагніченістю (вектором намагніченості)** $\vec{J}$ (читаємо як латинську літеру «йот») — **сумарним магнітним моментом атомів в одиниці об'єму.**

За визначенням

$$\boxed{\vec{J} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{mi}}, \qquad (3.141)$$

де $\vec{p}_{mi}$ – магнітний момент i-го атому (i = 1, 2, 3, …., N); N – кількість атомів в об'ємі ΔV.

В СІ $\left[J\right] = 1\frac{\text{А}}{\text{м}}$. Розмірність намагніченості $\dim J = IL^{-1}$.

Якщо в усіх точках магнетика $\vec{J} = \text{const}$, то речовина намагнічена однорідно.

ТЕОРЕМА ПРО ЦИРКУЛЯЦІЮ ВЕКТОРА $\vec{J}$: для стаціонарного випадку циркуляція вектора $\vec{J}$ уздовж довільного замкненого контуру Γ дорівнює алгебраїчній сумі струмів намагнічування I', що охоплені цим контуром,

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{l} = \sum I'}. \qquad (3.142)$$

Теорія молекулярних струмів якісно пояснює намагнічування речовини й має сенс в історичному аспекті. В міру поглиблення нашого знання про природу намагнічування було встановлено, що повне й строге пояснення намагнічування речовини можливе тільки в квантовій механіці.

3.23.2. НАПРУЖЕНІСТЬ МАГНІТНОГО ПОЛЯ. МАГНІТНА СПРИЙНЯТЛИВІСТЬ Й МАГНІТНА ПРОНИКНІСТЬ РЕЧОВИНИ

В магнетиках, що знаходяться в зовнішньому магнітному полі, виникають струми намагнічування, тому магнітна індукція $\vec{B}$ результівного поля в речовині визначається не тільки струмами провідності, але й струмами намагнічування.

Циркуляція $\vec{B}$ вздовж замкненого контуру Γ

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum I + \sum I' \right), \tag{3.143}$$

де $\sum I$ і $\sum I'$ – відповідно *алгебраїчна сума струмів провідності та алгебраїчна сума струмів намагнічування*, що охоплені контуром Γ.

Визначення струмів I' у загальному випадку надзвичайно складна задача, що практично унеможливлює розрахунок $\vec{B}$. Тому вводиться допоміжний вектор, циркуляція якого вздовж замкненого контуру визначається тільки струмами провідності.

З (3.143) і (3.142) для замкненого контуру Γ випливає

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} - \mu_0 \sum I' = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} - \mu_0 \oint_{\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I \tag{3.144}$$

або

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) \cdot d\vec{l} = \sum I. \tag{3.145}$$

Векторна фізична величина $\vec{H}$, що визначається співвідношенням

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}}, \tag{3.146}$$

називається **напруженістю магнітного поля.**

В СІ $[H] = \frac{\text{А}}{\text{м}}$. Розмірність напруженості магнітного поля $\dim H = IL^{-1}$.

Врахувавши (3.146), формулу (3.145) можна написати як

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I}. \tag{3.147}$$

Ця формула є математичним виразом **теореми про циркуляцію вектора** $\vec{H}$ або **закону повного струму в речовині.**

Правило знаків аналогічне правилу знаків, яке було використане при формулюванні теореми про циркуляцію вектора $\vec{B}$.

ЗВ'ЯЗОК МІЖ ВЕКТОРАМИ $\vec{J}$ І $\vec{H}$, $\vec{B}$ І $\vec{H}$

Для однорідних ізотропних магнетиків (за виключенням феромагнетиків) у слабких магнітних полях намагніченість

$$\vec{J} = \chi_m \vec{H}, \tag{3.148}$$

де χ_m – **магнітна сприйнятливість речовини.**

В СІ $[\chi_m] = 1$. Величина χ_m безрозмірна.

З формули (3.146) випливає

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J}, \tag{3.149}$$

тоді, врахувавши (3.148), отримуємо

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}. \tag{3.150}$$

Величина μ, яка визначається співвідношенням

$$\mu = 1 + \chi_m, \tag{3.151}$$

називається **відносною магнітною проникністю речовини.**

В СІ $[\mu] = 1$. Величина μ безрозмірна.

Тоді

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_a \vec{H}}, \tag{3.152}$$

де $\mu_a = \mu_0 \mu$ – **абсолютна магнітна проникність речовини.**

В СІ $[\mu_a] = \dfrac{\text{Гн}}{\text{м}}$, $\mu_a = \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2}$. Розмірність абсолютної магнітної проникності $\dim \mu_a = MLI^{-2}T^{-2}$.

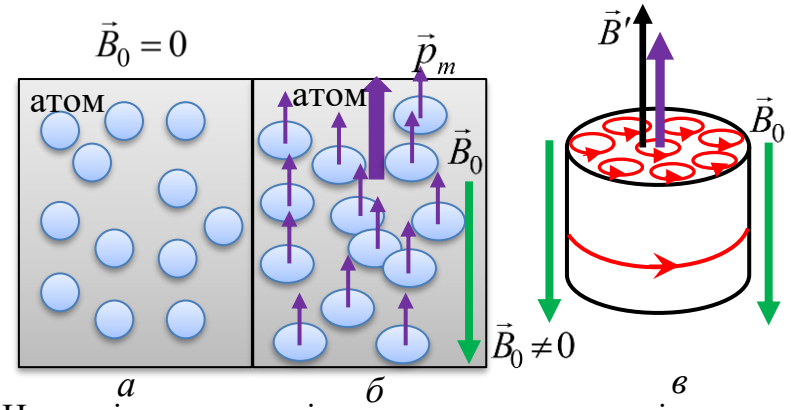
Для **вакууму (повітря) $\mu = 1$.** Тоді магнітна індукція поля у вакуумі (повітрі) $B_0 = \mu_0 H$.

Визначимо

$$\frac{B}{B_0} = \frac{\mu_0 \mu H}{\mu_0 H} = \mu. \qquad (3.153)$$

Отже, *відносна магнітна проникність* μ *речовини показує, в скільки разів модуль магнітної індукції* B *поля в речовині більший за модуль магнітної індукції* B_0 *поля у вакуумі.*

3.23.3. ДІАМАГНЕТИКИ



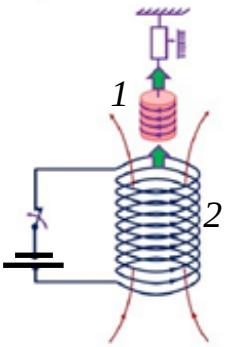
Намагнічування діамагнетика в зовнішньому магнітному полі індукцією $\vec{B}_0$

Рисунок. 3.65

Атоми й молекули деяких речовин не мають власного магнітного моменту (рисунок 3.65, *а*), але вони набувають його, коли речовина знаходиться в зовнішньому магнітному полі $\vec{B}_0$ (див. рис. 3.65, *б*). Набуті магнітні моменти атомів і молекул орієнтуються в напрямку, протилежному напрямку магнітної індукції $\vec{B}_0$ (див. рис. 3.65, *б*). Як результат речовина намагнічується в напрямку, протилежному напрямку $\vec{B}_0$: $\vec{J} \uparrow\downarrow \vec{B}_0$ $\left(\vec{J} \uparrow\downarrow \vec{H}\right)$ (див. рис. 3.65, *в*).

Такі речовини називаються **діамагнетиками.**

В діамагнетику зовнішнє магнітне поле послаблюється. Тому для діамагнетиків . $\chi_m < 0;\ \mu < 1$. Вони виштовхуються з області магнітного поля (рисунок 3.66). Діамагнітний ефект притаманний усім речовинам.

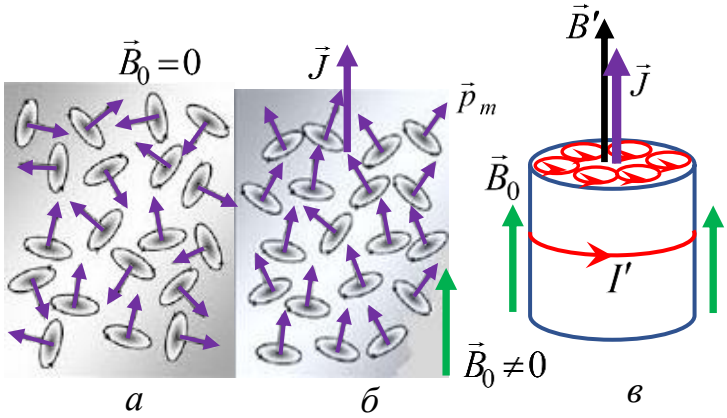


Виштовхування діамагнетика *1* з області магнітного поля, що створюється електромагнітом *2*

Рисунок 3.66

3.23.4. ПАРАМАГНЕТИКИ

Атоми й молекули деяких речовин мають власний магнітний момент $\vec{p}_m$ (рисунок 3.67, *а*). Існування цих моментів пояснюється в квантовій механіці. Коли речовина знаходиться в зовнішньому магнітному полі індукцією $\vec{B}_0$, тоді магнітні моменти орієнтуються вздовж силових ліній поля (див. рис. 3.67, *б*). Строгому впорядкуванню магнітних моментів перешкоджає тепловий рух молекул. Як результат речовина намагнічується в напрямку $\vec{B}_0$: $\vec{J} \uparrow\uparrow \vec{B}_0$ $\left(\vec{J} \uparrow\uparrow \vec{H}\right)$ (див. рис. 3.67, *в*).

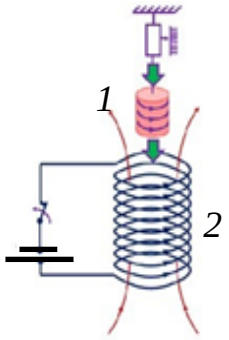


Намагнічування парамагнетика в зовнішньому магнітному полі індукцією $\vec{B}_0$

Рисунок 3.67

Такі речовини називаються **парамагнетиками.**

В парамагнетику зовнішнє магнітне поле незначно підсилюється. Тому для парамагнетиків $\chi_m > 0;\ \mu > 1$. Вони втягуються в область зовнішнього магнітного поля (рисунок 3.68).



Втягування парамагнетика *1* в область магнітного поля, що створене електромагнітом *2*.

Рисунок 3.68

3.23.5. ФЕРОМАГНЕТИКИ. НЕМОЖЛИВІСТЬ КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ МАГНЕТИЗМУ

В деяких речовинах — **феромагнетиках** — існують області розміром $\approx 1 \div 10$ мкм із самовільною (спонтанною) намагніченістю. Ці області називаються **доменами** (рисунок 3.69). Домени мають відмінний від нуля магнітний момент. За відсутності зовнішнього магнітного поля домени хаотично орієнтовані (див. рис. 3.69, *а*). При включенні зовнішнього магнітного поля домени, що орієнтовані по полю, зростають за рахунок доменів, що орієнтовані проти поля (див. рис. 3.69, *б*). В слабких магнітних полях такий процес має

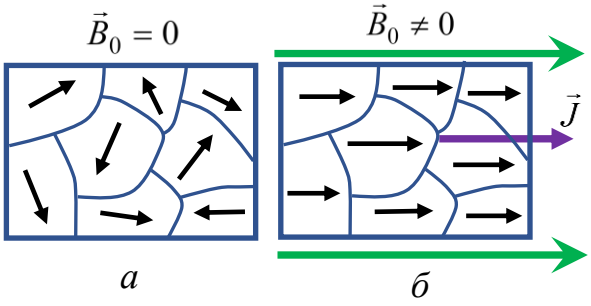


Рисунок 3.69

зворотний характер. В сильних магнітних полях відбувається одночасна переорієнтація магнітних моментів у межах всього зразка. Цей процес має незворотний характер. При нагріванні феромагнетика до температури $T \geq T_К$ (визначеної для кожного феромагнетика) його намагніченість зникає. **Температура $T_К$ називається температурою Кюрі.**

Отже, феромагнетик намагнічується вздовж магнітної індукції зовнішнього магнітного поля $\vec{B}_0$: $\vec{J} \uparrow\uparrow \vec{B}_0$ $\left(\vec{J} \uparrow\uparrow \vec{H}\right)$ (див. рис. 3.69, *б*).

Індукція B магнітного поля в феромагнетику значно (до кількох сотень тисяч) перевищує індукцію B_0 зовнішнього магнітного поля. Для феромагнетиків $\chi_m >> 1$; $\mu >> 1$.

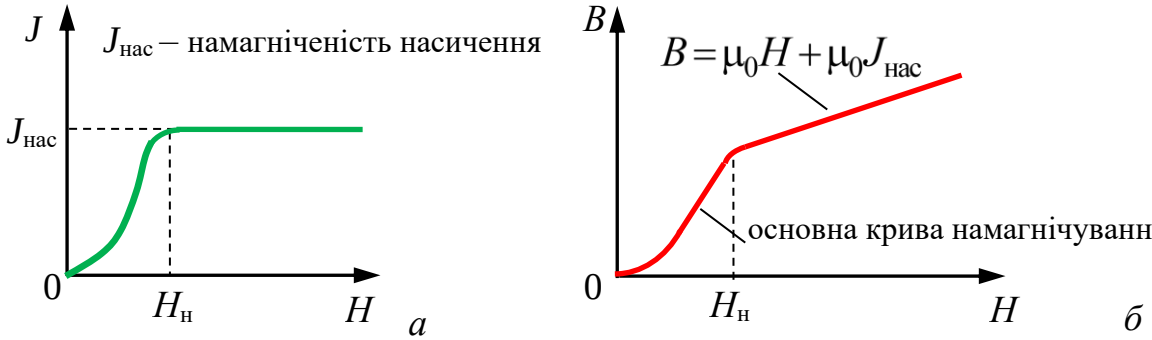


Рисунок 3.70

Характерна особливість феромагнетиків — складна нелінійна залежність $J = J\left(H\right)$ (рисунок 3.70, *а*) і $B = B\left(H\right)$ (рис. 3.70, *б*).

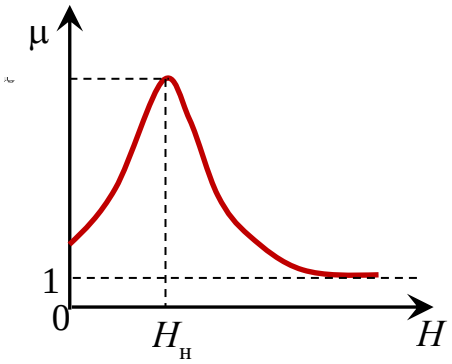


Рисунок 3.71

Відносна магнітна проникність μ феромагнетиків залежить від H (рисунок 3.71) і досягає максимуму при напруженості магнітного поля $H_н$, яка відповідає початку насичення намагніченості.

Значення μ змінюються в широких межах. Наприклад, для бездомішкового заліза $\mu_{max} = 5000$, а для сплаву супермалой $\mu_{max} = 800000$.

Поняття відносної магнітної проникності застосовують тільки для основної кривої намагнічування.

Феромагнетикам притаманне явище **гістерезису.** Зв'язок між J і H або B і H неоднозначний і визначається попередньою історією намагнічування феромагнетика (рисунок 3.72). Замкнена крива *1-2-3-4-5-6-1* називається **петлею гістерезису.**

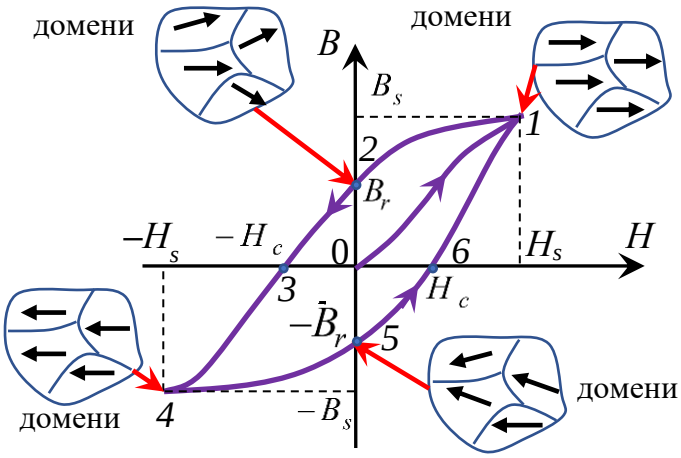


Рисунок 3.72

Величина B_r називається **остаточною індукцією.** З існуванням остаточного намагнічування зв'язано існування постійних магнітів.

Величина H_c називається **коерцитивною силою.** Вона визначає здатність феромагнетика до перемагнічування.

Значення B_r і H_c змінюються в широких межах для різних феромагнетиків. Залежно від значення H_c розрізняють магнітом'які матеріали ($H_c < 4\,\text{кА/м}$; вузька петля гістерезису) і магнітотверді матеріали ($H_c > 4\,\text{кА/м}$; широка петля гістерезису).

Рисунок 3.73

На особливостях кривих намагнічування базується спосіб розмагнічування феромагнетика. Намагнічений зразок поміщають в соленоїд (рисунок 3.73), по обмотці якого пропускають змінний струм. Амплітуду струму поступово зменшують до нуля. Феромагнетик підлягає багаторазовим перемагнічуванням; у кожному циклі петля гістерезису поступово зменшується, стягуючись в точку (рисунок 3.74).

НЕМОЖЛИВІСТЬ КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ МАГНЕТИЗМУ

В рамках класичної фізики неможливо надати строге несуперечливе, що узгоджується з сучасними даними про будову атомів і молекул, пояснення існування в низки атомів і молекул магнітного моменту й відсутності його в інших атомів і молекул, а також існування феромагнетизму.

Строга теорія магнетизму речовини була розроблена в квантовій механіці.

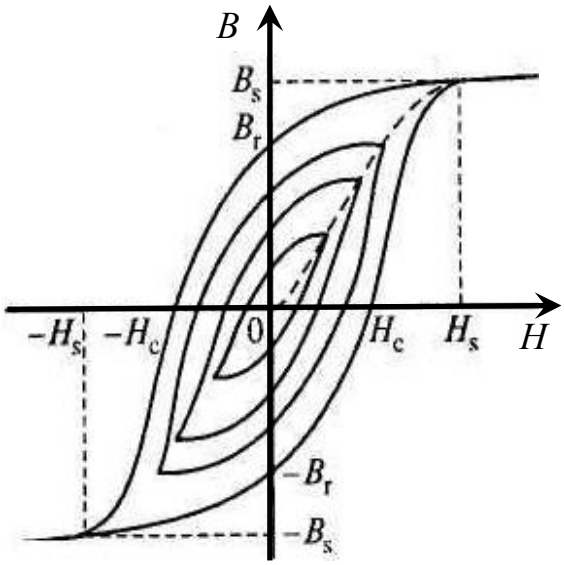


Рисунок 3.74

3.24. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 24

Маємо довгий соленоїд з осердям з електротехнічної сталі Е33ОА довжиною $l = 10$ см і радіусом $R = 1$ см. Обмотка соленоїда має 100 витків. В обмотці тече струм силою $I = 2$ А. Визначити індукцію магнітного поля в соленоїді та відносну магнітну проникність речовини осердя.

Аналіз

Модуль індукції B магнітного поля довгого соленоїда з осердям

$$B = \mu_0 \mu H, \qquad (1)$$

де μ_0 – магнітна стала; μ – відносна магнітна проникність речовини; H – напруженість магнітного поля.

Модуль напруженості магнітного поля соленоїда

$$H = nI, \qquad (2)$$

де n – лінійна щільність витків обмотки; I – сила струму в обмотці.

Лінійна щільність витків

$$n = \frac{N}{l}, \qquad (3)$$

де N – кількість витків обмотки; l – довжина соленоїда.

Тоді

$$H = \frac{NI}{l}. \qquad (4)$$

Електротехнічна сталь Е33ОА є феромагнетиком. Відносна магнітна проникність феромагнетика залежить від напруженості магнітного поля. Отже, для визначення магнітної індукції B необхідно використати експериментальну залежність або $B = f(H)$, або $\mu = f(H)$. Використаємо залежність $B = f(H)$ (рисунок 1).

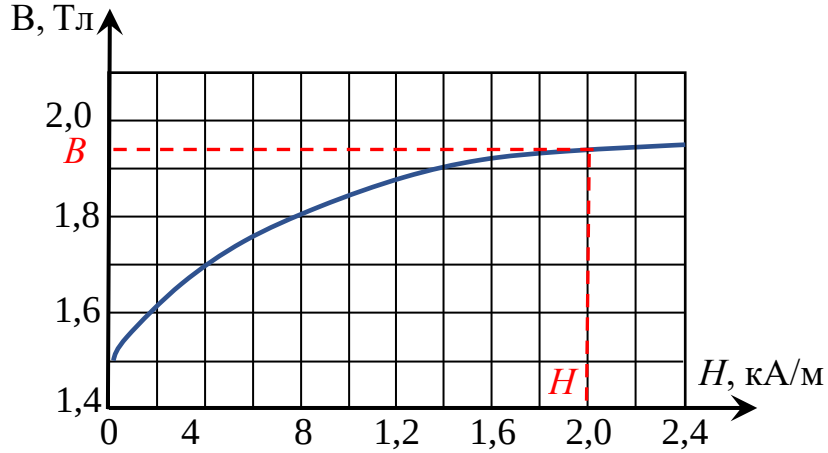


Рисунок 1

Розрахуємо H.

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$l = 10$ см	10^{-1} м	$H = \frac{10^2 \cdot 2}{10^{-1}} = 2 \cdot 10^3 \frac{\text{А}}{\text{м}} = 2 \frac{\text{кА}}{\text{м}}.$
$N = 100$		
$I = 2$ А		
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м		
$H - ?$		

За графіком $B = f(H)$ (див. рис. 1) визначаємо модуль магнітної індукції B: B = 1,94 Тл.

З формули (1) визначимо відносну магнітну проникність речовини

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}, \qquad (5)$$

$$\mu = \frac{1{,}94}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^3} = 0{,}0772 \cdot 10^4 = 772.$$

Відповідь: B = 1,94 Тл; μ = 772.

Примітка: Дані по залежностям $B = f(H)$ або $\mu = f(H)$ можна отримати зі спеціальної літератури по феромагнітних матеріалах, наприклад [4, 5].

3.25. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

Надайте приклади магнітної взаємодії. Як можна пояснити магнітну взаємодію?

Надайте визначення та одиниці магнітної індукції й напруженості магнітного поля.

Надайте визначення силових ліній магнітного поля. Надайте визначення однорідного магнітного поля. Наведіть приклад однорідного магнітного поля.

Надайте визначення сили Ампера й магнітної сили Лоренца.

Сформулюйте закон Біо-Савара-Лапласа й принцип суперпозиції магнітних полів.

Сформулюйте закон повного струму для вакууму й речовини.

Виведіть формулу для розрахунку магнітного поля прямого провідника зі струмом.

Опишіть магнітне поле колового струму. Виведіть формулу для розрахунку індукції магнітного поля в центрі колового контуру зі струмом.

Опишіть магнітне поле довгого соленоїда. Виведіть формулу для розрахунку індукції магнітного поля довгого соленоїда.

Надайте визначення магнітного потоку.

Сформулюйте теорему Гаусса для магнітного поля у вакуумі й речовині.

Виведіть формулу для розрахунку роботи магнітного поля при переміщенні контуру з постійним струмом.

Надайте визначення й одиницю магнітного моменту контуру з постійним струмом.

Надайте визначення намагніченості речовини.

Які речовини належать до діамагнетиків, парамагнетиків?

Які речовини належать до феромагнетиків? Надайте визначення температури Кюрі.

Опишіть явище гістерезису. Наведіть приклади використання гістерезису.

Який фізичний зміст має відносна магнітна проникність речовини?

3.26. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Плоска прямокутна котушка з 300 витків зі сторонами 10 см і 5 см знаходиться в однорідному магнітному полі індукцією 0,01 Тл. Визначити максимальний обертаючий момент, який може діяти на котушку, коли в ній тече струм силою 3 А.

Відповідь: M_{max} = 45 мН·м.

2. В горизонтальному однорідному магнітному полі індукцією 10 мТл перпендикулярно до силових ліній розташований прямий мідний провідник, по якому тече постійний струм силою 10 А. Провідник знаходиться в стані рівноваги. Визначити діаметр d дроту. Густина міді $8{,}96 \cdot 10^3$ кг/м^3. Прискорення вільного падіння прийняти 10 м/с^2.

Відповідь: d = 1,2 мм.

3. Протон влетів в однорідне магнітне поле зі швидкістю v = 1 Мм/с перпендикулярно до силових ліній. Індукція магнітного поля 0,5 Тл. Визначити радіус траєкторії й період обертання протона. Маса протона $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг, заряд протона $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Відповідь: R = 2 см; T = 131 нс.

4. Заряджена частинка влетіла в середовище, в якому існує однорідне магнітне поле. Швидкість частинки перпендикулярна до силових ліній поля. При гальмуванні в середовищі частинка, перебуваючи в межах поля, пройшла деякий шлях і втратила половину своєї кінетичної енергії. У скільки разів радіус R_1 траєкторії частинки на початку гальмування буде перевищувати радіус R_2 її траєкторії наприкінці шляху?

Відповідь: У $\sqrt{2}$ разів.

5. Електрон влітає в область однорідних магнітного й електричного полів, силові лінії яких взаємно перпендикулярні, зі швидкістю v = 5 Мм/с перпендикулярно до силових ліній полів. Напруженість електричного поля E = 10 кВ/м. Визначити індукцію магнітного поля.

Відповідь: B = 2 мТл.

6. В двох прямих нескінченно довгих паралельних провідниках у протилежних напрямках течуть постійні струми силами I_1 = 4 А, I_2 = 7 А. Відстань між провідниками 12 см. Провідники знаходяться в повітрі. Визначити магнітну індукцію B результівного магнітного поля в точці M, яка знаходиться

поза першим провідником на відстані $d = 2$ см від нього на лінії, що перпендикулярна до провідників.

Відповідь: 30 мкТл.

7. В двох прямих нескінченно довгих паралельних провідниках в одному напрямку течуть постійні струми силами $I_1 = 5$ мА, $I_2 = 15$ мА. Відстань між провідниками $a = 10$ см. Провідники знаходяться в вакуумі. На якій відстані від першого провідника знаходиться точка M, в якій індукція B магнітного поля дорівнює нулю?

Відповідь: $x = 2{,}5$ см.

8. В квадратній рамці з тонкого дроту тече струм силою 6 А. Сторона рамки 30 см. Визначити напруженість магнітного поля в точці перетину діагоналей.

Відповідь: $H = 18$ А/м.

9. Визначити напруженість магнітного поля в центрі тонкого кільця радіусом 5 см, в якому тече струм силою 5 А.

Відповідь: $H = 50$ А/м.

10. Коловий контур із постійним струмом розташований перпендикулярно до прямого нескінченно довгого провідника з постійним струмом. Радіус контуру $R = 1$ см. Сили струмів $I_1 = 4$ А, $I_2 = 9\pi$ А, Відстань від провідника до центра кільця 3 см. Провідники знаходяться у вакуумі. Визначити магнітну індукцію B в центрі кільця для напрямків струмів, що задані на рисунку 1. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Відповідь надати як B/π.

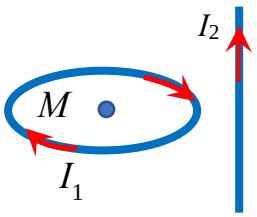


Рисунок 1

Відповідь: $B/\pi = 100$ мкТл.

11. Потрібно отримати напруженість магнітного поля $H = 1$кА/м у соленоїді довжиною $l = 20$ см і діаметром $D = 5$ см. Визначити кількість ампер-витків IN, необхідну для такого соленоїда, і різницю потенціалів U, яку треба прикласти до кінців обмотки, що виготовлена з мідного дроту діаметром 0,5 мм. Вважати соленоїд довгим. Питомий електричний опір міді $\rho = 1{,}75 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Відповідь: $IN = 200$ А-в, $U = 2{,}8$ В.

12. В однорідному магнітному полі індукцією 45 мкТл розташована колова рамка, площина якої утворює з силовими лініями магнітного поля кут $\alpha = 30°$. Радіус рамки 5 см. Визначити магнітний потік крізь рамку.

Відповідь: Ф = 0,177 мкВб.

13. Колова рамка радіусом 5 см, в якій тече струм силою 20 А, вільно підвішена в однорідному магнітному полі індукцією 0,016 Тл. Визначити роботу, яку треба виконати, щоб повернути її на кут 90^{o} навколо осі, яка збігається з діаметром.

Відповідь: $A' = 2{,}51$ мДж.

14. Прямий провідник довжиною 20 см розташований горизонтально в однорідному вертикальному магнітному полі індукцією $B = 5$ Тл. Кінці провідника замкнені гнучким дротом, який знаходиться поза полем. Опір всього кола $R = 0{,}4$ Ом. Визначити потужність P, яка потрібна для того, щоб провідник рухався перпендикулярно силовим лініям зі швидкістю $v = 10$ м/с.

Відповідь:250 Вт.

15. Всередині соленоїда без осердя індукція магнітного поля 2 мТл. Визначити магнітний потік крізь соленоїд, коли в нього введене сталеве осердя, площа поперечного перетину 50 $см^2$. Використати рис. 1 задачі 25.

Відповідь:Ф = 9,6 мВб.

Розділ 4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ

4.1. ЯВИЩЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ІНДУКЦІЇ. ДОСЛІДИ ФАРАДЕЯ. ПРАВИЛО ЛЕНЦА. ЗАКОН ФАРАДЕЯ

Явище електромагнітної індукції полягає в тому, що в замкненому провідному контурі виникає електричний струм при зміні магнітного потоку крізь контур.

Цей струм називається індукційним.

Індукційний струм у контурі існує тільки під час зміни магнітного потоку крізь контур.

Поява струму в контурі означає, що при зміні магнітного потоку крізь контур у ньому виникає електрорушійна сила (Е.Р.С.). Ця Е.Р.С. називається **Е.Р.С. індукції** $\mathscr{E}_i$.

Явище електромагнітної індукції було відкрите й досліджене *англійським вченим М. Фарадеєм* у 1831 р. Схема дослідів Фарадея наведена на рисунку 4.1. *Експериментальна установка* складається з двох частин: частини, яка слугує для створення магнітного поля й частини, яка слугує для реєстрації електричного струму й вимірювання його сили. До складу *першої частини* входять: котушка індуктивності (соленоїд) *К*, в обмотці якої тече постійний електричний струм силою *I*; джерело постійного струму $\mathscr{E}$; реостат *R*, за допомогою якого можна змінювати силу струму в колі. *Друга частина* складається з провідної рамки *P* для реєстрації індукційного струму й гальванометра *G* для вимірювання сили цього струму.

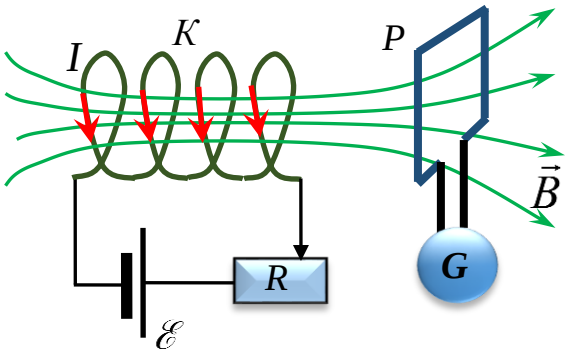


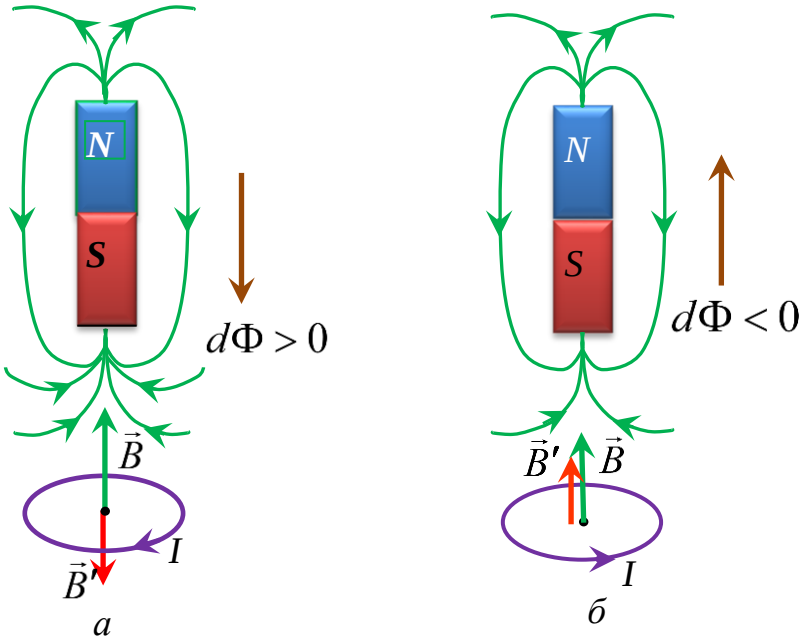
Рисунок 4.1

Фарадей встановив, що **індукційний струм у провідній рамці** *P* можна отримати двома способами:

- переміщенням рамки *P* (або її частин) у магнітному полі нерухомої котушки *К*;
- зміною магнітної індукції $\vec{B}$ поля, в якому знаходиться рамка: за рахунок руху котушки *К* або внаслідок зміни сили струму *I* в ній.

Напрямок індукційного струму визначається за правилом, яке було сформульоване *Е. Ленцем.*

Правило Ленца: індукційний струм у контурі завжди має такий напрямок, щоб магнітний потік, який він створює, **перешкоджав зміні магнітного потоку**, що викликала цей струм (рисунок 4.2).



Постійний магніт, що рухається відносно нерухомого провідного замкненого контуру: ***а*** – магніт наближається до контуру — магнітний потік крізь контур зростає, тому індукційний струм I має такий напрямок, щоб магнітний потік, що створює його магнітне поле, перешкоджав зростанню магнітного потоку, що створюється зовнішнім магнітним полем; ***б*** – магніт віддаляється від контуру — магнітний потік крізь контур зменшується, тому індукційний струм I має такий напрямок, щоб магнітний потік, що створює його магнітне поле, перешкоджав зменшенню магнітного потоку, що створюється зовнішнім магнітним полем

Рисунок 4.2

Е.Р.С. індукції $\mathscr{E}_i$ визначається за **законом електромагнітної індукції (законом Фарадея)**

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (4.1)$$

де $\frac{d\Phi}{dt}$ – швидкість зміни магнітного потоку; знак «–» є математичним відображенням правила Ленца.

Середня Е.Р.С. індукції $\langle \mathscr{E}_i \rangle$, яка виникає в замкненому провідному контурі за інтервал часу Δt

$$\boxed{\langle \mathscr{E}_i \rangle = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}}, \qquad (4.2)$$

де $\Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ – приріст магнітного потоку за інтервал часу $\Delta t = t_2 - t_1$: Φ_1 – магнітний потік крізь контур в початковий момент часу t_1; Φ_2 – магнітний потік крізь контур в кінцевий момент часу t_2.

Якщо **замкнений контур складається з *N* витків**, то

$$\boxed{\mathscr{E}_i = -\frac{N d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}}, \qquad (4.3)$$

де

$$\boxed{\Psi = N\Phi} \qquad (4.4)$$

– **потокозчеплення контуру** – магнітний потік через всі *N* витків контуру.

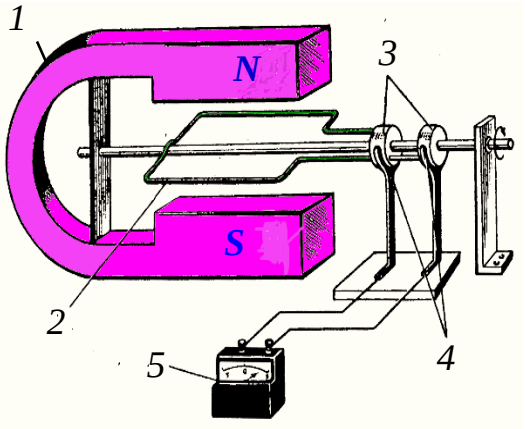
В СІ $[\Psi]$ = Вб (вебер). $\text{Вб} = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{с}^2}$.

Розмірність потокозчеплення $\dim\Psi = MT^{-2}I^{-1}L^2$.

4.2. ГЕНЕРАТОР ЗМІННОГО СТРУМУ

Дія генератора змінного струму (рисунок 4.3) *базується на використанні явища електромагнітної індукції.*

При рівномірному обертанні багатовиткової провідної рамки *2* в магнітному полі, що створюється постійним магнітом *1*, в ній виникає змінна Е.Р.С. індукції. Кінці рамки підключаються до ізольованих мідних кілець *3* — контактних кілець, що закріплені на осі машини й за допомогою притискних провідників (щіток) із міді або графіту *4* можуть бути підключені



Принципова схема генератора змінного струму: *1* – постійний магніт; *2* – провідна рамка; *3* – контактні кільця; *4* – щітки; *5* – вимірювальний прилад

Рисунок 4.3

в зовнішнє електричне коло без порушення обертання рамки.

Потокозчеплення Ψ рамки при рівномірному обертанні змінюється з часом t за законом

$$\Psi = N\Phi = N\Phi_m \cos\alpha = NBS\cos\alpha = NBS\cos(\omega t) = NBS\cos(2\pi\nu t), \qquad (4.5)$$

де N – кількість витків; Φ – магнітний потік крізь один виток; Φ_m – амплітуда магнітного потоку; B – модуль магнітної індукції; S – площа витка; α – кут між нормаллю $\vec{n}$ до витка й магнітною індукцією; ω – кутова швидкість, ν – частота обертання рамки.

Тоді **Е.Р.С. індукції**

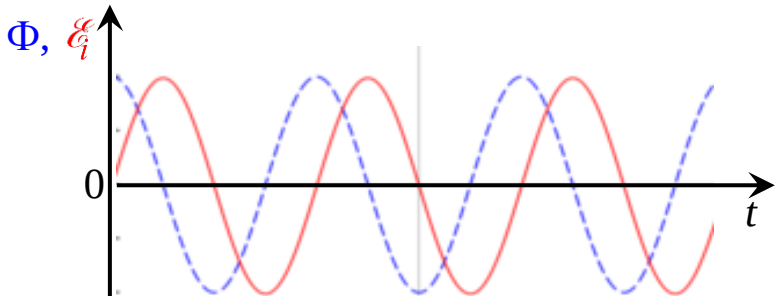
$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = NBS\omega\sin(\omega t) = \mathscr{E}_{im}\sin(\omega t), \qquad (4.6)$$

де $\mathscr{E}_{im} = NBS\omega = 2\pi\nu NBS$ – **амплітуда Е.Р.С. індукції.**

Зазначимо, що між потокозчепленням й Е.Р.С. індукції існує різниця фаз. Напишемо Е.Р.С. індукції, використавши функцію cosωt,

$$\mathscr{E}_i = \mathscr{E}_{im}\sin(\omega t) = \mathscr{E}_{im}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (4.7)$$

Побудуємо графіки $\Phi = BS\cos(\omega t)$ і $\mathscr{E}_i = \mathscr{E}_{im}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ (рисунок 4.4). З рис. випливає, коли магнітний потік крізь виток досягає максимуму Φ = Φ_m, тоді $\mathscr{E}_i = 0;$; а коли Φ = 0, тоді $\mathscr{E}_i = \mathscr{E}_{im}$.

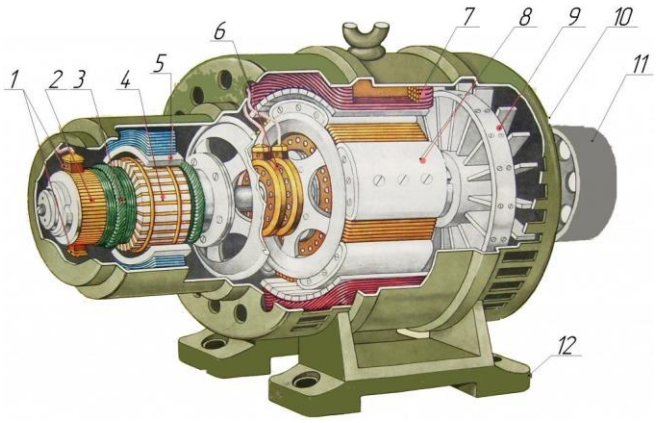


Графіки залежностей $\Phi = BS\cos(\omega t)$ – – –; $\mathscr{E}_i = \mathscr{E}_{im}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ ——

Рисунок 4.4

Підвищення амплітуди Е.Р.С. індукції можливе за рахунок збільшення амплітуди потокозчеплення $\Psi_m = NBS$ (кількості витків N, площі витка S, значення магнітної індукції поля B) і частоти ν обертання рамки. Збільшення

площі витка та кількості витків економічно доцільне в певних межах. Тому з метою збільшення значення магнітної індукції магнітну систему генератора виконують із залізних осердь (рисунок 4.5): зовнішнього кільцеподібного осердя (*статора*) та внутрішнього циліндричного осердя, що обертається (*ротора*). Генератор має, зазвичай, дві обмотки: одна міститься в пазах статора з внутрішньої сторони й слугує для створення магнітного потоку; інша — в пазах ротора; в ній індукується змінна Е.Р.С.



Генератор змінного струму: *1* – щітки й щіткотримачі; *2* – колектор; *3* – обмотка якоря; *4* – якір; *5* – статор; *6* – контактні кільця; *7* – обмотка статора; *8* – ротор; *9* – вентилятор; *10* – корпус генератора; *11* – привод; *12* – станина
https://ignispower.com.ua/novyny/generator-peremennogo-toka-ustrojstvo-osobennosti-i-primenenie/

Рисунок 4.5

Генераторам змінного струму властива зворотність: вони можуть також використовуватись як **електродвигуни** — пристрої, що перетворюють електричну енергію в механічну енергію. *Двигуни такого типу називаються синхронними.*

4.3. ЯВИЩЕ САМОІНДУКЦІЇ. ІНДУКТИВНІСТЬ. ІНДУКТИВНІСТЬ ДОВГОГО СОЛЕНОЇДА. ЯВИЩЕ ВЗАЄМНОЇ ІНДУКЦІЇ. ВЗАЄМНА ІНДУКТИВНІСТЬ

ЯВИЩЕ САМОІНДУКЦІЇ

полягає в тому, що зміна сили струму I в контурі викликає появу індукційного струму силою I_i в тому ж контурі.

Цей струм називається екстраструмом.

Напрямок **індукційного струму визначається за правилом Ленца.**

Поява індукційного струму I_i в контурі означає, що при зміні сили струму I в контурі, в ньому виникає електрорушійна сила, яка називається **Е.Р.С. самоіндукції** $\mathscr{E}_{si}$.

Розглянемо контур зі струмом, який має N *витків* — котушку (рисунок 4.6).

Потокозчеплення контуру

$$\Psi = N\Phi, \tag{4.8}$$

де Ф – магнітний потік крізь один виток.

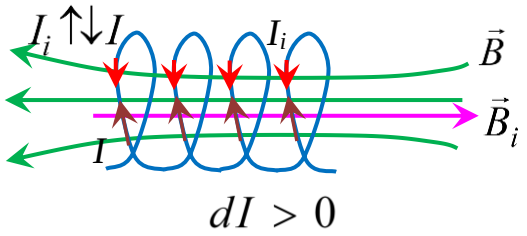
Оскільки $\Phi \sim B \sim I$, то $\Psi \sim I$. Отже, можна написати

$$\Psi = LI, \tag{4.9}$$

де L – **індуктивність контуру.**

В СІ $[L] = \text{Гн}$ (генрі). Розмірність індуктивності $\dim L = ML^2T^{-2}I^{-2}$.

Індуктивність контуру залежить від його форми й розмірів, а також від властивостей зовнішнього середовища.



Котушка, по якій тече струм, сила *I* якого зростає з часом: індукційний струм силою I_i має такий напрямок, щоб магнітний потік крізь котушку, створений його магнітним полем (індукцією $\vec{B}_i$), перешкоджав зростанню магнітного потоку крізь котушку, створеного полем (індукцією $\vec{B}$) струму силою I

Рисунок 4.6

Тоді **Е.Р.С. самоіндукції**

$$\boxed{\mathscr{E}_{si} = -\frac{d\Psi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}} \tag{4.10}$$

Визначимо **ІНДУКТИВНІСТЬ ДОВГОГО СОЛЕНОЇДА З ОСЕРДЯМ** (рисунок 4.7).

Нехай в обмотці одношарового довгого соленоїда з осердям тече струм силою I. Магнітну індукцію $\vec{B}$ поля всередині соленоїда можна вважати постійною у всіх точках соленоїда, тобто магнітне поле однорідне. Тоді

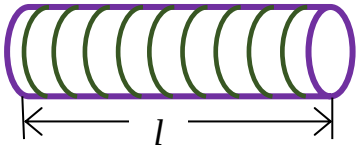


Рисунок 4.7

$$B = \mu_0 \mu n I = \frac{\mu_0 \mu N I}{l}, \qquad (4.11)$$

де μ_0 – магнітна стала; N – кількість витків обмотки; l – довжина соленоїда; n – лінійна щільність витків; μ – відносна магнітна проникність осердя соленоїда.

Потокозчеплення соленоїда

$$\Psi = N\Phi = BSN = \frac{\mu_0 \mu N^2 S I}{l}. \qquad (4.12)$$

Порівнявши формули (4.9) і (4.12), отримуємо формулу для **індуктивності довгого соленоїда з осердям**

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l} = \mu_0 \mu n^2 S l = \mu_0 \mu n^2 V}, \qquad (4.13)$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна стала; μ – відносна магнітна проникність осердя соленоїда (для соленоїда без осердя $\mu = 1$); N – кількість витків обмотки; S – площа поперечного перетину, l – довжина соленоїда; n – лінійна щільність витків; V – об'єм соленоїда.

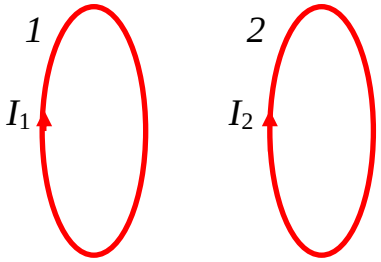
Рисунок 4.8

На електричних схемах котушка індуктивності (соленоїд) позначається як показано на рисунку 4.8.

ЯВИЩЕ ВЗАЄМНОЇ ІНДУКЦІЇ

Розглянемо два нерухомих контури зі струмами, які розташовані близько один до іншого (рисунок 4.9).

ЯВИЩЕ ВЗАЄМНОЇ ІНДУКЦІЇ полягає в тому, що при зміні сили струму в одному з контурів в іншому контурі виникає Е.Р.С. індукції.



Індуктивно зв'язані контури: I_1 і I_2 – сила струмів у контурах

Рисунок 4.9

При зміні сили струму I_1 в контурі *1* в контурі *2* виникає Е.Р.С. індукції

$$\boxed{\mathscr{E}_2 = -M_{12}\frac{dI_1}{dt}}, \qquad (4.14)$$

при зміні сили струму I_2 в контурі *2* в контурі *1* виникає Е.Р.С. індукції

$$\boxed{\mathscr{E}_1 = -M_{21}\frac{dI_2}{dt}}, \qquad (4.15)$$

де M_{12} і M_{21} – **взаємна індуктивність контурів у першому й другому випадках** відповідно.

За відсутності феромагнетиків

$$\boxed{M_{12} = M_{21} = M}. \qquad (4.16)$$

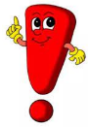
В СІ $[M] =$ Гн (генрі).

Взаємна індуктивність *залежить від форми й розмірів контурів, а також від властивостей зовнішнього середовища.*

4.4. ТРАНСФОРМАТОР

Трансформатор — *пристрій, призначений для перетворення (збільшення або зменшення) змінної напруги або сили змінного струму без зміни їхньої частоти.*

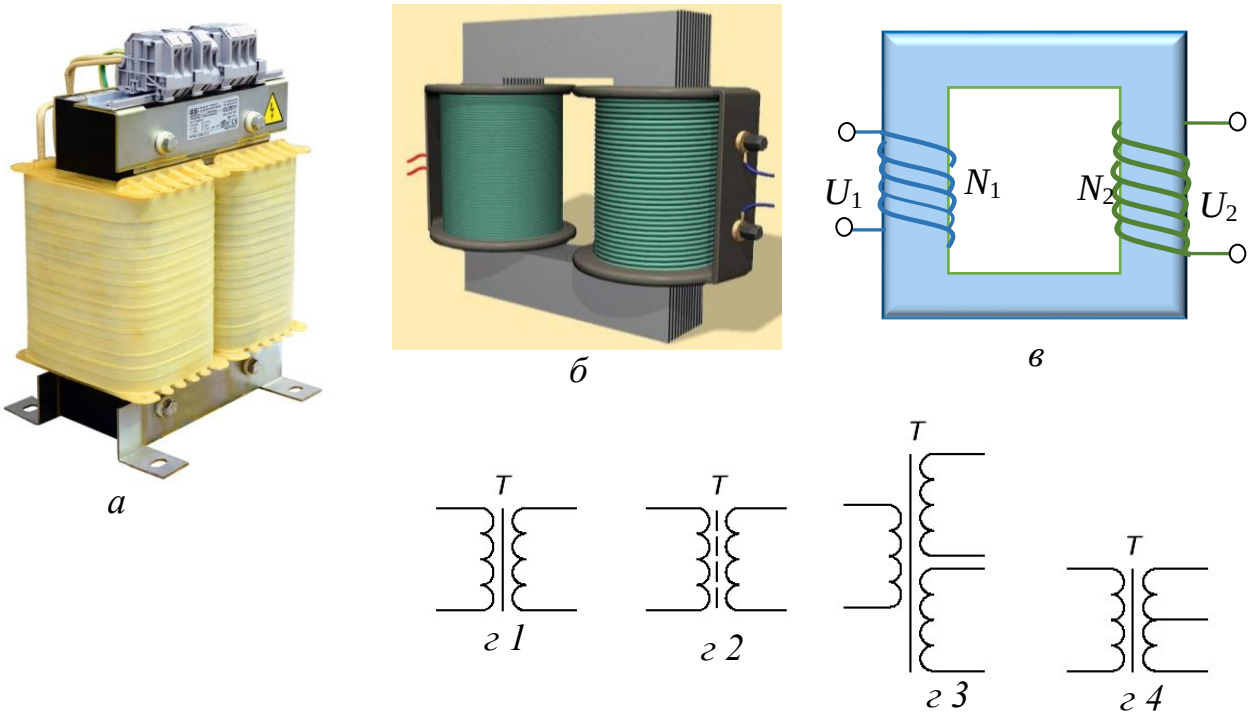
Основний складник трансформатора — **магнітопровід** (або **осердя)** з магнітом'якого матеріалу з високою відносною магнітною проникністю. Магнітопровід (зазвичай замкненої форми) має **дві електрично ізольовані одна від іншої обмотки**: первинну обмотку з кількістю витків N_1 і вторинну — з кількістю витків N_2 (рисунок 4.10). Він набірний: складається з системи пластин з основного матеріалу, які розділені тонким шаром діелектрика (наприклад, лаку). Така конструкція магнітопроводу забезпечує значне зменшення сили вихрових струмів (див. підрозділ 5.2) і, отже, втрат енергії в трансформаторі.



Магнітопровід — *деталь або комплект деталей, призначених для проходження і локалізації магнітного потоку, створеного змінним магнітним полем електричного струму, що тече в обмотках пристроїв, до складу яких входить магнітопровід.*

Для зменшення ***магнітного опору*** *магнітопровід виготовляється зі спеціальної електротехнічної сталі. Тороїдальне осердя може бути виготовлене з фериту або карбонільного заліза.*

Окрім трансформаторів, магнітопроводи використовуються як складники дроселів, пускачів, контакторів, магнітних головок, фільтрів, електричних машин (генераторів, електродвигунів) тощо.



Трансформатор: ***а*** – фото трансформатора; ***б, в*** – зображення трансформатора; ***г*** – умовне позначення трансформатора на електричних схемах: *г 1* – трансформатор із феритовим осердям; *г 2* – трансформатор з осердям із магнітодіелектрика; *г 3* – трансформатор із феритовим осердям та з двома вторинними обмотками; *г 4* – трансформатор із феритовим осердям та з відводами від вторинної обмотки

Рисунок 4.10

Магнітний опір *— характеристика магнітного кола, яка зв'язана зі здатністю речовини змінювати свій електричний опір у магнітному полі.*

Дія трансформатора базується *на явищі взаємної індукції*. На первинну обмотку подається вхідна змінна напруга U_1. Змінний струм в обмотці створює змінне магнітне поле в магнітопроводі. Змінний магнітний потік крізь другу обмотку індукує в ній змінний струм — індукційний струм. Е.Р.С., що виникає в другій обмотці, пропорційна кількості витків N_2 в ній. Тому, змінюючи кількість витків N_2, можна в широких межах змінювати вихідну напругу U_2.

Трансформатор характеризується **коефіцієнтом трансформації** K, який показує в скільки разів напруга U_2 більша за напругу U_1 в режимі холостого ходу (вторинна обмотка розімкнута)

$$K = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}. \qquad (4.17)$$

Коефіцієнт корисної дії сучасних трансформаторів, особливо підвищеної потужності, вельми високий і досягає значень 0,95…0,996.

ВИДИ ТРАНСФОРМАТОРІВ

Силовий трансформатор (рисунок 4.11) — пристрій для передачі й розподілу електричної енергії. Він перетворює напругу й струм на вході в напругу й струм потрібних значень на виході. Силові трансформатори використовуються в електричних мережах, промислових установках, а також на електростанціях.

Рисунок 4.11

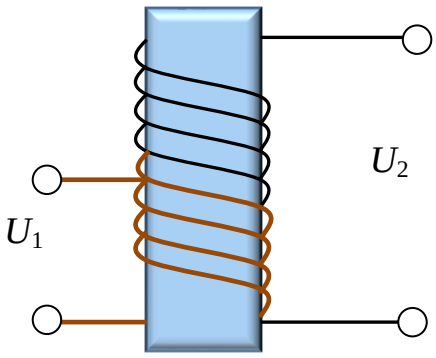


Рисунок 4.12

Автотрансформатор — трансформатор (рисунок 4.12), в якому дві чи більше обмоток з'єднані електрично. Він виконує функції звичайного трансформатора, але з меншою кількістю обмоток. Завдяки своїй конструкції, автотрансформатори мають вищий коефіцієнт корисної дії й нижчу вартість порівняно з силовими трансформаторами. Однак, вони мають обмежену потужність і схильні до короткого замикання.

Підвищувальний трансформатор — трансформатор, що збільшує напругу на виході порівняно з напругою на вході (рисунок 4.13). Він використовується в системах передачі енергії на великі відстані для зменшення втрат потужності в лінії.

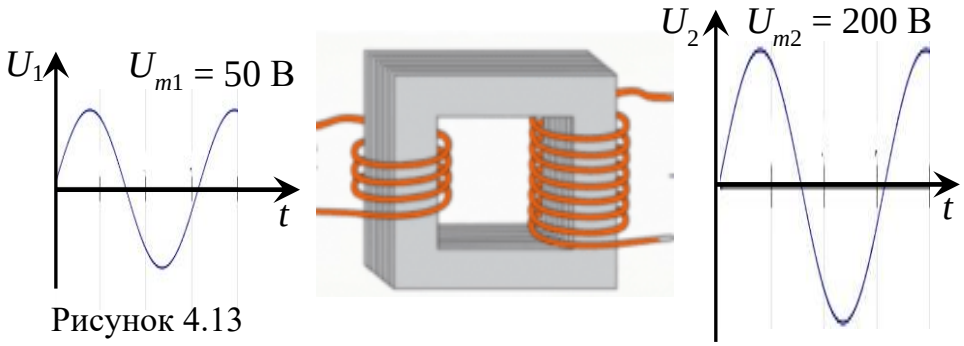


Рисунок 4.13

Понижувальний трансформатор — трансформатор, що зменшує напругу на виході відносно напруги на вході (рисунок 4.14). Понижувальні трансформатори широко використовуються в побутових приладах, джерелах живлення пристроїв *тощо*, де необхідно зменшити високу напругу мережі до нижчого значення.

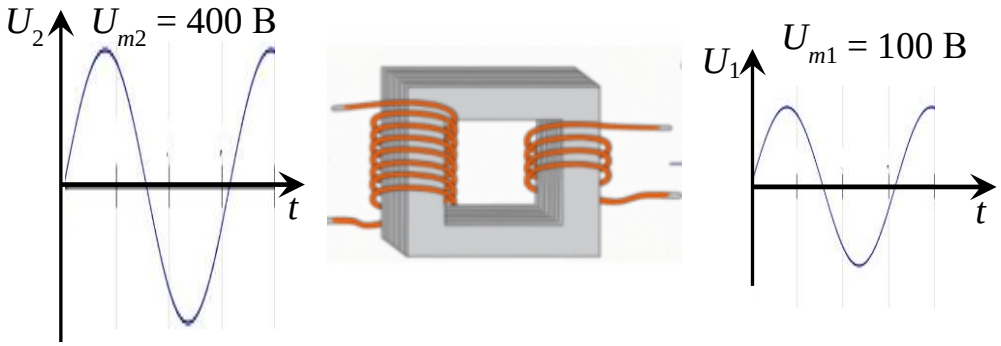


Рисунок 4.14

Тороїдальний трансформатор — силовий трансформатор, який має форму тора (рисунок 4.15). Така форма забезпечує менші втрати на вихрові струми та більш високу ефективність порівняно з трансформаторами з осердями прямокутної форми. Тороїдальні трансформатори зазвичай використовуються в джерелах живлення для аудіо- та відеообладнання, а також для радіоаматорських застосунків.

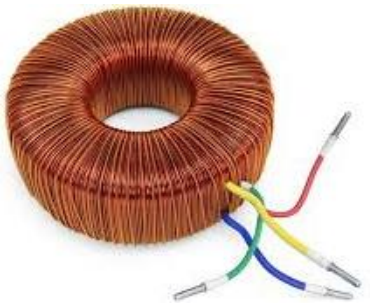


Рисунок 4.15

Багатообмотковий трансформатор — це різновид силового трансформатора, який має декілька обмоток на одному осерді. Кількість обмоток може варіюватися від двох до кількох десятків. Кожна обмотка має свою функцію й призначення: одна обмотка може забезпечувати живлення пристрою, друга — виконувати функцію заземлення, третя — забезпечувати захист від перевищення напруги *тощо*.

Трифазний трансформатор — трансформатор із трьома первинними й вторинними обмотками, що зв’язані між собою за схемою «зірка» або «трикутник». Трифазні трансформатори використовуються в трифазних електричних мережах для перетворення напруги й струму між різними рівнями напруги.

Імпульсний трансформатор — особливий різновид трансформатора, який перетворює короткі імпульси напруги в довші й потужніші. Він використовується в пристроях, де необхідне швидке й точне перетворення рівня сигналу. Це імпульсні джерела живлення, системи керування й телекомунікаційне обладнання.

Розділовий трансформатор — спеціальний різновид силового трансформатора, який використовується для розділення електричного й заземлювального ланцюгів з метою безпеки. Він забезпечує ізоляцію між ланцюгами та запобігає поразці електричним струмом у випадку короткого замикання. Розділові трансформатори зазвичай використовуються в медичних установах, лабораторіях та інших місцях, де потребується високий ступінь безпеки.

4.5. ВЛАСНА ЕНЕРГІЯ СТРУМУ. ЕНЕРГІЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ

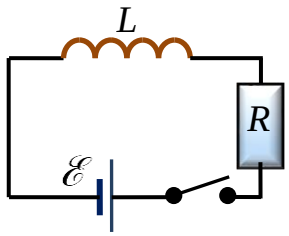
Замкнемо електричне коло (рисунок 4.16), яке містить котушку індуктивністю L, реостат опором R і джерело струму з Е.Р.С. $\mathscr{E}$. В контурі виникає Е.Р.С. самоіндукції $\mathscr{E}_{si}$.

За законом Ома

$$RI = \mathscr{E} + \mathscr{E}_{si}. \tag{4.18}$$

Звідси

$$\mathscr{E} = RI - \mathscr{E}_{si}. \tag{4.19}$$



Коло з котушкою L, резистором R і джерелом постійного струму $\mathscr{E}$

Рисунок 4.16

Елементарна робота δA, що виконується сторонніми силами за нескінченно малий інтервал часу dt

$$\delta A = \mathscr{E} Idt = RI^2 dt - \mathscr{E}_{si} Idt. \tag{4.20}$$

Врахувавши, що $\delta Q = RI^2 dt$ (джоулева теплота) й Е.Р.С. самоіндукції $\mathscr{E}_{si} = -\dfrac{d\Psi}{dt}$, отримуємо

$$\delta A = \delta Q + Id\Psi, \tag{4.21}$$

де $Id\Psi$ визначає додаткову роботу $\delta A^{д}$, що виконується сторонніми силами проти Е.Р.С. самоіндукції при встановленні струму

$$Id\Psi = A^{д}. \tag{4.22}$$

За відсутності феромагнетиків

$$d\Psi = LdI, \tag{4.23}$$

тоді

$$\delta A^{д} = LIdI \tag{4.24}$$

і робота $A^{д}$

$$A^{д} = \int_0^I \delta A^{д} = \int_0^I LIdI = = \frac{LI^2}{2}. \tag{4.25}$$

З появою Е.Р.С. самоіндукції зв'язана поява індукційного струму й відповідно магнітного поля. Згідно з законом збереження енергії за рахунок роботи $A^{д}$ зростає енергія магнітного поля.

Отже, за відсутності феромагнетиків контур з індуктивністю L, по якому тече струм силою I, має енергію

$$\boxed{W_{м} = \frac{LI^2}{2}}. \tag{4.26}$$

Ця енергія називається **магнітною енергією струму** або **власною енергією струму.**

ЕНЕРГІЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ

Розглянемо довгий соленоїд. За формулою (4.13) його індуктивність $L = \mu_0 \mu n^2 V$. Підставивши цей вираз у формулу (4.26), отримуємо

$$W_{м} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu n^2 V I^2}{2}. \tag{4.27}$$

Оскільки $B = \mu\mu_0 nI$ й $H = nI$, то

$$W_{м} = \frac{BH}{2} V = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} V. \tag{4.28}$$

Ця формула справедлива для однорідного магнітного поля, що займає об'єм V. В загальному випадку

$$W_{м} = \int_V \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} dV. \tag{4.29}$$

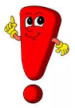
Об'ємна густина енергії магнітного поля — енергія магнітного поля, що міститься в одиниці об'єму,

$$w_{\text{м}} = \frac{dW_{\text{м}}}{dV} = \frac{\vec{B}\cdot\vec{H}}{2}. \qquad (4.30)$$

В СІ $\left[w_{\text{м}}\right] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$. Розмірність $w_{\text{м}}$ $\dim w_{\text{м}} = ML^{-1}T^{-2}$.

4.6. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ *L-R* КОЛІ

Розглянемо процеси, що відбуваються в електричному колі, яке містить джерело постійного струму та котушку індуктивністю L й опором R, при замиканні й розмиканні кола. З огляду на те, що опір з'єднувальних дротів та внутрішній опір джерела живлення, зазвичай, набагато менші за опір обмотки котушки, надалі ними будемо нехтувати.

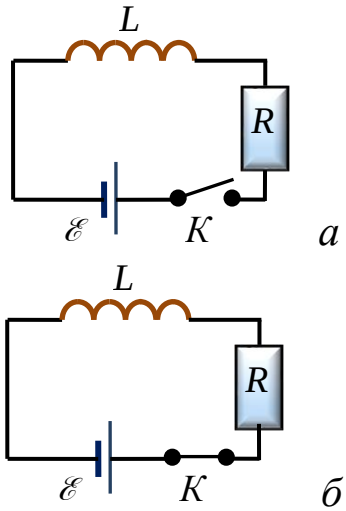


В загальному випадку до опору R входить також опір резистора, який може бути складником електричного кола.

ЗАМИКАННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА

В момент $t = 0$ замкнемо електричне коло за допомогою ключа K (рисунок 4.17). Сила струму в колі буде зростати й у котушці з'явиться Е.Р.С. самоіндукції $\mathscr{E}_{si}$, яка перешкоджатиме цьому зростанню.

За законом Ома для замкненого кола



Електричне коло: L – котушка, R – опір котушки; $\mathscr{E}$ – джерело живлення

Рисунок 4.17

$$RI = \mathscr{E} + \mathscr{E}_{si}, \qquad (4.31)$$

де $\mathscr{E}$ – Е.Р.С. джерела живлення; R – опір котушки.

Оскільки

$$\mathscr{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt}, \qquad (4.32)$$

то

$$RI = \mathscr{E} - L\frac{dI}{dt}. \qquad (4.33)$$

Напишемо рівняння (4.33) як

$$RI - \mathscr{E} = -L\frac{dI}{dt}. \tag{4.34}$$

Введемо змінну $u = RI - \mathscr{E}$, похідна якої за часом $du = RdI$.
Напишемо рівняння (4.34) як

$$u = -L\frac{dI}{dt}$$

або

$$u = -L\frac{du}{Rdt}.$$

Звідси

$$\frac{u}{du} = -\frac{L}{Rdt}$$

або

$$\frac{du}{u} = -\frac{Rdt}{L}. \tag{4.35}$$

Напишемо це рівняння як

$$\frac{du}{u} = -\frac{dt}{\tau}, \tag{4.36}$$

де $\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$ – **постійна часу** або **час релаксації.**

Проінтегруємо ліву частину рівняння (4.36) по u (від $-\mathscr{E}$ до $RI - \mathscr{E}$), а праву частину — по t (від 0 до t)

$$\int_{-\mathscr{E}}^{R-\mathscr{E}} \frac{du}{u} = -\int_0^t \frac{dt}{\tau}, \tag{4.37}$$

$$\ln u\Big|_{-\mathscr{E}}^{R-\mathscr{E}} = -\frac{t}{\tau}\Big|_0^t, \tag{4.38}$$

$$\ln\left(\left(RI - \mathscr{E}\right)/\left(-\mathscr{E}\right)\right) = -\frac{t}{\tau}, \tag{4.39}$$

$$\frac{RI - \mathscr{E}}{-\mathscr{E}} = e^{-t/\tau}, \tag{4.40}$$

$$-\frac{RI}{\mathscr{E}}+1=e^{-t/\tau}. \qquad (4.41)$$

Звідси

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)=I_0\left(1-e^{-t/\tau}\right), \qquad (4.42)$$

де $I_0=\frac{\mathscr{E}}{R}$ – сила усталеного струму ($t\to\infty$).

Графік залежності $I=f(t)$ наведено на рисунку 4.18 (крива *1*).

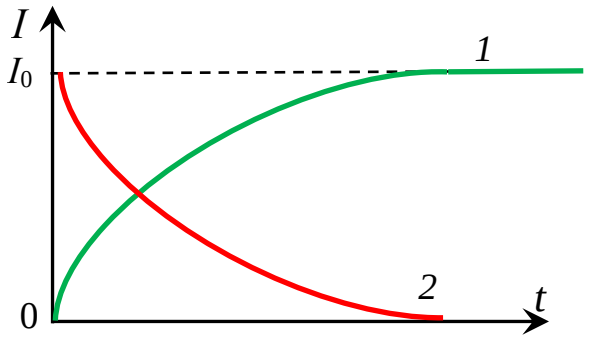
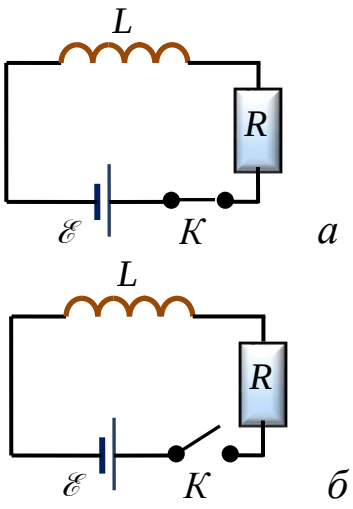


Рисунок 4.18

РОЗМИКАННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА



Електричне коло: L – котушка індуктивності, R – опір котушки; $\mathscr{E}$ – джерело живлення

Рисунок 4.19

Нехай у колі (рисунок 4.19, *а*) тече постійний струм силою

$$I_0=\frac{\mathscr{E}}{R}, \qquad (4.43)$$

де $\mathscr{E}$ – Е.Р.С. джерела живлення; R – опір котушки.

В момент $t = 0$ розімкнемо коло (див. рис. 4.19, *б*). Сила струму в колі буде зменшуватися, тому в котушці з’явиться Е.Р.С. самоіндукції $\mathscr{E}_{si}$, яка перешкоджатиме цьому зменшенню.

За законом Ома для замкненого кола

$$RI=\mathscr{E}_{si}. \qquad (4.44)$$

Оскільки

$$\mathscr{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt}, \tag{4.45}$$

то

$$RI = -L\frac{dI}{dt}. \tag{4.46}$$

Розділимо змінні

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt. \tag{4.47}$$

Проінтегруємо ліву частину рівняння (4.47) по I (від I_0 до I), а праву частину — по t (від 0 до t)

$$\ln I\Big|_{I_0}^{I} = -\frac{Rt}{L}\Big|_0^t \quad \Rightarrow \quad \ln I - \ln I_0 = -\frac{Rt}{L}, \tag{4.48}$$

$$\ln\frac{I}{I_0} = -\frac{Rt}{L} = -\frac{t}{\tau}, \tag{4.49}$$

де $\tau = \dfrac{L}{R}$ – **постійна часу** або **час релаксації.**

Звідси

$$\frac{I}{I_0} = e^{-t/\tau},$$

$$I = I_0 e^{-t/\tau}. \tag{4.50}$$

Графік залежності $I = f(t)$ наведений на рис. 4.18 (крива *2*).

4.7. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Магнітний потік крізь виток соленоїда (без осердя) 5 мкВб. Визначити магнітний момент соленоїда, якщо його довжина l = 25 см.

Аналіз

Соленоїд, по обмотці якого тече постійний струм, створює стаціонарне магнітне поле. Якщо соленоїд довгий, то поле зосереджене всередині соленоїда й однорідне (рисунок 1, *а*). Силові лінії поля перпендикулярні до поперечного перетину соленоїда. Магнітний потік крізь усі

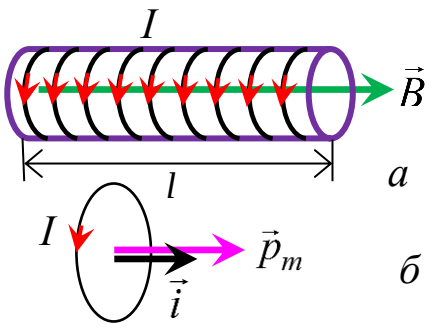


Рисунок 1

витки соленоїда називається *потокозчепленням* Ψ. За умовою задачі заданий магнітний потік Ф крізь виток обмотки, який визначається як

$$\Phi = BS, \qquad (1)$$

де B – модуль магнітної індукції; S – площа поперечного перетину соленоїда.

Модуль магнітної індукції поля в соленоїді без осердя

$$B = \mu_0 nI = \mu_0 \frac{N}{l} I, \qquad (2)$$

де μ_0 – магнітна стала; n – лінійна щільність витків; N – кількість витків обмотки; l – довжина соленоїда.

Отже,

$$\Phi = \frac{\mu_0 NIS}{l}. \qquad (3)$$

Магнітний момент витка зі струмом (див. рис. 1, *б*)

$$\vec{p}_m = \vec{i}IS, \qquad (4)$$

де $\vec{i}$ – позитивна нормаль до контуру, яка зв'язана з напрямком струму в контурі правилом правого свердлика, $|\vec{i}| = 1$; I – сила струму в контурі; S – площа контуру.

Ми позначили нормаль до контуру як $\vec{i}$, бо літера n *була використана для позначення лінійної щільності витків.*

В нашому випадку площа контуру — площа витка соленоїда.

Обмотку соленоїда можна розглядати як сукупність послідовно з'єднаних N однакових витків, в яких струм має однаковий напрямок. Отже, магнітні моменти усіх витків соленоїда мають однакове значення й однаковий напрямок. *Магнітний момент соленоїда* — векторна сума магнітних моментів його N витків

$$\vec{p}_{mc} = N\vec{p}_m = \vec{i}ISN. \qquad (5)$$

Модуль магнітного моменту

$$p_{mc} = ISN. \qquad (6)$$

З (3) випливає

$$ISN = \frac{\Phi l}{\mu_0}. \qquad (7)$$

Отже,

$$p_{mc} = \frac{\Phi l}{\mu_0}. \qquad (8)$$

Перевіримо формулу (8):

$$[p_{mc}] = \text{А} \cdot \text{м}^2;\ [\Phi] = \text{Вб} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{А}};\ [l] = \text{м};\ [\mu_0] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2};$$

$$\left[\frac{\Phi l}{\mu_0}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{А}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{А} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \text{А} \cdot \text{м}^2.$$

Дано:	**СІ**
$\Phi = 5$ мкВб	$5 \cdot 10^{-6}$ Вб
$l = 25$ см	$25 \cdot 10^{-2}$ м
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$	
$p_{mc} - ?$	

Розв'язок:

$$p_{mc} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 0{,}995\ \text{А} \cdot \text{м}^2.$$

Відповідь: $p_{mc} = 0{,}995\ \text{А} \cdot \text{м}^2$.

Задача 2

Квадратна рамка стороною a = 15 см, яка складається з N = 10 витків, розташована в однорідному магнітному полі індукцією B = 100 мТл так, що нормаль $\vec{n}$ до рамки утворює кут φ = 60° із силовими лініями поля (рисунок 1). Рамку висмикнули за межі поля. За час видалення рамки в ній індукувалась середня Е.Р.С. індукції $\langle \mathscr{E}_i \rangle$ = 5 В. Визначити час Δt видалення рамки.

Аналіз

Е.Р.С. індукції виникає в замкненій провідній рамці при зміні магнітного потоку крізь рамку.

Середня Е.Р.С. індукції $\langle \mathscr{E}_i \rangle$, що індукується в багатовитковій рамці за час Δt,

$$\langle \mathscr{E}_i \rangle = -\frac{\Delta\Psi}{\Delta t} = -\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\Delta t} = \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{\Delta t}, \qquad (1)$$

де $\Delta\Psi$ – приріст потокозчеплення рамки за час Δt; Ψ_1 – початкове потокозчеплення, Ψ_2 – кінцеве потокозчеплення рамки.

Потокозчеплення рамки

$$\Psi = N\Phi = NBS\cos\varphi, \qquad (2)$$

де N – кількість витків рамки; Φ – магнітний потік крізь один виток; B – модуль магнітної індукції; S – площа рамки; φ – кут між нормаллю $\vec{n}$ до рамки й магнітною індукцією $\vec{B}$.

Початкове потокозчеплення (див. рис. 1, *а*)

$$\Psi_1 = NBS\cos\varphi_1, \qquad (3)$$

де φ_1 – кут між $\vec{n}$ і $\vec{B}$ в початковому стані.

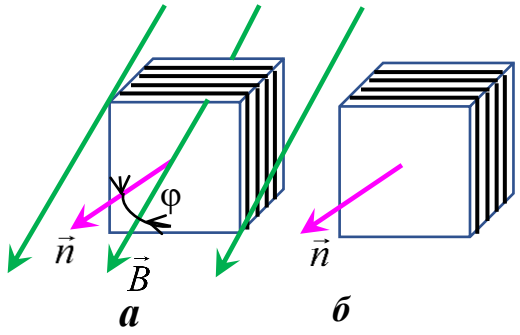


Рисунок 1

Площа рамки

$$S = a^2, \qquad (4)$$

де a – сторона квадрата.

В кінцевому стані магнітна індукція $\vec{B} = 0$, тоді $\Psi_2 = 0$ (див. рис. 1, *б*).

Отже,

$$\langle \mathscr{E}_i \rangle = \frac{NBa^2\cos\varphi_1}{\Delta t}. \qquad (5)$$

Звідси *час* Δt *видалення рамки* за межі магнітного поля

$$\Delta t = \frac{NBa^2\cos\varphi_1}{\langle \mathscr{E}_i \rangle}. \qquad (6)$$

Формула (6) не потребує перевірки з огляду на те, що вона була отримана з формули, за якою визначається Е.Р.С. індукції.

Дано:	**СІ**
$B = 100$ мТл	10^{-1} Тл
$a = 15$ см	$15\cdot10^{-2}$ м
$\varphi_1 = 60^\circ$	
$N = 10$	
$\langle \mathscr{E}_i \rangle = 5$ В	
$\Delta t - ?$	

Розв'язок:

$$\Delta t = \frac{10\cdot10^{-1}\left(15\cdot10^{-2}\right)^2\cos60^\circ}{5} = 22{,}5\cdot10^{-4}\text{ с} = 2{,}25\text{ мс}.$$

Відповідь: $\Delta t = 2{,}25$ мс.

Задача 3

Колова рамка радіусом $r = 4$ см розташована в однорідному магнітному полі напруженістю $H = 4$ кА/м так, що вектор $\vec{H}$ перпендикулярний до її площини. Опір рамки $R = 10$ Ом. Визначити: середню силу індукційного струму, який виникає в рамці при повороті на 180^0 протягом 2 мс; кількість електрики, яка пройде по рамці за цей час.

Аналіз

При повороті рамки, що знаходиться в магнітному полі, в ній виникає Е.Р.С. індукції внаслідок зміни магнітного потоку крізь неї.

Середня Е.Р.С. індукції за час Δt повороту рамки

$$\langle \mathscr{E}_i \rangle = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Delta t}, \qquad (1)$$

де $\Delta\Phi$ – приріст магнітного потоку крізь рамку за час Δt; Φ_1 – початковий магнітний потік, Φ_2 – кінцевий магнітний потік крізь рамку.

Магнітний потік крізь рамку

$$\Phi = BS\cos\alpha, \qquad (2)$$

де B – модуль магнітної індукції; S – площа рамки; α – кут між нормаллю $\vec{n}$ до рамки й магнітною індукцією $\vec{B}$.

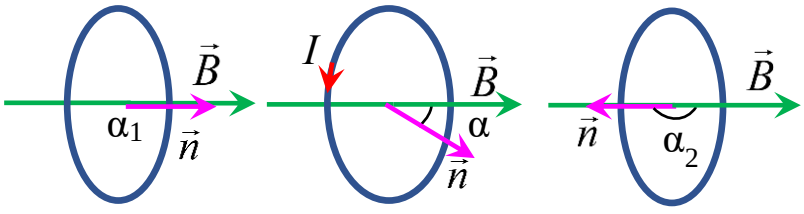
Для вакууму (повітря) індукція $\vec{B}$ магнітного поля зв'язана з напруженістю $\vec{H}$ поля

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \qquad (3)$$

або

$$B = \mu_0 H, \qquad (4)$$

де μ_0 – магнітна стала.



а *б* *в*

Рисунок 1

Площа рамки

$$S = \pi r^2, \tag{5}$$

де r – радіус рамки.

Тоді

$$\Phi = \mu_0 H \pi r^2 \cos\alpha\,. \tag{6}$$

Магнітний потік у початковому стані

$$\Phi_1 = \mu_0 H \pi r^2 \cos\alpha_1, \tag{7}$$

де α_1 – кут між $\vec{n}$ і $\vec{B}$ в початковому стані.

Магнітний потік у кінцевому стані

$$\Phi_2 = \mu_0 H \pi r^2 \cos\alpha_2, \tag{8}$$

де α_2 – кут між $\vec{n}$ і $\vec{B}$ в кінцевому стані.

Отже,

$$\langle \mathscr{E}_i \rangle = \frac{\mu_0 H \pi r^2 \cos\alpha_1 - \mu_0 H \pi r^2 \cos\alpha_2}{\Delta t} = \frac{\mu_0 H \pi r^2 \left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)}{\Delta t}. \tag{9}$$

Під час повороту рамки в ній тече індукційний струм, напрямок якого визначається за правилом Ленца.

Середнє значення індукційного струму за час Δt

$$\langle I \rangle = \frac{\langle \mathscr{E}_i \rangle}{R} = \frac{\mu_0 H \pi r^2 \left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)}{R\Delta t}, \tag{10}$$

де R – опір рамки.

Кількість електрики Δq, яка пройде по рамці за час Δt

$$\Delta q = \langle I \rangle \Delta t = \frac{\mu_0 H \pi r^2 \left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)\Delta t}{R\Delta t} = \frac{\mu_0 H \pi r^2 \left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)}{R}. \tag{11}$$

Перевіримо формули (10) і (11):

(10)

$$[I] = \text{А};\ [\mu_0] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{А}^2\cdot\text{с}^2};\ [H] = \frac{\text{А}}{\text{м}};\ [r] = \text{м};\ [R] = \text{Ом} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}^2};\ [\Delta t] = \text{с};$$

$$[\cos\alpha] = 1;\ \left[\frac{\mu_0 H r^2 \cos\alpha}{R\Delta t}\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{А}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^3\cdot\text{А}^2}{\text{А}^2\cdot\text{с}^2\cdot\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}} = \text{А};$$

(11)

$$[\Delta q] = \text{Кл} = \text{А} \cdot \text{с};\ [\mu_0] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2};\ [H] = \frac{\text{А}}{\text{м}};\ [r] = \text{м};\ [R] = \text{Ом} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3 \cdot \text{А}^2};$$

$$\left[\frac{\mu_0 H r^2 \cos\alpha}{R}\right] = \text{А} \cdot \text{с}.$$

Дано:	**СІ**
$r = 4$ см	$4 \cdot 10^{-2}$ м
$H = 4$ кА/м	$4 \cdot 10^3 \frac{\text{А}}{\text{м}}$
$R = 10$ Ом	
$\alpha_1 = 0^\circ$	
$\alpha_2 = 180^\circ$	
$t = 2$ мс	$2 \cdot 10^{-3}$ с
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$	
$\langle I \rangle - ?$	
$\Delta q - ?$	

Розв'язок:

$$\langle I \rangle = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot \left(4 \cdot 10^{-2}\right)^2 \cdot \left(\cos 0^\circ - \cos 180^\circ\right)}{10 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= 25{,}24 \cdot 10^{-3}\ \text{А} = 25{,}24\ \text{мА};$$

$$\Delta q = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot \left(4 \cdot 10^{-2}\right)^2 \cdot \left(\cos 0^\circ - \cos 180^\circ\right)}{10} =$$

$$= 50{,}48 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл} = 50{,}48\ \text{мКл}.$$

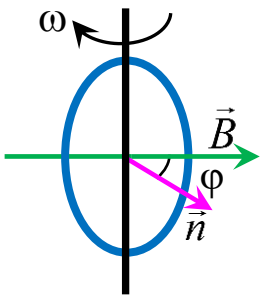
Відповідь: $\langle I \rangle = 25{,}24$ мА; $\Delta q = 50{,}48$ мКл.

Задача 4

Одновиткова рамка рівномірно обертається в однорідному магнітному полі індукцією $B = 4$ мТл з частотою 120 об/хв. Площа рамки $S = 20$ см^2. Опір рамки $R = 1$ Ом. Вісь обертання знаходиться в площині рамки й перпендикулярна до вектора $\vec{B}$. Визначити амплітуду сили індукційного струму I_m в рамці; кількість електрики Δq, яка пройде по рамці за період обертання.

Аналіз

За умовою задачі вісь обертання рамки знаходиться в її площині й перпендикулярна до магнітної індукції $\vec{B}$ однорідного магнітного поля. При рівномірному обертанні рамки навколо цієї осі з кутовою швидкістю ω (рисунок 1) магнітний потік Ф крізь неї змінюється з часом t за законом (див. підрозділ 4.2)



$\varphi = \omega t$

Рисунок 1

$$\Phi = BS\cos\varphi, \tag{1}$$

де B – модуль магнітної індукції; S – площа контуру; φ – кут між нормаллю $\vec{n}$ до рамки й магнітною індукцією $\vec{B}$.

Кут φ змінюється з часом за законом

$$\varphi = \omega t, \tag{2}$$

де ω – кутова швидкість обертання

$$\omega = 2\pi\nu, \tag{3}$$

де ν – частота обертання.

Отже,

$$\Phi = BS\cos\varphi = BS\cos\omega t = BS\cos 2\pi\nu t. \tag{4}$$

За законом Фарадея Е.Р.С. індукції $\mathscr{E}_i$

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{5}$$

З (4) і (5) випливає

$$\mathscr{E}_i = \omega BS\sin\omega t = 2\pi\nu BS\sin 2\pi\nu t. \tag{6}$$

Сила індукційного струму

$$I_i = \frac{\mathscr{E}_i}{R} = \frac{2\pi\nu BS\sin 2\pi\nu t}{R} = I_{im}\sin 2\pi\nu t, \tag{7}$$

де R – опір рамки; I_{im} – амплітуда сили індукційного струму.

Амплітуда сили індукційного струму

$$I_{im} = \frac{2\pi\nu BS}{R}. \tag{8}$$

Сила індукційного струму

$$I_i = \frac{dq}{dt}, \tag{9}$$

де dq – заряд, що проходить крізь поперечний перетин провідника за час dt.

Звідси кількість електрики Δq, яка пройде по контуру за період обертання T,

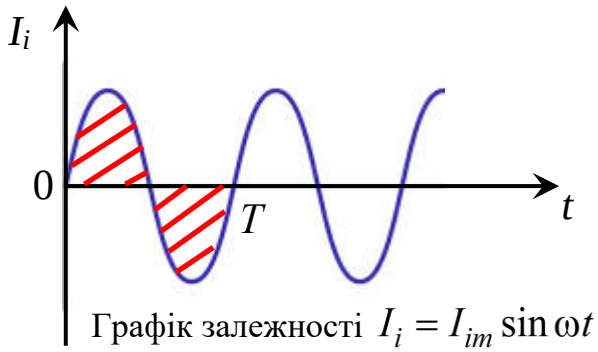
$$\Delta q = \int_0^T I dt = \int_0^T \frac{2\pi\nu BS \sin 2\pi\nu t}{R} dt = \frac{2\pi\nu BS}{R} \int_0^T \sin 2\pi\nu t dt = -\frac{2\pi\nu BS}{2\pi\nu R} \cos 2\pi\nu t \Big|_0^T =$$

$$= -\frac{BS}{R}\left(\cos 2\pi\nu T - \cos 2\pi\nu 0\right) = -\frac{BS}{R}\left(\cos 2\pi \frac{T}{T} - \cos 2\pi\nu 0\right) = \quad (10)$$

$$= -\frac{BS}{R}\left(\cos 2\pi - \cos 0\right) = 0.$$

Проілюструємо результат за допомогою рисунка 2.

Примітка: *Геометричний зміст інтеграла:* інтеграл $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ дорівнює площі фігури, що обмежена графіком залежності $f(x)$, віссю абсцис і перпендикулярами до осі абсцис, що побудовані в точках x_1 і x_2 до перетину з графіком $f(x)$.



Графік залежності $I_i = I_{im} \sin \omega t$

Рисунок 2

Отже, інтеграл $\int_0^T \sin 2\pi\nu t dt = \int_0^T \sin \omega t dt$ дорівнює площі фігури, що обмежена графіком $I_i = I_{im} \sin \omega t$, віссю абсцис і перпендикулярами до осі абсцис, що побудовані в точках 0 і T до перетину з графіком, тобто площі заштрихованої фігури на рис. 2. Площа фігури дорівнює нулю.

Перевіримо формулу (8):

$$[I] = \text{А}; \ [\nu] = \text{Гц} = \text{с}^{-1}; \ [B] = \text{Тл} = \frac{\text{кг}}{\text{А} \cdot \text{с}^2}; [S] = \text{м}^2; [R] = \text{Ом} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^3};$$

$$\left[\frac{\nu BS}{R}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{с}^3}{\text{с} \cdot \text{А} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2} = \text{А}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
B=4 мТл	$4\cdot10^{-3}$ Тл	$I_{im}=\dfrac{2\pi\cdot2\cdot4\cdot10^{-3}\cdot2\cdot10^{-3}}{1}=100{,}5\cdot10^{-6}$ А = 100,5 мкА.
ν=120 $\frac{\text{об}}{\text{хв}}$	$2\frac{\text{об}}{\text{с}}=2\text{с}^{-1}$	
S=20 см^2	$2\cdot10^{-3}$ м^2	
R=1 Ом		
$I_{im}-?$		
$\Delta q(T)-?$		**Відповідь:** I_{im}=100,5 мкА; $\Delta q(T)=0$.

Задача 5

Магнітний потік крізь виток багатовиткового провідного контуру, змінюється з часом за законом $\Phi(t)=\left(2+5t^2\right)\cdot10^{-2}$ Вб. Контур має N = 100 витків. Опір контуру R = 2 Ом. Визначити силу індукційного струму I_i в контурі наприкінці другої секунди.

Аналіз

При зміні магнітного потоку крізь провідний багатовитковий контур з часом t в ньому виникає Е.Р.С. індукції, яка визначається за законом Фарадея,

$$\mathscr{E}_i=-\frac{d\Psi}{dt}, \tag{1}$$

де Ψ – потокозчеплення контуру.

Потокозчеплення контуру

$$\Psi=N\Phi, \tag{2}$$

де N – кількість витків контуру; Φ – магнітний потік крізь виток контуру.

За умовою задачі заданий закон зміни магнітного потоку з часом $\Phi(t)=\left(2+5t^2\right)\cdot10^{-2}$ Вб, тоді

$$\Psi=N\left(2+5t^2\right)\cdot10^{-2}\ . \tag{3}$$

Е.Р.С. індукції

$$\mathscr{E}_i=-N10t\cdot10^{-2}=-0{,}1Nt. \tag{4}$$

Сила індукційного струму

$$I_i = \frac{\mathscr{E}_i}{R} = -\frac{0{,}1\,Nt}{R}, \tag{5}$$

де R – опір контуру.

Дано:

$N = 100$

$\Phi(t) = \left(2 + 5t^2\right) \cdot 10^{-2}$ Вб

$R = 2$ Ом

$t = 2$ с

$I_i(t) - ?$

Розв'язок:

$$I = -\frac{0{,}1 \cdot 100 \cdot 2}{2} = -10 \text{ А}.$$

Відповідь: $|I_i| = 10$ А. Знак «–» узгоджується з правилом Ленца.

Задача 6

Обмотка довгого соленоїда довжиною $l = 20$ см намотана з мідного дроту діаметром $d = 1$ мм так, що витки щільно прилягають один до іншого. Питомий електричний опір міді $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Діаметр соленоїда $D = 10$ см. В обмотці соленоїда тече струм силою $I = 4$ А. Визначити силу екстраструму, що виникає в обмотці соленоїда при зменшенні сили струму в ній зі швидкістю $\frac{dI}{dt} = 0{,}1 \frac{\text{А}}{\text{с}}$.

Аналіз

При зміні сили струму в обмотці соленоїда в ній з'являється Е.Р.С. самоіндукції

$$\mathscr{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt}, \tag{1}$$

де L – індуктивність соленоїда; $\frac{dI}{dt}$ – швидкість зміни сили струму.

Індуктивність соленоїда без осердя

$$L = \mu_0 n^2 V = \mu_0 n^2 S l, \tag{2}$$

де μ_0 – магнітна стала; n – лінійна щільність витків; V – об'єм, S – площа поперечного перетину, l – довжина соленоїда.

Площа

$$S = \pi r^2 = \frac{\pi D^2}{4}, \tag{3}$$

де r – радіус, D – діаметр поперечного перетину соленоїда.

Лінійна щільність витків

$$n = \frac{1}{d}, \tag{4}$$

де d – діаметр дроту обмотки.

Тоді

$$L = \frac{\mu_0 \pi D^2 l}{4d^2} \tag{5}$$

і

$$\mathscr{E}_{si} = -\frac{\mu_0 \pi D^2 l}{4d^2} \cdot \frac{dI}{dt}. \tag{6}$$

Сила екстраструму (індукційного струму)

$$I_i = \frac{\mathscr{E}_{si}}{R} = -\frac{\mu_0 \pi D^2 l}{4d^2 R} \cdot \frac{dI}{dt}, \tag{7}$$

де R – опір обмотки.

Опір обмотки

$$R = \rho \frac{l_0}{S_0}, \tag{8}$$

де ρ – питомий електричний опір матеріалу; l_0 – довжина дроту; S_0 – площа поперечного перетину дроту.

Площа

$$S_0 = \pi r_0^2 = \frac{\pi d^2}{4}, \tag{9}$$

де r_0 – радіус, d – діаметр дроту.

Довжина l_0 дроту

$$l_0 = 2\pi r N, \tag{10}$$

де r – радіус поперечного перетину соленоїда; N – кількість витків обмотки.

Кількість витків

$$N = \frac{l}{d}, \tag{11}$$

де l – довжина соленоїда; d – діаметр дроту обмотки.

Тоді

$$l_0 = \frac{2\pi rl}{d} = \frac{2\pi Dl}{2d} = \frac{\pi Dl}{d}. \qquad (12)$$

Отже,

$$R = \frac{4\rho\pi Dl}{d\pi d^2} = \frac{4\rho Dl}{d^3}. \qquad (13)$$

Підставивши (13) в (7), отримуємо

$$I_i = \frac{\mathscr{E}_{si}}{R} = -\frac{\mu_0\pi D^2 l d^3}{4d^2 4\rho Dl}\cdot\frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0\pi Dd}{16\rho}\cdot\frac{dI}{dt}.$$

$$I_i = -\frac{\mu_0\pi Dd}{16\rho}\cdot\frac{dI}{dt}. \qquad (14)$$

Перевіримо формулу (14):

$$[I_i] = \text{А}; [\mu_0] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{А}^2\cdot\text{с}^2}; [D] = [d] = \text{м}; [\rho] = \text{Ом}\cdot\text{м} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{А}^2\cdot\text{с}^3}; \left[\frac{dI}{dt}\right] = \frac{\text{А}}{\text{с}};$$

$$\left[\frac{\mu_0 Dd}{\rho}\cdot\frac{dI}{dt}\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{А}^2\cdot\text{с}^3\cdot\text{А}}{\text{А}^2\cdot\text{с}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^3\cdot\text{с}} = \text{А}.$$

Дано:	**СІ**
l=20 см	$2\cdot10^{-1}$ м
d=1 мм	10^{-3} м
ρ=1,7·10^{-8} Ом·м	
D=10 см	10^{-1} м
I=4 А	
$\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}\frac{\text{Гн}}{\text{м}}$	
$\frac{dI}{dt} = -0{,}1\frac{\text{А}}{\text{с}}.$	
$I_i - ?$	

Розв'язок:

$$I_i = \frac{4\pi\cdot10^{-7}\pi\cdot10^{-1}\cdot10^{-3}\cdot10^{-1}}{16\cdot1{,}7\cdot10^{-8}} = 1{,}45\cdot10^{-4}\ \text{А} =$$

$$= 0{,}145\ \text{мА}.$$

Відповідь: $I_i = 0{,}145$ мА.

За умовою задачі сила струму зменшується, тому $dI/dt < 0$. Знак «+» свідчить про те, що за правилом Ленца індукційний струм має напрямок, що збігається з напрямком струму I в обмотці.

Задача 7

Обмотка соленоїда довжиною l = 40 см і площею поперечного перетину S = 4 см^2 має 1000 витків. По соленоїду тече струм силою

I = 2 А. Визначити середню Е.Р.С. самоіндукції, що виникає в обмотці при зменшенні сили струму до нуля протягом 20 с.

Аналіз

При зміні сили струму в обмотці соленоїда з часом у ній виникає Е.Р.С., яка називається Е.Р.С. самоіндукції.

Середня Е.Р.С. самоіндукції за час Δt

$$\left\langle \mathscr{E}_{si} \right\rangle = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{L\left(I_2 - I_1\right)}{\Delta t} = \frac{L\left(I_1 - I_2\right)}{\Delta t}, \qquad (1)$$

де ΔI – приріст сили струму за час Δt; I_1 – сила струму в початковий момент часу; I_2 – сила струму в кінцевий момент часу; L – індуктивність соленоїда.

Індуктивність соленоїда без осердя

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}, \qquad (2)$$

де μ_0 – магнітна стала; N – кількість витків обмотки; S – площа поперечного перетину, l – довжина соленоїда.

Тоді середня Е.Р.С. самоіндукції

$$\left\langle \mathscr{E}_{si} \right\rangle = \frac{\mu_0 N^2 S\left(I_1 - I_2\right)}{l\Delta t}. \qquad (3)$$

Формула (3) не потребує перевірки, тому що складається з визначальних формул для даних фізичних величин.

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
l=40 см	$4\cdot10^{-1}$ м	$\left\langle \mathscr{E}_{si} \right\rangle = \frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot\left(10^3\right)^2\cdot4\cdot10^{-4}\left(2-0\right)}{4\cdot10^{-1}\cdot20} =$
N=1000		$= 5\cdot10^{-4}$ В = 0,5 мВ.
S=4 см^2	$4\cdot10^{-4}$ м^2	
I_1=2 А; I_2=0		
Δt=20 с		
$\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м		**Відповідь:** $\left\langle \mathscr{E}_{si} \right\rangle$ = 0,5 мВ.
$\left\langle \mathscr{E}_{si} \right\rangle$ – ?		

Задача 8

Однорідне магнітне поле у повітрі напруженістю H = 200 А/м займає об’єм 10 см^3. Визначити: об’ємну густину енергії; повну енергію й масу поля.

Аналіз

Об’ємна густина енергії магнітного поля

$$w_{\text{м}} = \frac{BH}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}, \tag{1}$$

де B – модуль магнітної індукції; H – модуль напруженості магнітного поля; μ – відносна магнітна проникність середовища; μ_0 – магнітна стала.

Для повітря $\mu = 1$, отже,

$$w_{\text{м}} = \frac{\mu_0 H^2}{2}. \tag{2}$$

За умовою задачі магнітне поле однорідне, тому енергія W магнітного поля в заданому об’ємі V

$$W = w_{\text{м}} V = \frac{\mu_0 H^2 V}{2}. \tag{3}$$

За законом Ейнштейна енергія W будь-якого об’єкта зв’язана з його масою m співвідношенням

$$W = mc^2, \tag{4}$$

де c – швидкість світла у вакуумі.

З (3) і (4) випливає

$$\frac{\mu_0 H^2 V}{2} = mc^2. \tag{5}$$

Звідси маса m магнітного поля в об’ємі V

$$m = \frac{\mu_0 H^2 V}{2c^2}. \tag{6}$$

Формули (2) і (3) не потребують перевірки, тому що є визначальними для даних фізичних величин.

Перевіримо формулу (6):

$$[m]=\text{кг};\ [\mu_0]=\frac{\text{Гн}}{\text{м}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{А}^2\cdot\text{с}^2};\ [H]=\frac{\text{А}}{\text{м}};\ [V]=\text{м}^3;\ [c]=\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\left[\frac{\mu_0 H^2 V}{c^2}\right]=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{А}^2\cdot\text{м}^3\cdot\text{с}^2}{\text{А}^2\cdot\text{с}^2\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}^2}=\text{кг}.$$

Дано:	**СІ**
$H=200\ \frac{\text{А}}{\text{м}}$	
$V=10\ \text{см}^3$	10^{-5} м
$\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\ \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$	
$c=3\cdot10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$	
$w_{\text{м}}-?$	
$W-?$	
$m-?$	

Розв'язок:

$$w_{\text{м}}=\frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot\left(2\cdot10^2\right)^2}{2}=25{,}12\cdot10^{-3}\ \text{Дж}/\text{м}^3=$$

$$=25{,}12\ \text{мДж}/\text{м}^3;$$

$$W=\frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot\left(2\cdot10^2\right)^2\cdot10^{-5}}{2}=25{,}12\cdot10^{-8}\ \text{Дж}=$$

$$=251{,}2\cdot10^{-9}\ \text{Дж}=\ 251{,}2\ \text{нДж};$$

$$m=\frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot\left(2\cdot10^2\right)^2\cdot10^{-5}}{2\left(3\cdot10^8\right)^2}=2{,}79\cdot10^{-24}\ \text{кг}.$$

Відповідь:

$w_{\text{м}}=25{,}12\ \text{мДж}/\text{м}^3;\ W=251{,}2\ \text{нДж};$

$m=2{,}79\cdot10^{-24}$ кг.

Задача 9

Обмотка соленоїда має опір 10 Ом. Визначити індуктивність соленоїда, якщо при проходженні постійного струму в його обмотці за 0,05 с в ньому виділяється кількість теплоти, яка еквівалентна енергії магнітного поля в соленоїді.

Аналіз

Вважаємо, що соленоїд довгий. Енергія магнітного поля в соленоїді

$$W=\frac{LI^2}{2},\qquad(1)$$

де L – індуктивність соленоїда; I – сила струму в обмотці соленоїда.

При проходженні струму в обмотці соленоїда виділяється теплота, кількість якої визначається за законом Джоуля-Ленца,

$$Q = RI^2 t\,, \tag{2}$$

де R – опір обмотки; I – сила струму в обмотці; t – час, протягом якого відбувається нагрівання.

За умовою задачі кількість теплоти дорівнює енергії магнітного поля, отже, з (1) і (2) випливає

$$\frac{LI^2}{2} = RI^2 t\,. \tag{3}$$

Звідси індуктивність соленоїда

$$L = \frac{2RI^2 t}{I^2} = 2Rt.$$

$$L = 2Rt. \tag{4}$$

Перевіримо формулу (4):

$$[L] = \text{Гн} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{А}^2};\ [R] = \text{Ом} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}^2};\ [t] = c;\ [Rt] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}}{\text{с}^3\cdot\text{А}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{А}^2}.$$

Дано:
$R = 10$ Ом
$t = 0{,}05$ с
$Q = W_м$
$L - ?$

Розв'язок:
$L = 2\cdot 10\cdot 0{,}05 = 1$ Гн.

Відповідь: $L = 1$ Гн.

Задача 10

Дві котушки мають взаємну індуктивність M = 10 мГн. Опір кожної котушки R = 5 Ом. В першій котушці сила струму змінюється за законом $I_1 = I_{1m}\sin\omega t$, де I_{1m} = 10 А, ω = 2π рад/с. Написати закон зміни сили індукційного струму залежно від часу в другій котушці.

Аналіз

При зміні сили струму в першій котушці в іншій котушці виникає Е.Р.С. індукції

$$\mathscr{E}_i = -M_{12}\frac{dI_1}{dt}, \tag{1}$$

де M_{12} – взаємна індуктивність; I_1 – сила струму в першій котушці.

Сила індукційного струму в другій котушці

$$I_2 = \frac{\mathscr{E}_i}{R} = -\frac{M_{12}}{R}\frac{dI_1}{dt}. \qquad (2)$$

За умовою задачі в першій котушці сила струму змінюється за законом

$$I_1 = I_{1m}\sin\omega t. \qquad (3)$$

Отже,

$$I_2(t) = -\frac{M_{12}I_{1m}\omega}{R}\cos\omega t. \qquad (4)$$

Перевіримо формулу (4):

$$[I_2] = \text{А};\ [M_{12}] = \text{Гн} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{А}^2};\ [I] = \text{А};\ [\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \frac{1}{\text{с}};$$

$$[R] = \text{Ом} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{А}^2\cdot\text{с}^3};\ [\cos\omega t] = 1;\ \left[\frac{MI\omega}{R}\cos\omega t\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{А}\cdot\text{А}^2\cdot\text{с}^3}{\text{с}^2\cdot\text{А}^2\cdot\text{с}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2} = \text{А}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$M_{12} = 10$ мГн	10^{-2} Гн	$I_2(t) = -\frac{10^{-2}\cdot 10\cdot 2\pi}{5}\cos 2\pi t = -0{,}1256\cos 2\pi t$, А.
$R = 5$ Ом		
$I_{1m} = 10$ А		
$\omega = 2\pi\frac{\text{рад}}{\text{с}}$		
$I_1 = I_{1m}\sin\omega t$		
$I_2(t) - ?$		**Відповідь:** $I_2(t) = -0{,}1256\cos 2\pi t$, А.

Задача 11

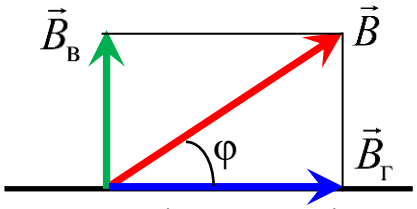
Реактивний літак летить вздовж магнітного меридіана зі швидкістю 980 км/год. Розмах крил літака 12,5 м. Вертикальна складова напруженості магнітного поля Землі H_B = 33,0 А/м. Визначити Е.Р.С. індукції $\mathscr{E}_i$, яка виникає між кінцями крил літака.

Аналіз

Задачу можна розв'язати двома способами.

1 спосіб

Магнітна індукція $\vec{B}$ поля Землі в будь-якій точці утворює **кут φ з магнітним меридіаном** (наприклад, магнітна індукція в південній кулі, рисунок 1). **Кут φ називається магнітним нахиленням**. Вектор $\vec{B}$ можна



Магнітна індукція у південній півкулі

Рисунок 1

розкласти на дві складові: паралельну магнітному меридіану горизонтальну складову $\vec{B}_г$ й перпендикулярну до нього вертикальну складову $\vec{B}_в$.

В металі валентні електрони узагальнені й вільно рухаються в межах кристалічної решітки, утвореної позитивно зарядженими атомними залишками (рисунок 2, *а*). В середньому густина електронів однакова по об'єму зразка. Коли літак рухається зі швидкістю $\vec{v}$ в постійному магнітному полі, тоді електрони рухаються з такою ж швидкістю. На кожний електрон діє магнітна сила Лоренца, яку можна розглядати як векторну суму складових

$$\vec{F}_Л = \vec{F}_{Лв} + \vec{F}_{Лг}, \qquad (1)$$

де $\vec{F}_{Лг}$ – горизонтальна складова сили Лоренца

$$\vec{F}_{Лг} = -e\left[\vec{v}, \vec{B}_в\right], \qquad (2)$$

$\vec{F}_{Лв}$ – вертикальна складова сили Лоренца

$$\vec{F}_{Лв} = -e\left[\vec{v}, \vec{B}_г\right], \qquad (3)$$

де e – модуль заряду електрона; $\vec{v}$ – швидкість електрона; $\vec{B}_в$ і $\vec{B}_г$ – вертикальна й горизонтальна складові магнітної індукції поля відповідно.

Напрямок сили Лоренца визначаємо *за правилом правого свердлика* або *за правилом лівої руки* (див. підрозділ 3.9).

Модуль складової $\vec{F}_{Лг}$ сили Лоренца

$$F_{Лг} = evB_в \sin\alpha_1, \qquad (4)$$

де α_1 – кут між $\vec{v}$ і $\vec{B}_в$;

модуль складової $\vec{F}_{Лв}$ сили Лоренца

$$F_{Лв} = evB_г \sin\alpha_2, \qquad (5)$$

де α_2 – кут між $\vec{v}$ і $\vec{B}_г$.

За умовою задачі літак летить горизонтально вздовж магнітного меридіана, тому $\alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 0^\circ$ (або $\alpha_2 = 180^\circ$). Отже, $F_{Лв} = evB_г \sin 0^\circ = evB_г \sin 180^\circ = 0$ і магнітна сила Лоренца, що діє на крила літака з боку магнітного поля Землі

$$F_Л = F_{Лг} = evB_в \sin 90^\circ = evB_в . \quad (6)$$

Для вакууму (повітря) індукція $\vec{B}$ магнітного поля зв'язана з напруженістю $\vec{H}$ поля співвідношенням

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (7)$$

або

$$B = \mu_0 H , \quad (8)$$

де μ_0 – магнітна стала.

Отже,

$$F_Л = \mu_0 H_в ev, \quad (9)$$

де $H_в$ – модуль вертикальної складової напруженості магнітного поля Землі.

Під дією магнітної сили Лоренца електрони рухаються в одному напрямку (вздовж довжини крил) і накопичуються на краю одного крила. На кінці іншого крила утворюється нескомпенсований позитивний заряд (див. рис. 2, *б*). Отже, в крилах літака виникає електричне поле напруженістю $\vec{E}$ (див. рис. 2, *в*) й напруга між кінцями крил

$$U = El . \quad (10)$$

Е.Р.С. індукції

$$\mathscr{E}_i = -U = -El , \quad (11)$$

де l – розмах крил (див. рис. 2, *в*).

Отже, **причиною виникнення Е.Р.С. індукції між кінцями крил літака** є магнітна сила Лоренца, яка викликає розділення зарядів у металевому провіднику.

З боку електричного поля на кожний електрон діє сила

$$\vec{F}_e = -e\vec{E} , \quad (12)$$

модуль якої

$$F_e = eE, \tag{13}$$

де e – модуль заряду електрона; $\vec{E}$ – напруженість, E – модуль напруженості електричного поля.

Сили $\vec{F}_e$ і $\vec{F}_Л$ напрямлені вздовж однієї лінії в протилежні сторони.

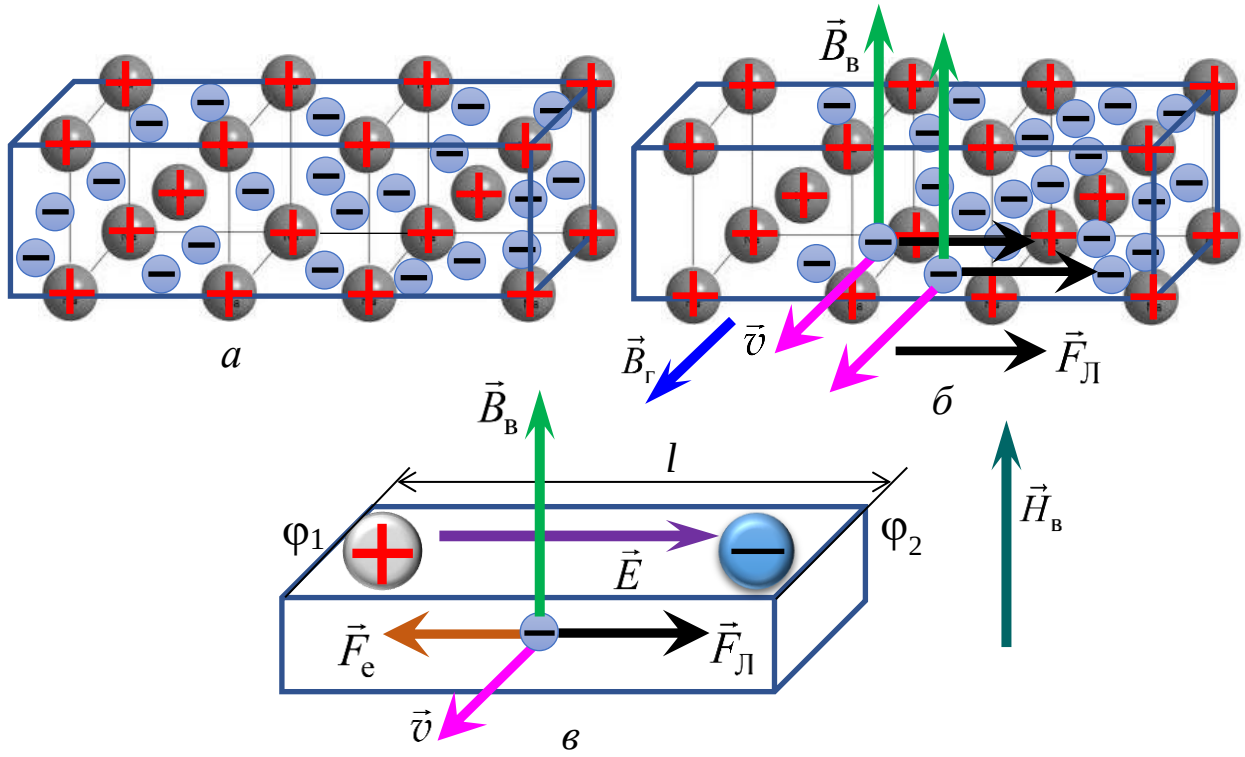


Рисунок 2

Чим більші заряди накопичуються на кінцях крил, тим більша напруженість $\vec{E}$ й, відповідно, сила $\vec{F}_e$.

Розділення зарядів припиниться, коли

$$\vec{F}_e + \vec{F}_Л = 0$$

або

$$\vec{F}_e = -\vec{F}_Л, \tag{14}$$

$$F_e = F_Л. \tag{15}$$

З (15), врахувавши (9) і (13), отримуємо

$$ev\mu_0 H_в = eE. \tag{16}$$

Звідси

$$E = v\mu_0 H_в. \tag{17}$$

Е.Р.С. індукції (див. ф-лу (11))

$$\mathscr{E}_i = -\mu_0 H_в v l. \qquad (18)$$

Перевіримо формулу (18):

$$[\mathscr{E}_i] = \text{В} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}};\ [\mu_0] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{А}^2\cdot\text{с}^2};\ [v] = \frac{\text{м}}{\text{с}};\ [H_в] = \frac{\text{А}}{\text{м}};$$

$$[l] = \text{м};\ [\mu_0 v H_в l] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{А}^2\cdot\text{с}^2\cdot\text{с}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{А}\cdot\text{с}^3}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$l = 12{,}5$ м		$\mathscr{E}_i = -4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 272\cdot 33\cdot 12{,}5 = -0{,}141$ В =
$H_в = 33$ А/м		$= -141\cdot 10^{-3}$ В $= -141$ мВ.
$v = 980\frac{\text{км}}{\text{год}}$	$272\frac{\text{м}}{\text{с}}$	
$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\frac{\text{Гн}}{\text{м}}$		**Відповідь:** $\lvert\mathscr{E}_i\rvert = 141$ мВ.
$\mathscr{E}_i - ?$		

2 спосіб

За нескінченно малий інтервал часу dt крила літака (провідник на рисунку 3) перетинають магнітний потік $d\Phi$

$$d\Phi = B_в dS = B_в l dx = B_в l v dt, \qquad (19)$$

де $B_в$ – модуль вертикальної складової магнітної індукції; dS – площа прямокутника, який описує провідник (крила літака) за час dt; l – довжина провідника (відстань між кінцями крил літака); dx – відстань, на яку переміщується провідник (крила літака) за час dt; v – модуль швидкості літака.

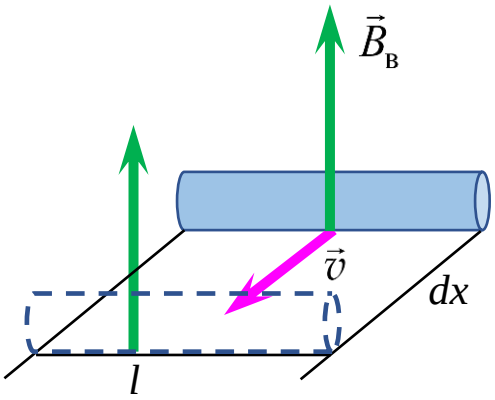


Рисунок 3

Між кінцями крил літака виникає Е.Р.С. індукції

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B_в l v dt}{dt} = -B_в l v. \qquad (20)$$

Врахувавши, що магнітна індукція зв'язана з напруженістю H магнітного поля (див. ф-ли (7) й (8))

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}_в$$

або

$$B = \mu_0 H_в,$$

де μ_0 – магнітна стала,

отримуємо

$$\mathscr{E}_i = -\mu_0 H_в l v. \qquad (21)$$

Формула (21) збігається з формулою (18).

Задача 12

Стрижень масою $m = 1$ кг ковзає без тертя по двом довгим рейкам, відстань між якими $l = 20$ см (рисунок 1). Кінці рейок замкнені резистором опором $R = 10$ Ом. Система провідників знаходиться в однорідному магнітному полі індукцією $B = 5$ Тл, силові лінії якого перпендикулярні до площини системи провідників. В момент $t = 0$ стрижню надали початкову швидкість $v_0 = 1$ м/с. Нехтуючи опором рейок і стрижня, а також магнітним полем індукційного струму, визначити відстань, яку пройшов стрижень до зупинки; кількість теплоти, яка виділилась при цьому на резисторі R.

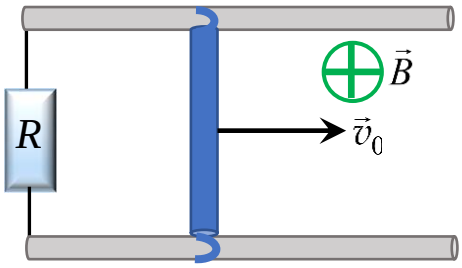


Рисунок 1

Аналіз

Задаємо напрямок позитивної нормалі $\vec{n}$ до системи провідників: від нас (рисунок 2). Тоді згідно з *правилом правого свердлика* будемо обходити контур *АБВГ* за годинниковою стрілкою.

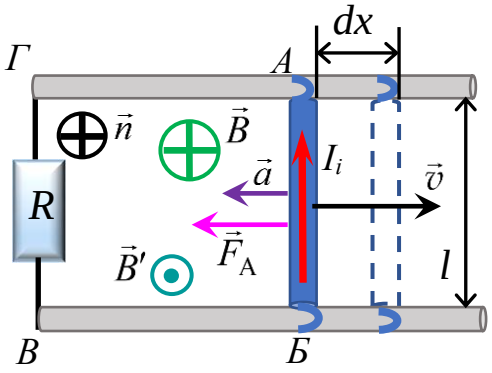


Рисунок 2

Під час руху стрижня *АБ* в магнітному полі в контурі *АБВГА* виникає Е.Р.С. індукції. За законом Фарадея

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (1)$$

Приріст потоку $d\Phi$ за час dt: $d\Phi > 0$, тому що стрижень рухається праворуч.

З рис. 2 випливає

$$d\Phi = BdS = Bldx = Blvdt. \qquad (2)$$

Отже,

$$\mathscr{E}_i = -\frac{Blvdt}{dt} = -Blv\,. \tag{3}$$

За правилом Ленца індукційний струм буде мати такий напрямок, щоб магнітний потік, зумовлений його магнітним полем, перешкоджав зростанню потоку зовнішнього магнітного поля. Індукція $\vec{B}'$ магнітного поля індукційного струму напрямлена перпендикулярно рисунку до нас, відповідний напрямок індукційного струму показаний на рис. 2.

На рухомий стрижень, по якому тече струм, буде діяти сила Ампера

$$\vec{F}_{\text{A}} = I_i\left[\vec{l}\,,\vec{B}\right], \tag{4}$$

де $\vec{l}$ – вектор, модуль якого дорівнює довжині стрижня *l*, а напрямок збігається з напрямком струму; $\vec{B}$ – магнітна індукція.

Модуль сили Ампера

$$F_{\text{A}} = I_i lB\sin 90^{\text{o}} = I_i lB\,. \tag{5}$$

За правилом лівої руки сила Ампера має напрямок, протилежний напрямку руху стрижня. Отже, рух стрижня буде рівносповільненим.

За законом Ома для електричного кола, що розглядається,

$$RI_i = \mathscr{E}_i = -Blv, \tag{6}$$

де v – швидкість стрижня в момент часу *t* від початку руху.

Напишемо для стрижня рівняння за другим законом Ньютона в скалярній формі

$$ma = F_{\text{A}} = I_i lB \tag{7}$$

або

$$m\frac{dv}{dt} = I_i lB\,. \tag{8}$$

Зі співвідношення (6) сила струму

$$I_i = -\frac{Blv}{R}. \tag{9}$$

Підставимо (9) в (8)

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2l^2v}{R}. \tag{10}$$

Розділимо змінні

$$\frac{dv}{v} = -\frac{B^2 l^2}{mR} dt. \tag{11}$$

Проінтегруємо ліву частину по v (від v_0 (початкова швидкість) до v (кінцева швидкість)), а праву по t (від 0 до t)

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\frac{B^2 l^2}{mR} \int_0^t dt,$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{B^2 l^2 t}{mR} = -kt, \tag{12}$$

де $k = \frac{B^2 l^2}{mR}$.

Звідси

$$\frac{v}{v_0} = e^{-kt},$$

$$v = v_0 e^{-kt}. \tag{13}$$

В момент зупинки $v = v_0 e^{-kt} = 0$, звідси момент часу, коли стрижень зупиниться $t \to \infty$.

1. Довжина шляху S, який стрижень пройде до зупинки

$$S = \int_0^\infty v dt = \int_0^\infty v_0 e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} \Big|_0^\infty = -\frac{v_0}{k} \frac{1}{e^{k\infty}} + \frac{v_0}{k} e^0 = \frac{v_0}{k} = \frac{v_0 mR}{B^2 l^2}, \tag{14}$$

$$S = \frac{v_0 mR}{B^2 l^2}. \tag{15}$$

2. За умовою задачі тертям між стрижнем і рейками нехтуємо. Отже, за загальним законом збереження енергії кількість теплоти Q, що виділиться на опорі R, дорівнює кінетичній енергії W_{k0}, яку надали стрижню в момент часу $t = 0$.

Кінетична енергія

$$W_{k0} = \frac{m v_0^2}{2}. \tag{16}$$

$$Q = W_{k0} = \frac{mv_0^2}{2}. \qquad (17)$$

Перевіримо формули (15) і (17):

$(15)\ [S] = \text{м};\ [v_0] = \frac{\text{м}}{\text{с}};\ [m] = \text{кг};\ [R] = \text{Ом} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^3};$

$[B] = \text{Тл} = \frac{\text{кг}}{\text{А} \cdot \text{с}^2};\quad [l] = \text{м};\quad \left[\frac{v_0 mR}{B^2 l^2}\right] = \frac{\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{с} \cdot \text{А}^2 \cdot \text{с}^3 \cdot \text{кг}^2 \cdot \text{м}^2} = \text{м};$

$(17)\ [Q] = [W_{k0}] = \text{Дж}.$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$l = 20$ см	$2 \cdot 10^{-1}$ м	$S = \frac{1 \cdot 1 \cdot 10}{(5)^2 \cdot (0{,}2)^2} = 10$ м;
$R = 10$ Ом		
$B = 5$ Тл		$Q = \frac{1 \cdot 1^2}{2} = 0{,}5$ Дж.
$v_0 = 1$ м/с		
$m = 1$ кг		
S – ?		**Відповідь:** $S = 10$ м; $Q = 0{,}5$ Дж.
Q – ?		

Задача 13

Металевий диск радіусом R = 0,5 м обертається навколо осі, що проходить крізь його центр перпендикулярно до площини диска, з частотою n = 1200 об/хв. Визначити різницю потенціалів, що виникає між центром і краєм диска,

- ✓ за відсутності магнітного поля;
- ✓ коли диск обертається в однорідному магнітному полі індукцією 20 мТл, силові лінії якого перпендикулярні до площини диска.

1. Диск радіусом R = 0,5 м обертається навколо осі, що проходить крізь його центр перпендикулярно до його площини, з частотою n = 1200 об/хв. Визначити різницю потенціалів, що виникає між центром і краєм диска, за відсутності магнітних полів.

Аналіз

З умови задачі випливає, що при обертанні диска відбувається розділення негативних і позитивних зарядів, внаслідок чого між центром диска та його краєм виникає електрична напруга. Отже, диск металевий. В металі валентні електрони атомів узагальнені й вільно рухаються в межах кристалічної решітки, яка утворена позитивно зарядженими атомними залишками (див. ч.1 задачі 35).

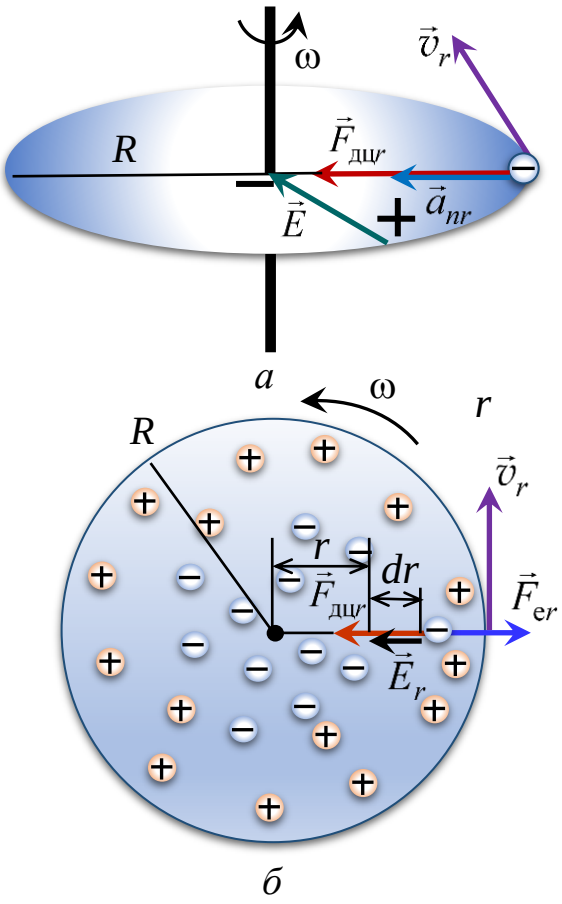


Рисунок 1.1

Диск рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω в горизонтальній площині навколо вертикальної осі (рисунок 1.1, *а*). Це означає, що кожна точка диска, а отже й електрон, що знаходиться в ній, рухаються по колу відповідного радіуса r (r змінюється в межах $0 \div R$ (R – радіус диска)) зі швидкістю $\vec{v}_r$, модуль якої

$$v_r = \omega r = 2\pi n r, \qquad (1.1)$$

де ω – кутова швидкість обертання; n – частота обертання.

Швидкість $\vec{v}_r$ дотична до кола радіусом r.

Рівномірний рух по колу електрона відбувається з нормальним (доцентровим) прискоренням $\vec{a}_n$, модуль якого

$$a_n = \frac{v_r^2}{r} = \omega^2 r = (2\pi n)^2 r. \qquad (1.2)$$

За другим законом Ньютона це прискорення надається силою, яка називається доцентровою,

$$\vec{F}_{дцr} = m\vec{a}_n; \qquad (1.3)$$

модуль сили

$$F_{\text{дцr}} = m\left(2\pi n\right)^2 r\,, \tag{1.4}$$

де m – маса електрона.

Отже, *доцентрова сила, що діє на електрон, залежить від відстані* r від осі обертання.

Під дією цієї сили електрони переміщуються в напрямку осі обертання (див. рис. 1.1, *б*). Внаслідок цього, біля центру диска накопичується негативний заряд електронів, а на краю диска залишається нескомпенсований позитивний заряд атомних залишків (див. рис. 1.1, *б*). В диску утворюється радіальне електричне поле (напруженість $\vec{E}$ поля напрямлена вздовж радіуса диска (див. рис. 1.1)). З боку електричного поля на електрони буде діяти електрична сила. Рух електронів припиниться, коли електрична сила врівноважить доцентрову силу.

Оскільки доцентрова сила залежить від відстані r від осі обертання, то електрична сила $\vec{F}_{\text{er}}$ також залежить від відстані r. Отже, напруженість $\vec{E}_r$ електричного поля на нескінченно малій ділянці dr (ділянці вздовж радіуса (див. рис. 1.1, *б*)) диска залежить від r.

Електрична сила, що діє на електрон у точці диска на відстані r від осі,

$$\vec{F}_{\text{er}} = -e\vec{E}_r\,, \tag{1.5}$$

де e – модуль заряду електрона,

модуль сили

$$F_{\text{er}} = eE_r\,. \tag{1.6}$$

Рух електронів припиниться, коли

$$\vec{F}_{\text{er}} + \vec{F}_{\text{дцr}} = 0$$

або

$$\vec{F}_{\text{er}} = -\vec{F}_{\text{дцr}}\,. \tag{1.7}$$

Звідси

$$F_{\text{er}} = F_{\text{дцr}}\,. \tag{1.8}$$

Врахувавши (1.4), (1.6) і (1.8), отримуємо

$$eE_r = m\left(2\pi n\right)^2 r. \tag{1.9}$$

Звідси модуль напруженості електричного поля на відстані r від осі обертання

$$E_r = \frac{m(2\pi n)^2 r}{e}. \qquad (1.10)$$

Різниця потенціалів (напруга) на нескінченно малому відрізку *dr* на відстані *r* від осі обертання (див. рис. 1.1, *а*)

$$dU_r = E_r dr = \frac{m(2\pi n)^2 r}{e} dr. \qquad (1.11)$$

Напруга *U* між центром і краєм диска (на довжині *R*)

$$U = \int_0^R dU_r = \int_0^R E_r dr = \int_0^R \frac{m(2\pi n)^2 r}{e} dr = \frac{m(2\pi n)^2 r^2}{2e}\Bigg|_0^R = \frac{m(2\pi n)^2 R^2}{2e}$$

$$U = \frac{2m(\pi n)^2 R^2}{e}. \qquad (1.12)$$

Перевіримо формулу (1.12):

$$[U] = \text{В} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}};\ [n] = \frac{1}{\text{с}};\ [R] = \text{м};\ [m] = \text{кг};\ [e] = \text{Кл} = \text{А}\cdot\text{с};$$

$$\left[\frac{m(n)^2 R^2}{e}\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$R = 0{,}5$ м		$U = \dfrac{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot(\pi\cdot 20)^2 (0{,}5)^2}{1{,}6\cdot 10^{-19}} = 11215\cdot 10^{-12}$ В =
$n = 1200$ об/хв	20 об/с	$= 11{,}215\cdot 10^{-9}$ В $= 11{,}215$ нВ.
$m = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг		**Відповідь:** $U = 11{,}215$ нВ.
$e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл		
U — ?		

2. Диск радіусом $R = 0{,}5$ м обертається навколо осі, що проходить крізь його центр перпендикулярно до його площини, з частотою $n = 1200$ об/хв. Визначити різницю потенціалів, що виникає між центром і краєм диска, коли диск обертається в однорідному магнітному полі індукцією 20 мТл, силові лінії якого перпендикулярні до площини диска.

Аналіз

Як зазначалося в ч.1, електрони в диску рухаються по колам радіусами r (r змінюється в межах $0 \div R$) зі швидкістю $\vec{v}_r$, модуль якої

$$v_r = \omega r = 2\pi n r, \qquad (2.1)$$

де ω – кутова швидкість, n – частота обертання.

Швидкість $\vec{v}_r$ дотична до кола радіуса r диска, тобто перпендикулярна до силових ліній магнітного поля.

На кожен електрон з боку магнітного поля діє магнітна сила Лоренца

$$\vec{F}_{Лr} = -e\left[\vec{v}_r, \vec{B}\right], \qquad (2.2)$$

де e – модуль заряду електрона; $\vec{v}_r$ – швидкість електрона; $\vec{B}$ – магнітна індукція поля (див. рис. 2.1).

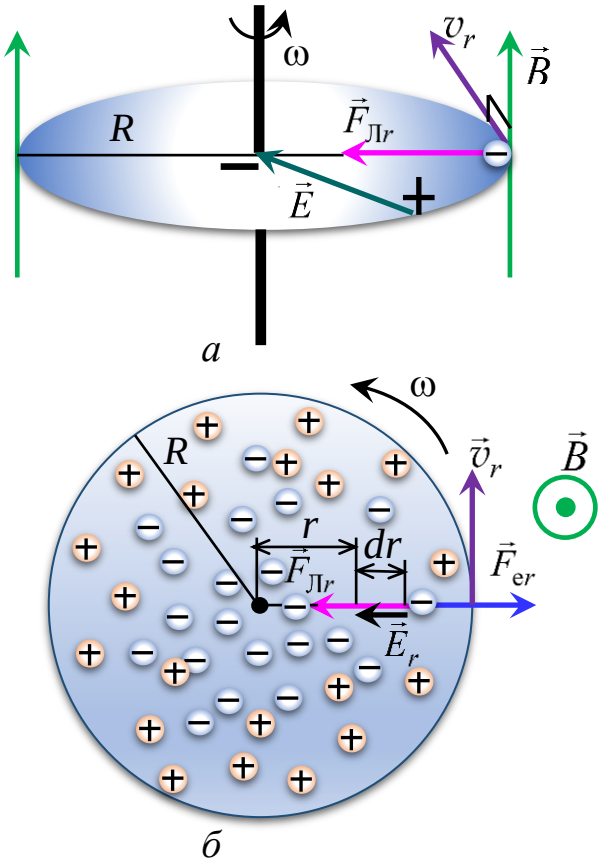


Рисунок 2.1

Напрямок сили Лоренца визначаємо *за правилом правого свердлика* або *за правилом лівої руки* (див. п. 3.9). З рис. 2.1, *а* випливає, що сила Лоренца напрямлена до центру диска (до осі обертання).

Модуль сили Лоренца

$$F_{Лr} = ev_r B\sin\alpha, \qquad (2.3)$$

де α – кут між $\vec{v}_r$ і $\vec{B}$; v_r – модуль швидкості електрона; B – модуль магнітної індукції поля.

Сила Лоренца залежить від радіуса r кола, по якому рухається електрон.

Оскільки $\alpha = 90^\circ$, тоді, врахувавши формулу (2.1), отримуємо

$$F_{Лr} = ev_r B\sin 90^\circ = ev_r B = e\omega r B = e2\pi n r B. \qquad (2.4)$$

На електрони диска діє ще доцентрова сила, яка також зумовлює їхній рух до центру (див. ч.1 цієї задачі).

Порівняємо максимальні значення доцентрової сили і магнітної сили Лоренца (для r = R).

Доцентрова сила (див. ф-лу (1.4))

$$F_{\text{дцr}} = m\left(2\pi n\right)^2 r = 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot\left(2\pi\cdot 20\right)^2\cdot 0{,}5 = 7{,}2\cdot 10^{-27}\ \text{Н};$$

магнітна сила Лоренца (див. ф-лу (2.4))

$$F_{\text{Лr}} = e2\pi nrB = 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 2\pi\cdot 20\cdot 0{,}5\cdot 20\cdot 10^{-3} = 2\cdot 10^{-19}\ \text{Н}.$$

Доцентрова сила набагато менша за магнітну силу Лоренца. Отже, надалі будемо нею нехтувати.

Під дією магнітної сили Лоренца електрони рухаються вздовж радіуса диска (див. рис. 2.1, *б*) до його центру. Зрештою відбувається розділення зарядів: біля центру диска локалізуються негативно заряджені електрони, а на краю диска утворюється позитивний заряд атомних залишків. Між центром і краєм диска виникає різниця потенціалів, а в диску виникає електричне поле, силові лінії якого мають радіальний характер (див. рис. 2.1, *а*). З боку електричного поля на електрон буде діяти електрична сила. Рух електронів припиниться, коли сила Лоренца врівноважиться електричною силою.

Оскільки сила Лоренца залежить від відстані *r* від осі обертання, то електрична сила $\vec{F}_{\text{er}}$ також залежить від відстані *r*. Отже, напруженість $\vec{E}_r$ електричного поля на нескінченно малій ділянці *dr* радіуса диска також залежить від *r*.

Електрична сила, що діє на електрон у точці диска на відстані *r* від осі,

$$\vec{F}_{\text{er}} = -e\vec{E}_r, \tag{2.5}$$

де *e* – модуль заряду електрона,
модуль сили

$$F_{\text{er}} = eE_r. \tag{2.6}$$

Рух електронів припиниться, коли

$$\vec{F}_{\text{er}} + \vec{F}_{\text{Лr}} = 0$$

або

$$\vec{F}_{\text{er}} = -\vec{F}_{\text{Лr}}. \tag{2.7}$$

Звідси

$$F_{er} = F_{Лr}\,. \tag{2.8}$$

Врахувавши (2.4), (2.6) і (2.8), отримуємо

$$eE_r = e2\pi nrB. \tag{2.9}$$

Звідси напруженість електричного поля на відстані r від осі обертання

$$E_r = 2\pi nrB. \tag{2.10}$$

Різниця потенціалів на нескінченно малому відрізку dr на відстані r від осі обертання

$$dU_r = E_r dr = 2\pi nrBdr\,. \tag{2.11}$$

Напруга U між центром і краєм диска (на довжині R)

$$U = \int_0^R dU_r = \int_0^R E_r dr = \int_0^R 2\pi nrBdr = \frac{2\pi nBr^2}{2}\Bigg|_0^R = \frac{2\pi nBR^2}{2}\,.$$

$$U = \pi nBR^2\,. \tag{2.12}$$

Перевіримо формулу (2.12):

$$[U] = \text{В} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}};\ [n] = \frac{1}{\text{с}};\ [B] = \text{Тл} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2\cdot\text{А}};\ [R] = \text{м};$$

$$\left[\pi nBR^2\right] = \frac{\text{кг}\cdot\cdot\text{м}^2}{\text{с}\cdot\text{с}^2\cdot\text{А}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}}.$$

Дано:	**СІ**
$R = 0{,}5$ м	
$B = 20$ мТл	$2\cdot10^{-2}$ Тл
$n = 1200$ об/хв	20 об/с
$U - ?$	

Розв'язок:

$$U = \pi\cdot 20\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 1^2 = 125{,}6\cdot 10^{-2}\ \text{В} = 1{,}26\ \text{В}.$$

Відповідь: $U = 1{,}26$ В.

Порівняймо величини напруги, які отримані в Ч.1 і Ч.2:

1. $U_1 = 11{,}215$ нВ $= 1{,}1\cdot10^{-8}$ В; **2.** $U_2 = 1{,}26$ В, $U_1 << U_2$.

При зміні напрямку обертання диска на протилежний напрямок магнітної сили Лоренца також зміниться на протилежний. Негативно заряджені електрони будуть накопичуватися на краю диска, а в центрі буде локалізуватись позитивний заряд атомних залишків металу. Отже, зміниться полярність напруги на диску відносно полярності напруги у випадку, який розглядається в цій задачі.

Задача 14

Металевий горизонтальний стрижень довжиною $l = 1$ м обертається з частотою 15 об/с навколо вертикальної осі, яка проходить крізь один з його кінців, в однорідному магнітному полі індукцією 50 мкТл. Вісь обертання паралельна силовим лініям магнітного поля. Визначити електричну напругу між кінцями стрижня.

Аналіз

За умовою задачі стрижень металевий. В металі валентні електрони атомів узагальнені й вільно рухаються в межах об'єму кристалічної решітки, яка утворена позитивно зарядженими атомними залишками (див. задачу 13).

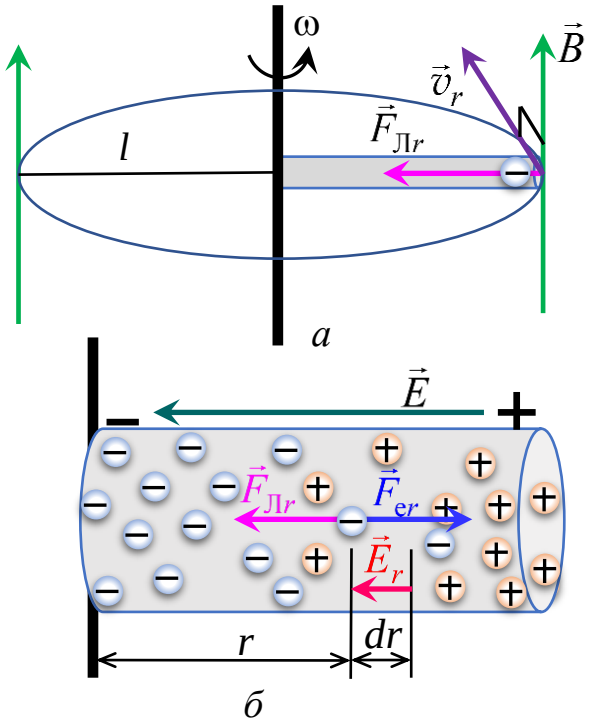


Рисунок 1

Стрижень рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω в горизонтальній площині навколо вертикальної осі в стаціонарному однорідному магнітному полі, силові лінії якого паралельні осі обертання (рисунок 1, *а*). Це означає, що кожна точка стрижня (а отже, електрон в цій точці) рухаються по колам відповідних радіусів зі швидкістю $\vec{v}_r$, модуль якої

$$v_r = \omega r = 2\pi n r, \qquad (1)$$

де r – відстань від осі обертання до даної точки (радіус кола); n – частота обертання. Швидкість $\vec{v}_r$ дотична до кола й перпендикулярна до вектора $\vec{B}$.

На кожний електрон з боку магнітного поля діє магнітна сила Лоренца

$$\vec{F}_{Лr} = -e\left[\vec{v}_r, \vec{B}\right], \qquad (2)$$

де e – модуль заряду електрона; $\vec{v}_r$ – швидкість електрона; $\vec{B}$ – магнітна індукція поля (див. рис. 1, *а*).

Напрямок сили Лоренца визначаємо *за правилом правого свердлика* або *за правилом лівої руки* (див. п. 3.9).

Модуль сили

$$F_{\text{Лr}} = ev_r B\sin\alpha\,, \tag{3}$$

де α – кут між $\vec{v}_r$ і $\vec{B}$; v_r – модуль швидкості електрона; B – модуль магнітної індукції поля.

За умовою задачі α = 90°, отже, врахувавши формулу (1), отримуємо

$$F_{\text{Лr}} = ev_r B\sin 90^\circ = ev_r B = e\omega rB = 2\pi nerB. \tag{4}$$

На електрон, окрім магнітної сили Лоренца, діє також доцентрова сила. Обґрунтування доцільності нехтування цією силою в умовах задачі було наведене в Ч.2 задачі 13. Отже, надалі будемо розглядати тільки магнітну силу Лоренца.

Під дією сили Лоренца електрони рухаються вздовж стрижня до осі обертання (див. рис. 1). Зрештою відбувається розділення зарядів: на одному кінці локалізуються негативно заряджені електрони, а на іншому — залишається нескомпенсований позитивний заряд атомних залишків. Між кінцями стрижня виникає різниця потенціалів, а в стрижні виникає електричне поле, силові лінії якого паралельні осі стрижня (див. рис. 1, *б*). З боку електричного поля на електрон буде діяти електрична сила. Рух електронів припиниться, коли сила Лоренца врівноважиться електричною силою.

Оскільки сила Лоренца залежить від відстані r від осі обертання, тоді й електрична сила $\vec{F}_{\text{er}}$ залежить від відстані r. Отже, напруженість $\vec{E}_r$ електричного поля на нескінченно малій ділянці dr стрижня також залежить від r.

Електрична сила, що діє на електрон у точці стрижня на відстані r від осі,

$$\vec{F}_{\text{er}} = -e\vec{E}_r\,, \tag{5}$$

де e – модуль заряду електрона,
модуль сили

$$F_{\text{er}} = eE_r\,. \tag{6}$$

Рух електронів припиниться, коли

$$\vec{F}_{\text{er}} + \vec{F}_{\text{Лr}} = 0$$

або

$$\vec{F}_{er} = -\vec{F}_{Лr}. \quad (7)$$

Звідси

$$F_{er} = F_{Лr}. \quad (8)$$

Врахувавши (4), (6) і (8), отримуємо

$$eE_r = e2\pi nrB. \quad (9)$$

Звідси напруженість електричного поля в стрижні на відстані r від осі обертання

$$E_r = 2\pi nrB. \quad (10)$$

Напруга на нескінченно малому відрізку dr на відстані r від осі обертання

$$dU_r = E_r dr = 2\pi nrBdr. \quad (11)$$

Напруга U між кінцями стрижня (на довжині l)

$$U = \int_0^l dU_r = \int_0^l E_r dr = \int_0^l 2\pi nrBdr = \frac{2\pi nBr^2}{2}\Big|_0^l = \frac{2\pi nBl^2}{2}.$$

$$U = \pi nBl^2. \quad (12)$$

Перевіримо формулу (12):

$$[U] = \text{В} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}};\ [n] = \frac{1}{\text{с}};\ [B] = \text{Тл} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2\cdot\text{А}};\ [l] = \text{м};$$

$$\left[nBl^2\right] = \frac{\text{кг}\cdot\cdot\text{м}^2}{\text{с}\cdot\text{с}^2\cdot\text{А}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$l = 1$ м		$U = \pi\cdot 15\cdot 5\cdot 10^{-5}\cdot 1^2 = 235{,}5\cdot 10^{-5}$ В =
$B = 50$ мкТл	$5\cdot 10^{-5}$ Тл	$= 2{,}36\cdot 10^{-3}$ В $= 2{,}36$ мВ.
$n = 15$ об/с		
$U - ?$		**Відповідь:** $U = 2{,}36$ мВ.

Задача 15

Маємо котушку індуктивності (соленоїд) довжиною 40 см і радіусом 2 см. Обмотка котушки виконана з мідного дроту, радіус поперечного перетину якого 0,5 мм. Котушка підключена до джерела постійного струму (рисунок 1, *а*). В деякий момент часу

котушка замикається шматком дроту, а джерело струму відключається (див. рис. 1, *б*). Протягом якого часу після відключення джерела сила струму в колі зменшиться в 3 рази? .

Аналіз

В замкненому електричному колі (див. рис. 1, *а*) тече струм силою

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}}{R}, \tag{1}$$

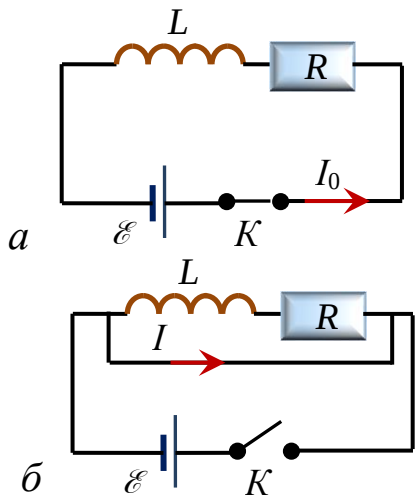


Рисунок 1

де $\mathscr{E}$ – Е.Р.С. джерела; R – загальний опір кола, який складається з опору обмотки котушки, опору з'єднувальних дротів і внутрішнього опору джерела. Опір з'єднувальних дротів і внутрішній опір джерела зазвичай набагато менші за опір обмотки котушки, тому надалі ними знехтуємо. Отже, R – опір котушки.

При замиканні котушки сила струму в колі буде зменшуватися за законом

$$I = I_0 e^{-t/\tau}, \tag{2}$$

де $\tau = \frac{L}{R}$ – постійна часу або час релаксації: R – опір, L – індуктивність котушки.

Час t_n, протягом якого сила струму зменшиться в n разів, визначимо зі співвідношення

$$n = \frac{I_0}{I} = \frac{I_0}{I_0 e^{-t_n/\tau}} = e^{t_n/\tau}. \tag{3}$$

Звідси

$$\ln n = \frac{t_n}{\tau},$$

$$t_n = \tau \ln n = \frac{L}{R} \ln n. \tag{4}$$

Опір котушки

$$R = \rho \frac{l_0}{S_0}, \tag{5}$$

де ρ – питомий опір міді; l_0 – довжина дроту котушки; S_0 – площа поперечного перетину дроту.

Площа

$$S_0 = \pi r_0^2, \tag{6}$$

де r_0 – радіус поперечного перетину дроту.

Довжина дроту

$$l_0 = 2\pi r N, \tag{7}$$

де N – кількість витків котушки; r – радіус поперечного перетину котушки.

Тоді

$$R = \rho \frac{2\pi r N}{\pi r_0^2}. \tag{8}$$

Індуктивність котушки без осердя

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S, \tag{9}$$

де μ_0 – магнітна стала; l – довжина, S – площа поперечного перетину, N – кількість витків котушки.

Площа

$$S = \pi r^2, \tag{10}$$

де r – радіус поперечного перетину котушки.

Тоді

$$L = \mu_0 \frac{N^2 \pi r^2}{l}. \tag{11}$$

Витки котушки щільно прилягають один до іншого, тому кількість витків

$$N = \frac{l}{d_0} = \frac{l}{2r_0}, \tag{12}$$

де l – довжина котушки; d_0 – діаметр, r_0 – радіус дроту обмотки.

Тоді

$$R = \rho \frac{2\pi r l}{\pi r_0^2 2 r_0} = \frac{\rho r l}{r_0^3}, \tag{13}$$

$$L = \mu_0 \frac{N^2 \pi r^2}{l} = \mu_0 \frac{l^2 \pi r^2}{(2r_0)^2 l} = \frac{\mu_0 l \pi r^2}{4 r_0^2}. \tag{14}$$

Час релаксації

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{\mu_0 l \pi r^2 r_0^3}{4 r_0^2 \rho r l} = \frac{\mu_0 \pi r r_0}{4\rho}. \tag{15}$$

Тоді

$$t_n = \frac{\mu_0 \pi r r_0}{4\rho} ln\, n. \tag{16}$$

Перевіримо формулу (16):

$$[t_n] = \text{с};\ [\mu_0] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2};\ [r] = [r_0] = \text{м};\ [\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{с}^3 \cdot \text{А}^2};\ [ln\, n] = 1;$$

$$\left[\frac{\mu_0 r r_0}{\rho} ln\, n\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{А}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3} = \text{с}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$l = 40$ см	$4 \cdot 10^{-1}$ м	$t_n = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8}} ln\, 3 = 6{,}37 \cdot 10^{-4}$ с =
$r = 2$ см	$2 \cdot 10^{-2}$ м	$= 0{,}637 \cdot 10^{-3}$ с $= 0{,}637$ мс.
$r_0 = 0{,}5$ мм	$5 \cdot 10^{-4}$ м	
$\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м		
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$		
$n = 3$		
$t_n - ?$		**Відповідь:** $t_n = 0{,}637$ мс.

Задача 16

До джерела постійного струму з $\mathscr{E} = 1$ В під'єднані два горизонтально розташовані паралельні металеві стрижні. Відстань між стрижнями 15 см. Стрижні знаходяться в однорідному магнітному полі індукцією 2 Тл з вертикальними силовими лініями. По стрижням під дією сил магнітного поля ковзає зі швидкістю 1,5 м/с прямолінійний відрізок дроту

опором 0,05 Ом. Опором джерела струму й стрижнів можна знехтувати. Визначити повну потужність, що віддається в електричне коло.

Аналіз

На рухому перетинку (прямолінійний відрізок дроту) діють сили (рисунок 1):

1. з боку магнітного поля *сила Ампера*

$$\vec{F}_{\text{A}} = I\left[\vec{l}, \vec{B}\right], \tag{1}$$

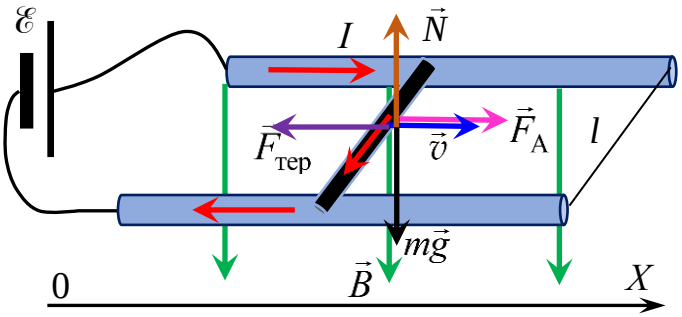


Рисунок 1

де $\vec{l}$ – вектор, довжина якого дорівнює довжині перетинки, а напрямок збігається з напрямком струму в провіднику, $\vec{B}$ – магнітна індукція; I – сила струму в колі; модуль сили Ампера

$$F_{\text{A}} = IBl\sin\alpha = IBl, \tag{2}$$

де $\alpha = 90^{\circ}$ – кут між $\vec{l}$ і $\vec{B}$;

2. з боку гравітаційного поля Землі *сила тяжіння* $m\vec{g}$ (m – маса перетинки; $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння), яка напрямлена вертикально вниз;

3, з боку стрижнів: *нормальна сила реакції опори* $\vec{N}$ (напрямлена вертикально вгору) і сила тертя ковзання $\vec{F}_{\text{тер}}$ (напрямлена в бік, протилежний швидкості $\vec{v}$ руху перетинки). В задачі розглядаємо однорідну перетинку, тому всі сили прикладені в її центрі тяжіння.

За другим законом Ньютона

$$\vec{F}_{\text{A}} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}} + m\vec{g} = m\vec{a}, \tag{3}$$

де $\vec{a}$ – прискорення перетинки.

За умовою задачі перетинка рухається з постійною швидкістю $\vec{v}$. Отже,

$$\vec{F}_{\text{A}} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}} + m\vec{g} = 0. \tag{4}$$

Це означає, що алгебраїчна сума проєкцій сил на будь-який напрямок дорівнює нулю. Зокрема на вісь $0X$, паралельну стрижням,

$$F_{\text{A}x} + F_{\text{тер}x} = F_{\text{A}} - F_{\text{тер}} = 0.$$

Звідси

$$F_{\text{A}} = F_{\text{тер}}. \tag{5}$$

Робота A_1 сили Ампера на шляху Δx за час Δt

$$A_1 = F_{\text{A}}\Delta x\sin\varphi = F_{\text{A}}\Delta x\sin 0^{\text{o}} = IBl\Delta x, \tag{6}$$

де $\varphi = 0^{\text{o}}$ – кут між напрямками сили Ампера й переміщення перетинки.

Потужність, що використовується на рух перетинки,

$$P_1 = \frac{A_1}{\Delta t} = \frac{IBl\Delta x}{\Delta t} = IBlv. \tag{7}$$

При проходженні струму по провіднику він нагрівається. За законом Джоуля-Ленца кількість теплоти, що виділяється в перетинці за час Δt,

$$Q = RI^2\Delta t\,, \tag{8}$$

де R – опір провідника; I – сила струму в перетинці.

Потужність, що використовується на нагрівання перетинки,

$$P_2 = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{RI^2\Delta t}{\Delta t} = RI^2. \tag{9}$$

Повна потужність, що віддається в електричне коло

$$P = P_1 + P_2 = IBlv + RI^2,$$

$$P = IBlv + RI^2\,. \tag{10}$$

Визначимо силу струму I в колі. При руху перетинки в магнітному полі зростає магнітний потік, що вона перетинає. Отже, в перетинці виникає Е.Р.С. індукції (див. задачу 11)

$$\mathscr{E}_i = -vBl\,, \tag{11}$$

де v – швидкість, l – довжина перетинки.

За правилом Ленца індукційний струм має напрямок, протилежний напрямку струму, що зумовлений джерелом живлення. Прийнявши, що крім джерела постійного струму з Е.Р.С. $\mathscr{E}$ в колі діє джерело струму з Е.Р.С. $\mathscr{E}_i$, можна нарисувати відповідну електричну схему (рисунок 2). За умовою задачі внутрішнім опором джерела живлення та опором стрижнів нехтуємо, тому R – опір перетинки.

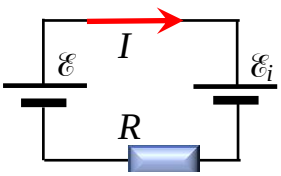


Рисунок 2

За законом Ома сила струму в колі

$$I=\frac{\mathscr{E}-\left|\mathscr{E}_i\right|}{R}. \tag{12}$$

Врахувавши (11), отримаємо

$$I=\frac{\mathscr{E}-Bvl}{R}. \tag{13}$$

Підставимо (13) в (10)

$$P=\frac{\left(\mathscr{E}-Bvl\right)Blv}{R}+R\left(\frac{\mathscr{E}-Bvl}{R}\right)^2=\frac{\left(\mathscr{E}-Bvl\right)Blv}{R}+\frac{\left(\mathscr{E}-Bvl\right)^2}{R}=$$

$$=\frac{1}{R}\left(\left(\mathscr{E}-Bvl\right)Blv+\left(\mathscr{E}-Bvl\right)^2\right)=\frac{\mathscr{E}}{R}\left(\mathscr{E}-Bvl\right).$$

$$P=\frac{\mathscr{E}}{R}\left(\mathscr{E}-Bvl\right). \tag{14}$$

Перевіримо формулу (14):

$$\left[P\right]=\text{Вт}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3};\ \left[\mathscr{E}\right]=\text{В}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}};$$

$$\left[B\right]=\text{Тл}=\frac{\text{кг}}{\text{с}^2\cdot\text{А}};\left[l\right]=\text{м};\ \ \left[v\right]=\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\left[R\right]=\text{Ом}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{А}^2\cdot\text{с}^3};$$

$$\left[\frac{\mathscr{E}}{R}\left(\mathscr{E}-Blv\right)\right]=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{А}^2\cdot\text{с}^3}{\text{с}^3\cdot\text{А}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2}\left(\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{А}\cdot\text{с}}+\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}}\right)=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3}.$$

Дано:	**СІ**	**Розв'язок:**
$\mathscr{E}=1\text{В}$		$P=\frac{1\cdot}{5\cdot10^{-2}}\left(1-2\cdot15\cdot10^{-2}\cdot1{,}5\right)=11\,\text{Вт}.$
$l=15\,\text{см}$	$15\cdot10^{-2}\,\text{м}$	
$B=2\,\text{Тл}$		
$v=1{,}5\,\text{м/с}$		
$R=0{,}05\,\text{Ом}$		
$P-?$		**Відповідь:** $P=11\,\text{Вт}.$

4.8 ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

Надайте визначення явища електромагнітної індукції.

Сформулюйте правило Ленца. Проілюструйте його застосування.

Надайте визначення магнітного потоку і потокозчеплення.

Сформулюйте закон електромагнітної індукції (закон Фарадея).

Опишіть роботу генератора змінного струму. Як ефективно збільшити максимальне значення напруги на виході генератора?.

Надайте визначення явища самоіндукції. Запишіть закон Фарадея для Е.Р.С. самоіндукції.

Надайте визначення індуктивності провідного контуру. Отримайте вираз для індуктивності довгого соленоїда.

Надайте визначення явища взаємної індукції. Запишіть закон Фарадея для Е.Р.С. взаємної індукції.

Наведіть приклад практичного застосування явища взаємної індукції.

Наведіть відомі вам види трансформаторів та області їхнього використання.

Отримайте формулу для визначення магнітної енергії струму.

Отримайте формулу для визначення об’ємної густини енергії магнітного поля.

Опишіть перехідні процеси, що відбуваються в електричному *L*-*R* колі.

4.9. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Квадратна рамка стороною 12 см, яка має 100 витків, розташована в однорідному магнітному полі індукцією 10 мТл так, що силові лінії поля утворюють кут $\varphi = 60^{\circ}$ із площиною рамки. При видаленні рамки за межі поля протягом деякого часу в ній виникла середня Е.Р.С. індукції $\langle \mathscr{E}_i \rangle = 5$ В. Визначити час видалення рамки.

Відповідь: $\Delta t = 2{,}49$ мс.

2. Колова рамка радіусом 2 см підвішена в однорідному магнітному полі індукцією $B = 0{,}4$ Тл так, що її площина перпендикулярна до силових ліній поля. Опір контуру 2 Ом. Визначити середнє значення індукційного струму в рамці при її повороті на 90° протягом $\Delta t = 0{,}1$ мс навколо осі, що знаходиться в площині рамки й проходить крізь її центр.

Відповідь: $\langle I_i \rangle = 2{,}5$ А.

3. Обмотка одношарового соленоїда без осердя довжиною $l = 20$ см і радіусом 2 см має $N = 200$ витків. Сила струму в обмотці $I = 5$ А. Визначити середню Е.Р.С. самоіндукції, що виникає в соленоїді, якщо сила струму рівномірно зменшується до нуля за $\Delta t = 20$ мс.

Відповідь: $\mathscr{E}_{si} = 78{,}9$ мВ.

4. Індуктивність довгого соленоїда без осердя 0,1 Гн, довжина $l = 20$ см, кількість витків обмотки $N = 100$. Сила струму в обмотці $I = 5$ А. Визначити енергію магнітного поля в соленоїді й об'ємну густину енергії магнітного поля.

Відповідь: $W = 1{,}25$ Дж; $w_м = 3{,}93$ Дж/м^3.

5. Одновиткова рамка площею 20 см^2 рівномірно обертається з кутовою швидкістю $\omega = 20$ рад/с в однорідному магнітному полі індукцією 4 мТл. Вісь обертання рамки знаходиться в її площині й перпендикулярна до силових ліній поля. Визначити миттєве значення Е.Р.С. індукції, що відповідає куту повороту рамки $\omega t = 30^0$ за умови, що початкова фаза Е.Р.С. індукції $\varphi_0 = 0$.

Відповідь: $\left|\mathscr{E}_i\right| = 80$ мкВ.

6. Провідна рамка площею 300 см^2 має 50 витків. Вона розташована в однорідному магнітному полі перпендикулярно до силових ліній поля. При повороті рамки на ½ оберту протягом 0,3 с в ній виникає середня Е.Р.С. індукції 100 мВ. Визначити модуль магнітної індукції.

Відповідь: $B = 0{,}01$ Тл.

7. Провідник довжиною 50 см рухається зі швидкістю 2 м/с перпендикулярно до силових ліній однорідного магнітного поля напруженістю $H = 20$ А/м. Визначити напруженість електричного поля в провіднику.

Відповідь: $E = 50{,}2$ мкВ/м.

8. Дві котушки мають взаємну індуктивність $M = 50$ мГн. Опір обмоток котушок однаковий і дорівнює 5 Ом. В першій котушці сила струму зменшується зі швидкістю $\Delta I_1/\Delta t = 5$ А/с. Визначити середнє значення індукційного струму, що виникає в другій котушці.

Відповідь: $\langle I_2 \rangle = 50$ мА.

9. Одновиткова прямокутна рамка зі сторонами $a = 5$ см і $b = 7$ см розташована в однорідному магнітному полі індукцією 20 мТл перпендикулярно до силових ліній. Визначити середню Е.Р.С. індукції, що виникає в рамці, коли з неї роблять квадратну рамку протягом 10 с.

Відповідь: $\langle \mathscr{E}_i \rangle$ = 0,2 мкВ.

10. Визначити, скільки витків дроту діаметром 0,5 мм, товщиною ізоляції якого можна знехтувати, треба намотати щільно виток до витка на пластиковий циліндричний каркас діаметром 1,5 см, щоб отримати одношарову котушку індуктивністю 100 мкГн?

Відповідь: N = 225.

11. Сила струму в соленоїді рівномірно зростає від 0 до 10 А за 6 с. За цей час енергія магнітного поля в соленоїді зростає до 20 Дж. Визначити середню Е.Р.С. самоіндукції, що виникає в обмотці соленоїда.

Відповідь: $\langle \mathscr{E}_{si} \rangle = 0{,}67$ В.

12. При зміні сили струму в котушці індуктивністю L в n разів енергія магнітного поля змінилась на ΔW. Визначити початкові значення сили струму I_1 й енергії W_1.

Відповідь: $I_1 = \sqrt{\dfrac{2\Delta W}{L\left(n^2-1\right)}}$; $W_1 = \dfrac{\Delta W}{n^2-1}$.

13. Котушка діаметром 10 см, обмотка якої має 100 витків, знаходиться в однорідному магнітному полі, індукція якого змінюється з часом. Площина котушки перпендикулярна до силових ліній поля. Визначити швидкість зміни індукції поля за час, протягом якого в обмотці котушки виникає середня електрорушійна сила 50 В.

Відповідь: $\left|\Delta B/\Delta t\right| = 63{,}7$ Тл/с.

14. Обмотку котушки індуктивністю L_1, що виконана з дроту діаметром d_1, замінили на обмотку з дроту такої ж довжини, але вдвічі меншого діаметра. У скільки разів індуктивність L_2 нової котушки відрізняється від L_1? В обох випадках витки щільно прилягають один до іншого.

Відповідь: $L_2 = 2L_1$.

15. Лінійна щільність витків обмотки одношарового соленоїда без осердя дорівнює n = 100 см$^{-1}$. Довжина соленоїда l = 16 см, радіус його поперечного перетину r = 3 см. Швидкість зміни струму в обмотці dI/dt = 5 А/с. Визначити: Е.Р.С. самоіндукції.

Відповідь: $\left|\mathscr{E}_{si}\right|$ = 0,28 В.

РОЗДІЛ 5. ОСНОВИ ТЕОРІЇ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

5.1. ПОЯСНЕННЯ ЯВИЩА ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ІНДУКЦІЇ, ЩО НАДАНІ ФАРАДЕЄМ І МАКСВЕЛЛОМ. ВИХРОВЕ ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ. ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ

Фарадей пояснював явище електромагнітної індукції як наслідок дії магнітного поля на електричні заряди, що рухаються відносно джерел магнітного поля. Водночас другий дослід Фарадея свідчить про те, що в нерухомому замкненому контурі, який знаходиться в магнітному полі, яке змінюється з часом, виникає електричний струм.

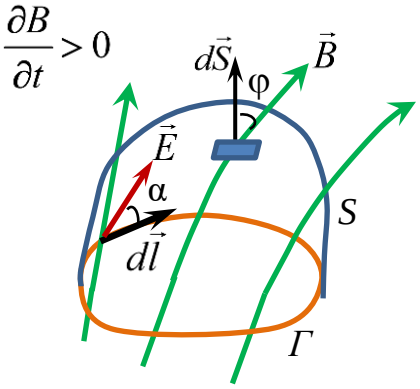


Рисунок 5.1

Англійський вчений Дж. К .Максвелл запропонував наступне пояснення цьому явищу: магнітне поле, що змінюється з часом, породжує електричне поле незалежно від наявності замкненого провідного контуру. Контур слугує тільки для виявлення електричного поля.

Циркуляція напруженості $\vec{E}$ цього поля вздовж будь-якого замкненого контуру Γ (рисунок 5.1) дорівнює

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \qquad (5.1)$$

де $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ – швидкість зміни магнітного потоку крізь поверхню S, яка спирається на контур Γ.

Знак часткової похідної підкреслює той факт, що контур і поверхня, яка на нього спирається, нерухомі, а зміна магнітного потоку відбувається тільки внаслідок зміни індукції магнітного поля.

Оскільки

$$\Phi = \int_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S}, \qquad (5.2)$$

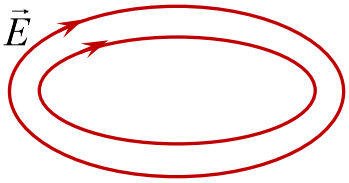
тоді

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \,. \qquad (5.3)$$

Це електричне поле не є потенціальним. **Силові лінії поля замкнені.** (рисунок 5.2). Силові поля зі замкненими силовими лініями називаються вихровими полями.

Електричне поле, що виникає при зміні магнітного поля, є вихровим.

Отже, між електричним і магнітним полями існує глибокий зв'язок. Тому електричне й магнітне поля розглядаються як складники єдиного **електромагнітного поля.**



Силові лінії вихрового електричного поля

Рисунок 5.2

5.2. СТРУМИ ФУКО. СКІН-ЕФЕКТ

Індукційні струми, що виникають в масивному провіднику під час його руху в магнітному полі або під впливом змінного магнітного поля, називаються **вихровими струмами або струмами Фуко.**

Площини струмів Фуко перпендикулярні до площин силових ліній змінного магнітного поля. Електричний опір масивних провідників малий, тому струми Фуко досягають дуже великої величини. Внаслідок цього вони можуть мати як позитивний, так і негативний ефект.

Вихрові струми фактично були відкриті *французьким вченим Д. Ф. Араго* в 1824 р. В своїх дослідах він використав мідний диск, розташований на одній осі з магнітною стрілкою. При обертанні диска магнітна стрілка теж починала обертатись. Проте, Араго не зміг пояснити це явище. Воно отримало назву *явища Араго* й було пояснене через кілька років *Фарадеєм* на основі закону електромагнітної індукції. Фарадей досліджував обертання мідного диска між полюсами підковоподібного магніту. Вісь і край диска були підключені до гальванометра. При обертанні диска в ньому виникав струм, який реєструвався гальванометром. Вихрові струми були детально досліджені *французьким фізиком Ж. Б. Фуко* (1819 – 1868 рр.) й названі його іменем. Він також відкрив явище нагрівання вихровими струмами металічних тіл, що обертаються в магнітному полі.

ВИКОРИСТАННЯ СТРУМІВ ФУКО

Вихрові струми досить широко використовуються в різних приладах і пристроях. Розглянемо деякі з них.

1. ГАЛЬМУВАННЯ МАСИВНИХ ДЕТАЛЕЙ, ЩО ОБЕРТАЮТЬСЯ

Коли масивна металева деталь перетинає силові лінії магнітного поля, тоді в її елементах виникають вихрові струми. При взаємодії струмів із магнітним полем виникають електродинамічні сили (сили Ампера), які створюють значні протидійні моменти.

Магнітно-індукційне гальмування широко застосовується *для заспокоювання рухомих частин електровимірювальних приладів*. Зокрема вихрові струми використовуються для гальмування рухомої частини електровимірювальних приладів магнітоелектричної системи (див. підрозділ 3.7), електричних лічильників, тахометрів, сейсмографів *тощо*.

2. ЗНЕГАЖУВАННЯ ВАКУУМНИХ ПРИЛАДІВ

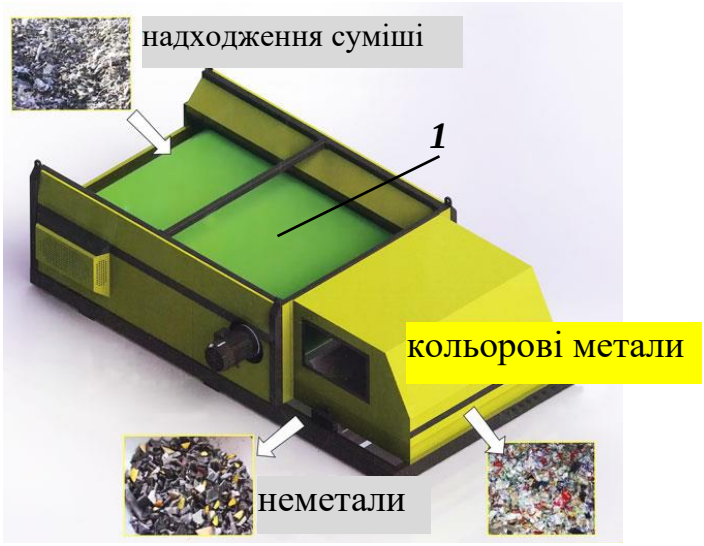
В деяких випадках використання вихрових струмів дозволяє виконувати технологічні операції, які неможливі в інших умовах. Наприклад, при виготовленні вакуумних приладів і пристроїв із балона необхідно ретельно відкачати повітря та інші гази. Проте, в металевій арматурі, що міститься всередині балона, є залишки газу, які можна видалити тільки після його заварювання. Для остаточного знегажування арматури вакуумний прилад розміщується в магнітному полі високочастотного генератора. Вихрові струми, що виникають в арматурі, розігрівають її до сотень градусів, залишки газів при цьому нейтралізуються.

3. ВИХРОСТРУМОВЕ СОРТУВАННЯ КОЛЬОРОВИХ МЕТАЛІВ І НЕМЕТАЛІВ

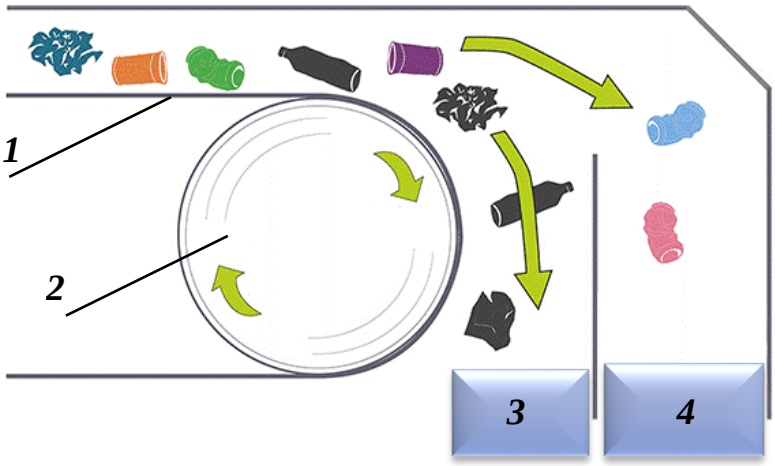
Вихрострумовий сепаратор (рисунок 5.3) має такі компоненти: кільцеву конвеєрну стрічку *1*, магнітний ротор (ролик) змінної полярності *2*, бункер для неметалевих виробів *3*, бункер для металевих деталей *4*.

Вихідна суміш провідних (метали) і непровідних (діелектрики) матеріалів спрямовується гумовою конвеєрною стрічкою до робочої зони магнітного ротора. При обертанні ротора з великою частотою створюється обертове високочастотне магнітне поле. При проходженні металевих предметів по барабану під дією змінного поля в них наводяться струми Фуко, які перпендикулярні до силових ліній магнітного поля. Внаслідок взаємодії вихрових струмів і магнітного поля ротора виникає електродинамічна сила —

сила Ампера, яка змінює траєкторію металевих предметів відносно траєкторії неметалевих матеріалів (див. рис. 5.3, *б*). Металеві предмети виштовхуються через розділювач у бункер *4*, а неметалеві матеріали (пластик, скло *та інш.*) просто прокочуються по ротору й падають під дією власної ваги в бункер *3*.



а



б

Вихрострумовий сепаратор
https://eko.tw/vihrevoy-separator.html

Рисунок 5.3

Зауважимо, що на першому етапі обов'язково виконується відсортування предметів або деталей з феромагнітних матеріалів з метою запобігання значного нагрівання суміші.

ОБЛАСТІ ВИКОРИСТАННЯ ВИХРОСТРУМОВИХ СЕПАРАТОРІВ:

- обробка відходів ливарного виробництва *в металургії*;
- видалення неметалевих включень з кольорового металу *на заводах з перероблювання брухту кольорових і чорних металів*;

- виділення кольорових металів із подрібненого матеріалу *на підприємствах з утилізації автомобілів*;
- виділення кольорових металів із електронного та електричного брухту *на підприємствах з утилізації електричного та електронного обладнання*;
- видалення алюмінієвих кришок у секторі вторинного перероблювання відходів битої скляної тари (бита лікеро-горілчана тара та банки) *на заводах скляної промисловості*;
- вилучення кольорових металів із промислових і побутових відходів *на сміттєпереробних лініях*;
- видалення металів із відпалу, що отриманий з *установок для спалювання відходів*;
- сепарація кольорових металів *із макулатури при її утилізації*;
- видалення латунних заклепок і шарнірів *у секторі вторинного перероблювання деревини*;
- усунення домішок із потоків переробленого пластику *для захисту установок для литва під тиском*;
- *очищення потоків гірських і мінеральних порід*.

4. ВИХРОСТРУМОВИЙ КОНТРОЛЬ

- **ВИПРОБУВАННЯ ЗВАРНИХ ШВІВ**

Вихрострумовий тестер https://www.onestopndt.com/ndt-articles/eddy-current-testing-applications

Рисунок 5.4

Вихрострумові тестери (рисунок 5.4) використовуються для виявлення тріщин у зварних залізних швах. Перевага цього методу полягає в тому, що можна виявити тріщини навіть крізь шари фарби. Недоліком є високий рівень шуму, що виникає внаслідок зміни відносної магнітної проникності в зварному шві. Обладнання для вихрострумового контролю поділяється на дві категорії: перша — високочастотні прилади для виявлення поверхневих тріщин у кольорових і чорних компонентах, друга — прилади для обстеження приповерхневих тріщин у деталях із кольорових металів.

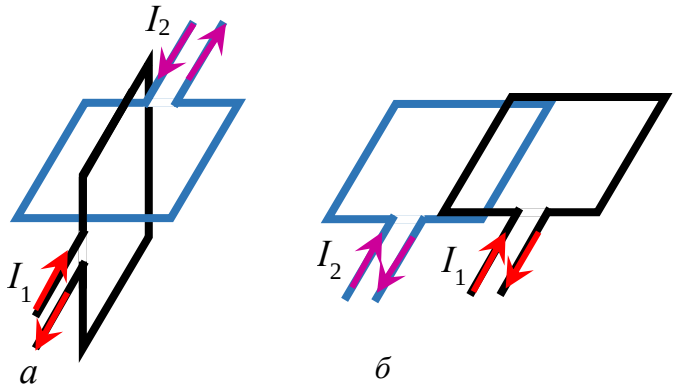
- **ВИМІРЮВАННЯ ТОВЩИНИ ПОКРИТТЯ.**
- **ВИПРОБУВАННЯ ТРУБОК І ДРОТІВ НА НАЯВНІСТЬ В НИХ ДЕФЕКТІВ.**

5. МАГНІТО-ГІДРОДИНАМІЧНІ (МГД) НАСОСИ — НАСОСИ ДЛЯ ПЕРЕКАЧУВАННЯ РОЗПЛАВЛЕНОГО МЕТАЛУ

Індукційний МГД насос призначений для перекачування рідких лужних металів у промислових установках і ядерних реакторах.

Розплавлений метал потрапляє до області, де існує бігуче або обертове магнітне поле. В металі виникають вихрові струми. Внаслідок взаємодії магнітного поля зі струмами виникає електродинамічна сила, яка викликає рух розплаву по каналу насоса.

На рисунку 5.5 наведено принципи отримання біжучого і обертового магнітних полів.



Створення магнітних полів:
а – обертового; ***б*** –біжучого

Рисунок 5.5

Обертове магнітне поле (див. рис. 5.5, *а*): по двом взаємно перпендикулярним рамкам течуть струми силами $I_1 = I_{10}\sin\omega t$ і $I_2 = I_{20}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Індукція результівного магнітного поля $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$. Вектор $\vec{B}$, не змінюючись за модулем, обертається з постійною частотою $n = \frac{\nu}{p}, \text{об/с}$ (ν – частота струмів; p – кількість пар полюсів (при двох рамках p = 1).

Біжуче магнітне поле (див. рис. 5.5, *б*): по двом рамкам, які знаходяться в одній площині, течуть струми силами $I_1 = I_{10}\sin\omega t$ і $I_2 = I_{20}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Індукція результівного магнітного поля $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ і магнітне поле переміщується в площині рамок зі швидкістю $v = 2\tau\nu, \text{м/с}$ (ν – частота струмів; τ – полюсний поділ (при двох рамках дорівнює ширині рамки).

Електричний зв’язок між розплавом і зовнішнім електричним колом відсутній, бо стінки каналу непровідні. Зазвичай канал керамічний. Типова температура розплаву 800 ÷ 1000 °С.

6. ІНДУКЦІЙНЕ НАГРІВАННЯ

Індукційне нагрівання — метод безконтактного нагрівання високочастотними вихровими струмами електропровідних матеріалів.

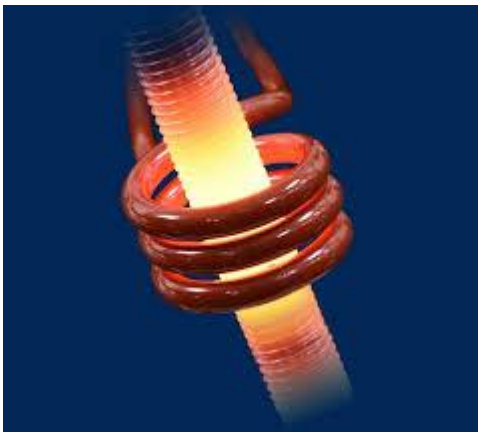


Рисунок 5.6

Електропровідна заготівля розміщується в *індукторі* (один чи декілька витків дроту (зазвичай мідного)), в якому за допомогою спеціального генератора створюються потужні струми різної частоти (від десятка Гц (герц) до кількох МГц). Внаслідок цього навколо індуктора виникає інтенсивне змінне магнітне поле, під дією якого в заготівлі виникають потужні вихрові струми, що її розігрівають (рисунок 5.6).

Система індуктор-заготівля фактично є трансформатором без осердя, в якому індуктор — первинна обмотка, а заготівля — вторинна. Магнітний потік між обмотками замикається через повітря.

На високій частоті вихрові струми витісняються власним магнітним полем у тонкі приповерхневі шари заготівлі (поверхневий ефект), що викликає різке зростання їхньої густини, і заготівля розігрівається. Нижні шари металу прогріваються шляхом теплопровідності. Суттєво, що важлива не сила струму, а його значна густина.

В приповерхневому шарі виділяється близько 86% теплоти (від загального тепловиділення). Глибина цього шару залежить від частоти магнітного поля: його товщина зменшується зі зростанням частоти. Також вона залежить від відносної магнітної проникності матеріалу заготівлі. Наприклад, на частоті 2 МГц товщина приповерхневого шару для міді складає ≈ 0,25 мм, для заліза — ≈ 0,001 мм.

Індуктор сильно нагрівається під час роботи, оскільки поглинає теплове випромінювання як своє, так і від розжареної заготівлі. Тому індуктори, зазвичай, виробляють з мідних трубок, що охолоджуються водою.

ВИКОРИСТАННЯ ІНДУКЦІЙНОГО НАГРІВАННЯ:

- плавлення, пайка й зварювання металів;
- отримання дослідних зразків сплавів;
- гнуття й термообробка деталей машин;

- ювелірна справа;
- обробка мілких деталей, які можуть бути пошкоджені при газополум'яному та дуговому нагріванні;
- загартування поверхні металевих деталей;
- загартування й термообробка деталей складної форми;
- знезаражування медичного інструменту;
- індукційні плити.

Деякі застосування розглянемо більш детально.

ІНДУКЦІЙНІ ПЛАВИЛЬНІ ПІЧКИ

Рисунок 5.7

В металургії для плавлення металів використовуються *індукційні плавильні пічки* (рисунок 5.7). Принцип їхньої дії й конструкція описані вище. Особливість полягає в тому, що параметри нагрівання підбираються так, щоб метал у тиглі повністю плавився.

Зазначимо їхні переваги.

1. Завдяки електродинамічним силам забезпечується однорідність сплаву та рівномірність хімічного складу металу. За рахунок перемішування більш легко відбуваються реакції між металом і відпалом.
2. Високий коефіцієнт корисної дії.
3. Невеликі розміри пічки.
4. Широкий та гнучкий діапазон регулювання температури й потужності.
5. Відсутність джерел забруднення, завдяки чому можливе виробництво максимально чистого металу.

ІНДУКЦІЙНІ ПОБУТОВІ ПЛИТИ

Рисунок 5.8

Індукційна плита (рисунок 5.8) має склокерамічну поверхню, під якою знаходиться мідна котушка, в якій тече високочастотний електричний струм. Магнітне поле цього струму викликає вихрові струми в днищі посуду. Дно посуду повинне бути виготовлене з феромагнітного матеріалу. Це посуд зі сталі, алюмінію й чавуну з таким дном.

Перевірити, чи підходить посуд для індукційної печі, можна скориставшись звичайним магнітом. Придатний посуд повинен намагнічуватися.

ШКІДЛИВИЙ ВПЛИВ ВИХРОВИХ СТРУМІВ

В деяких технічних пристроях вихрові струми негативно впливають на їхню роботу. Наприклад, у залізних осердях трансформаторів і частинах електричних генераторів, що обертаються, вихрові струми викликають марне нагрівання й знижують коефіцієнт корисної дії (К.К.Д.) цих пристроїв. Для послаблення вихрових струмів такі деталі виготовляють із тонких пластин з електротехнічної сталі, які розділені надтонкими шарами ізолятора так, щоб вони перетинали можливі лінії вихрових струмів (рисунок 5.9). Так обмежуються можливі контури вихрових струмів і їхня сила значно зменшується. На високих частотах така конструкція недоцільна, тому осердя виготовляють із магнітодіелектриків, в яких вихрові струми практично не виникають з причини дуже великого електричного опору.

Рисунок 5.9

СКІН-ЕФЕКТ

При протіканні високочастотного змінного струму по провіднику густина струму нерівномірно розподіляється по його об'єму й досягає максимального значення біля поверхні. Це явище називається **скін-ефектом.**

Скін-ефект теж пояснюється виникненням вихрових струмів, а отже, вихрового електричного поля. Розглянемо провідник, по якому тече змінний струм (рисунок 5.10). Струм створює змінне магнітне поле індукцією $\vec{B}$. Нехай сила струму зростає, тоді зростаюча магнітна індукція зумовить появу вихрового струму. За правилом Ленца напрямок струму на осі провідника протилежний напрямку струму в провіднику, а на поверхні збігається з напрямком струму в провіднику. Отже, вихрові струми на осі провідника перешкоджають, а на поверхні провідника сприяють змінам струму. Внаслідок, на осі провідника сила струму зменшується, а на поверхні — зростає.

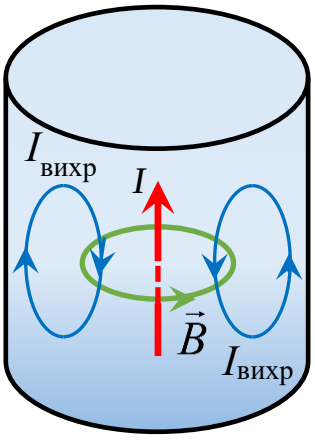


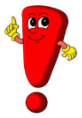
Рисунок 5.10

Рисунок 5.11

З причини скін-ефекту використання суцільних провідників для передачі електромагнітної енергії в діапазоні надвисоких частот (НВЧ) ($\nu = 3\cdot10^{9} \div 3\cdot10^{11}$ Гц) неефективне. Тому для цих цілей використовуються порожні металічні трубки — хвилеводи (рисунок 5.11).

5.3. СТРУМ ЗМІЩЕННЯ. ДОСЛІДИ РОУЛАНДА-ЕЙХЕНВАЛЬДА

Проаналізувавши різні електромагнітні процеси, Максвелл дійшов висновку, що не тільки змінне з часом магнітне поле породжує вихрове електричне поле, але й електричне поле, що змінюється з часом, повинне породжувати магнітне поле.



Отже, магнітне поле породжується не тільки струмом заряджених частинок, але й змінним електричним полем. Максвелл назвав це **змінне електричне поле струмом зміщення.**

Сила струму зміщення крізь поверхню S дорівнює

$$I_{зм} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \tag{5.4}$$

де знак частинної похідної вказує на те, що магнітне поле залежить від швидкості зміни електричного зміщення $\vec{D}$ у кожній точці поля.

Густина струму зміщення

$$\boxed{\vec{j}_{зм} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}. \tag{5.5}$$

Врахувавши струм зміщення й струм вільних зарядів, напишемо

ЗАКОН ПОВНОГО СТРУМУ

$$\boxed{\oint_\Gamma \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}}, \tag{5.6}$$

де $\vec{j}$ – густина струму вільних зарядів.

Зауважимо, що струм зміщення еквівалентний струму провідності тільки з погляду здатності створювати магнітне поле.

Г. Роуланд і О. Ейхенвальд експериментально підтвердили існування струму зміщення.

ДОСЛІДИ РОУЛАНДА Й ЕЙХЕНВАЛЬДА

Американський фізик Г. Роуланд у 1876 р. показав, що конвекційний струм вільних заряджених частинок у провіднику, що рухається, тотожний струму провідності в нерухомому провіднику. *О. Ейхенвальд* у 1901 р. експериментально встановив, що магнітне поле конвекційного струму за величиною й за напрямком тотожне полю струму провідності; він довів еквівалентність струмів зміщення й струмів провідності.

Конвекційний струм — електричний струм, зумовлений рухом зарядженого макроскопічного тіла. З погляду електронної теорії будь-яке перенесення зарядів, зрештою зумовлене конвекцією (переміщенням) заряджених мікрочастинок

Схема дослідів Ейхенвальда наведена на рисунку 5.12. Два паралельних металевих диски $Д_1$ і $Д_2$ могли обертатися навколо осей O_1 і O_2. Поблизу дисків на тонкій нитці підвішувалась легка магнітна стрілка M, вісь якої паралельна площині дисків. Стрілка містилась в провідному кожусі K, який екранував її від дії електричного поля й конвекційних потоків повітря, що виникали при обертанні дисків. На нитці підвісу було закріплене маленьке легке дзеркальце $З$. За допомогою зорової труби T і дзеркальця можна було крізь віконце O спостерігати за відхиленням стрілки. Диски заряджались різнойменно й швидко обертались одночасно чи почергово, в одному чи протилежних напрямках. Магнітна стрілка відхилялася від початкового положення в кожному з наведених випадків обертання дисків. Отже, при обертанні заряджених дисків з'являлося магнітне поле. Досліди довели, що *заряджене тіло, що рухається, створює навколо себе магнітне поле, яке подібне магнітному полю звичайного електричного струму.*

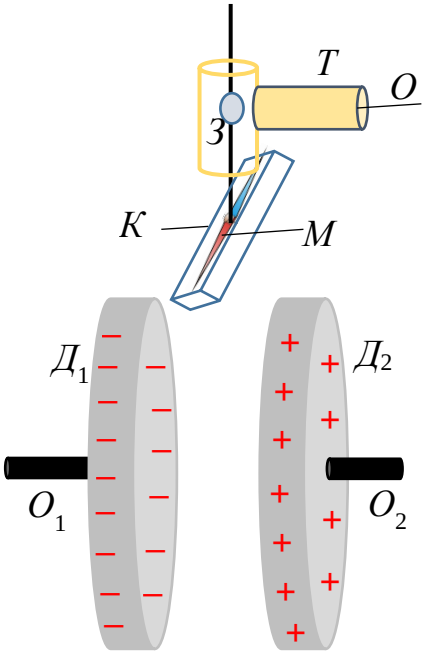


Рисунок 5.12

Обертання диска створює замкнений електричний струм у лабораторній системі відліку. Електричний струм породжує магнітне поле. Експериментально було доведено, що за магнітною дією заряд, що рухається, еквівалентний елементу струму

$$Id\vec{l} = q\vec{v}, \qquad (5.7)$$

де I – сила струму; $d\vec{l}$ – вектор, довжина якого дорівнює елементарній довжині провідника, а напрямок збігається з напрямком струму; q – електричний заряд; $\vec{v}$ – швидкість руху заряду.

Для перевірки формули (5.7) по нерухомим дискам пропускали струм від стороннього джерела живлення. Вимірювалась сила струму, що викликала відхилення магнітної стрілки як і при обертанні дисків.

На наступному етапі між зарядженими дисками розміщувався діелектрик із відносною діелектричною проникністю ε. Якщо електрична напруга між дисками постійна, то внаслідок поляризації діелектрика заряд на дисках повинен збільшуватися в ε разів. Під час обертання дисків відносно нерухомого діелектрика напруженість магнітного поля повинна зрости також в ε разів. Результати дослідів підтвердили цей висновок.

При обертанні діелектрика разом із дисками магнітне поле було таким, як і за відсутності діелектрика. Отже, будь-які заряди, що рухаються, незалежно від їхньої природи (навіть поляризаційні) створюють магнітне поле.

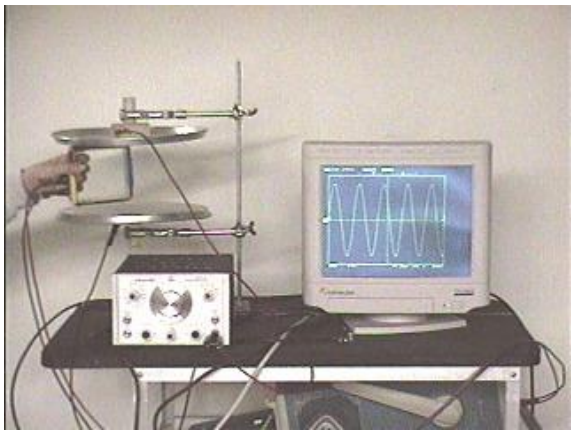


Рисунок 5.13

На рисунку 5.13 наведений сучасний варіант дослідів Роуланда-Ейхенвальда. Змінне електричне поле між пластинами конденсатора породжує вихрове магнітне поле, яке реєструється та вимірюється за допомогою провідної квадратної рамки й відображається на екрані монітора.

5.4. СИСТЕМА РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА

Максвелл узагальнив результати, що були отримані при дослідженні електричних і магнітних явищ і розробив теорію, яка пояснює ці явища з єдиних позицій, — **теорію електромагнітного поля.**

Рівняння Максвелла — фундаментальні рівняння електродинаміки нерухомих середовищ.

Рівняння Максвелла можуть бути написані в інтегральній і диференціальній (для локальних характеристик електричного й магнітного полів) формах.

Обмежимося рівняннями Максвелла в інтегральній формі.

ЧОТИРИ РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА В ІНТЕГРАЛЬНІЙ ФОРМІ

1. Узагальнений закон електромагнітної індукції: циркуляція напруженості $\vec{E}$ електричного поля по довільному контуру Γ дорівнює взятій зі знаком «–» швидкості зміни магнітного потоку крізь поверхню S, що спирається на цей контур

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}\,, \tag{5.8}$$

частинна похідна $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ відображає факт, що магнітний потік змінюється шляхом зміни в часі магнітної індукції $\vec{B}$, знак «–» є математичним відображенням правила Ленца.

Це рівняння відображає факт, що змінне з часом магнітне поле породжує вихрове електричне поле.

2. Узагальнений закон повного струму: циркуляція напруженості $\vec{H}$ магнітного поля по довільному контуру Γ дорівнює алгебраїчній сумі струмів провідності та струмів зміщення, які охоплюються цим контуром,

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}\,, \tag{5.9}$$

де $\vec{j}$ – густина струму провідності; $\int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ – сила струму провідності крізь поверхню S, що спирається на контур Γ; $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ – густина струму зміщення; $\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ – сила струму зміщення крізь поверхню S, що спирається на контур Γ.

Це рівняння відображає факт, що джерелами магнітного поля є струми провідності й струми зміщення.

3. Теорема Гаусса для поля вектора $\vec{D}$: потік електричного зміщення крізь замкнену поверхню S дорівнює електричному заряду сторонніх зарядів, що охоплені цією поверхнею

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \,, \tag{5.10}$$

де ρ – об'ємна густина сторонніх зарядів.

Це рівняння відображає факт, що джерелами електричного зміщення $\vec{D}$ є сторонні заряди.

4. Теорема Гаусса для поля вектора $\vec{B}$: магнітний потік крізь замкнену поверхню дорівнює нулю

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \tag{5.11}$$

Це рівняння відображає факт, що силові лінії магнітного поля замкнені.

МАТЕРІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ОДНОРІДНОГО ІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА, ЯКЕ НЕ МІСТИТЬ СЕГНЕТОЕЛЕКТРИКІВ І ФЕРОМАГНЕТИКІВ

Електричне зміщення

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \,, \tag{5.12}$$

де ε_0 – електрична стала; ε – відносна діелектрична проникність середовища; $\vec{E}$ – напруженість електричного поля;

магнітна індукція

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H} \,, \tag{5.13}$$

де μ_0 – магнітна стала; μ – відносна магнітна проникність середовища; $\vec{H}$ – напруженість магнітного поля;

густина електричного струму

$$j = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^*\right), \tag{5.14}$$

де σ – питома електропровідність середовища; $\vec{E}$ – напруженість електричного поля; $\vec{E}^*$ – напруженість поля сторонніх сил.

З теорії Максвелла випливає, що електричне й магнітне поля взаємозв'язані, тому має сенс тільки **єдине електромагнітне поле**, яке поширюється в просторі (як електромагнітні хвилі) зі швидкістю світла. Отже,

теорія Максвелла об’єднала розділи фізики: електрику, магнетизм і оптику, які до неї існували незалежно один від іншого.

Вирішальне значення для доведення й визнання електромагнітної теорії Максвелла мали досліди *німецького фізика Г. Герца.* В 1888 р. Герц отримав електромагнітні хвилі та дослідив їхні властивості: поглинання й заломлення в різних середовищах, відбиття від металевих поверхонь *тощо.* Він також виміряв довжину електромагнітної хвилі та швидкість її поширення, яка виявилась рівною швидкості світла.

Цікаво, що сам Герц не вірив в існування електромагнітних хвиль і своїми дослідами хотів спростувати теорію Максвелла.

За кілька років електромагнітні хвилі знайшли практичне використання у бездротовому зв’язку.

На цей час електромагнітні хвилі широко використовуються в різних галузях науки й техніки, зокрема, в медицині.

НИЗЬКОЧАСТОТНА МАГНІТОТЕРАПІЯ

НИЗЬКОЧАСТОТНА МАГНІТОТЕРАПІЯ (НМП) – лікувальне застосування магнітної компоненти змінного електромагнітного поля низької і дуже низької частоти.

Використовуються змінне, пульсівне, обертове й біжуче магнітні поля.

НМП ефективно впливає на нервову, серцево-судинну, ендокринну системи: викликає збудження нервової системи; нормалізує вегетативні функції організму; зменшує підвищений тонус судин і моторну функцію шлунку. Найбільший вплив виказують змінні та бігучі магнітні поля. Так, використовуючи обертове магнітне поле, в тканини вводять лікарські речовини (лікарський магнітофорез). Під дією НМП зростають коливання формених елементів білків крові (еритроцитів, лейкоцитів, тромбоцитів), що викликає активацію локального кровотоку, посилення кровопостачання різних органів та тканин; відбувається послаблення гладких м’язів периферичних судин, що спричиняє зменшення тиску при гіпертонії.

Показання до використання НМП: наслідки закритих травм головного мозку; захворювання й пошкодження периферичної нервової системи; діабетичний поліневрит; ішемічна хвороба серця; гіпертонічна хвороба; хвороба Рейно та інші захворювання периферичних судин кінцівок; хронічні

захворювання внутрішніх органів; переломи кісток; артроз; артрит; опіки, гнійні рани; захворювання вуха, горла, носа.

5.5 ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

Як пояснював явище електромагнітної індукції Фарадей? В чому обмеженість такого пояснення?

Наведіть пояснення явища електромагнітної індукції, надане Максвеллом.

Яке силове поле називається вихровим?

Надайте визначення та поясніть фізичну природу струму зміщення.

Опишіть досліди Роуланда-Ейхенвальда.

Надайте визначення вихрових струмів. Наведіть приклади використання струмів Фуко.

Поясніть принцип індукційного нагрівання. Де використовується індукційне нагрівання?

В чому полягає перевага індукційних плавильних пічок над доменними?

Наведіть приклади негативного впливу струмів Фуко на роботу механізмів і пристроїв та способи його зменшення.

Надайте визначення скін-ефекту. Як використовується це явище на практиці?

Напишіть систему рівнянь Максвелла. В чому полягає її значення?

Додаток 1 – Одиниці й розмірності фізичних величин

Фізична величина	Позначення	Одиниця	Розмірність
1	2	3	4
Сила струму	I	А ампер	$\dim I = I$
Електричний заряд	q	Кл кулон	Кл = А·с $\dim q = IT$
Потенціал електричного поля (електрична напруга)	φ (U)	В вольт	$\text{В} = \frac{\text{Вт}}{\text{А}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}},$ $\dim\varphi = \dim U = ML^2I^{-1}T^{-3}$
Напруженість електричного поля	E	В/м вольт/метр	$\frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^3\cdot\text{А}},$ $\dim E = MLI^{-1}T^{-3}$
Електроємність	C	Ф фарад	$\Phi = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{А}\cdot\text{с}^3}{\text{кг}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{А}^2\cdot\text{с}^4}{\text{кг}\cdot\text{м}^2},$ $\dim C = I^2T^4M^{-1}L^{-2}$
Електрична стала	ε_0	Ф/м фарад/метр	$\frac{\Phi}{\text{м}} = \frac{\text{А}^2\cdot\text{с}^4}{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}} = \frac{\text{А}^2\cdot\text{с}^4}{\text{кг}\cdot\text{м}^3},$ $\dim\varepsilon_0 = I^2T^4M^{-1}L^{-3}$
Електричний опір	R, r	Ом	$\text{Ом} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{А}\cdot\text{с}^3\cdot\text{А}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{А}^2\cdot\text{с}^3},$ $\dim R = ML^2I^{-2}T^{-3}$
Потік напруженості електричного поля	Φ_E	В·м вольт·метр	$\text{В}\cdot\text{м} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{с}^3} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{А}\cdot\text{с}^3},$ $\dim\Phi_E = ML^3I^{-1}T^{-3}$
Магнітна індукція	B	Тл тесла	$\text{Тл} = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{А}\cdot\text{с}^2},$ $\dim B = MI^{-1}T^{-2}$

1	2	3	4
Напруженість магнітного поля	H	А/м ампер/метр	$\dim H = IL^{-1}$
Магнітний потік	Ф	Вб вебер	$\text{Вб} = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{с}^2}.$ $\dim \Phi = ML^2T^{-2}I^{-1}$
Потокозчеплення	Ψ	Вб вебер	$\text{Вб} = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{с}^2}.$ $\dim \Psi = ML^2T^{-2}I^{-1}$
Індуктивність	L	Гн генрі	$\text{Гн} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{А}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2},$ $\dim L = L^2MT^{-2}I^{-2}$
Відносна магнітна проникність	μ	1	$\dim \mu = I^0T^0M^0L^0$
Магнітна стала	μ_0	Гн/м генрі/метр	$\frac{\text{Гн}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2},$ $\dim \mu_0 = MLI^{-2}T^{-2}$
Намагніченість	J	А/м ампер/метр	$\dim J = IL^{-1}$
Швидкість	v	м/с метр/секунда	$\dim v = LT^{-1}$
Сила	F	H ньютон	$\text{Н} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2},$ $\dim F = MLT^{-2}$
Робота	A	Дж джоуль	$\text{Дж} = \text{Н} \cdot \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2},$ $\dim A = ML^2T^{-2}$
Енергія	W	Дж джоуль	$\text{Дж} = \text{Н} \cdot \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2},$ $\dim W = ML^2T^{-2}$
Потужність	P	Вт ват	$\frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3},$ $\dim P = ML^2T^{-3}$

Додаток 2 – Грецька й латинська абетки

Грецька абетка

Α α	альфа
Β β	бета
Γ γ	гамма
Δ δ	дельта
Ε ε	епсилон
Ζ ζ	дзета
Η η	ета
Θ θ	тета
Ι ι	йота
Κ κ	каппа
Λ λ	лямбда
Μ μ	мю
Ν ν	ню
Ξ ξ	ксі
Ο ο	омікрон
Π π	пі
Ρ ρ	ро
Σ σ ς	сигма
Τ τ	тау
Υ υ	іпсилон
Φ φ	фі
Χ χ	хі
Ψ ψ	псі
Ω ω	омега

Латинська абетка

A a	а
B b	бе
C c	це
D d	де
E e	є
F f	еф
G g	«ґе» (лат) або «же» (франц) у фізиці
H h	аш
I i	і
J j	йот
K k	ка
L l	ель
M m	ем
N n	ен
O o	о
P p	пе
Q q	ку
R r	ер
S s	ес
T t	те
U u	у
V v	ве
W w	дубль-ве
X x	ікс
Y y	ігрек
Z z	зет

Додаток 3 – **Деякі відомості з історії електрики, постійного струму й магнетизму [7]**

1600 р. – В. Гільберт опублікував трактат «Про магніт, магнітні тіла й великий магніт Землю», в якому були описані результати досліджень (понад 600 дослідів) магнітних і електричних явищ та наведені перші теорії електрики й магнетизму.

1672 р. – О. Геріке побудував першу «електричну машину». Це була велика сірчана куля, насаджена на вісь. Обертаючи кулю навколо осі, Геріке електризував її долонею.

1706 р. – Ф. Гауксбі побудував першу скляну електричну машину.

1729 р. – С. Грей відкрив явище електропровідності.

1733 р. – Ш. Дюфе ввів поняття двох флюїдів (двох видів електрики), встановив взаємне притягування різнойменних електричних зарядів і взаємне відштовхування однойменних зарядів.

1735 р. – Ш. Дюфе вперше припустив, що блискавка й грім мають електричне походження.

1742 р. – Ж. Дезагюльє ввів поняття «провідник» і «непровідник» електрики.

1745 р. – У. Клейст і П. Мушенбрук побудували перший електричний конденсатор (лейденську банку).

Г. В. Ріхман розробив і виготував перший електровимірювальний прилад — електричний вказівник.

1747 р. – Ж. Нолле виготував електроскоп.

1750 р. – Б. Франклін розробив унітарну теорію електрики, ввів поняття позитивного й негативного електричних зарядів, сформулював закон збереження електричного заряду, винайшов блискавковідвід.

1758 р. – І. Вільке відкрив явище діелектричної поляризації.

1759 р. – Ф. Епінус розробив математичну теорію електричних і магнітних явищ.

1778 р. – Дж. Валліс, А. Бругманс, Ш. Кулон розробили двофлюїдну теорію магнетизму.

1781 р. – А. Вольта побудував чутливий електроскоп.

1783 р. – А. Вольта побудував електричний конденсатор.

1784 р. – Ш. Кулон побудував оборотні ваги.

1785 р. – Ш. Кулон встановив закон взаємодії електричних зарядів (закон Кулона), виготував магнітометр.

1786 р. – Л. Гальвані відкрив електричний струм як «живу електрику».

А. Беннет встановив електропровідність полум'я.

1791 р. – Л. Гальвані опублікував «Трактат про сили електрики при рухові м'язів».

1795 р. – А. Вольта відкрив контактну електрику.

1798 р. – А. Вольта розробив перше джерело постійного струму – «стовпчик Вольта».

А. Фуркуа відкрив теплову дію електричного струму.

1801 р. – І. Ріттер запропонував хімічну теорію електрики.

У. Волластон встановив хімічну дію електричного струму.

1806 р. – К. Гротус запропонував ідею про те, що носіями електричного струму є заряджені частинки.

1811 р. – С. Пуассон поширив теорію потенціалу на явища електростатики; сформулював теорему, яка відома під назвою «теорема Пуассона».

1820 р. – А. Ампер ввів термін «електричний струм»; встановив і дослідив взаємодію постійних електричних струмів; сформулював правило правої руки (правило Ампера) для визначення напрямку магнітної індукції поля, що створене електричним струмом; висунув гіпотезу молекулярних струмів; висловив ідею про використання електромагнітних явищ для передачі сигналів.

Х. Ерстед встановив дію постійного струму на магнітну стрілку.

Ж. Біо і Ф. Савар відкрили закон, що визначає напруженість магнітного поля прямого струму. Згодом П. Лаплас узагальнив цей закон.

Д. Араго встановив намагнічування залізної тирси електричним струмом.

І. Швейггер винайшов гальванометр.

1821 р. – Г. Деві встановив залежність опору провідника від його довжини і площі поперечного перетину.

М. Фарадей встановив обертання провідника зі струмом у магнітному полі.

Х. Ерстед вперше припустив, що світло — електромагнітне явище.

1822 р. – А. Ампер виготував соленоїд.

1824 р. – Д. Араго відкрив дію магнітного диска, що обертається, на магнітну стрілку (явище Араго).

С. Пуассон застосував теорію потенціалу до магнітостатики і розвинув математичну теорію магнітної індукції.

У. Стерджен виготував електромагніт.

1826 р. – Г. Ом на основі експериментальних досліджень сформулював «закон Ома».

А. Ампер опублікував працю «Теорія електродинамічних явищ, яка розроблена виключно з дослідів».

1827 р. – Г. Ом ввів поняття «електрорушійна сила», «падіння потенціалу», «електропровідність»; вивів закон Ома теоретично.

1828 р. – Дж. Грін опублікував працю «Досвід застосування математичного аналізу в теоріях електрики й магнетизму».

1829 р. – А. С. Беккерель винайшов гальванічний елемент зі слабкою поляризацією.

1830 р. – Г. Ом вперше виміряв електрорушійну силу джерела постійного струму.

1831 р. – М. Фарадей відкрив явище електромагнітної індукції і опублікував інформацію про нього.

1832 р. – І. Піксі побудував перший генератор змінного струму, що працював на принципі електромагнітної індукції

Дж. Генрі відкрив явище самоіндукції.

М. Фарадей висловив думку, що поширення електромагнітних взаємодій є хвильовим процесом, який відбувається зі скінченною швидкістю.

1833 р. – Е. Х. Ленц сформулював правило Ленца.

П. Л. Шиллінг побудував клавішний електромагнітний телеграфний апарат.

М. Фарадей сформулював закони електролізу.

В. Вебер і К. Гаусс побудували електромагнітний телеграф, робота якого базувалась на використанні індукційних струмів.

1834 р. – М. Фарадей ввів поняття силового поля й силових ліній; постулював існування іонів (їхнє експериментальне підтвердження отримав у 1853 р.); запропонував терміни «електрод», «анод», «катіони», «аніони»,

«електроліти» та надав пояснення електролізу; відкрив екстраструми при замиканні й розмиканні електричного кола.

Ч. Уітстон запропонував метод дзеркала, що швидко обертається, для визначення швидкості поширення електрики й отримав значення 400 000 км/с.

Е.Х. Ленц експериментально довів зменшення опору металів при охолодженні.

1836 р. – К. Гаусс розробив теорію земного магнетизму.

1837 р. – М. Фарадей відкрив поляризацію діелектриків; припустив можливість поширення електричного й магнітного полів через проміжкове середовище.

К. Пуайє побудував тангенс-бусоль для вимірювання сили струму.

С. Морзе винайшов електромагнітний телеграфний апарат (апарат Морзе).

1839 р. – К. Гаусс у творі «Про сили, що діють обернено пропорційно відстані» заклав основи теорії потенціалу. В творі, зокрема, є формулювання теореми Гаусса для електростатичного поля.

1840 р. – Р. Бунзен побудував вугільно-цинковий елемент (Е.Р.С. близько 1,7 В).

Дж. Джоуль відкрив явище магнітного насичення.

1841 р. – Дж. Джоуль відкрив закон теплової дії електричного струму, який в 1842 р. незалежно встановив також Е. Х. Ленц (закон Джоуля-Ленца).

1843 р. – М. Фарадей експериментально довів закон збереження електричного заряду.

Ч. Уітстон винайшов спосіб вимірювання опору провідника (місток Уітстона).

1845 р. – Ф. Нейман розробив першу математичну теорію електромагнітної індукції.

В. Вебер розробив теорію електромагнітних явищ, встановивши закон взаємодії двох зарядів, що рухаються.

М. Фарадей відкрив діамагнетизм.

1845 – 1847 р.р. – Г. Кірхгоф сформулював правила розрахунку розгалужених електричних кіл (правила Кірхгофа).

1846 р. – М. Фарадей запропонував ідею про електромагнітну природу світла.

Створені перші фізичні лабораторії (У. Томсон, Ф. Жоллі).

1848 р. – В. Вебер виготував електродинамометр.

1850 р. – **Створено перший фізичний інститут (К. Доплер).**

1851 р. – Г. Румкорф побудував індукційну котушку (котушку Румкорфа).

1852 р. – М. Фарадей чітко сформулював поняття поля.

1853 р. – І. Гітторф встановив рух іонів в електролітах.

1854 р. – В. Вебер розробив теорію магнітних диполів.

Розроблено метод зменшення вихрових струмів.

1856 р. – Г. Кірхгоф розробив теорію електричного струму в провідниках.

1858 р. – Ю. Плюккер відкрив катодні промені.

1860 – 1865 рр. – Дж. К. Максвелл розробив теорію електромагнітного поля.

1860 р. – Г. Планте винайшов свинцевий акумулятор.

1861 р. – Дж. К. Максвелл ввів поняття «струму зміщення».

1865 р. – Дж. К. Максвелл постулював існування електромагнітних хвиль; висунув концепцію електромагнітної природи світла.

1870 р. – Г. Гельмгольц розвинув теорію електродинамічних процесів у провідних нерухомих тілах.

1871 р. – Г. Вебер розробив першу електронну теорію атома на основі його планетарної структури.

К. Варлі припустив, що катодні промені несуть негативний електричний заряд.

1873 р. – Дж. К. Максвелл опублікував «Трактат про електрику й магнетизм», в якому наведена система рівнянь Максвелла.

Почались систематичні дослідження феромагнетиків (Столєтов А.Г.)

1874 р. – Дж. Стонен висунув ідею про дискретність електричного заряду та розрахував мінімальний електричний заряд (за його розрахунками цей заряд становив 10^{-20} Кл).

1876 р. – Г. Роуланд відкрив магнітне поле конвекційних струмів (дослід Роуланда).

Е. Гольдштейн виявив відхилення катодних променів в електричному полі.

1878 – 1879 рр. – У. Крукс, дослідивши катодні промені, підтвердив їхню корпускулярну природу.

1879 р. – Е. Холл відкрив явище, яке відоме як ефект Холла.

1880 р. – А. Рігі відкрив магнітний гістерезис.

1882 р. – І. Усатін, Л. Голар виготували перший трансформатор.

А. Белл розробив телефон.

1885 р. – Т. Хьюгс відкрив скін-ефект.

1888 р. – Г. Герц експериментально довів існування електромагнітних хвиль.

1889 р. – В. Нернст розробив теорію гальванічних елементів.

1890 р. – Г. Герц і О. Хевісайд надали рівнянням Максвелла сучасну форму (рівняння Максвелла-Герца).

1895 р. – Ж. Перрен експериментально довів, що катодні промені є потоком негативно заряджених частинок.

П. Кюрі встановив існування температури (температура Кюрі), при перевищенні якої зникають феромагнітні властивості у феромагнетика.

1897 р. – Дж. Дж. Томсон відкрив електрон, виміряв його питомий заряд.

К. Браун розробив електронно-променеву гармату.

1899 р. – виявлені електрони у фотострумі (Дж. Дж. Томсон, Ф. Ленард), в ефекті термоелектронної емісії (Дж. Дж. Томсон); електрон був ідентифікований як елементарна частинка (Дж. Дж. Томсон).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Зачек І.Р., Кравчук І. М., Романишин Б. М. Габа В. М., Гончар Ф. М. Курс фізики : підручник. Львів : Бескид Біт, 2002. 376 с.

2. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики : у 3- х томах. Т. 2. Електрика і магнетизм. Київ : Техніка, 2001. 452 с.

3. Калита В. М., Дімарова О. В., Решетняк С. О. Загальна фізика. Електродинаміка. Модульне навчання : навч. посіб. : електронні текстові дані. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 144 с.

4. Іщенко О. В., Гайдай С. В., Бєда О. А. Мас-спектрометрія: підручник. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2018. 254 с.

5. Гаркуша І. П., Горбачук І. Т., Курінний В. П., Кучерук І. М., Певзнер М. Ш. Загальний курс фізики: збірник задач / за заг. ред. І. П. Гаркуші. Київ : Техніка, 2003. 560 с.

6. Лопатинський І. Є., Зачек І. Р., Середа В. М., Крушельницька Т. Д., Українець Н. А. Збірник задач з фізики : навч. посіб. Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2003. 124 с.

7. Храмов Ю. А. Фізика. Історія фундаментальних ідей, теорій та відкриттів. Київ : Фенікс, 2012. 816 с.

ЗМІСТ **Стор.**

Вступ 3

ПОЗНАЧЕННЯ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ…… 5

Розділ 1. ЕЛЕКТРИКА……... 6

1.1. ЕЛЕКТРОСТАТИКА У ВАКУУМІ…… 6

1.1.1. Предмет вчення про електрику й магнетизм. Електричний заряд. Властивості електричного заряду. Електризація тіл. Корисна та шкідлива дія електризації тіл……... 6

1.1.2. Лазерний принтер. Ксерокс……. 13

1.1.3. Закон Кулона…… 17

1.1.4. Приклади розв’язання задач…… 19

1.1.5. Електричне поле. Напруженість електричного поля. Напруженість електричного поля точкового заряду. Принцип суперпозиції електричних полів…… 22

1.1.6. Приклади розв’язання задач……..…….. 25

1.1.7. Потік напруженості електричного поля. Теорема Гаусса для електростатичного поля у вакуумі. Приклади розрахунку електростатичних полів простих систем…… 29

1.1.8. Приклади розв’язання задач…… 34

1.1.9. Робота сил електростатичного поля при переміщенні електричних зарядів……..... 42

1.1.10. Потенціальна енергія електричного заряду. Електричний потенціал. Принцип суперпозиції електричних потенціалів. Еквіпотенціальні поверхні…… 44

1.1.11. Зв’язок між потенціалом і напруженістю електростатичного поля…….. 48

1.1.12. Приклади розв’язання задач…… 49

1.2. ПРОВІДНИКИ Й ДІЕЛЕКТРИКИ В ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОМУ ПОЛІ…….. 60

1.2.1. Провідник в електростатичному полі. Явище електростатичної індукції. Електростатичний захист….. 60

1.2.2. Електричний диполь в електричному полі…… 62

1.2.3. Діелектрики. Поляризація діелектриків в електричному полі. Зв’язані електричні заряди (поляризаційні заряди). Електрична поляризованість (вектор поляризації). Сегнетоелектрики…… 63

1.2.4. Електричне зміщення…….. 66

1.2.5. Основні рівняння електростатики для діелектричного середовища……..... 67

1.2.6. Електрична ємність (електроємність) провідника. Конденсатори. Електроємність конденсаторів різної форми. Системи конденсаторів…….…... 68

1.2.7. Енергія електричного поля. Об’ємна густина енергії електричного поля……... 72

1.2.8. Приклади розв’язання задач…… 74

1.2.9. Осцилограф…….. 83

1.2.10 Питання для самоперевірки……..... 90

1.2.11 Задачі для самостійної роботи……..... 91

Розділ 2. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ……. 93

2.1. ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ І УМОВИ ЙОГО ІСНУВАННЯ. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЛЕКТРИЧНОГО СТРУМУ: СИЛА СТРУМУ, ГУСТИНА СТРУМУ. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ…….. 93

2.2. ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ…… 96

2.3. СТОРОННІ СИЛИ. ЕЛЕКТРОРУШІЙНА СИЛА……..... 98

2.4. ГАЛЬВАНІЧНИЙ ЕЛЕМЕНТ. АВТОМОБІЛЬНИЙ АКУМУЛЯТОР…… 100

2.5. ЗАКОН ОМА ДЛЯ ОДНОРІДНОЇ ДІЛЯНКИ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА. ЕЛЕКТРИЧНИЙ ОПІР ПРОВІДНИКА. ВИМІРЮВАННЯ СИЛИ СТРУМУ Й НАПРУГИ……..... 106
2.6. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ…… 110
2.7. ЗАКОН ОМА ДЛЯ НЕОДНОРІДНОЇ ДІЛЯНКИ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА. ЗАКОН ОМА ДЛЯ ЗАМКНЕНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА……. 115
2.8. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ…… 117
2.9. ЗАКОН ДЖОУЛЯ-ЛЕНЦА. ТЕПЛОВА ПОТУЖНІСТЬ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ……... 120
2.10. ТЕПЛОВА ПОТУЖНІСТЬ, ЩО ВИДІЛЯЄТЬСЯ В КОЛІ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ. КОЕФІЦІЄНТ КОРИСНОЇ ДІЇ ДЖЕРЕЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ……... 121
2.11. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ…… 123
2.12 РОЗГАЛУЖЕНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА. ПРАВИЛА КІРХГОФА……... 130
2.13. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ…… 133
2.14. ПОСЛІДОВНЕ Й ПАРАЛЕЛЬНЕ З'ЄДНАННЯ ОПОРІВ. РОЗШИРЕННЯ МЕЖ ВИМІРЮВАННЯ АМПЕРМЕТРА Й ВОЛЬТМЕТРА……. 138
2.15. ПОСЛІДОВНЕ Й ПАРАЛЕЛЬНЕ З'ЄДНАННЯ ОДНАКОВИХ ДЖЕРЕЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ…… 142
2.16. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ…… 144
2.17. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ …… 154
2.18. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ……. 156
Розділ 3. МАГНІТОСТАТИКА У ВАКУУМІ……...…. 158
3.1. МАГНІТНА ВЗАЄМОДІЯ: ВЗАЄМОДІЯ МАГНІТІВ, ДОСЛІДИ ЕРСТЕДА Й АМПЕРА……..... 158
3.2. МАГНІТНА ІНДУКЦІЯ. СИЛОВІ ЛІНІЇ МАГНІТНОГО ПОЛЯ…… 161
3.3. СИЛА АМПЕРА……..... 165
3.4. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ……..... 168
3.5. РАМКА З ПОСТІЙНИМ СТРУМОМ У СТАЦІОНАРНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ……..... 181

3.5.1. Плоска прямокутна рамка з постійним струмом у стаціонарному однорідному магнітному полі. Магнітний момент контуру з постійним струмом……..... 181
3.5.2. Плоска рамка довільної форми з постійним струмом у стаціонарному однорідному магнітному полі…… 188
3.5.3. Плоска рамка довільної форми з постійним струмом у стаціонарному неоднорідному магнітному полі…… 189
3.6. ЕЛЕКТРОДВИГУН……..... 189
3.7. ЕЛЕКРОВИМІРЮВАЛЬНІ ПРИЛАДИ МАГНІТОЕЛЕКТРИЧНОЇ СИСТЕМИ……..... 192
3.8. ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ……..... 194
3.9. СИЛА ЛОРЕНЦА……..... 198
3.10. РУХ ЗАРЯДЖЕНОЇ ЧАСТИНКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ Й МАГНІТНОМУ ПОЛЯХ ……..... 199
3.10.1 Рух зарядженої частинки в стаціонарному однорідному електричному полі……... 199
3.10.2 Рух зарядженої частинки в стаціонарному однорідному магнітному полі…… 203
3.11. ПРАКТИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ СИЛИ ЛОРЕНЦА……..... 206
3.11.1. Магнітна лінза…….. 206
3.11.2. Циклотрон…… 208
3.11.3. Мас-спектрометр…… 213
3.11.4. Ефект Холла. Датчики Холла…….. 218
3.12. РУХ ЗАРЯДЖЕНОЇ ЧАСТИНКИ В ПЕРЕХРЕЩЕНИХ (ВЗАЄМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИХ) ЕЛЕКТРИЧНОМУ Й МАГНІТНОМУ ПОЛЯХ…… 223
3.13. МАГНЕТРОН……... 229
3.14. ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ……..... 231
3.15. ЗАКОН БІО-САВАРА-ЛАПЛАСА. МАГНІТНЕ ПОЛЕ ЗАРЯДЖЕНОЇ ЧАСТИНКИ, ЩО РУХАЄТЬСЯ. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦІЇ МАГНІТНИХ ПОЛІВ……..... 243
3.16. МАГНІТНЕ ПОЛЕ ПРОСТИХ СИСТЕМ……. 247

3.16.1. Магнітне поле прямого провідника зі струмом (прямого струму) 247
3.16.2. Магнітне поле колового контуру з постійним струмом (колового струму) 250
3.17. ЗАКОН ПОВНОГО СТРУМУ ДЛЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ У ВАКУУМІ. ВИХРОВИЙ ХАРАКТЕР МАГНІТНОГО ПОЛЯ. 252
3.18. ЗАСТОСУВАННЯ ЗАКОНУ ПОВНОГО СТРУМУ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ МАГНІТНИХ ПОЛІВ..... 253
3.18.1. Магнітне поле тороїда..... 253
3.18.2. Магнітне поле довгого соленоїда..... 255
3.19. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ..... 257
3.20. МАГНІТНИЙ ПОТІК. ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ПОЛЯ ВЕКТОРА $\vec{B}$ 282
3.21. РОБОТА МАГНІТНОГО ПОЛЯ ПРИ ПЕРЕМІЩЕННІ ПРОВІДНИКА З ПОСТІЙНИМ СТРУМОМ І КОНТУРУ З ПОСТІЙНИМ СТРУМОМ У МАГНІТНОМУ ПОЛІ..... 284
3.22. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ..... 285
3.23. МАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ..... 289
3.23.1. Магнітне поле в речовині. Струми намагнічування (молекулярні струми). Намагніченість..... 289
3.23.2. Напруженість магнітного поля. Магнітна сприйнятливість й магнітна проникність речовини..... 291
3.23.3. Діамагнетики..... 293
3.23.4. Парамагнетики..... 294
3.23.5. Феромагнетики. Неможливість класичної теорії магнетизму..... 294
3.24. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ..... 297
3.25. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ 299
3.26. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ 300
Розділ 4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ..... 303
4.1. ЯВИЩЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ІНДУКЦІЇ. ДОСЛІДИ ФАРАДЕЯ. ПРАВИЛО ЛЕНЦА. ЗАКОН ФАРАДЕЯ..... 303
4.2. ГЕНЕРАТОР ЗМІННОГО СТРУМУ..... 305

4.3. ЯВИЩЕ САМОІНДУКЦІЇ. ІНДУКТИВНІСТЬ. ІНДУКТИВНІСТЬ ДОВГОГО СОЛЕНОЇДА. ЯВИЩЕ ВЗАЄМНОЇ ІНДУКЦІЇ. ВЗАЄМНА ІНДУКТИВНІСТЬ……..... 307
4.4. ТРАНСФОРМАТОР……..... 310
4.5. ВЛАСНА ЕНЕРГІЯ СТРУМУ. ЕНЕРГІЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ…… 314
4.6. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ *L*-*R* КОЛІ……..... 316
4.7. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ……..…….. 319
4.8. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ…… 360
4.9. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ…….. 360
Розділ 5. ОСНОВИ ТЕОРІЇ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ……..……... 363
5.1. ПОЯСНЕННЯ ЯВИЩА ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ІНДУКЦІЇ, ЩО НАДАНІ ФАРАДЕЄМ І МАКСВЕЛЛОМ. ВИХРОВЕ ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ. ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ……..... 363
5.2. СТРУМИ ФУКО. СКІН-ЕФЕКТ……..... 364
5.3. СТРУМ ЗМІЩЕННЯ. ДОСЛІДИ РОУЛАНДА-ЕЙХЕНВАЛЬДА…….. 372
5.4. СИСТЕМА РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА…… 374
5.5. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ……..... 378
Додаток 1 ОДИНИЦІ Й РОЗМІРНОСТІ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН..... 379
Додаток 2 ГРЕЦЬКА Й ЛАТИНСЬКА АБЕТКИ…….. 381
Додаток 3 ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ ЕЛЕКТРИКИ, ПОСТІЙНОГО СТРУМУ Й МАГНЕТИЗМУ..... 382
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ……..... 388

Навчальне видання

ГАПОЧЕНКО Світлана Дмитрівна

ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Підручник
для студентів технічних спеціальностей
усіх форм навчання

Відповідальна за випуск проф. Любченко О.А.
Роботу до видання рекомендувала проф. Любченко О.А.

В авторській редакції

План 2024 р., поз. 142

Підп. до друку: 30.09.2025. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 22,7.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул.Кирпичова, 2.

Електронне видання