

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О. М. Андреев, О. М. Андреева, А. О. Перетяцько

ЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ В КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМАХ

Навчальний посібник
для бакалаврів та магістрів усіх спеціальностей
денної та заочної форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою НТУ «ХПІ»,
протокол № 2 від 26.06.2025 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2026

УДК 534.1 + 534.5
А 65

Рецензенти:

А. В. Коваленко, канд. фіз.-мат. наук, доц., Київський національний університет імені Тараса Шевченка;
І. І. Чичура, канд. фіз.-мат. наук, завідувач кафедри приладобування, Ужгородський національний університет

Андрєєв О. М.

А 65 Лінійні коливання в консервативних системах : навчальний посібник для бакалаврів та магістрів усіх спеціальностей денної та заочної форм навчання / О. М. Андрєєв, О. М. Андрєєва, А. О. Перетяцько. Харків : НТУ «ХП», 2026. 129 с.

ISBN 978-617-05-0591-0

У навчальному посібнику наведено систематизований виклад основ теорії механічних коливань без дисипації енергії з використанням математичного апарату, доступного студентам перших курсів закладів вищої освіти. Детально розглянуто: вільні коливання гармонічного осцилятора, енергетичні характеристики та фазові траєкторії, різновиди маятників, принципи додавання гармонічних коливань та їх векторне подання. Особливу увагу приділено аналізу вимушених коливань і явища резонансу. У заключних розділах розглянуто складніші випадки: рух частинки під дією сили відштовхування від силового центру та поведінку математичного і фізичного маятника при великих відхиленнях від положення рівноваги.

Призначено для студентів бакалаврських і магістерських програм технічних та природничих спеціальностей, які вивчають загальну фізику, а також для аспірантів, що поглиблюють знання у галузі теорії коливань. Крім цього, посібник буде корисним викладачам, які читають курси з теоретичної фізики, прикладної механіки, інженерної динаміки та суміжних дисциплін, а також усім, хто прагне глибше зрозуміти фундаментальні закономірності коливальних процесів у природничих і технічних системах.

Іл. 49. Бібліогр. 7 назв.

УДК 534.1 + 534.5

© Андрєєв О. М., Андрєєва О. М.,
Перетяцько А. О., 2026
© НТУ «ХП», 2026

ISBN 978-617-05-0591-0

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1. ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ГАРМОНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА	
1.1. Гармонічні коливання.....	7
1.2. Енергія гармонічного осцилятора.....	15
1.3. Фазовий портрет гармонічного осцилятора.....	22
РОЗДІЛ 2. МАЯТНИКИ	
2.1. Математичний маятник.....	27
2.2. Фізичний маятник.....	40
2.3. Пружинний маятник.....	44
2.4. Крутильний маятник.....	46
РОЗДІЛ 3. ДОДАВАННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ	
3.1. Додавання двох гармонічних коливань одного напрямку з однаковими частотами.....	52
3.2. Додавання довільної кількості гармонічних коливань однакового напрямку та однакової частоти.....	54
3.3. Векторний спосіб додавання коливань.....	55
3.4. Додавання двох гармонічних коливань, що здійснюються у взаємно перпендикулярних напрямках.....	59
3.5. Додавання гармонічних коливань різних частот.....	64
РОЗДІЛ 4. ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ	
4.1. Вимушені коливання гармонічного осцилятора.....	67
4.2. Рух поблизу резонансу.....	75

РОЗДІЛ 5. РУХ ЧАСТИНКИ ПІД ДІЄЮ СИЛИ ВІДШТОВХУВАННЯ ВІД НЕРУХОМОГО ЦЕНТРУ

5.1. Постановка задачі.....	80
5.2. Повна енергія частинки від'ємна.....	82
5.3. Повна енергія частинки додатна.....	84
5.4. Повна енергія частинки дорівнює нулю.....	86
5.5. Фазова траєкторія частинки.....	88

РОЗДІЛ 6. РУХ МАТЕМАТИЧНОГО ТА ФІЗИЧНОГО МАЯТНИКА ПРИ ДОВІЛЬНИХ КУТАХ ВІДХИЛЕННЯ

6.1. Період та частота коливань.....	91
6.2. Повний оберт маятника (лімітаційний рух).....	102
6.3. Рух маятника поблизу верхнього вертикального положення.....	109
6.4. Фазові траєкторії маятника.....	117
6.5. Період коливального та обертального руху маятника при значеннях енергії, близьких до \tilde{E}	123
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	128

ВСТУП

Наш Всесвіт влаштований так, що в ньому на всіх рівнях, від елементарних частинок до Галактик, все знаходиться у безперервному русі, більшість цього руху можна вважати коливальним. Людина безпосередньо сприймає навколишній світ завдяки наявності двох «коливально-хвильових» каналів інформації – звукового та оптичного, налаштованих на різні діапазони частот. Звуковий канал, обумовлений пружними коливаннями повітря в діапазоні частот 20 Гц – 20 кГц. Оптичний канал являє собою коливання електромагнітного поля з частотою $\sim 10^{14}$ Гц, які розповсюджуються в просторі й дають можливість бачити світ кольоровим. Окрім цього, протягом свого розвитку людство розробило та виготовило безліч технічних систем та виробів (від музикальних інструментів до сучасних квантових приладів), в основі роботи яких лежить коливальний рух. Тому майбутній інженер або науковець під час роботи матимуть справу з коливальними процесами різної фізичної природи, вивченню яких і присвячено цей посібник, в якому розглянуто різноманітні механічні коливальні системи без дисипації енергії.

Оскільки багато об'єктів, які зустрічаються у фізиці, за певних умов можна вважати гармонічним осцилятором, то в першому розділі детально розглядаються кінематичні, динамічні, енергетичні характеристики і фазовий портрет осцилятора, який здійснює вільні гармонічні коливання. Другий розділ присвячений опису руху коливальних механічних систем, які зустрічаються в курсі загальної фізики: математичний, фізичний, пружинний та крутильний маятники.

На практиці дуже часто доводиться мати справу з тілами або системами, які одночасно беруть участь в декількох коливальних рухах, що приводить до задачі додавання коливань, яка детально розглядається у третьому розділі. Четвертий розділ зосереджений на вимушених коливаннях осцилятора під дією зовнішньої періодичної сили різної частоти, оскільки резонансні явища можуть суттєво впливати на довговічність та безпеку механічних систем. Також в цьому розділі розглянуто коливання з амплітудою, яка пульсує (биття), що відпові-

дає руху поблизу резонансу за відсутності втрат енергії коливальною системою.

Рух частинки при її відштовхуванні від силового центру докладно проаналізовано у п'ятому розділі, з метою переконатися, що інверсія знака потенційної енергії суттєво впливає на характер руху, а це своєю чергою викликає появу на фазовій площині нового класу кривих та особливої точки іншого типу.

Шостий розділ присвячений руху математичного та фізичного маятника при довільних кутах відхилення, що дозволяє глибше зрозуміти динаміку цих систем у нестандартних умовах, а саме рух маятника поблизу особливих точок, коливання маятника з гранично великими амплітудами та обертання з малими швидкостями. На прикладі математичного маятника (системи, що має два положення рівноваги та, відповідно, має на фазовій площині особливі точки двох типів) показано, що інформацію про рух складніших систем (зокрема нелінійних), можна отримати за допомогою побудови на фазовій площині, а самі рухи, за певних умов, можна описати досить простими виразами.

Перші чотири розділи містять у собі основні принципи та методи теорії коливань, які мають бути невіддільною (частина/ознака) частиною загальнофізичної освіти. У двох останніх розділах обговорюються ті питання, які виходять за рамки первинного ознайомлення з теорією, але можуть бути корисними при глибшому вивченні предмета. Таким чином, посібник виконує кілька важливих функцій. По-перше, він слугує навчальним матеріалом для студентів молодших курсів, забезпечуючи засвоєння базових понять і методів. По-друге, він може використовуватися як додаткове джерело для студентів старших курсів і аспірантів, які прагнуть поглибити свої знання. По-третє, видання стане у пригоді викладачам під час проведення лекційних і практичних занять, оскільки містить чіткі математичні виведення та ілюстративний матеріал.

РОЗДІЛ 1. ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ГАРМОНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА

1.1. Гармонічні коливання

Модель гармонічного осцилятора є однією з основних моделей, що розглядаються у фізиці коливальних процесів, оскільки за певних умов різноманітні фізичні системи можна прийняти за гармонічний осцилятор. Тому, докладно розглянемо задачу про гармонічний осцилятор, на прикладі простої та наочної механічної системи (рис. 1.1). Нехай матеріальна точка M , маса якої дорівнює m , здійснює прямолінійний рух. При цьому вважатимемо, що весь час під час руху на точку M діє лише одна сила \vec{F} , яка завжди спрямована до деякої нерухомої (фіксованої) точки O прямої, вздовж якої рухається матеріальна точка M . Абсолютна величина цієї сили прямо пропорційна відстані OM від нерухомої точки O до матеріальної точки M :

$|\vec{F}| = k \cdot OM$, де $k > 0$ – коефіцієнт

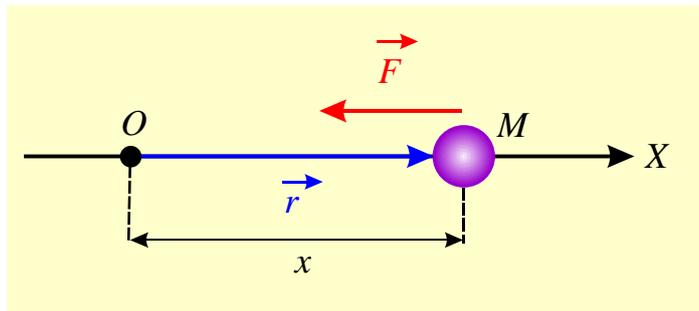


Рисунок 1.1

пропорційності. Якщо положення матеріальної точки M визначати за допомогою вектора $\vec{r} = \vec{OM}$, який проведений від нерухомої точки O до того положення, яке займає матеріальна точка в цей момент часу, то силу \vec{F} можна записати у векторній формі: $\vec{F} = -k\vec{r}$, знак « $-$ » вказує на те, що вектори \vec{F} та \vec{r} завжди мають протилежні напрямки. Спрямуємо координатну вісь OX вздовж прямої OM і прийнемо точку O за початок відліку координати, тоді положення матеріальної точки M буде визначатися координатою x (проєкцією вектора \vec{r} на вісь OX). Проєкція сили \vec{F} на вісь OX завжди буде протилежна за знаком координаті x матеріальної точки: $F_x = -kx$. З виразу для сили \vec{F} випливає, що точка O є рівноважним станом для матеріальної точки M (у цьому положенні сила \vec{F} , що діє на матеріальну точку, дорівнює нулю). Якщо в певний момент часу матеріальна точка M перебуває у положенні O у стані спокою, тоді вона залишатиметься у цьому положенні (за відсутності будь-яких зовнішніх впливів)

необмежений час. Отже, сила \vec{F} має такі властивості: вона завжди спрямована до положення рівноваги матеріальної точки, її величина прямо пропорційна відхиленню точки від цього положення. Сили, які мають наведені властивості, незалежно від їхнього походження, називають **квазіпружними** (від латинського quasi – нібито) силами.

Отримаємо рівняння руху матеріальної точки M під дією заданої сили \vec{F} . Для цього спроектуємо рівняння другого закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ на вісь OX і

підставимо проєкцію прискорення $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

$$m\ddot{x} = -kx, \text{ або } m\ddot{x} + kx = 0. \quad (1.1)$$

Розділивши обидві частини виразу (1.1) на масу матеріальної точки m і вводячи позначення

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (1.2)$$

отримаємо рівняння (1.1) в такому вигляді:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.3)$$

Однорідне диференціальне рівняння другого порядку (1.3) являє собою рівняння руху матеріальної точки M під дією квазіпружної сили \vec{F} .

Розв'язок рівняння (1.3) будемо шукати у вигляді: $x = e^{\lambda t}$, де λ – невідома величина, яка не залежить від часу. Підставляючи $x = e^{\lambda t}$ до виразу (1.3), отримаємо характеристичне рівняння для невідомого параметра λ : $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$, з якого знаходимо: $\lambda_1 = i\omega_0$ і $\lambda_2 = -i\omega_0$ (де $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця). Оскільки, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, отримаємо два лінійно незалежних¹ частинних розв'язки: $x_1(t) = e^{i\omega_0 t}$ і $x_2(t) = e^{-i\omega_0 t}$. Зважаючи на те, що рівняння (1.3) є лінійним щодо невідомої x , то будь-яка комбінація виду: $x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$, де C_1, C_2 – довільні комплексні постійні величини, також буде розв'язком цього рівняння (у чому легко пе-

¹ Функції $x_1(t)$ і $x_2(t)$ є лінійно незалежними, якщо рівність $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ виконується тільки при $c_1 = c_2 = 0$ (де c_1, c_2 – сталі величини).

реконатися безпосереднім підставленням). Тоді загальний розв'язок рівняння (1.3), як множина всіх частинних розв'язків, може бути записаний у вигляді

$$x = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}. \quad (1.4)$$

Оскільки координата x матеріальної точки M є дійсною, то функція (1.4) має дорівнювати своїй комплексно-спряженій величині ($x = x^*$). Це можливо у разі, якщо для сталих C_1, C_2 виконується рівність: $C_1 = C_2^*$. На підставі сказаного подамо ці константи у вигляді

$$C_1 = \left(\frac{A}{2}\right) e^{i\varphi}, C_2 = \left(\frac{A}{2}\right) e^{-i\varphi},$$

де A та φ – довільні дійсні сталі.

Підставляючи C_1 і C_2 до співвідношення (1.4), отримаємо

$$x = A \left(\frac{e^{i(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-i(\omega_0 t + \varphi)}}{2} \right) = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (1.5)$$

Якщо ж сталі C_1 і C_2 подати в іншому вигляді

$$C_1 = \left(\frac{A}{2i}\right) e^{i\alpha}, C_2 = -\left(\frac{A}{2i}\right) e^{-i\alpha},$$

де α – довільна дійсна стала, то розв'язок (1.4) запишеться наступним чином²:

$$x = A \left(\frac{e^{i(\omega_0 t + \alpha)} - e^{-i(\omega_0 t + \alpha)}}{2i} \right) = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (1.6)$$

чого слід очікувати, бо від (1.5) до (1.6) завжди можна перейти, за умови, що $\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2}$.

Величину x також можна подати у вигляді

$$x = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t, \quad (1.7)$$

у цьому виразі A_1 і A_2 – довільні дійсні сталі, функції $\cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t$ є лінійно незалежними та кожна з них задовольняє рівнянню (1.3), відповідно будь-яка їхня

² У співвідношеннях (1.5) та (1.6) для переходу від показникової до тригонометричної форми запису комплексного числа застосовувалась формула Ейлера: $e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$.

лінійна комбінація також є розв'язками (1.3). Вираз (1.7) також безпосередньо впливає з формул (1.5) та (1.6). Візьмемо, наприклад, розв'язання у вигляді (1.5): $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cos \varphi \cos \omega_0 t - A \sin \varphi \sin \omega_0 t$, вводячи позначення: $A_1 = A \cos \varphi$, $A_2 = -A \sin \varphi$ прийдемо до співвідношення (1.7).

Таким чином, під час руху матеріальної точки M її координата x буде періодичною функцією часу t (рис. 1.2), всі значення якої знаходяться в інтервалі $[-A, A]$. Іншими словами, матеріальна точка M під впливом квазіпружної сили \vec{F} буде здійснювати коливальний рух навколо свого положення рівноваги (навколо точки O). Коливання, у яких фізична величина змінюється з часом за гармонічним законом (за законом косинуса чи синуса), називають **гармонічними коливаннями** (див. рис. 1.2).

Ми отримали рівняння (1.3), розглядаючи найпростіший випадок – прямолінійний рух матеріальної точки під впливом заданої сили. Рівняння подібного виду використовується під час опису динаміки абсолютно різних за своєю природою і будовою фізич-

них систем. При цьому величина x може визначати, наприклад, зсув пружинного маятника від положення рівноваги, кут відхилення від вертикалі фізичного і математичного маятників, заряд на обкладках конден-

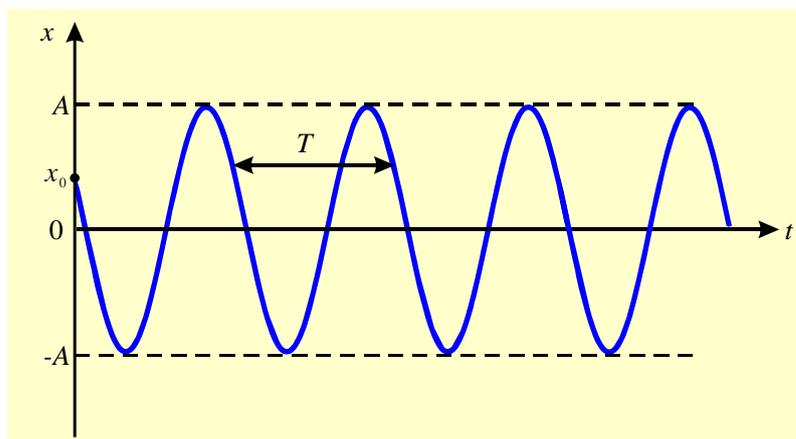


Рисунок 1.2

сатора в ідеальному коливальному контурі та інше. Будь-яка фізична система, коливання якої підпорядковуються рівнянню виду (1.3) називається **гармонічним осцилятором**.

Додатне значення величини A , яке дорівнює максимальному значенню відхилення матеріальної точки від положення рівноваги, називається **амплітудою коливання** (див. рис. 1.2). Величина $(\omega_0 t + \alpha$ или $\omega_0 t + \varphi)$, що стоїть під знаком тригонометричної функції, називається **фазою коливання** (іноді говорять повна фаза коливання). Стала φ (і відповідно α) є **початковою фазою коливання**, оскільки визначає значення фази в момент часу $t = 0$. Проміжок часу T , по закін-

ченню якого повна фаза в (1.5) і (1.6) отримує приріст 2π

$$\omega_0(t+T) + \varphi = \omega_0 t + \varphi + 2\pi,$$

називається **періодом коливань**. Цей вираз показує зв'язок між T та величиною ω_0

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (1.8)$$

Таким чином, T являє собою проміжок часу, за який величина x здійснює одне коливання (матеріальна точка проходить шлях, довжина якого дорівнює $4A$) (див. рис. 1.2).

З врахуванням (1.2) формулу (1.8) можна записати

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.8')$$

Якщо T – це час одного повного коливання, то кількість коливань, що здійснюються в одиницю часу, являє собою величину, зворотну періоду і називається **частотою коливань** ν

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (1.9)$$

Величину ω_0 , яка визначається виразом (1.2) називають **власною частотою гармонічного осцилятора**, яка відповідно до формули (1.8), дорівнює кількості коливань за 2π секунд, іноді її також називають **циклічною** або **круговою частотою**. З формул (1.8) та (1.9) маємо

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (1.10)$$

Надалі, для визначеності, будемо брати розв'язок диференційного рівняння (1.3) у вигляді (1.5). Тоді, диференціюючи за часом $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, отримаємо для проекції швидкості матеріальної точки

$$v_x \equiv \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.11)$$

Відповідно до співвідношення (1.11), проекція швидкості v_x здійснює з

частотою ω_0 гармонічні коливання, які зміщені по фазі на $\frac{\pi}{2}$ по відношенню до коливань координати x (рис. 1.3). Це означає, що в ті моменти часу, коли зміщення матеріальної точки від положення рівноваги має максимальне значення за абсолютною величиною $|x| = A$ (див. рис. 1.3), швидкість точки дорівнює нулю і, навпаки, в моменти, коли v_x максимальна за модулем, зміщення дорівнює нулю (матеріальна точка проходить положення рівноваги). Максимальне за абсолютною величиною значення швидкості (оскільки матеріальна точка здійснює прямолінійний рух, то $v \equiv |\vec{v}| = |v_x|$) – **амплітуда швидкості**, як це видно з (1.11), буде пропорційна амплітуді й частоті коливань: $v_{\max} = A\omega_0 = \frac{2\pi A}{T}$.

Зі співвідношень (1.5) і (1.11) бачимо, що через проміжок часу, що дорівнює періоду коливань T , кожен стан гармонічного осцилятора³ точно повторюється.

Диференціюючи за часом вираз (1.11), або використовуючи (1.3) та (1.5), знайдемо проєкцію прискорення матеріальної точки при гармонічних коливаннях

$$a_x \equiv \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi). \quad (1.12)$$

З формули (1.12) видно, що проєкція прискорення a_x , так само як і координата x та проєкція швидкості v_x , здійснює гармонічні коливання з частотою ω_0 (див. рис. 1.3). Максимальне за модулем значення прискорення – **амплітуда прискорення** визначатиметься виразом $a_{\max} = A\omega_0^2 = \frac{4\pi^2 A}{T^2}$ (індекс x не пишемо, оскільки матеріальна точка рухається лише вздовж осі X).

Порівнювши (1.5) та (1.12) бачимо, що різниця фаз коливань проєкції прискорення та координати дорівнює π . Тому в моменти часу, коли прискорення набуває свого максимального значення $a_x = A\omega_0^2$, координата x досягає свого мінімального значення $x = -A$ і відповідно навпаки (див. рис. 1.3), коли координата x набуває свого найбільшого значення $x = A$, прискорення набуває свого

³ стан механічної системи в кожний момент часу однозначно визначається завданням всіх її координат і швидкостей

найменшого значення $a_x = -A\omega_0^2$. Якщо дві будь-які величини здійснюють коливання подібним чином, то це вказує на те, що вони **коливаються в протифазі**. Отже, якщо різниця фаз двох величин, що коливаються, дорівнює π , то вони здійснюють коливання в протилежних фазах.

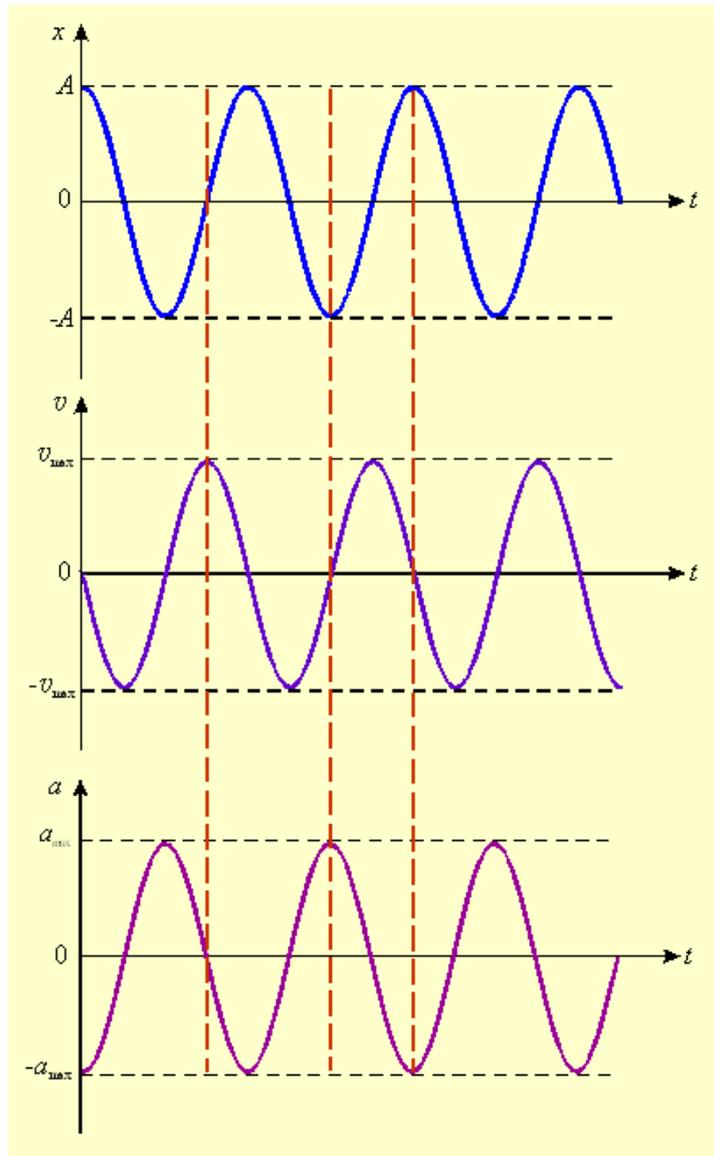


Рисунок 1.3

Зі співвідношень (1.11) і (1.12) бачимо, що коливання прискорення випереджають коливання швидкості за фазою на $\frac{\pi}{2}$. Це означає, що в ті моменти часу, коли проєкція прискорення максимальна за абсолютною величиною, швидкість дорівнює нулю (див. рис. 1.3). Оскільки коливання координати та проєкції прискорення матеріальної точки відбуваються в протифазі, то вони одночасно

досягають нульових значень (у положенні рівноваги сила, що діє на матеріальну точку, дорівнює нулю), а проєкція швидкості – набуває максимального за модулем значення (див. рис 1.3).

Як зазначалося раніше, проєкція квазіпружної сили на напрямок зміщення визначається виразом $F_x = -kx$. З іншого боку, враховуючи (1.2), можемо записати

$$F_x = -m\omega_0^2 x, \quad (1.13)$$

або враховуючи рівняння (1.5), у більш розгорнутому вигляді

$$F_x = -mA\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = mA\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi). \quad (1.14)$$

У формулі (1.14) додатна величина $F_{\max} = m\omega_0^2 A = \frac{4\pi^2 mA}{T^2}$ є **амплітудою квазіпружної сили**.

Значимо ще раз, що такі величини, як проєкції: швидкості, прискорення і квазіпружної сили змінюються з часом за гармонічним законом з тією ж частотою ω_0 і, відповідно, з тим же періодом T , що і координата x .

Значення амплітуди та початкової фази гармонічного коливання можна визначити, задавши початкові умови, що характеризують стан системи у певний початковий момент часу, наприклад, достатньо задати координати і проєкції швидкості в початковий момент часу: $x(t=0) = x_0$, $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$. Тоді, якщо підставити у формули (1.5) і (1.11) $t=0$ і прирівняти перший вираз початковому зміщенню x_0 , а другий – початковому значенню проєкції швидкості \dot{x}_0 матеріальної точки, отримаємо

$$x_0 = A \cos \varphi, \quad \dot{x}_0 = -A\omega_0 \sin \varphi.$$

Перепишемо отримані рівняння у вигляді

$$x_0 = A \cos \varphi, \quad -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0} = A \sin \varphi. \quad (1.15)$$

Для знаходження амплітуди A коливань піднесемо обидва вирази у (1.15) до квадрата та додамо їх

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}. \quad (1.16)$$

Розділивши почленно друге рівняння (1.15) на перше, отримаємо співвідношення для початкової фази φ

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}. \quad (1.17)$$

Аналогічно, за допомогою співвідношень (1.15) можна визначити довільні сталі A_1 та A_2 в загальному розв'язку (1.7)

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (1.18)$$

З формул (1.2), (1.8) і (1.8') отримуємо **важливу властивість гармонічного осцилятора**: власна частота ω_0 і період коливань T визначаються лише параметрами коливальної системи. У наведеному випадку цими параметрами є коефіцієнт пропорційності k між квазіпружною силою і зміщенням x , а також маса m матеріальної точки. Таким чином, частота (період) гармонічних коливань залежить лише від будови самої коливальної системи та не залежить від амплітуди коливань і відповідно від того, як саме система була виведена з положення рівноваги (початкових умов). Загальна **властивість лінійних коливальних систем** (тобто, коливальних систем, динаміка яких описується лінійними диференціальними рівняннями) полягає в тому, що їх власні частоти (періоди) не залежать від амплітуди коливань, це називається **ізохронністю**. Отже, **коливання гармонічного осцилятора є ізохронними**.

1.2. Енергія гармонічного осцилятора

Перш ніж записати вираз для енергії осцилятора, доведемо, що квазіпружна сила є консервативною. Для цього знайдемо роботу A , яку виконує квазіпружна сила \vec{F} під час переміщення матеріальної точки з одного довільного положення x_1 до іншого довільного положення x_2

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{k}{2} (x_1^2 - x_2^2).$$

З останньої формули видно, що робота квазіпружної сили залежить лише від початкового x_1 і кінцевого x_2 положення матеріальної точки й не залежить від шляху, що проходить матеріальна точка між цими положеннями, тому **квазіпружна сила є консервативною**.

Робота, яку виконує сила йде на приріст кінетичної енергії $\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}$ матеріальної точки: $\Delta E_k = A$. Відомо, що робота консервативної сили при переміщенні матеріальної точки з одного її положення до іншого виконується внаслідок зменшення її потенціальної енергії: $A = E_{n1} - E_{n2} = -(E_{n2} - E_{n1}) = -\Delta E_n$. Враховуючи зміну кінетичної та потенціальної енергії матеріальної точки, запишемо: $\Delta E_k = -\Delta E_n \Rightarrow \Delta(E_k + E_n) = 0 \Rightarrow E_k + E_n = \text{const}$. Сума кінетичної та потенціальної енергій є **повною механічною енергією системи**. Таким чином, **повна механічна енергія E матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання, або повна механічна енергія гармонічного осцилятора зберігається**

$$E_k + E_n = E = \text{const}.$$

Відповідно до визначення кінетичної енергії $\left(E_k = \frac{mv^2}{2}\right)$ та виразу

$A = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} = E_{n1} - E_{n2}$ можемо записати для гармонічного осцилятора наступні співвідношення

$$E_k = \frac{m}{2} \dot{x}^2, \quad E_n = \frac{k}{2} x^2. \quad (1.19)$$

Оскільки потенціальна енергія завжди визначається з точністю до довільної адитивної сталої, яка залежить від положення початку відліку потенціальної енергії, то у формулі (1.19) нульове значення E_n розташоване в положенні рівноваги ($x = 0$). Отже, згідно з (1.19) потенціальна енергія гармонічного осцилятора є квадратичною функцією координати (рис. 1.4), при цьому положенню рівноваги відповідає мінімум функції $E_n(x)$. Умови квадратичної залежності від координати та мінімуму функції $E_n(x)$ у положенні рівноваги є суттєвими. Наприклад, якщо потенціальна енергія квадратично залежить від координати:

$E_n(x) = -\frac{kx^2}{2}$ ($k > 0$), то положенню рівноваги відповідає максимум функції

$E_n(x)$. В цьому випадку матеріальна точка не буде здійснювати коливальний рух (це випадок розглядається у розділі 5).

Для визначення повної енергії гармонічного осцилятора викостаємо вирази (1.19)

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = E, \quad (1.20)$$

і сталістю енергії E осцилятора

$$\frac{m}{2}\dot{x}_0^2 + \frac{k}{2}x_0^2 = E. \quad (1.20')$$

Спочатку визначимо миттєві значення кінетичної та потенціальної енергій осцилятора, підставивши (1.2), (1.5) та (1.11) у співвідношення (1.19)

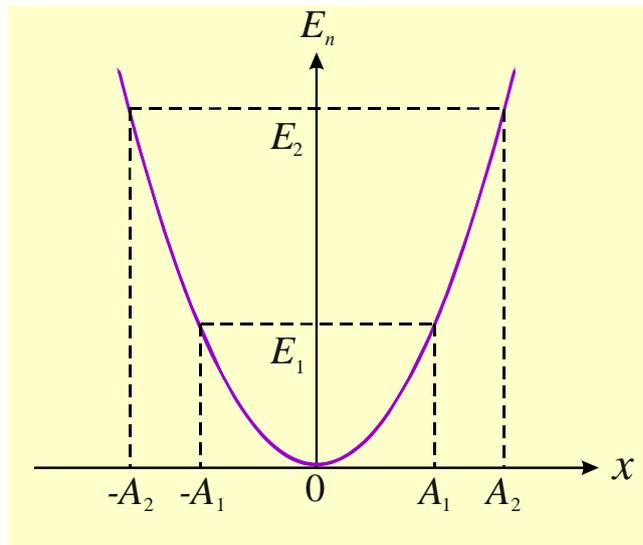


Рисунок 1.4

$$E_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (1.21)$$

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (1.22)$$

Тоді відповідно до виразів (1.21) та (1.22), повна енергія (1.20) гармонічного осцилятора буде

$$E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \quad (1.23)$$

Зі співвідношення (1.23) маємо, що залежність між амплітудою та повною енергією є взаємно однозначною, тобто, кожному певному значенню амплітуди A відповідає одне певне значення повної енергії й навпаки (див. рис. 1.4). Крім того, величина E енергії не залежить від початкової фази φ гармонічних коливань.

Варто зазначити, що сама квазіпружна сила, жодних коливань у системі не викликає. Для виникнення коливань, необхідно вивести коливальну систему з рівноважного стану будь-яким чином, тобто, надати їй деяку початкову енергію (1.20'). При заданих початкових умовах: (x_0, \dot{x}_0) , величина E у виразі

(1.20') являє собою ту початкову енергію, яку необхідно передати системі для виникнення в ній коливань, амплітуда яких дорівнює A . З (1.16) і (1.20') маємо

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\omega_0^2 x_0^2 + \dot{x}_0^2} = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad (1.23')$$

цей вираз через сталість E можна отримати з формули (1.23). Оскільки, система, що розглядається є консервативною, то вибір початку відліку часу є довільним. Отже, при кожному заданому значенні початкової енергії E , за початкові умови можна брати будь-які значення координати і швидкості, що задовольняють рівняння (1.20). А це, своєю чергою, може вплинути лише на величину початкової фази φ , яка визначається формулою (1.17). Таким чином, значення початкової фази в (1.5), (1.6) залежить лише від вибору початку відліку часу і не залежить від величини повної енергії E . Амплітуда коливань, навпаки, від початку відліку часу не залежить, вона, як це видно, з (1.23'), однозначно визначається початковою енергією, яку надають системі. Це означає, що кожному значенню амплітуди задовольняє не одна, а безліч початкових умов, що відповідають одному й тому ж значенню початкової енергії. Напроти, кожній початковій умові (x_0, \dot{x}_0) відповідає лише єдине значення амплітуди (1.16) і повної енергії (1.20'), але ця відповідність не є взаємно однозначною. Довільний вибір початку відліку часу, означає, що кожному заданому значенню амплітуди та повної енергії можна поставити у відповідність певний клас початкових умов, тобто, безліч значень x_0, \dot{x}_0 , що задовольняють співвідношенню (1.23'). Необхідно зауважити, що при кожному заданому значенні E , які б значення (x, \dot{x}) не були прийняті за початкові умови, матеріальна точка M не вийде за межі відрізка $[A, -A]$, тобто, завжди залишатиметься поблизу свого положення рівноваги. Такий стан рівноваги називають також **стійким станом рівноваги** (сказане, звісно, не є визначення стану стійкої рівноваги, а лише характеризує стан рівноваги в аналізованому випадку).

Перепишемо вирази (1.21) і (1.22), використовуючи формулу подвійного кута та рівність (1.23)

$$E_n = \frac{E}{2} \{1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)\}. \quad (1.24)$$

$$E_\kappa = \frac{E}{2} \{1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)\} = \frac{E}{2} \{1 + \cos(2[\omega_0 t + \varphi] + \pi)\}. \quad (1.25)$$

Зазначимо, що множник $\frac{E}{2}$ у формулах (1.24) та (1.25) є середнім значенням кінетичної $\langle E_\kappa \rangle$ і потенціальної $\langle E_n \rangle$ енергій за проміжок часу, який дорівнює періоду коливань T

$$\langle E_\kappa \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_\kappa(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{E}{2} \{1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)\} dt,$$

$$\langle E_n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_n(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{E}{2} \{1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)\} dt,$$

враховуючи, що $\int_0^T \cos 2(\omega_0 t + \varphi) dt = 0$, отримаємо рівність

$$\langle E_n \rangle = \langle E_\kappa \rangle = \frac{E}{2}.$$

Таким чином, з виразів (1.21) – (1.25) бачимо, що кінетична та потенціальна енергії осцилятора здійснюють гармонічні коливання з частотою $2\omega_0$ (ω_0 – частота коливань величини x) у протифазі один до одного біля своїх середніх значень, що дорівнює половині повної енергії (рис. 1.5).

Отриманий вираз (1.23) являє собою закон збереження механічної енергії, спираючись на властивості квазіпружної сили, що діє на матеріальну точку. Варто зазначити, що енергія зберігається у будь-якій фізичній системі динаміка якої описується рівнянням виду (1.3)⁴. Так, наприклад, якщо помножити обидві частини рівності (1.3) на \dot{x} , отримаємо

$$\dot{x}(\ddot{x} + \omega_0^2 x) = 0 \Rightarrow \dot{x}\ddot{x} + \omega_0^2 x\dot{x} = 0.$$

⁴ Співвідношення (1.3) можна також отримати з формули (1.20). Диференціюючи (1.20) за часом та враховуючи, що $\frac{dE}{dt} = 0$, отримаємо рівняння: $\dot{x}(\ddot{x} + \omega_0^2 x) = 0$. З якого отримуємо: $\dot{x} = 0$ – крайні положення осцилятора і перетворення на нуль виразу в дужках, що є рівнянням (1.3).

Перетворимо ліву частину виразу

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x \dot{x} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 \right],$$

і прирівняємо її з правою частиною

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 \right] = 0.$$

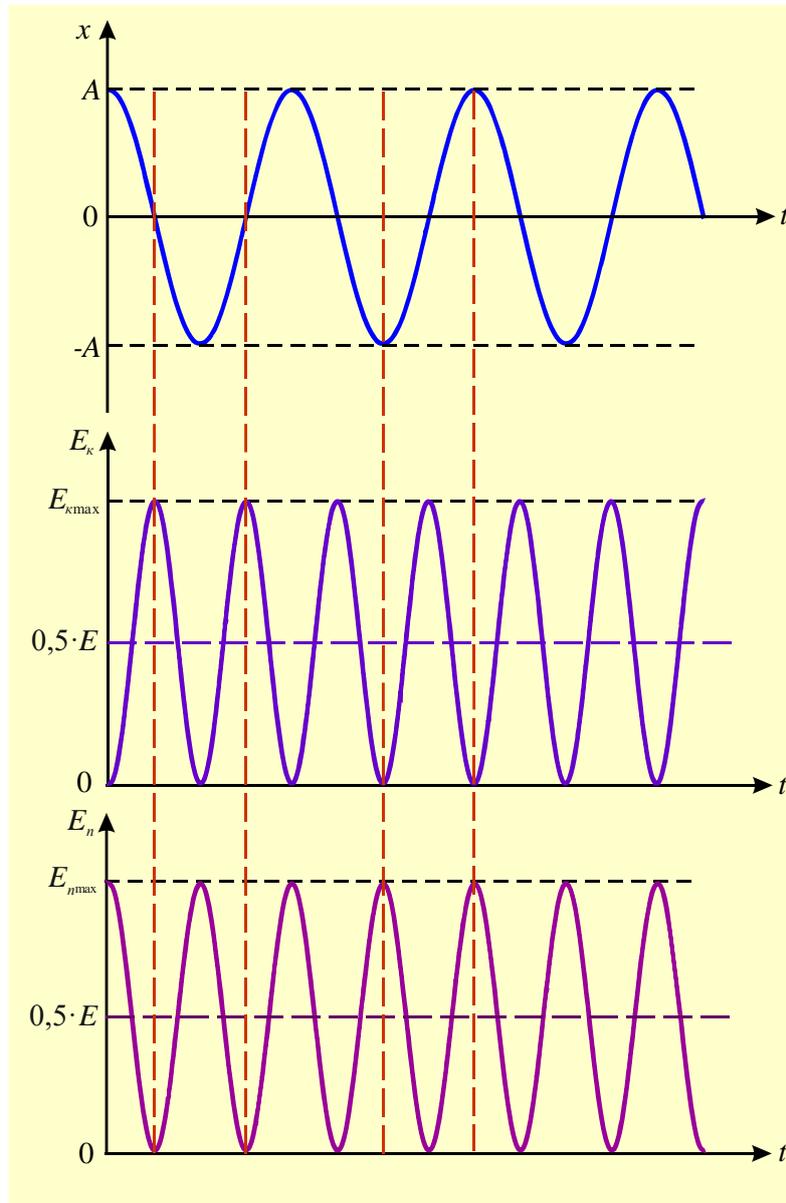


Рисунок 1.5

Рівність нулю похідної означає, що величина, що стоїть у дужках, є незмінною за часом

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 = \text{const.}$$

Отриманий вираз аналогічний формулі (1.20). Якщо врахувати (1.2), то стала, що стоїть праворуч буде: $\text{const} = \frac{E}{m}$. З вище сказаного, можна дійти висновку, що гармонічний осцилятор, якої б фізичної природи він не був, є консервативною системою.

Повернемося до співвідношень (1.5) і (1.6), які є розв'язками диференціального рівняння (1.3), що описує поведінку гармонічного осцилятора. Покажемо, що, використовуючи вираз для повної енергії (1.20), можна отримати (1.5) і (1.6) не розв'язуючи рівняння (1.3). Для цього виразимо швидкість $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ матеріальної точки з (1.20) і врахуємо (1.2)

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} - \omega_0^2 x^2}, \text{ або } \frac{dx}{dt} = \pm \omega_0 \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2} - x^2}.$$

Розділимо змінні та підставимо вираз для повної енергії осцилятора (1.23)

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \pm \omega_0 dt.$$

Проінтегруємо окремо ліву частину

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \int \frac{d(x/A)}{\sqrt{1 - x^2/A^2}} = \left\| \frac{x}{A} = \cos z \right\| = \int \frac{d \cos z}{\sqrt{1 - \cos^2 z}} = - \int dz = -z = -\arccos \frac{x}{A},$$

та праву частину

$$\int \pm \omega_0 dt = \pm(\omega_0 t + \varphi),$$

де φ – стала інтегрування.

Прирівнявши отримані співвідношення, отримаємо

$$-\arccos \frac{x}{A} = \pm(\omega_0 t + \varphi).$$

Виразивши зміщення x , прийдемо до рівняння гармонічних коливань (1.5): $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Аналогічно отримаємо розв'язок (1.6). Такий підхід, часто використовують під час дослідження коливань, або будь-яких інших

процесів і складніших за своєю будовою консервативних системах. Умова $E(t) = \text{const}$ дозволяє зменшити порядок диференціального рівняння, тобто, звести задачу до розв'язання рівняння першого порядку.

1.3. Фазовий портрет гармонічного осцилятора

Під час вивчення складних коливальних процесів не завжди вдається аналітично розв'язати диференціальне рівняння, яке описує поведінку коливальної системи. Тому вдаються до побудови та аналізу **фазового портрета – сімейства фазових траєкторій** коливальної системи. Це дає змогу отримати не повну, але значну інформацію про коливальну систему.

Розглянемо на прикладі гармонічного осцилятора побудову фазових траєкторій на фазовій площині. **Фазовою площиною** називають координатну площину, по осі абсцис якої відкладають значення координати x , а по осі ординат – значення швидкості \dot{x} (або імпульсу). Тоді кожна точка такої площини буде відповідати лише одному певному динамічному стану гармонічного осцилятора. Щоб відрізнити точку на фазовій площині від точки на звичайній координатній площині, її називають **зображувальною точкою**. Лінія $\dot{x}(x)$ на фазовій площині, якою рухається зображувальна точка, називається **фазовою траєкторією** системи.

Для побудови фазових траєкторій гармонічного осцилятора використаємо виразом для повної енергії (1.20) та формулу (1.2)

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2},$$

тоді рівняння фазової траєкторії буде

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2E/m\omega_0^2}} \right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{2E/m}} \right)^2 = 1.$$

Використовуючи співвідношення (1.23'), перепишемо останнє рівняння у спрощеному вигляді:

$$\left(\frac{x}{A} \right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{A\omega_0} \right)^2 = 1. \quad (1.26)$$

Вираз (1.26) є рівнянням еліпса в координатах (x, \dot{x}) , півосі якого, відпо-

$$\text{відно, дорівнюють: } A = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \text{ та } v_{\max} = A\omega_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Таким чином, сукупність фазових траєкторій гармонічного осцилятора являє собою сімейство подібних еліпсів, центри яких знаходяться в початку координат; зі зростанням амплітуди коливань і, відповідно, енергії, розміри еліпсів збільшуються (рис. 1.6). Напрямок руху зображувальної точки по фазовій траєкторії визначається з наступних умов: у верхній півплощині, де проєкція швидкості $\dot{x} > 0$ зображуюча буде здійснювати рух у бік збільшення координати x , в нижній півплощині, де $\dot{x} < 0$ – в бік зменшення координати x . Отже, зображувальна точка, рухається вздовж фазової траєкторії в напрямку за годинниковою стрілкою (див. рис. 1.6).

З виразу (1.26) бачимо, що через кожен точку фазової площини може проходити лише один еліпс, що відповідає певному значенню амплітуди A і повної механічної енергії E . Початкове положення зображувальної точки на еліпсі (x_0, \dot{x}_0) визначається поча-

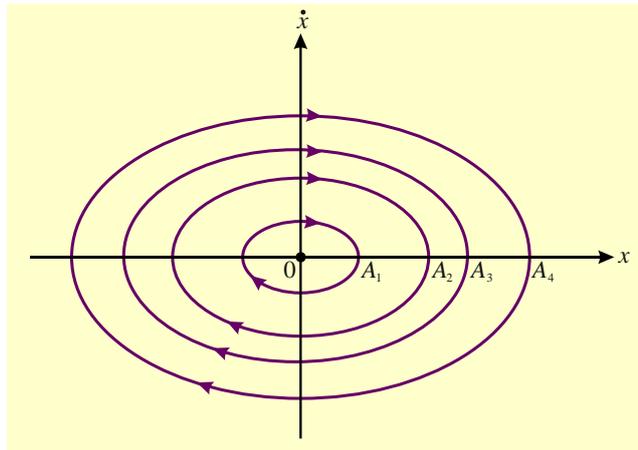


Рисунок 1.6

тковими умовами⁵. Початку координат $(x = 0, \dot{x} = 0)$ фазової площини відповідає мінімальна повна енергія осцилятора $E = 0$, що відповідає його рівноважному стану.

⁵ Вище було зазначено, що кожному заданому значенню амплітуди та енергії відповідає цілий клас початкових умов. Наочно це можна побачити завдяки побудові на фазовій площині. Так, кожному коливанню з певним заданим значенням амплітуди та повної енергії відповідає на фазовій площині лише один еліпс (1.26). За початкове положення зображувальної точки (початкові умови) можна вибрати будь-яку точку, що належить розглянутому еліпсу – жодна з точок еліпса нічим не виділена щодо всіх інших. Рівняння фазової траєкторії гармонічного осцилятора можна записати в іншому вигляді. Для цього замість швидкості \dot{x} введемо нову змінну $u = \frac{\dot{x}}{\omega_0}$. Тоді, рівняння (1.26) набуде вигляду $x^2 + u^2 = A^2$. На координатній площині змінних (x, u) (яку також як і площину (x, \dot{x}) називають фазовою площиною) замість еліпса отримуємо коло, всі точки якого абсолютні рівнозначні між собою.

Проміжок часу, протягом якого зображуюча точка робить один повний оберт, дорівнює періоду коливань $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, цей проміжок часу буде однаковим

для всіх еліпсів. Зауважемо: якщо фазова траєкторія є замкнутою кривою і час повного оберту зображувальної точки, що рухається вздовж цієї кривої кінцевий, то така фазова траєкторія відповідає періодичному руху системи.

Рівняння фазових траєкторій можна отримати безпосередньо з рівняння (1.3). Для цього позначемо: $y = \dot{x}$, тоді відповідно до з (1.3) $\dot{y} = \ddot{x} = -\omega_0^2 x$. Таким чином, замість одного диференціального рівняння другого порядку (1.3) отримаємо систему двох диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x \end{cases} \quad (1.27)$$

Якщо розділити друге рівняння системи (1.27) на перше, то приходимо до рівняння, яке вже явно не містить часу

$$\frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 \frac{x}{y} \Rightarrow y dy + \omega_0^2 x dx = 0. \quad (1.28)$$

Інтегруючи співвідношення (1.28), отримаємо:

$$\frac{y^2}{2} + \omega_0^2 \frac{x^2}{2} = c,$$

де c – стала інтегрування, яка може набувати будь-яких додатніх значень ($c = 0$, якщо $y = \dot{x} = x = 0$).

Перетворимо останній вираз до такого вигляду

$$\left(\frac{y}{\sqrt{2c}} \right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{2c / \omega_0^2}} \right)^2 = 1. \quad (1.29)$$

Отже, згідно з (1.29) інтегральні криві (1.28) є сімейством еліпсів з центром на початку координат (див. рис. 1.6). Якщо прийняти у виразі (1.29) $2c = A^2 \omega_0^2$ і врахувати, що $y = \dot{x}$, то прийдемо до рівнянь (1.26).

У загальному випадку, під час вивчення руху системи з одним ступенем свободи⁶ систему рівнянь (1.27) можна представити наступним чином

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}, \quad (1.30)$$

де f й g – деякі задані функції координати та швидкості (в останніх формулах $y = \dot{x}$ та $\dot{y} = \ddot{x}$).

Тоді замість рівняння (1.28), отримаємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}. \quad (1.31)$$

Сімейство рішень $y(x, c)$ (де c – стала інтегрування) рівняння (1.31) дає всю сукупність рухів системи. Ті точки (x_0, y_0) фазової площини в яких: $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$, називаються **особливими точками**. Оскільки рівняння (1.31) визначає тангенс кута нахилу дотичної до відповідної кривої $y(x)$, то в особливих точках напрям дотичної не визначено. Через особливу точку може проходити декілька інтегральних кривих рівняння (1.31) або не проходити жодної. У особливих точках, як це випливає з (1.30), швидкість і прискорення дорівнюють нулю ($\dot{x} = 0, \dot{y} = \ddot{x} = 0$), що відповідає рівноважним станам системи. Іншими словами, стани рівноваги системи відповідають особливим точкам рівняння (1.31) і навпаки, кожній особливій точці рівняння (1.31) відповідає стан рівноваги.

Повертаючись до (1.28) бачимо, що ця рівність дає в кожній точці фазової площини одну і лише одну дотичну до відповідної фазової траєкторії (1.26) або (1.29). Виняток становить лише початок координат ($\dot{x} = 0, \dot{y} = \ddot{x} = 0$), оскільки через цю точку не проходить жодна з фазових траєкторій (за необмеженого зменшення амплітуди коливань еліпси «стягуються» до точки). Отже, рівняння руху гармонічного осцилятора (1.27) мають одну особливу точку. **Особлива точка, оточена замкнутими фазовими траєкторіями, називається центром.**

⁶ Якщо положення системи у просторі однозначно визначається завданням одного будь-якого параметра, наприклад, декартова координата, полярний кут тощо, то кажуть, що ця система має один ступінь вільності.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення квазіпружній силі та запишіть її вираз у векторному вигляді.
2. Яке коливання називається гармонічним?
3. Від яких величин залежать чисельні значення амплітуди та частоти гармонічних коливань?
4. Запишіть рівняння гармонічних коливань.
5. Дайте визначення амплітуді та періоду коливань.
6. Яким умовам повинна задовольняти потенціальна енергія гармонічного осцилятора?
7. Яку координатну площину називають фазовою?
8. За яких умов коливання можна вважати ізохронними?

РОЗДІЛ 2. МАЯТНИКИ

2.1. Математичний маятник

Математичним маятником називають ідеалізовану систему (рис. 2.1), що складається з невагомої та нерозтяжної нитки (або стрижня), на якій підвішена маса, зосереджена в одній точці (матеріальна точка). Положення такої системи в просторі визначається заданням значень одного параметра, яким може бути наприклад, лінійне зміщення $s(t)$, визначене вздовж траєкторії від положення рівноваги (точка O), або кутове відхилення $\theta(t)$ – кут, який утворює нитка маятника довжиною l з вертикаллю, що проходить через точку підвісу та положення рівноваги. Рух маятника можна описати, наприклад, за допомогою другого закону Ньютона: $\vec{F} = m\vec{a}$.

Якщо не враховувати дисипативні сили (сили тертя та опору), то на матеріальну точку масою m буде діяти результирна сила \vec{F} (див. рис. 2.1), яка являє собою геометричну суму сили тяжіння $m\vec{g}$ і сили натягу \vec{N} нитки:

$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N}$. Зазначимо, що розглянута система є консервативною. Дійсно, сила тяжіння є консервативною силою, а сила натягу нитки перпендикулярна швидкості руху маятника, отже, роботи вона не виконує. Тому під час руху матеріальної точки під дією зазначених сил її повна механічна енергія залишається сталою.

Виберемо як параметр, що визначає положення маятника, лінійне зміщення – довжину дуги s , визначену вздовж траєкторії від положення рівноваги (точка O), і вважатимемо цю величину алгебраїчною. Напрямок додатного відліку s вибирається довільно, тому приймемо, що додатне значення s буде праворуч від положення рівноваги, а від’ємне – ліворуч. Оскільки матеріальна точка, в якій зосереджена вся маса маятника, m здійснює рух по дузі кола радіуса l ,

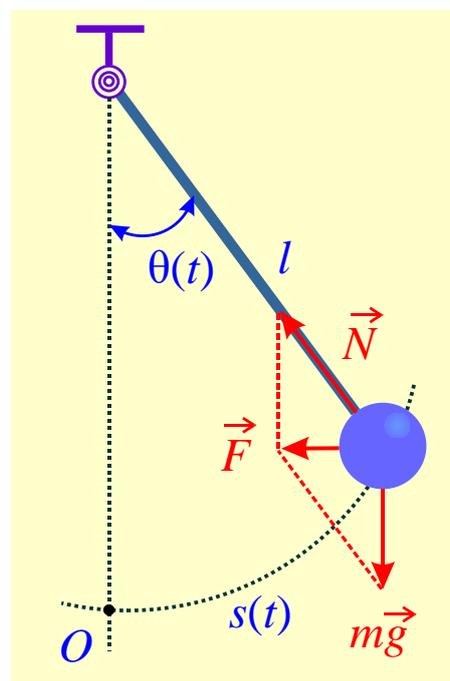


Рисунок 2.1

центр якого збігається з точкою підвісу математичного маятника, то кут відхилення θ пов'язаний з довжиною дуги s співвідношенням: $\theta = \frac{s}{l}$. За допомогою цього виразу визначають, як числове значення змінної θ , так і її знак: у положенні рівноваги $\theta = 0$, праворуч від нього $\theta > 0$, ліворуч – відповідно, $\theta < 0$.

Оскільки траєкторія матеріальної точки відома, то для запису рівнянь руху зручніше використовувати так звані **натуральні осі координат**, початок яких збігається в кожен момент з положенням матеріальної точки, а за осі координат можуть бути прийняті дотична і нормаль до траєкторії (рис. 2.2). **Нормаллю до кривої** у певній її точці називається пряма, проведена через цю точку перпендикулярно до дотичної. Додатний напрямок дотичної характеризуватимемо одиничним вектором $\vec{\tau}$, спрямованим у кожній точці траєкторії у бік додатного відліку дуги s (див. рис. 2.2), а додатний напрямок нормалі – одиничним вектором \vec{n} , спрямованим уздовж нитки до точки підвісу.

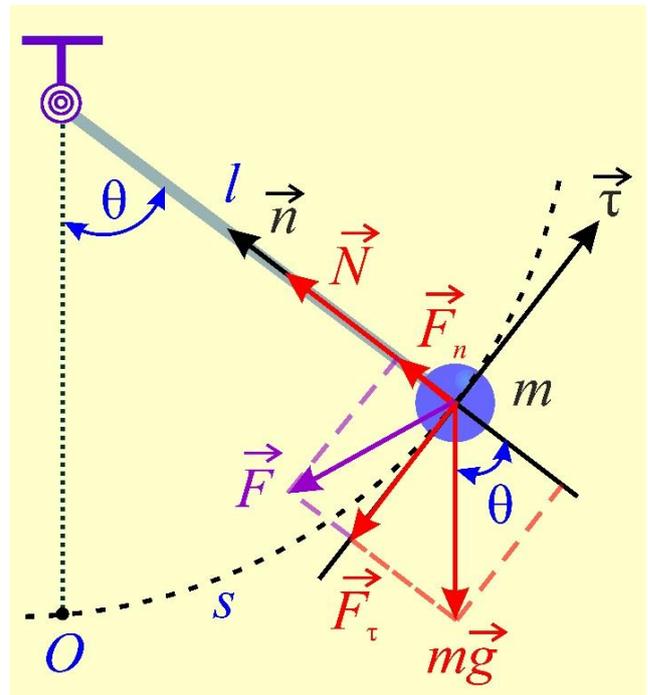


Рисунок 2.2

Розкладемо вектор результивної сили \vec{F} на дві взаємно перпендикулярні компоненти (див. рис. 2.2). Одну з яких, позначимо \vec{F}_τ , спрямована вздовж дотичної до положення рівноваги математичного маятника. Цю величину називають **тангенціальною або дотичною компонентою сили** \vec{F} . Оскільки \vec{F}_τ завжди спрямована до положення рівноваги, її також називають **повертальною силою**. Друга компонента, позначимо її \vec{F}_n , спрямована вздовж нормалі до траєкторії (вздовж нитки маятника) до точки підвісу тому її називають **нормальною компонентою**. Таким чином, силу \vec{F} можемо подати у вигляді: $\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n$. Тоді прискорення математичного маятника, відповідно до другого закону Ньютона:

$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}_\tau}{m} + \frac{\vec{F}_n}{m} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Першу компоненту прискорення \vec{a}_τ називають **тангенціальним (дотичним) прискоренням**, тому що вона спрямована вздовж дотичної до траєкторії. Друга компонента прискорення \vec{a}_n спрямована вздовж нормалі до траєкторії в точці, що розглядається. Її називають **нормальним прискоренням**. Оскільки тангенціальна компонента \vec{F}_τ є колінеарною до вектора швидкості, то сила \vec{F}_τ , яка надає маятнику тангенціальне прискорення \vec{a}_τ , змінює модуль швидкості матеріальної точки. Нормальна компонента сили \vec{F}_n завжди перпендикулярна вектору швидкості, отже вона не виконує роботу. Тому сила \vec{F}_n змінює лише напрямок вектора швидкості, надаючи маятнику нормального прискорення \vec{a}_n .

Спроекуємо результивну силу $\vec{F} = \vec{N} + m\vec{g}$, яка діє на маятник, на напрям дотичної (вектора $\vec{\tau}$) та нормалі (вектора \vec{n}). Враховуючи, що проєкція геометричної суми векторів на будь-який напрямок дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій доданків векторів на той самий напрямок, отримаємо (див. рис. 2.2)

$$F_\tau = -mg \sin\left(\frac{s}{l}\right) = -mg \sin \theta,$$

$$F_n = N - mg \cos\left(\frac{s}{l}\right) = N - mg \cos \theta.$$

Оскільки компонента \vec{F}_τ завжди спрямована до положення рівноваги математичного маятника, а величини s , θ – є величинами алгебраїчними, то (за обраного додатного напрямку відліку s , θ) праворуч від положення рівноваги: $s, \theta > 0$, $F_\tau < 0$; ліворуч – відповідно: $s, \theta < 0$, $F_\tau > 0$. Знак « \leftarrow » у виразі F_τ вказує на те, що де б не знаходився маятник щодо свого положення рівноваги, величини F_τ та s , θ завжди будуть мати протилежні знаки (незалежно від вибору додатного напрямку відліку). Компонента \vec{F}_n завжди спрямована до точки підвісу (див. рис. 2.2), тому проєкція F_n за будь-якого положення математичного маятника не є від'ємною.

Відповідні вирази для проєкцій вектора прискорення \vec{a} на дотичну та нормаль матимуть вигляд: $a_\tau = \frac{F_\tau}{m} = -g \sin \theta$, $a_n = \frac{F_n}{m} = \frac{v^2}{l} = \frac{N}{m} - g \cos \theta$.

Перейдемо до розгляду руху математичного маятника. Якщо маятник, займаючи положення рівноваги ($s = 0$, $\theta = 0$), перебуває у стані спокою, то сила тяжіння дорівнює за величиною і протилежна за напрямком силі натягу нитки, отже, геометрична сума \vec{F} вище вказаних сил дорівнює нулю. Для того щоб маятник почав рух, його потрібно вивести з рівноважного стану в будь-який спосіб. Будемо вважати, що маятник відхиляють, наприклад, праворуч і відпускають без поштовху в момент часу $t = 0$, тоді початкова швидкість маятника дорівнює нулю. Вибір початку відліку часу⁷ в момент відпускання маятника автоматично задає такі **початкові умови**:

$$s(t=0) = s_0; \quad \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = 0.$$

Проекції сили в момент часу $t = 0$ визначаються початковим кутом відхилення θ_0 маятника:

$$F_{\tau 0} = -mg \sin \left(\frac{s_0}{l} \right) = -mg \sin \theta_0,$$

$$F_{n0} = \frac{mv_0^2}{l} = N_0 - mg \cos \theta_0 = 0.$$

Таким чином, у початковий момент часу тангенціальна компонента сили \vec{F}_τ буде не нульовою і маятник почне рух до положення рівноваги. Під час руху маятника змінна величина s буде послідовно набувати всіх значень в межах інтервалу $[-s_0, s_0]$. А кожній парі значень s та $-s$ відповідатимуть однакові потенціальна та кінетична енергії. У положенні $s = s_0$ потенціальна енергія маятника набуває свого максимального значення. Якщо визначати потенціальну енергію, наприклад, від положення рівноваги, то для довільного положення маятника можемо записати: $E_n = mgh = mgl(1 - \cos \theta)$, (де h – висота, на яку підіймається маятник, визначена від горизонталі, яка проходить через точку O). У крайньому правому положенні ($s = s_0$; $\theta = \theta_0$) кінетична енергія маятника перетворюється

⁷ Оскільки розглянута коливальна система є консервативною, то довільний момент часу можна обрати за початок відліку часу.

на нуль, а максимальна потенціальна енергія дорівнює повній механічній енергії E : $E = E_{n\max} = mgl(1 - \cos\theta_0)$.

Розглянемо рух маятника у проміжку від $s = s_0$ до $s = 0$. При зменшенні s буде зменшуватися абсолютна величина сили, що повертає, а, відповідно, і тангенціальне прискорення. Абсолютні значення швидкості \vec{v} та компоненти \vec{F}_n при цьому зростатимуть. Оскільки сила \vec{F}_τ спрямована у бік руху, то вектори \vec{a}_τ і \vec{v} співспрямовані та маятник буде прискорюватися ($v < 0, a_\tau < 0$)⁸. У міру зменшення s потенціальна енергія маятника буде зменшуватися, а кінетична енергія, відповідно, зростатиме (рис. 2.3). Коли маятник опиниться в положенні рівноваги його лінійне зміщення s і кут відхилення θ дорівнюють нулю, відповідно, в нуль обернуться і величини: $\vec{F}_\tau, \vec{a}_\tau$. Тоді як швидкість і нормальна компонента результивної сили \vec{F}_n будуть сягати своїх максимальних за модулем значень: $F_{n\max} = \frac{mv_{\max}^2}{l} = N_{\max} - mg$. Під час проходження положення рівноваги потенціальна енергія маятника дорівнює нулю, а кінетична енергія набуде максимального значення (див. рис. 2.3). Таким чином, коли маятник займе положення $s = 0$, будуть мати місце рівності

$$E = E_{k\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2}, \vec{F} = \vec{F}_n, \vec{a} = \vec{a}_n.$$

Розглянемо надалі рух від $s = 0$ до $s = -s_0$. Після проходження маятником положення рівноваги довжина дуги s зростатиме за абсолютною величиною, приймаючи при цьому від'ємні значення. У міру збільшення абсолютної величини s будуть зростати і абсолютні значення \vec{F}_τ й \vec{a}_τ . Але тепер вектори \vec{v} і \vec{a}_τ мають протилежні напрями (сила \vec{F}_τ спрямована проти руху і сповільнюватиме маятник): $v < 0, a_\tau > 0$. Тому швидкість \vec{v} і, відповідно, компонента \vec{F}_n будуть спадати за абсолютною величиною. При $s = -s_0$ швидкість і нормальна компонента результивної сили перетворяться на нуль (потенціальна енергія маятника знову сягне свого максимального значення, кінетична енергія перетво-

⁸Оскільки, довжина дуги s (координата маятника) є алгебраїчною, то рівність $v = \frac{ds}{dt}$ визначає не модуль швидкості, а проекцію вектора швидкості на напрям вектора \vec{e} .

риться на нуль). При цьому величини \vec{F}_τ і \vec{a}_τ так само як і в положенні $s = s_0$, набудуть своїх максимальних за абсолютною величиною значень (див. рис. 2.3). Отже, коли маятник перебуває у крайніх положеннях ($s = s_0$; $s = -s_0$), виконуються наступні співвідношення: $E = E_{n\max} = mgl(1 - \cos\theta_0)$, $\vec{F} = \vec{F}_\tau$ і $\vec{a} = \vec{a}_\tau$.

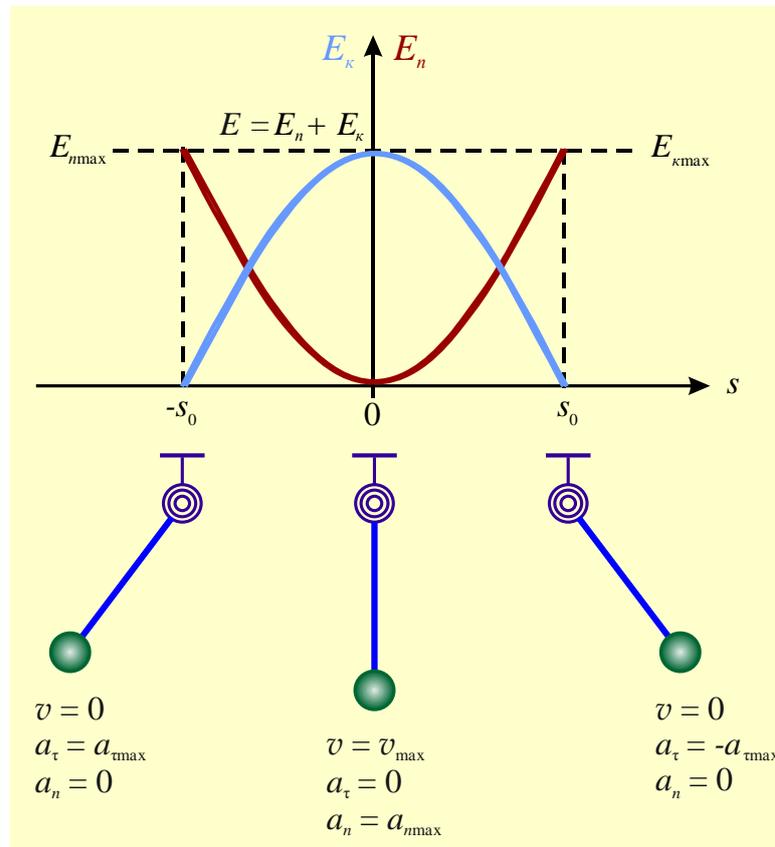


Рисунок 2.3

Далі маятник почне здійснювати рух у зворотному напрямку і повернеться до свого початкового положення, яке визначається зміщенням s_0 . При цьому в інтервалі від $s_0 = -s_0$ до $s_0 = 0$ маятник здійснює прискорений рух: вектори \vec{v} , \vec{a}_τ – мають однаковий напрямок і $v > 0$, $a_\tau > 0$. На проміжку від $s = 0$ до $s = s_0$ – сповільнений рух: вектори \vec{v} , \vec{a}_τ – протилежно спрямовані, при цьому: $v > 0$, $a_\tau < 0$. Після чого розглянутий процес буде точно повторюватися. У цьому випадку кажуть, що маятник здійснює коливальні рухи, чи просто коливання.

Перейдемо до розгляду рівняння коливань математичного маятника. Бе-

речу до уваги, що $a_\tau = \frac{d^2s}{dt^2}$ і $F_\tau = -mg \sin\left(\frac{s}{l}\right)$, запишемо

$$\frac{d^2s}{dt^2} + g \sin\left(\frac{s}{l}\right) = 0. \quad (2.1)$$

Рівняння (2.1) являє собою рівняння руху маятника у тому випадку, коли його положення визначається величиною s . Розв'язавши це рівняння щодо змінної s , знайдемо закон руху по траєкторії: $s = s(t)$ і зможемо визначити положення маятника в будь-який момент часу. Через наявність у цьому рівнянні нелінійного доданка, що містить $\sin\left(\frac{s}{l}\right)$, його розв'язання стає досить складною математичною задачею. Тому розглянемо спочатку граничний випадок, коли величина лінійного зміщення набагато менша за довжину маятника $s \ll l$ (це відповідає малим кутам відхилення θ від вертикалі), про такі коливання говорять як про **малі коливання маятника**. За цих умов можемо приблизно замінити синус значенням його аргументу $\left(\sin\left(\frac{s}{l}\right) \approx \frac{s}{l}\right)$, у виразі для величини F_τ

$$F_\tau = -\frac{mg}{l}s.$$

Вводячи для постійного множника при змінній s у правій частині позначення

$$k = \frac{mg}{l}, \quad (2.2)$$

перепишемо формулу для F_τ у вигляді

$$F_\tau = -ks. \quad (2.2')$$

Отже, за малих кутів відхилення сила що повертає та діє на маятник, буде лінійною функцією зміщення від положення рівноваги, крім того, ця сила завжди спрямована до положення рівноваги маятника. Тому у разі малих коливань математичного маятника величину F_τ можна приблизно розглядати як квазіпружну силу. Враховуючи, що $F_\tau = ma_\tau$, приходимо до рівняння руху маятника, аналогічного рівнянню (1.1):

$$m\ddot{s} = -ks. \quad (2.3)$$

Вводячи, відповідно до (1.2) позначення $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, отримаємо

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0. \quad (2.4)$$

Таким чином, в цьому випадку у виразах (1.1) та (1.3) роль координати x виконує лінійне зміщення s .

Якщо положення маятника визначатимемо кутовою змінною: $\theta = \frac{s}{l}$, то розділивши обидві частини рівняння (2.1) на довжину маятника l отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad (2.5)$$

яке часто називають **рівнянням коливань математичного маятника**.

За малих кутів відхилення $\sin \theta \approx \theta$, рівняння (2.5) перетворюється на лінійне

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0. \quad (2.6)$$

Порівнюючи отримані рівняння (2.4) і (2.6) з рівнянням (1.3) бачимо, що якщо виконується умова $s \ll l$, задача про малі коливання математичного маятника зводиться до задачі про гармонічний осцилятор. Відповідно до цього, **малі коливання маятника можна приблизно вважати гармонічними та ізохронними**. Єдиною відмінністю від задачі, розглянутої в розділі 1, буде лише наявність компоненти \vec{F}_n . Дія цієї сили, як було показано вище, приведе лише до зміни напрямку вектора швидкості, внаслідок чого матеріальна точка масою m здійснюватиме рух не вздовж прямої лінії, а по дузі кола радіусом l .

Застосуємо для цього випадку основні результати, отримані для гармонічного осцилятора. Власна частота коливань математичного маятника відповідно до формул (1.2) і (2.2) буде

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (2.7)$$

Підставивши (2.7) у співвідношення (1.8), отримаємо період малих коливань математичного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.8)$$

Розв'язання диференціальних рівнянь (2.4) та (2.6) можемо відразу записати, наприклад, використовуючи формулу (1.5):

$$s(t) = s_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (2.9)$$

де s_0, θ_0 – лінійна та кутова амплітуди; φ – початкова фаза.

Величини s_0, θ_0, φ , як було зазначено в розділі 1, можна визначити, задавши початкові умови.

Диференціюючи співвідношення (2.9) за часом, або, одразу застосовуючи формулу (1.11), отримаємо для лінійної швидкості (проекції вектора \vec{v} на напрям дотичної) і кутової швидкості наступні вирази

$$v = -s_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = s_0 \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.10)$$

$$\dot{\theta} = -\theta_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = \theta_0 \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Амплітуди відповідних швидкосте згідно з (2.10)

$$v_{\max} = s_0 \omega_0, \quad \dot{\theta}_{\max} = \theta_0 \omega_0. \quad (2.11)$$

Підставивши (2.7) у вираз (2.11), маємо

$$v_{\max} = s_0 \sqrt{\frac{g}{l}} = \theta_0 \sqrt{gl}, \quad \dot{\theta}_{\max} = \theta_0 \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (2.12)$$

Порівнявши (2.9) і (2.10), бачимо, що виразами (2.11) і (2.12), визначається модуль відповідної швидкості при проходженні математичним маятником положення рівноваги.

Зазначимо ще раз, що прискорення, яке визначається формулою (1.12), з'являється завдяки квазіпружній силі. У разі коливань математичного маятника в ролі квазіпружної сили виступає тангенціальна компонента \vec{F}_τ , результивної сили \vec{F} , проекція якої на напрям дотичної визначається формулою (2.2'). Саме ця сила відповідає за зміну швидкості за величиною. Під час руху маят-

ника буде безперервно змінюватиметься не лише величина, а й напрямок вектора швидкості. Тому вираз (1.12) в цьому випадку визначатиме лише тангенціальну компоненту прискорення (проєкцію прискорення на напрям дотичної) математичного маятника

$$a_{\tau} = -s_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = s_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi), \quad (2.13)$$

Зі співвідношення (2.13) бачимо, що амплітуда тангенціального прискорення з урахуванням (2.7) буде

$$a_{\tau \max} = s_0 \omega_0^2 = s_0 \frac{g}{l} = \theta_0 g. \quad (2.14)$$

Окрім максимального значення, формула (2.14) дає можливість визначити модуль прискорення \vec{a} , коли маятник знаходиться у своїх крайніх положеннях (у цих положеннях швидкість \vec{v} , відповідно, нормальна компонента прискорення перетворюються на нуль, тому $\vec{a} = \vec{a}_{\tau}$).

Відповідно до першої формули (2.10) та виразу (2.7), величина нормального прискорення $a_n = \frac{v^2}{l}$ (проєкція прискорення \vec{a} на напрямок нормалі завжди додатна) на відміну від величини a_{τ} (рис. 2.4), яка коливатиметься з частотою ω_0 здійснюватиме гармонічні коливання з частотою $2\omega_0$

$$a_n = \frac{s_0^2 \omega_0^2}{l} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{s_0^2 g}{2l^2} (1 + \cos(2[\omega_0 t + \varphi] + \pi)), \quad (2.15)$$

поблизу свого середнього за проміжок часу, що дорівнює періоду коливань T ,

значення (див. розділ 1): $\langle a_n \rangle = \frac{a_{n \max}}{2} = \frac{s_0^2 g}{2l^2}$.

Максимальне значення (амплітуди) нормального прискорення

$a_{n \max} = \frac{v_{\max}^2}{l}$ можна визначити з рівняння (2.15) або за допомогою формул (2.11)

та (2.12)

$$a_{n \max} = \frac{v_{\max}^2}{l} = \frac{s_0^2 \omega_0^2}{l} = \theta_0^2 g. \quad (2.16)$$

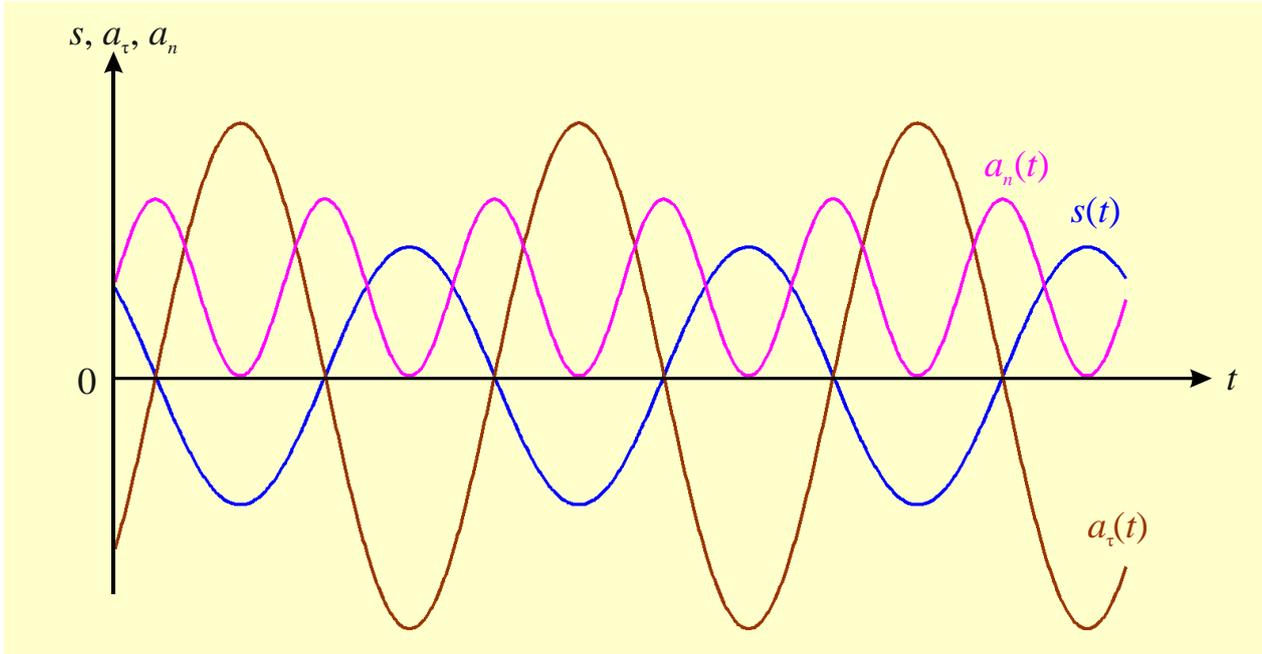


Рисунок 2.4

Співвідношенням (2.16) визначається також модуль прискорення \vec{a} , коли маятник проходить положення рівноваги (у цьому положенні тангенціальне прискорення, через те, що $F_\tau = 0$ дорівнює нулю, тому $\vec{a} = \vec{a}_n$).

Визначимо компоненти сили, що діє на математичний маятник. На підставі (1.14), а також враховуючи рівність (2.2') і першу з формул (2.9), запишемо для квазіпружної сили (тангенціальної компоненти F_τ)

$$F_\tau = F_{\tau \max} \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi), \quad (2.17)$$

де $F_{\tau \max} = \frac{mgs_0}{l} = mg\theta_0$ – амплітуда квазіпружної сили (тангенціальної компоненти вектора \vec{F}).

Нормальна компонента $F_n = \frac{mv^2}{l}$ відповідно до співвідношень (2.15) і (2.16) буде змінюватися, як і нормальне прискорення з подвоєною частотою

$$F_n = F_{n \max} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{F_{n \max}}{2} (1 + \cos(2[\omega_0 t + \varphi] + \pi)), \quad (2.18)$$

де $F_{n \max} = \frac{mgs_0^2}{l^2} = mg\theta_0^2$ – амплітуда сили F_n .

Отже, величини F_τ й F_n здійснюватимуть гармонічні коливання, але з різними частотами – частота коливань сили F_n вдвічі перевищує частоту коливань F_τ .

Для знаходження кінетичної, потенціальної та повної енергії математичного маятника замінимо x на s та \dot{x} на \dot{s} у формулах (1.19)

$$E_k = \frac{m}{2} \dot{s}^2, \quad E_n = \frac{k}{2} s^2,$$

$$E = \frac{m}{2} \dot{s}^2 + \frac{k}{2} s^2. \quad (2.19)$$

Враховуючи, що $\theta = \frac{s}{l}$ та співвідношення (2.2), отримаємо⁹

$$E_k = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2}, \quad E_n = \frac{mgl\theta^2}{2}, \quad (2.20)$$

$$E = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{mgl\theta^2}{2}.$$

Рівності (2.19), (2.20) можна переписати у вигляді, аналогічному до (1.24) та (1.25)

$$E_n = \frac{E}{2} \{1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)\},$$

$$E_k = \frac{E}{2} \{1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)\} = \frac{E}{2} \{1 + \cos(2[\omega_0 t + \varphi] + \pi)\}.$$

У цих виразах значення повної механічної енергії E математичного маятника відповідно до (1.23), (2.9) та (2.12) дорівнює

$$E = \frac{mgs_0^2}{2l} = \frac{mgl\theta_0^2}{2}. \quad (2.21)$$

В доповнення до всього вище сказаного стосовно математичного маятника покажемо ще кілька способів отримання рівнянь (2.1) та (2.5):

⁹ Вирази для потенціальної енергії в (2.19) та (2.20) безпосередньо впливають з формули: $E_n = mgl(1 - \cos \theta)$. Розкладаючи функцію косинуса в ряд Тейлора та обмежившись двома першими доданками (через малі значення $\theta = \frac{s}{l}$): $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, отримаємо відразу вищезазначені рівності.

1) При відхиленні маятника на певний кут виникає обертальний момент, проєкція якого на вісь обертання z (вісь z проходить через точку підвісу перпендикулярно до площини коливань та наприклад): $M_z = F_\tau l$. Нехай, наприклад, вісь z спрямована на нас. Оскільки додатний напрямок повороту навколо осі на кут θ та напрямок осі пов'язані правилом правого гвинта, то в положенні рівноваги $\theta = 0$, $F_\tau = 0$, $M_z = 0$; праворуч від нього $\theta > 0$, $F_\tau < 0$, $M_z < 0$; ліворуч - $\theta < 0$, $F_\tau > 0$, $M_z > 0$. Тоді з врахування знаків проєкція обертального моменту M_z буде завжди протилежна куту θ : $M_z = -mgl \sin \theta$. Використовуючи рівняння динаміки обертального руху: $M_z = I \varepsilon_z$ (де $I = ml^2$ – момент інерції маятника щодо осі z , $\varepsilon_z = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ – проєкція кутового прискорення на вісь z) отримаємо рівняння руху математичного маятника

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl \sin \theta.$$

Розділивши обидві частини на ml^2 та враховуючи, що $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, отримаємо рівняння (2.5).

2) Запишемо вирази для кінетичної та потенціальної енергій маятника при довільних кутах відхилення від положення рівноваги

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2}, \quad E_n = mgh = mgl(1 - \cos \theta), \quad (2.22)$$

де h – висота підйому маятника (матеріальної точки), яку визначають від положення рівноваги.

Тоді повна енергія маятника відповідно до (2.22) буде

$$E = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2} + mgl(1 - \cos \theta). \quad (2.23)$$

Далі вчинимо так само як і в задачі про гармонічний осцилятор. З огляду на те, що $E = \text{const}$, маємо: $\frac{dE}{dt} = 0$. Продиференціювавши вираз (2.23) за часом t з урахуванням того, що величини l , m , g від часу не залежать, отримаємо

$$ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta = 0.$$

Перепишемо останній вираз у вигляді

$$\dot{\theta}\left(\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta\right) = 0.$$

Звідки отримаємо два рівняння: 1) $\dot{\theta} = 0$, що відповідає крайнім положенням маятника (у положеннях в яких повна енергія дорівнює максимальному значенню потенціальної енергії); 2) $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$, таким чином, знову приходимо до рівняння (2.5).

2.2. Фізичний маятник

Фізичним маятником називається тверде тіло, яке може коливатися навколо горизонтальної осі, що не проходить крізь центр мас C (рис. 2.5). Положення маятника в будь-який момент часу може бути однозначно визначено кутом відхилення $\theta(t)$ від вертикалі (так само як і у випадку математичного маятника). Під час руху на маятник діють сила тяжіння $m\vec{g}$, прикладена до центру мас, та сила реакції осі \vec{N} . Для того щоб отримати рівняння руху маятника використаємо спочатку основне рівняння динаміки обертального руху: $I\varepsilon_z = M_z$, де I – момент інерції твердого тіла (маятника) відносно осі обертання, ε_z, M_z – проекції кутового прискорення і результитивного моменту всіх зовнішніх сил на вісь обертання z , яка проходить через точку O (див. рис. 2.5) та перпендикулярна площині рисунка.

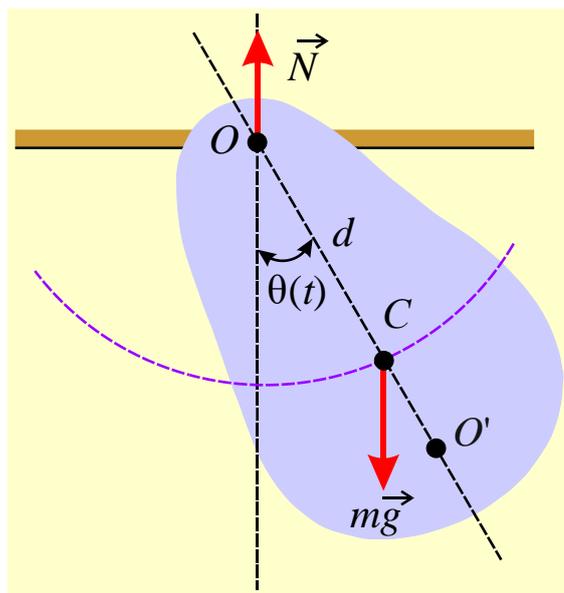


Рисунок 2.5

Оскільки плече сили реакції дорівнює нулю, то обертальний момент відносно осі z створює лише сила тяжіння

$$M_z = -mgd \sin\theta, \quad (2.24)$$

де m – маса маятника; d – відстань від точки підвісу до центру мас маятника (див. рис. 2.5), знак « \rightarrow » в останньому виразі вказує на те, що (додатний напрямок відліку кута θ пов'язаний з додатним напрямом осі z правилом правого гвинта), величини M_z та θ завжди матимуть протилежні знаки.

У цьому випадку, основне рівняння динаміки обертального руху тіла навколо нерухомої осі набуде вигляду

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd \sin \theta. \quad (2.25)$$

Якщо ввести позначення

$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I}, \quad (2.26)$$

то (2.25) можна переписати у тому вигляді, як і відповідне рівняння для математичного маятника

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0. \quad (2.27)$$

Як і раніше будемо вважати, що під час коливань фізичного маятника кути відхилення від положення рівноваги набувають досить малі значення, тоді замінивши синус значенням самого аргументу ($\sin \theta \approx \theta$), прийдемо до лінійного диференціального рівняння

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0. \quad (2.28)$$

Таким чином, отримали рівняння виду (1.3), тому часова залежність кута відхилення θ буде описуватися, наприклад, співвідношенням (1.5)

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

де ω_0 – власна частота коливань фізичного маятника, яка визначається виразом (2.26).

Період малих коливань фізичного маятника, відповідно до (2.26), не буде залежати від амплітуди

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}. \quad (2.29)$$

Кутова швидкість $\dot{\theta}$ фізичного маятника визначається формулами (2.10) і (2.11). Для кінетичної та потенціальної енергії будуть справедливі вирази (2.20), якщо замінити $ml^2 \rightarrow I, mgl \rightarrow mgd$. В цьому випадку повна енергія фізичного маятника, відповідно до (1.23), буде: $E = \frac{mgd\theta_0^2}{2}$.

Таким чином, при малих кутах відхилення від вертикалі коливання фізичного маятника можна (наближено) вважати гармонічними ізохронними коливаннями.

Енергетичний підхід при аналізі поведінки фізичного маятника повністю аналогічний підходу для випадку математичного маятника. Дійсно, вирази для кінетичної, потенціальної (визначаємо від положення рівноваги) та повної енергії фізичного маятника при довільних кутах відхилення будуть мати вигляд

$$E_k = \frac{I\dot{\theta}^2}{2}, \quad E_n = mgd(1 - \cos\theta),$$

$$E = E_k + E_n = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} + mgd(1 - \cos\theta) = \text{const.}$$

З умови $\frac{dE}{dt} = 0$, прийдемо до рівняння виду (2.27) та за малих кутів відхилення до рівняння (4.28).

Порівнюючи формули (2.8) і (2.29) для визначення періоду коливань математичного і фізичного маятників бачимо, що період коливань фізичного маятника дорівнює періоду коливань математичного маятника, довжина якого дорівнює

$$l_{зв} = \frac{I}{md}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{зв}}{g}} \quad (2.30)$$

величина $l_{зв}$ називається **зведеною довжиною фізичного маятника**. Тобто зведена довжина фізичного маятника є довжиною такого математичного маятника, період коливань якого дорівнює періоду коливань даного фізичного маятника.

Відкладемо від точки підвісу O вздовж прямої, що проходить через центр мас C маятника (див. рис. 2.5) відрізок $OO' = l_{зв}$ – довжина якого дорівнює зведеної довжині фізичного маятника, сама точка O' , визначена вказаним чином, називається **точкою**, або **центром гойдання**. Зазначимо, що центр гойдання O' і точка підвісу O завжди лежать по різні боки від центру мас маятника. Дійсно, момент інерції маятника щодо осі проходить через точку підвісу можна визначити згідно з теоремою Штейнера: $I = I_0 + md^2$, де I_0 – момент інерції відносно осі паралельної осі обертання і проходить через центр мас C . Підставляючи момент інерції I в першу з формул (2.30) отримаємо

$$l_{зв} = d + \frac{I_0}{md}. \quad (2.31)$$

Звідки маємо: $l_{зв} > d$, що підтверджує зроблене вище припущення. З виразу (2.31) також бачимо, що **всім точкам підвісу, рівновіддаленим від центру мас, відповідає та сама зведена довжина $l_{зв}$ і, відповідно, один і той самий період коливань T** . Крім того, якщо центр гойдання O' зробити новою точкою підвісу фізичного маятника, його зведена довжина, а отже і період коливань не зміняться, а колишня точка підвісу O стане новим центром гойдання. Доведемо це.

Нехай O' буде новою точкою підвісу, тоді: $O'C = d'$ – відстань від нової точки підвісу до центру мас, I' – момент інерції маятника відносно осі проходить через точку O' . Застосуємо теорему Штейнера і першу формул (2.30), отримаємо для зведеної довжини вираз, аналогічний (2.31)

$$l'_{зв} = \frac{I'}{md'} = d' + \frac{I_0}{md'}. \quad (2.32)$$

Потрібно довести, що $l_{зв} = l'_{зв}$.

З побудови випливає: $OO' = l_{зв}$, $OC = d$, $O'C = d'$ і, отже, $d' = l_{зв} - d$. З огляду на вираз (2.31) знаходимо, що $d' = \frac{I_0}{md}$. Підставляючи d' в вираз (2.32), переконуємося, що $l'_{зв} = l_{зв}$. Тобто зведена довжина і, відповідно, період коливань залишилися незмінними. У цьому відношенні **точка підвісу та центр гойдання є взаємними точками** їх також називають **сполученими точками**.

2.3. Пружинний маятник

Пружинним маятником називають коливальну систему, що складається з тіла, закріпленого на невагомій пружині, інший кінець якої прикріплений до жорсткої опори (рис. 2.6). Пружина вважається невагомою, якщо її маса значно менша за масу тіла.

Нехай пружина довжиною l та жорсткістю k закріплена вертикально (див. рис. 2.6). Підвісимо на цю пружину тягарець масою m . Під дією сили тяжіння $m\vec{g}$ пружина пружно деформується на величину Δl . У положенні рівноваги сила тяжіння врівноважується силою пружності $\vec{F}_{\text{пр}}$, яка для пружних деформацій описується законом Гука

$$mg = k\Delta l. \quad (2.33)$$

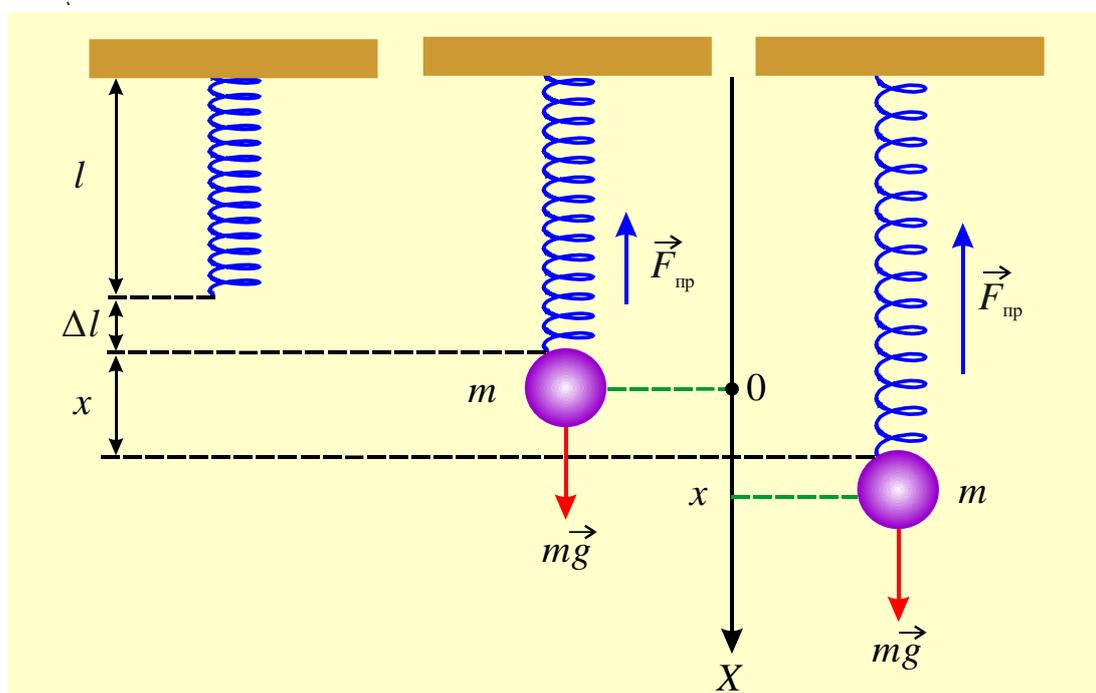


Рисунок 2.6

Розглянемо малі вертикальні коливання пружинного маятника. Зміщення тягарця з положення рівноваги характеризуватимемо координатою x . Очевидно, що величина x також визначатиме додаткову пружну деформацію пружини при вертикальних відхиленнях тягарця від положення $x = 0$.

Якщо змістити тягарець із положення рівноваги (відхиленням та/або поштовхом) на величину x (див. рис. 2.6), то проєкція на вісь X результивної сили, що діє на тягарець, запишемо у вигляді: $F = mg - k(\Delta l + x)$. Беручи до уваги

вираз (2.33), отримаємо, що результирна сила тяжіння та пружної сили є квазі-пружною силою

$$F = -kx. \quad (2.34)$$

Сила (2.34), відповідно до другого закону Ньютона, надає тягарцю прискорення $a = \ddot{x}$

$$m\ddot{x} = -kx, \text{ або } m\ddot{x} + kx = 0. \quad (2.35)$$

Розділимо (2.35) на масу тягарця та отримаємо диференціальне рівняння, ідентичне (1.3)

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \text{ або } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.36)$$

де ω_0 – циклічна частота вільних малих коливань пружинного маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.37)$$

Період малих вертикальних коливань пружинного маятника відповідно до виразу (2.37) не буде залежати від амплітуди

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (2.38)$$

Таким чином, за малих вертикальних відхилень, коливання пружинного маятника можна (наближено) вважати гармонічними ізохронними коливаннями (рис. 2.7).

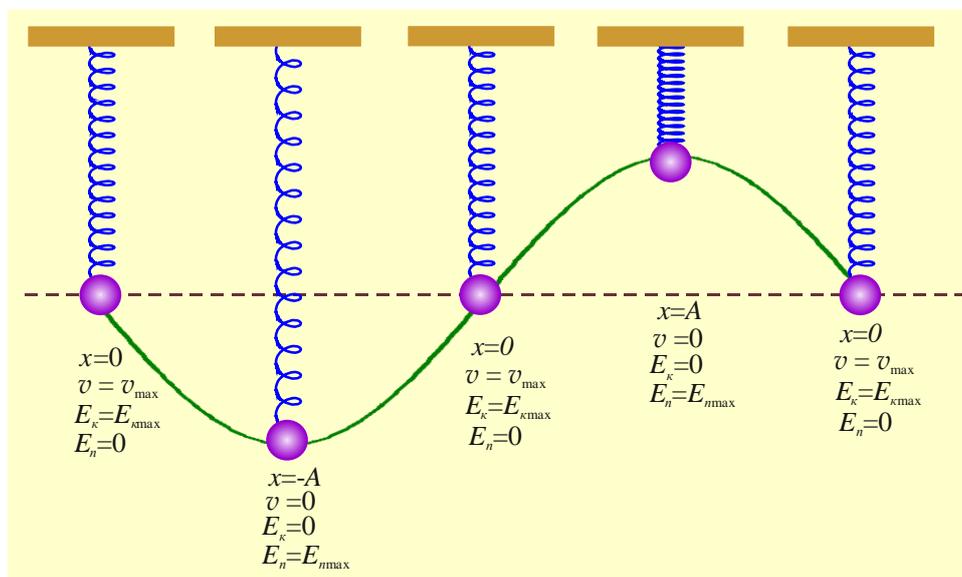


Рисунок 2.7

З виразів (2.36) та (2.38) також випливає, що незгасаючі коливання пружинного маятника не залежать від сили тяжіння, тому вони будуть однаковими (якщо параметри системи залишаються незмінними) не тільки в усіх місцях на Землі, а і на інших планетах.

2.4. Крутильний маятник

Розглянемо коливання крутильного осцилятора на прикладі трифілярного підвісу, якій складається (рис. 2.8) з рухомого диска P_1 радіусом R підвішеного на трьох симетрично розташованих нерозтяжних нитках (AB , CD , FG) однакової довжини l до нерухомого диска P радіусом r . У рівноважному положенні відстань між дисками дорівнює L . Диск P_1 може здійснювати крутильні коливання навколо вертикальної осі OO_1 , яка проходить через центри обох дисків.

Після повороту диска P_1 на деякий кут φ відносно осі OO_1 його центр мас переміщується вздовж осі обертання на деяку висоту h відносно свого рівноважного положення. Такий рух диска P_1 можна представити суперпозицією періодичних рухів: 1) навколо осі обертання; 2) поступальний вздовж осі обертання. Отже, швидкість \vec{v} кожної точки рухомого диска буде

дорівнювати геометричній сумі швидкості обертального $\vec{v}_{об}$ та поступального \vec{v}_n рухів: $\vec{v} = \vec{v}_{об} + \vec{v}_n$.

Для визначення в кожний момент часу положення будь-якої точки диска P_1 необхідно встановити часову залежність двох зв'язаних між собою величин: кута φ та висоти h . Тому спочатку необхідно встановити залежність $h(\varphi)$, використавши, наприклад, умову нерозтяжності ниток. Оскільки, всі три нитки є однаковими, то достатньо буде розглянути поведінку будь-якої з них під час крутильних коливань, наприклад, нитки AB . Описувати рух будемо за допомогою декартової системи координат з початком в т. O , ось X направимо вздовж

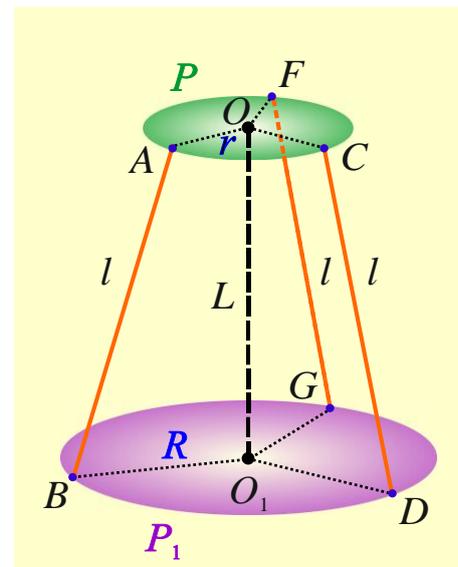


Рисунок 2.8

прямої OA , ось Z – вздовж прямої OO_1 та вісь ось Y – перпендикулярно до площини XOZ (рис. 2.9, а). Тоді координати т. А (див. рис. 2.9, а): $x_A = r$, $y_A = 0$, $z_A = 0$, не будуть змінюватися з часом, оскільки диск P нерухомий. Координати т. В, коли рухомий диск знаходиться у положенні рівноваги (коливання відсутні) дорівнюють: $x_B^0 = R$, $y_B^0 = 0$, $z_B^0 = L$.

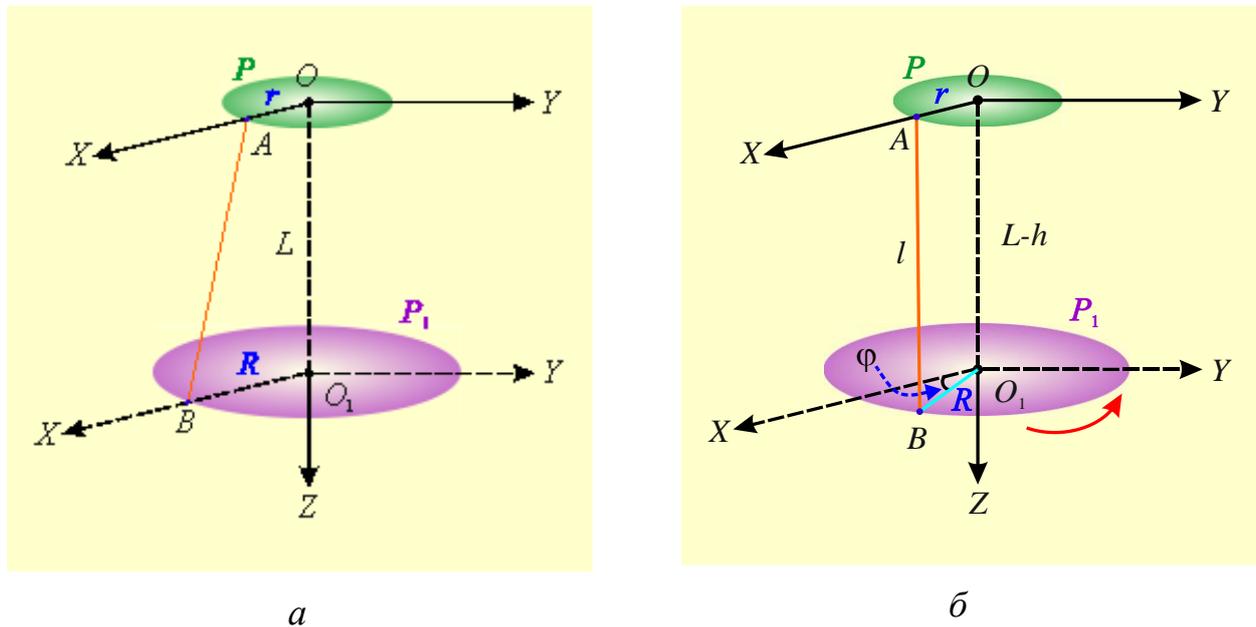


Рисунок 2.9

Якщо здійснити поворот диска P_1 навколо осі OO_1 на деякий кут φ , то координати точки B зазнають змін (рис. 2.9 б)

$$x_B = R \cos \varphi, \quad y_B = R \sin \varphi, \quad z_B = L - h.$$

З умови нерозтяжності нитки AB бачимо, що відстань між точками A і B залишається сталою, тому

$$l = \sqrt{(x_B^0 - x_A)^2 + (y_B^0 - y_A)^2 + (z_B^0 - z_A)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Піднесемо до квадрата останній вираз

$$(x_B^0 - x_A)^2 + (y_B^0 - y_A)^2 + (z_B^0 - z_A)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2,$$

та підставимо координати кінців нитки AB

$$(R - r)^2 + L^2 = (R \cos \varphi - r)^2 + R^2 \sin^2 \varphi + (L - h)^2.$$

Після простих перетворень, отримаємо квадратне рівняння відносно h

$$h^2 - 2Lh + 4Rr \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 0,$$

яке має два корені

$$h = L \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Rr}{L^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right).$$

Оскільки $h < L$, то залежність $h(\varphi)$ набуває вигляду

$$h = L \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4Rr}{L^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right). \quad (2.39)$$

З формули (2.39) бачимо, що якщо відомий кут φ у будь-який момент часу, то можна однозначно визначити величину h . Тому положення рухомого диска P_1 у довільний момент часу однозначно визначається значенням одного параметру – кута повороту φ .

Для знаходження залежності $\varphi(t)$ під час коливального процесу крутильного маятника, розглянемо рух диска P_1 , використавши енергетичний підхід. Якщо знехтувати опором повітря та силами тертя у точках підвісу, то повна механічна енергія E диску

$$E = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mv_n^2}{2} + mgh, \quad (2.40)$$

буде зберігатися під час його руху. У формулі (2.40): 1) перший доданок – кінетична енергія обертального руху навколо осі OO_1 ; I – момент інерції диска відносно цієї осі; $\dot{\varphi}$ – кутова швидкість; 2) другий доданок – кінетична енергія поступального руху вздовж осі OO_1 ; m – маса рухомого диска; v_n – швидкість поступальної компоненти руху; 3) третій доданок – потенціальна енергія; h – висота, що визначається від положення рівноваги.

В ті моменти часу, коли висота h досягає свого максимального значення, позначимо його h_0 , швидкість кожної точки диска дорівнює нулю – в ці моменти часу диск змінює напрям свого обертального руху і поступального руху. В цей час енергія E набуває значення

$$E = mgh_0.$$

Коли рухомий диск проходить положення рівноваги, то в цей час висота h та швидкість поступального руху \vec{v}_n дорівнюють нулю (при проходженні положення рівноваги вектор \vec{v}_n змінює свій напрям на протилежний), а швидкість обертального руху $\vec{v}_{o\delta}$ та кутова швидкість $\dot{\varphi}$ набувають своїх максимальних за модулем значень. Тоді, відповідно до (2.40), повна енергія E диска буде

$$E = \frac{I\dot{\varphi}_0^2}{2},$$

де $\dot{\varphi}_0$ – максимальне значення кутової швидкості.

Отже, коли диск знаходиться у положенні h_0 , то він під дією горизонтальної компоненти сил натягу ниток повертається у положення рівноваги. Оскільки у положенні рівноваги кутова швидкість диска не дорівнює нулю та його повна механічна енергія зберігається, то диск буде рухатись далі і знову підніметься на висоту h_0 .

Вважатимемо, що кут повороту φ приймає досить невеликі значення. Тоді, у формулі (2.39) синус можна наближено замінити значенням його аргументу $\left(\sin \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}\right)$

$$h \approx L \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Rr}{L^2} \varphi^2} \right).$$

Розкладемо функцію, яка знаходиться у дужках останнього виразу, в ряд Тейлора та обмежимося двома доданками¹⁰, оскільки за малих кутів повороту виконуються умова $\frac{Rr\varphi^2}{L^2} \ll 1$:

$$h \approx L \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Rr}{L^2} \varphi^2} \right) \approx L \left[1 - \left(1 - \frac{Rr}{2L^2} \varphi^2 \right) \right]$$

Звідки знаходимо ще одну залежність $h(\varphi)$

¹⁰ якщо у виразі $\sqrt{1-x}$ величина x значно менша за одиницю, тоді маємо таку наближену рівність $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$.

$$h \approx \frac{Rr}{2L} \varphi^2. \quad (2.41)$$

Оскільки диск P_1 здійснює поступальний рух вздовж осі z , то вектор \vec{v}_n теж направлений вздовж цієї осі, тому для проєкції поступальної компоненти вектора швидкості на ось z , враховуючи співвідношення (2.41), отримаємо

$$v_z = \dot{h} = \frac{Rr}{L} \varphi \dot{\varphi}. \quad (2.42)$$

Підставляємо (2.41) та (2.42) у вираз (2.40)

$$E = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m}{2} \left(\frac{Rr\varphi}{L} \right)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{mgRr}{2L} \varphi^2 = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} \left(1 + \frac{m}{I} \left(\frac{Rr\varphi}{L} \right)^2 \right) + \frac{mgRr}{2L} \varphi^2.$$

За малих коливань диска другий доданок у дужках значно менший за одиницю, тому їм можна знехтувати. Це означає, що внесок у кінетичну енергію поступальної компоненти руху диска значно менше за обертальну компоненту, тому поступальною компонентою можна знехтувати. В результаті цього спрощення отримаємо

$$E = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mgRr}{2L} \varphi^2. \quad (2.43)$$

Вираз (2.43) для повної енергії має тий самий вигляд що і у випадку гармонічного осцилятора. Потенціальна енергія є квадратичною функцією координати φ , а положенню рівноваги $\varphi=0$ відповідає мінімум потенціальної енергії. Диференціюючи за часом співвідношення (2.43) та враховуючи, що $E = \text{const}$, отримаємо

$$I\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \frac{mgRr}{L} \dot{\varphi}\varphi = 0$$

або

$$\dot{\varphi} \left(\ddot{\varphi} + \frac{mgRr}{IL} \varphi \right) = 0, \quad (2.44)$$

$\dot{\varphi}=0$ – відповідає максимальному відхиленню від положення рівноваги, вираз в дужках дає рівняння руху яке співпадає з рівнянням гармонічного осцилятора

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0,$$

де ω_0 – циклічна частота крутильних коливань

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgRr}{LI}}. \quad (2.45)$$

Відповідно, період коливань дорівнює

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{LI}{mgRr}}. \quad (2.46)$$

Саму функцію $\varphi(t)$ можемо записати, використавши розв’язок (1.5)

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (2.47)$$

де φ_0 , α – амплітуда та початкова фаза.

Відмітимо також, що у вертикальному напрямі диск P_1 теж буде здійснювати гармонічні коливання, це безпосередньо впливає з формули (2.41). Дійсно, підставляючи вираз (2.47) до (2.41), отримаємо

$$h = \frac{Rr}{2L} \varphi^2(t) = \frac{Rr\varphi_0^2}{4L} (1 + \cos 2(\omega_0 t + \alpha)).$$

Отже, величина h здійснює гармонічні коливання навколо свого середнього значення $\frac{Rr\varphi_0^2}{4L}$, частота цих коливань у два рази перевищує частоту крутильних коливань (2.45).

Контрольні запитання

1. Дайте визначення математичному та фізичному маятникам.
2. Яка сила називається силою що повертає?
3. За яких умов коливання математичного маятника можна вважати малими?
4. Дайте означення зведній довжині фізичного маятника?
5. Запишіть формули для періоду коливань математичного та пружинного маятників.
6. Запишіть рівняння коливань математичного маятника.
7. За яких умов коливання пружинного маятника можна вважати малими?
8. З яких компонент складається трифілярний підвіс?

РОЗДІЛ 3. ДОДАВАННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

Часто матеріальна точка може одночасно брати участь у кількох коливальних процесах, при цьому її рух буде визначатися сумою коливань. З'ясуємо характер цього руху точки для двох окремих випадків: 1) гармонічні коливання відбуваються з однакою частотою в одному напрямку; 2) гармонічні коливання відбуваються у двох взаємно перпендикулярних напрямках з однакою частотою.

3.1. Додавання двох гармонічних коливань одного напрямку з однаковими частотами

Нехай пружинний маятник закріплений на підставці Π , яка може здійснювати коливання (рис. 3.1). Якщо викликати одночасно вертикальні коливання підставки та пружинного маятника, то рух матеріальної точки M буде суперпозицією двох коливань одного напрямку (вдovж осі OX). Будемо вважати, що ці коливання є гармонічними і відбуваються з однакою частотою ω_0

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2). \quad (3.1)$$

Миттєве зміщення (координата) x матеріальної точки M визначатиметься алгебраїчною сумою миттєвих значень x_1 та x_2

$$x = x_1 + x_2.$$

Розписуючи косинус суми в кожному доданку величини x та об'єднавши коефіцієнти при $\cos \omega_0 t$ й $\sin \omega_0 t$ отримаємо

$$x = (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \cos \omega_0 t - (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) \sin \omega_0 t. \quad (3.2)$$

Завжди можна підібрати такі дійсні величини A та φ , щоб виконувались рівняння

$$\begin{aligned} A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 &= A \cos \varphi, \\ A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 &= A \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

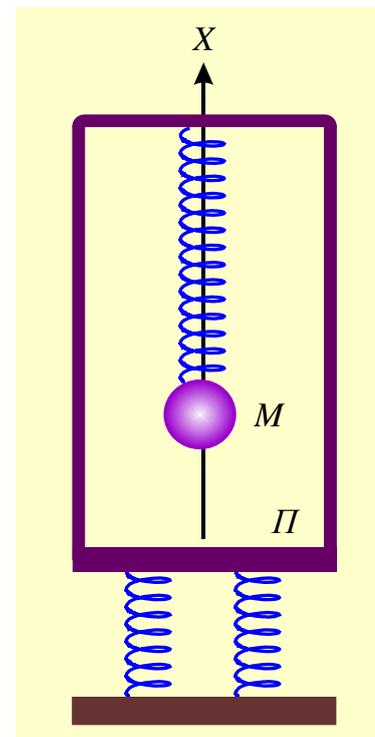


Рисунок 3.1

Знайдемо спочатку величину A , для цього піднесемо першу і другу рівності (3.3) до квадрата і додамо їх почленно

$$A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = A^2,$$

звідки

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (3.4)$$

Розділивши далі другий вираз (3.3) на перший, отримаємо співвідношення для параметра φ

$$\frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (3.5)$$

Підставивши (3.3) до (3.2), отримаємо зміщення x матеріальної точки M в будь-який момент часу

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.6)$$

Отже, сума двох гармонічних коливань однакового напрямку та однакової частоти є також гармонічним коливанням тієї ж частоти й того ж напрямку, що і коливання, які додаються (рис. 3.2). Амплітуда A та початкова фаза φ цього коливання визначаються з виразів (3.4) та (3.5).

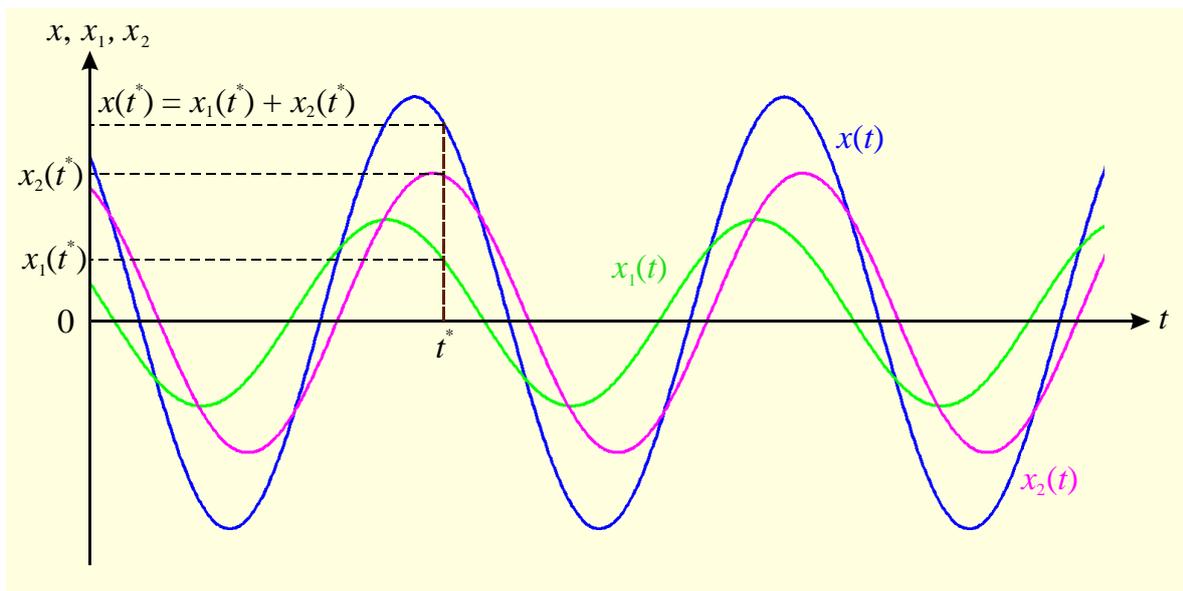


Рисунок 3.2

Якщо однаково спрямовані гармонічні коливання задані у вигляді відповідних графіків (див. рис. 3.2), їх додавання виконується для тих самих момен-

тів часу. Так ординати графіка $x(t)$ на рис. 3.2 отримані шляхом послідовного додавання ординат коливань $x_1(t)$ і $x_2(t)$ для тих самих моментів часу. Подібним чином можна додавати довільне число коливальних процесів, з урахуванням знаків зміщень.

Амплітуда результитивного гармонічного коливання згідно з виразом (3.4) залежить від різниці початкових фаз коливань, що додаються. Якщо коливання $x_1(t)$ та $x_2(t)$ відбуваються у фазі: $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2n\pi$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$), то амплітуда буде максимальною $A = A_1 + A_2$. Мінімум амплітуди $A = |A_1 - A_2|$ спостерігатиметься під час протифазних коливань $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2n + 1)\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). У загальному випадку залежність $A(\Delta\varphi)$ наведена на рис. 3.3.

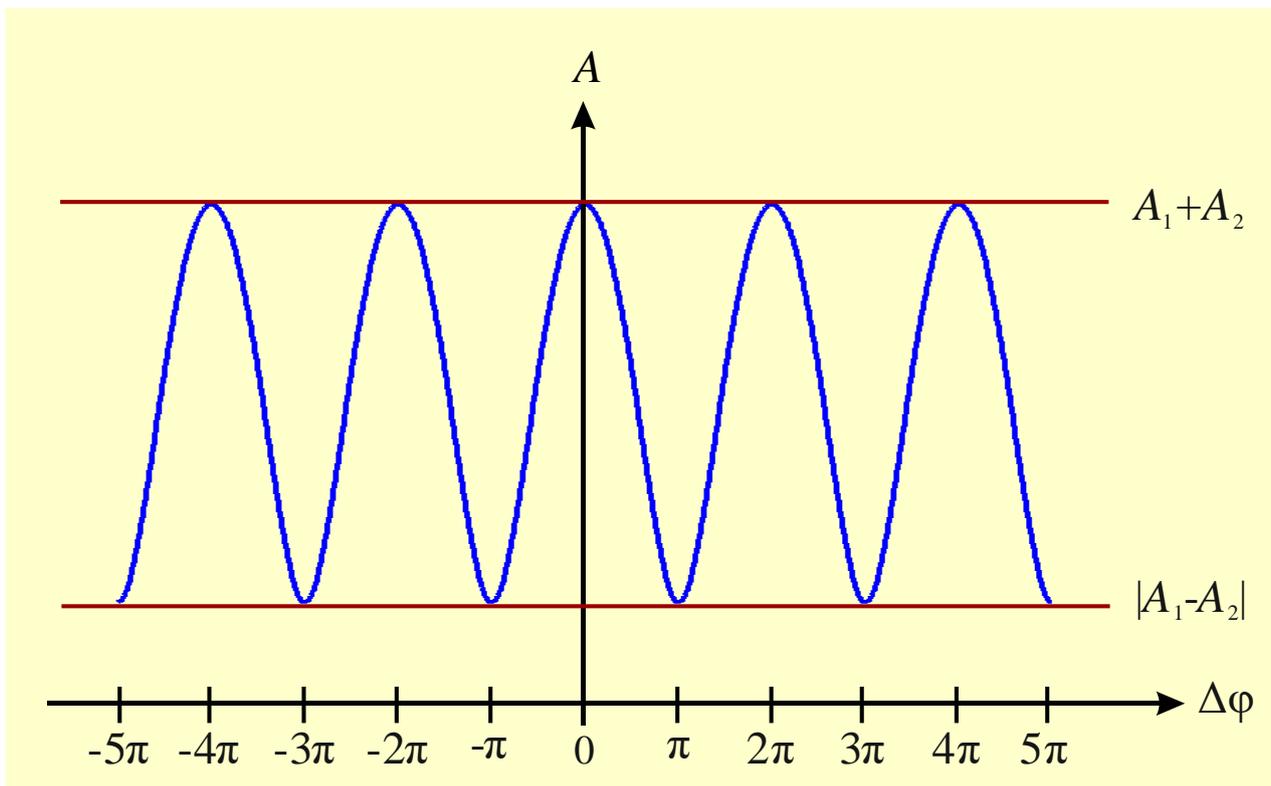


Рисунок 3.3

3.2. Додавання довільної кількості гармонічних коливань однакового напрямку та однакової частоти

Отриманий вище результат можна узагальнити для довільної кількості N гармонічних коливань. Нехай величина x є сумою

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_N,$$

де $x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$, $x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$, ..., $x_N = A_N \cos(\omega_0 t + \varphi_N)$.

Розписавши так само, косинус суми і групуючи доданки, маємо

$$x = (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 + \dots + A_N \cos \varphi_N) \cos \omega_0 t - (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 + \dots + A_N \sin \varphi_N) \sin \omega_0 t. \quad (3.7)$$

Після чого введемо, як і раніше, позначення

$$\begin{aligned} A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 + \dots + A_N \cos \varphi_N &= A \cos \varphi, \\ A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 + \dots + A_N \sin \varphi_N &= A \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Піднесемо обидва вирази (3.8) до квадрата і додамо їх, в результаті отримаємо співвідношення для величини A

$$\begin{aligned} A^2 = A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_N^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \dots + 2A_i A_k \cos(\varphi_k - \varphi_i) + \dots + \\ + 2A_{N-1} A_N \cos(\varphi_N - \varphi_{N-1}). \quad (i \neq k, k > i) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Розділивши друге рівняння (3.8) на перше, отримаємо вираз, з якого визначається величина φ

$$\frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 + \dots + A_N \sin \varphi_N}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 + \dots + A_N \cos \varphi_N} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (3.10)$$

Отже, з формул (3.7) і (3.8) випливає, що в результаті додавання $N > 2$ гармонічних коливань однакового напрямку та однакової частоти, отримаємо гармонічне коливання вигляду (3.6), в якому амплітуда A і початкова фаза φ визначаються формулами (3.9) та (3.10).

3.3. Векторний спосіб додавання коливань

Під час розгляду коливальних процесів часто використовується так званий **метод векторних діаграм**. Зручність цього методу пов'язана в першу чергу з тим, що він дає наочну геометричну інтерпретацію гармонічного коливання і дозволяє звести задачу про додавання коливань до простого знаходження геометричної суми відповідних векторів. У зв'язку з цим розглянемо цей метод докладніше.

Для векторного зображення коливань спочатку оберемо довільну координатну вісь OX (рис. 3.4). Відкладемо від точки O вектор \vec{A} , довжина якого дорі-

внює A ($|\vec{A}| = A$). Змусимо вектор \vec{A} обертатися проти ходу годинникової стрілки навколо точки O з постійною кутовою швидкістю ω_0 , причому так, щоб вектор \vec{A} і вісь OX завжди знаходилися в одній площині. Нехай ϕ – кут, який утворює вектор \vec{A} з додатним напрямом осі OX (див. рис. 3.4). При рівномірному обертанні вектора \vec{A} , кут повороту ϕ буде змінюватися з часом

$$\phi(t) = \omega_0 t + \phi, \quad (3.11)$$

де ϕ – значення кута ϕ в початковий момент часу: $\phi(0) = \phi$.

Знайдемо проєкцію A_x вектора

\vec{A} на вісь OX у будь-який момент часу. За визначенням ця проєкція дорівнює (див. рис. 3.4)

$$A_x = A \cos \phi(t).$$

Підставляючи (3.11), отримаємо

$$A_x = A \cos(\omega_0 t + \phi).$$

Порівнюючи отриманий вираз із формулою (1.5) бачимо, що за рівномірного обертання вектора \vec{A} його проєкція A_x на вісь OX здійснюватиме гармонічне коливання. Причому амплітуда цього коливання дорівнюватиме довжині вектора \vec{A} , циклічна частота коливання дорівнюватиме кутовій швидкості ω_0 обертання вектора, а початкова фаза ϕ – значенню кута, який утворює вектор \vec{A} з додатним напрямом осі OX в початковий момент часу. Період коливання, як це бачимо з (3.11), дорівнює проміжку часу, за який вектор \vec{A} здійснює повний оберт. Дійсно, за проміжок часу Δt збільшення кута повороту дорівнює: $\Delta\phi = \omega_0 \Delta t$, а, відповідно, при повному оберті: $\Delta\phi = 2\pi$. Тоді, якщо за час Δt здійснюється один оберт, то $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_0}$, а це і є період коливання T . Все сказане

вище залишається правдивим і для коливання, записаного у вигляді (1.6) (для

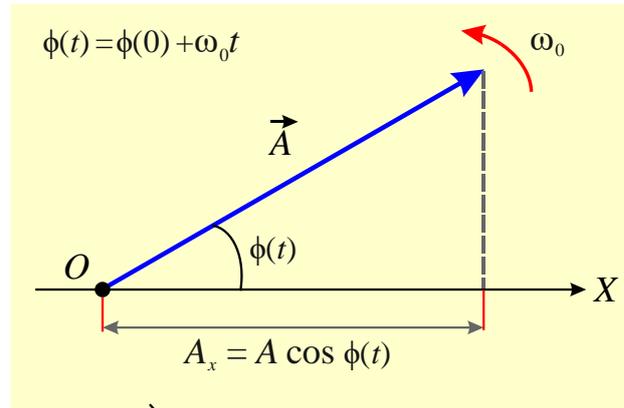


Рисунок 3.4

цього достатньо прийняти у формулі (3.11) $\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2}$).

Таким чином, кожному гармонічному коливанню можна зіставити вектор, який обертається з постійною кутовою швидкістю, що дорівнює циклічній частоті ω_0 . Довжина цього вектора дорівнює амплітуді A коливання, а початкове положення вектора відносно обраної осі визначається кутом $\phi(0)$, який дорівнює початковій фазі φ коливання.

Розглянемо тепер додавання двох однаково спрямованих гармонічних коливань за допомогою методу векторних діаграм.

Гармонічні коливання $x_1(t)$ та $x_2(t)$, які задані рівняннями (3.1), зобразимо у вигляді векторів \vec{A}_1 та \vec{A}_2 (рис. 3.5). Тоді результивному коливанню $x(t)$ відповідатиме вектор: $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$.

Довжина вектора \vec{A} визначається значеннями його проєкцій на відповідні осі координат. Оскільки проєкція суми векторів на деякий напрямок дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій векторів \vec{A}_1 та \vec{A}_2 на той самий напрямок, то для будь-якого моменту часу справедливі співвідношення (див. рис. 3.5)

$$A_x = A_{x1} + A_{x2}, \quad A_y = A_{y1} + A_{y2}. \quad (3.12)$$

Тоді довжина вектора \vec{A}

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(A_{x1} + A_{x2})^2 + (A_{y1} + A_{y2})^2}. \quad (3.13)$$

Враховуючи, що ϕ, ϕ_1, ϕ_2 – це кути, які утворюють під час обертання вектори \vec{A}, \vec{A}_1 та \vec{A}_2 з додатним напрямом осі OX (див. рис. 3.5), перепишемо рівності (3.12)

$$A_x = A \cos \phi = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2, \quad A_y = A \sin \phi = A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2. \quad (3.14)$$

Відповідно до виразу (3.11)

$$\phi = \omega_0 t + \varphi, \quad \phi_1 = \omega_0 t + \varphi_1, \quad \phi_2 = \omega_0 t + \varphi_2, \quad (3.15)$$

де $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ – кути, які утворюють вектори $\vec{A}, \vec{A}_1, \vec{A}_2$ з віссю OX у момент часу $t = 0$.

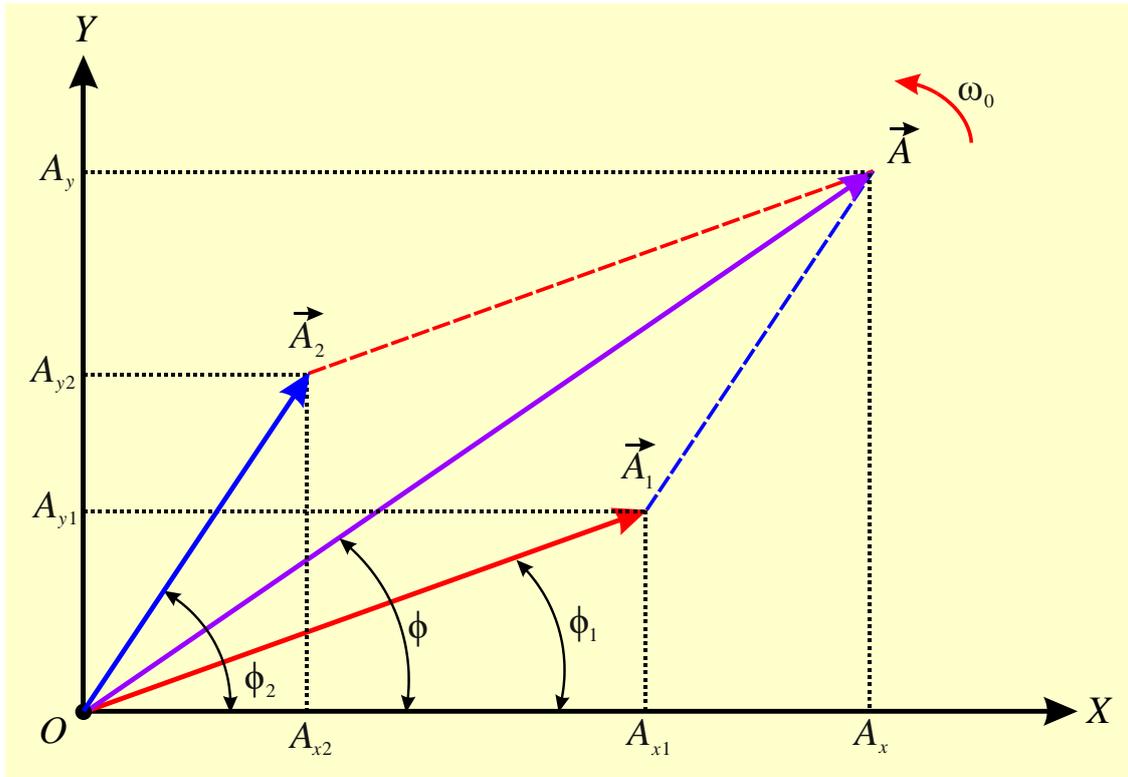


Рисунок 3.5

Після підставлення (3.14) до (3.13) отримаємо

$$A = \sqrt{(A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2)^2 + (A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2)^2},$$

розкриваючи дужки і використовуючи відомі тригонометричні тотожності, перетворимо останній вираз до вигляду

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)},$$

або, використовуючи (3.15)

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)}. \quad (3.16)$$

Оскільки вектори \vec{A}_1 , \vec{A}_2 та \vec{A} обертаються з однаковою кутовою швидкістю ω_0 та при цьому довжини векторів \vec{A}_1 й \vec{A}_2 залишаються постійними, то їх положення один відносно одного не змінюється під час обертання. Отже, кут $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ між векторами \vec{A}_1 та \vec{A}_2 залишається незмінним. Тоді, довжина A вектора \vec{A} також не змінюватиметься з часом, вона, відповідно до (3.15), залежатиме від довжин векторів \vec{A}_1 , \vec{A}_2 та їх взаємного розташування у початковий

момент часу: $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$. Таким чином, амплітуда результитивного коливання (довжина вектора \vec{A}) визначається виразом (3.16), який співпадає з (3.4).

Використовуючи рівності (3.14) та (3.15), отримуємо вираз (який співпадає з (3.5)) для кута ϕ , який утворює вектор \vec{A} з додатни напрямом осі в початковий момент часу

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{A_y(0)}{A_x(0)} = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}. \quad (3.17)$$

Отже, бачимо, що під час обертання вектора \vec{A} , який дорівнює геометричній сумі векторів \vec{A}_1 та \vec{A}_2 , його проєкція на вісь OX

$$A_x = A \cos \phi(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi),$$

буде здійснювати гармонічне коливання, причому амплітуда A та початкова фаза ϕ цього коливання визначаються з виразів (3.16) та (3.17) (проєкція A_y також здійснюватиме гармонічне коливання з частотою ω_0 , але вона використовується лише як допоміжна величина для того, щоб прийти до виразів (3.4) та (3.5), застосовуючи метод векторного додавання). Таким чином, при векторному способі задавання гармонічних коливань, додавання однаково спрямованих коливань, еквівалентно знаходження геометричної суми відповідних векторів. Вся описана вище процедура, очевидно, може бути застосована і під час додавання $N > 2$ коливань.

3.4. Додавання двох гармонічних коливань, що здійснюються у взаємно перпендикулярних напрямках

Нехай матеріальна точка M , яка закріплена на однакових невагомих горизонтальних та вертикальних пружинах (рис. 3.6), може рухатися в площині XU . Якщо викликати малі коливання в такій системі (двовимірний гармонічний осцилятор), то матеріальна точка, в загальному випадку, буде рухатися криволінійною траєкторією (див. рис. 3.6). Цей механічний рух буде обумовлений суперпозицією (накладенням) двох гармонічних коливань однакової частоти, які здійснює точка M вздовж осей X і Y . З'ясуємо характер руху матеріальної точки в цьому випадку.

Нехай x, y – декартові координати матеріальної точки M , при цьому кожна з них здійснює гармонічні коливання вздовж відповідної координатної осі

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (3.18)$$

Вирази (3.18) також можна розглядати, як рівняння траєкторії руху матеріальної точки, заданої в параметричному вигляді, в якому роль параметра відіграє час t . Щоб отримати рівняння траєкторії, що пов'язує координати x та y (тобто рівняння вигляду $f(x, y) = 0$), необхідно вилучити з (3.18) параметр t . Для цього розпишемо косинус суми у кожній з рівностей (3.18) і перепишемо їх у такому вигляді

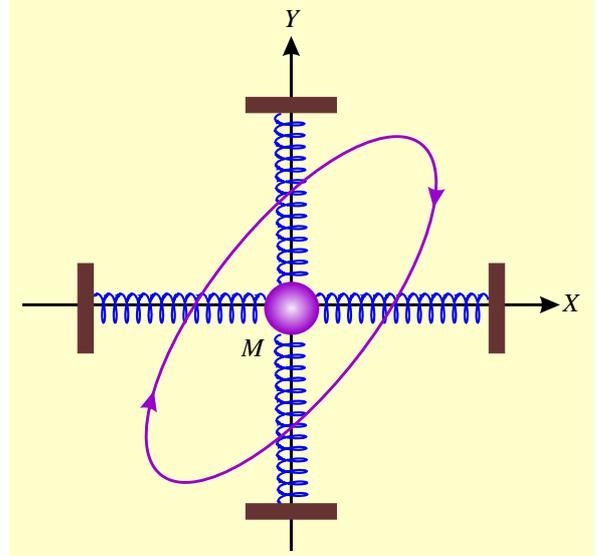


Рисунок 3.6

$$\begin{aligned} \frac{x}{A_1} &= \cos \varphi_1 \cos \omega t - \sin \varphi_1 \sin \omega t, \\ \frac{y}{A_2} &= \cos \varphi_2 \cos \omega t - \sin \varphi_2 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Помножимо перше рівняння (3.19) на $\cos \varphi_2$, друге – на $\cos \varphi_1$ та знайдемо їх різницю

$$\frac{x}{A_1} \cos \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos \varphi_1 = \sin \omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (3.20)$$

Далі помножимо перше рівняння (3.19) на $\sin \varphi_2$, друге – на $\sin \varphi_1$ та знову знайдемо їх різницю

$$\frac{x}{A_1} \sin \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \sin \varphi_1 = \cos \omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (3.21)$$

Для остаточного знаходження рівняння траєкторії піднесемо до квадрата вирази (3.20) і (3.21), а потім додамо їх

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{x}{A_1} \frac{y}{A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (3.22)$$

Остання рівність є рівнянням еліпса. Отже, при додаванні двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливань однакової частоти траєкторією результитивного руху матеріальної точки буде еліпс (див. рис. 3.6). Розташування еліпса щодо координатних осей, як це впливає з (3.22), залежить від різниці фаз коливань: $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, при цьому усі можливі траєкторії матеріальної точки будуть знаходитися всередині прямокутника зі сторонами $2A_1, 2A_2$ (рис. 3.7).

Напрямок руху матеріальної точки по еліптичній траєкторії також визначається різницею фаз $\Delta\varphi$. Візьмемо початок відліку часу таким чином, щоб початкова фаза одного з коливань дорівнювала нулю. Нехай, наприклад, $\varphi_1 = 0$, тоді $\varphi_2 = \Delta\varphi$. У цьому випадку рівняння коливань (3.18) набувають вигляду

$$\begin{aligned}x &= A_1 \cos \omega t, \\y &= A_2 \cos(\omega t + \Delta\varphi).\end{aligned}$$

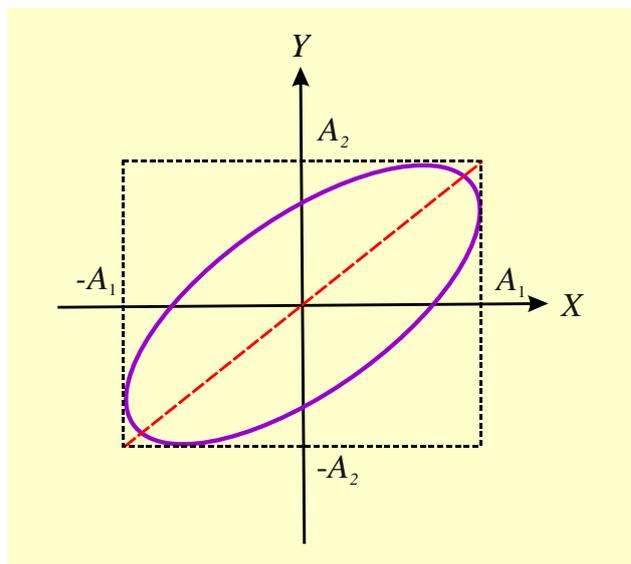


Рисунок 3.7

Продиференціюємо ці рівності за часом, визначивши проєкції вектора швидкості \vec{v} на відповідні осі координат

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -A_1\omega \sin \omega t, \\ \dot{y} &= -A_2\omega \sin(\omega t + \Delta\varphi).\end{aligned}$$

Розглянемо тепер положення та швидкість матеріальної точки в початковий момент часу $t = 0$ за різних значень $\Delta\varphi$.

1) Різниця фаз $0 < \Delta\varphi < \frac{\pi}{2}$. Тоді $x(0) = A_1 > 0$, $y(0) = A_2 \cos \Delta\varphi > 0$, отже, точка M перебуває у першому квадранті і має початкову швидкість $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -A_2\omega \sin \Delta\varphi < 0$. Тому в початковий момент часу матеріальна точка рухається у бік зменшення координати y , отже рух відбувається за годинниковою стрілкою.

2) Якщо $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, тоді рівняння траєкторії (3.22) спрощується

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1, \quad (3.23)$$

і траєкторія результитивного руху матеріальної точки має вигляд еліпса, півосі якого лежать на координатних осях OX та OY (рис. 3.8). Оскільки в початковий момент часу кінематичні характеристики руху точки M : $x(0) = A_1 > 0$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -A_2\omega < 0$, то точка знаходиться на осі OX і рухається в бік зменшення координати y , тобто за годинниковою стрілкою. Коли амплітуди взаємно перпендикулярних коливань є однаковими ($A_1 = A_2$), то еліпс вироджується в коло, радіус якого дорівнює амплітуді коливань (див. рис. 3.8).

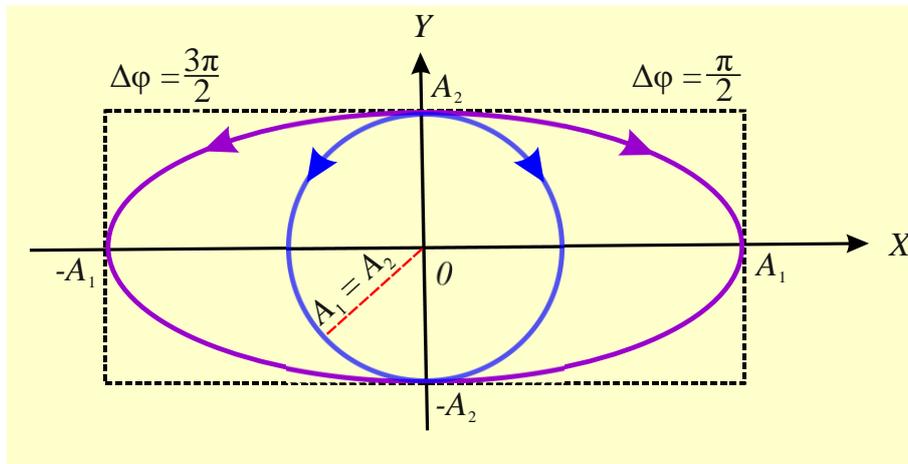


Рисунок 3.8

3) Коли різниця фаз буде задовольняти умові: $\frac{\pi}{2} < \Delta\varphi < \pi$, то початкові координати та швидкості матеріальної точки дорівнюють: $x(0) = A_1 > 0$, $y(0) = A_2 \cos \Delta\varphi < 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -A_2\omega \sin \Delta\varphi < 0$. Це означає, що у початковий момент часу точка M знаходиться в четвертому квадранті та рухається у бік зменшення координати y (при цьому саме значення y збільшується за абсолютною величиною) – рух за годинниковою стрілкою.

4) Якщо різниця фаз коливань: $\pi < \Delta\varphi < \frac{3\pi}{2}$, тоді матеріальна точка в момент часу $t = 0$ перебуває у четвертому квадранті: $x(0) = A_1 > 0$,

$y(0) = A_2 \cos \Delta\varphi < 0$ та рухається у бік збільшення координати y (при цьому, саме значення y зменшується за абсолютною величиною) оскільки: $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -A_2\omega \sin \Delta\varphi > 0$. Отже, рух відбувається проти годинникової стрілки.

5) При $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$, приходимо до рівняння (3.23), але з тією лише відмінністю, що: $\dot{y}(0) = A_2\omega > 0$ – точка рухається у бік збільшення координати y (при цьому сама величина y стає більшою за нуль), тому рух відбувається проти годинникової стрілки.

б) Якщо різниця фаз коливань: $\frac{3\pi}{2} < \Delta\varphi < 2\pi$, то матеріальна точка перебуває у першому квадранті: $x(0) = A_1 > 0$, $y(0) = A_2 \cos \Delta\varphi > 0$ та рухається у бік збільшення координати y : $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -A_2\omega \sin \Delta\varphi > 0$, тому рух відбувається проти годинникової стрілки.

Таким чином, при $0 < \Delta\varphi < \pi$ матеріальна точка M здійснює рух по еліптичній траєкторії у напрямку за годинниковою стрілкою, а при $\pi < \Delta\varphi < 2\pi$ – проти годинникової стрілки (див. рис. 3.8).

Залишилось розглянути два окремих випадки.

1) $\Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$. Тоді з формули (3.22) випливає

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0,$$

і рівняння траєкторії набуває вигляду

$$y = \frac{A_2}{A_1} x. \quad (3.24)$$

Матеріальна точка здійснюватиме гармонічне коливання з частотою ω вздовж прямої, що проходить через перший і третій квадранти (рис. 3.9, а).

2) $\Delta\varphi = \pi$, то рівняння (3.22) спрощується

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} + 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0.$$

Звідки маємо

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x. \quad (3.25)$$

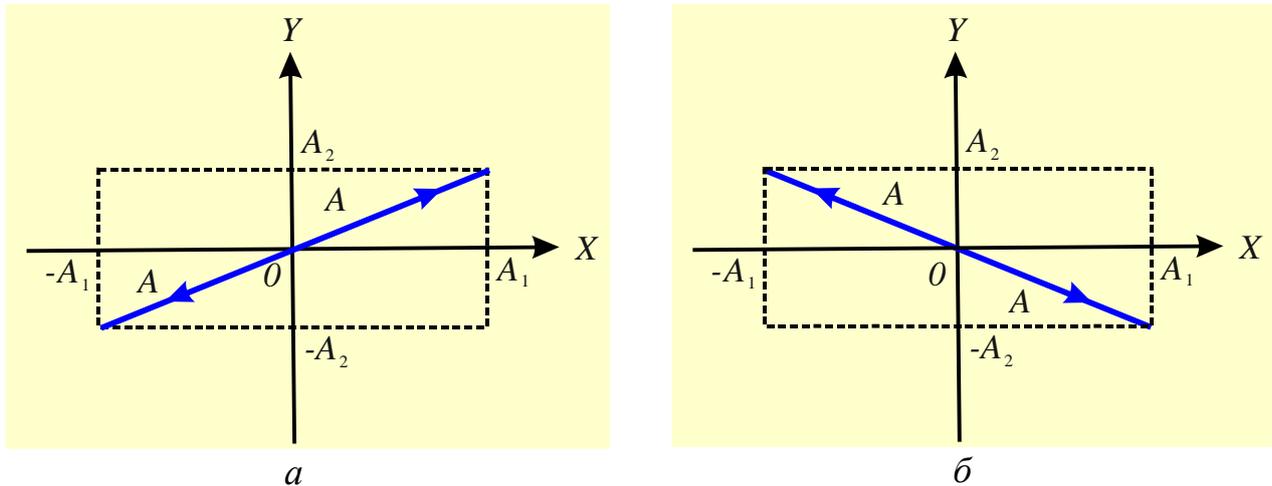


Рисунок 3.9

Отже, результивний рух матеріальної точки теж являє собою гармонічне коливання з частотою ω вздовж прямої, яка проходить через другий і четвертий квадранти (рис. 3.9, б). Амплітуда коливань у обох випадках буде дорівнювати (див. рис. 3.9): $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$.

3.5. Додавання гармонічних коливань різних частот

Якщо під час додавання гармонічних коливань однакового напрямку їх частоти будуть різними, тоді результивне коливання відрізнятиметься від гармонічного (рис. 3.10).

У математиці доведено (теорема Фур'є), що під час додавання великої кількості гармонічних коливань з кратними частотами можна отримати будь-яку необхідну періодичну функцію часу $f(t)$ відповідним підбором амплітуд A_k і початкових фаз φ_k коливань

$$f(t) = \sum_{k=0}^N A_k \cos(k\omega t + \varphi_k). \quad (3.26)$$

Розкладаючи періодичну функцію в ряд Фур'є (3.26) можна аналізувати складні коливальні процеси у вигляді суми гармонічних коливань.

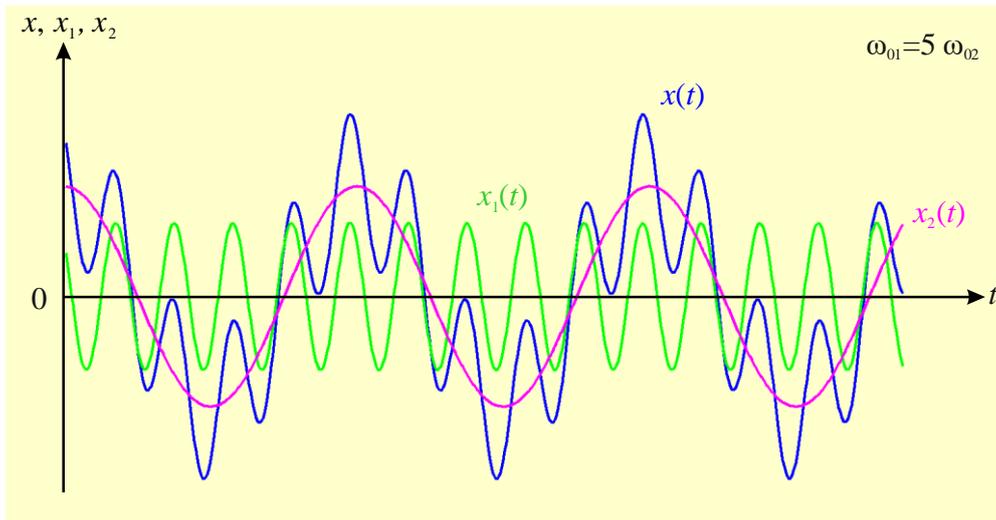


Рисунок 3.10

Траєкторії руху тіла під час додавання взаємно перпендикулярних гармонічних коливань різних частот мають форму складних кривих, які вписані у прямокутник зі сторонами $2A_1$, $2A_2$ та називаються **фігури Ліссажу**. Форма цих кривих визначається відношенням частот і різницею фаз коливань, що додаються. Наприклад, якщо частоти цих коливань відносяться, як цілі числа, то траєкторії руху будуть замкнутими кривими (рис. 3.11). При цьому відношення кількості точок дотикання кривих до відповідних сторін прямокутника дорівнюватиме відношенню частот коливань, що додаються.

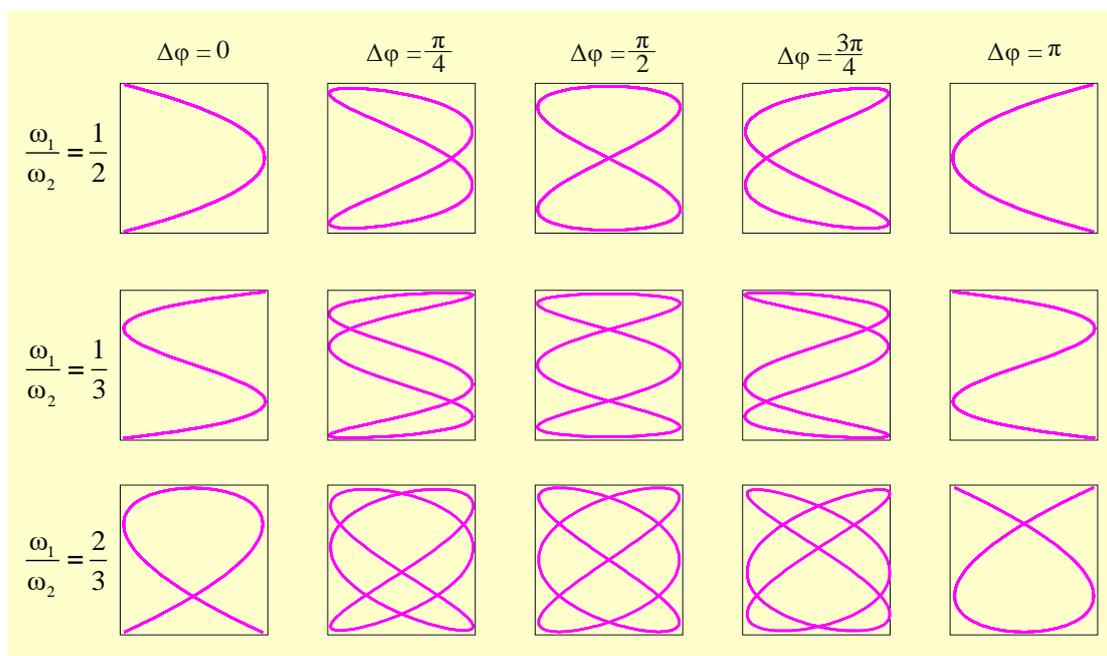


Рисунок 3.11

На практиці часто доводиться мати справу з двома гармонічними коливаннями близької частоти, у цьому разі при додаванні:

- 1) однаково спрямованих коливань виникають биття (див. розділ 4) – гармонічне коливання з амплітудою, що повільно пульсує;
- 2) взаємно перпендикулярних коливань траєкторією руху точки буде еліпс, який поступово змінюватиме свою форму та орієнтацію у просторі.

Контрольні запитання

1. Запишіть вираз для амплітуди гармонічного коливання, яке є суперпозицією двох гармонічних коливань однакового напрямку та частоти.
2. За яких умов траєкторією руху точки при додаванні взаємно перпендикулярних коливань буде еліпс, півосі якого лежать на координатних осях?
3. Запишіть рівняння траєкторії результитивного руху точки, яка одночасно бере участь у двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливаннях однакової частоти.
4. Від чого залежить напрямок руху точки по еліптичній траєкторії при додаванні взаємно перпендикулярних гармонічних коливань?

РОЗДІЛ 4. ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ

4.1. Вимушені коливання гармонічного осцилятора

У розділі 1 були розглянуті власні коливання гармонічного осцилятора. Так називають коливання, що відбуваються у системі, на яку не чинять жодного зовнішнього впливу після того, як її вивели зі стану рівноваги. Іншими словами, коливання, які відбуваються лише внаслідок наданої системі початкової енергії, називаються **власними коливаннями**.

Розглянемо тепер випадок, коли коливальній системі безперервно надають енергію ззовні. Це означає, що крім квазіпружної сили \vec{F} на матеріальну точку M діє залежна від часу деяка зовнішня сила $\vec{f}(t)$ (рис. 4.1). Тоді рівняння другого закону Ньютона набуде вигляду: $\vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$. Для того щоб перейти від векторних величин до скалярних, направимо координатну вісь OX вздовж прямої OM (див. рис. 4.1) і спроектуємо вектори на цю вісь, враховуючи, що $F_x = -kx$.

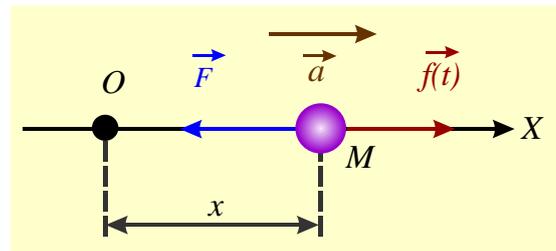


Рисунок 4.1

$$m\ddot{x} + kx = f_x, \quad (4.1)$$

де f_x – проекція сили \vec{f} на вісь OX .

Зупинимося на розгляді окремого випадку, що має не лише теоретичний інтерес, а й велике практичне значення, а саме, коли величина f_x змінюється з часом за гармонічним законом

$$f_x = f \cos(\omega t + \delta), \quad (4.2)$$

де f , ω , δ – амплітуда, частота та початкова фаза зовнішньої сили, відповідно.

Підставляючи проекцію (4.2) до (4.1), отримаємо

$$m\ddot{x} + kx = f \cos(\omega t + \delta).$$

Розділивши обидві частини останньої рівності на масу m матеріальної точки та враховуючи (1.2), маємо

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos(\omega t + \delta). \quad (4.3)$$

Отримане рівняння руху (4.3) відрізняється від рівняння (1.3) наявністю у правій частині доданка, що залежить від зовнішньої сили.

У теорії диференціальних рівнянь доведено, що загальне розв'язання $x(t)$ неоднорідного диференціального рівняння (4.3) буде сумою загального розв'язання $x_1(t)$ відповідного однорідного рівняння (1.3) (тобто, рівняння з нульовою правою частиною) і частинного (без довільних сталих) розв'язання $x_2(t)$, обумовленого наявністю правої частини: $x = x_1 + x_2$.

Перший доданок $x_1(t)$ відомий, оскільки він описує, згідно зі співвідношеннями (1.5) та (1.6), власні гармонічні коливання матеріальної точки. Залишається знайти частинне розв'язання рівняння (4.3), яке шукатимемо у тому ж вигляді¹¹, як і права частина рівняння (4.3)

$$x_2 = C \cos(\omega t + \delta), \quad (4.4)$$

де C – невідома величина, яка не залежить від часу.

Для визначення C підставимо функцію (4.4) у рівняння (4.3)

$$C(\omega_0^2 - \omega) \cos(\omega t + \delta) = \frac{f}{m} \cos(\omega t + \delta).$$

Оскільки отримана рівність має виконуватися за усіх значень незалежної змінної t , то

$$C = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (4.5)$$

Тоді розв'язок (4.4) з урахуванням (4.5) набуває вигляду

$$x_2 = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t + \delta). \quad (4.6)$$

¹¹ Частота коливань $x_2(t)$ співпадає з частотою зовнішньої сили $\vec{f}(t)$, оскільки коливальна система є лінійною.

Зважаючи на те, що гармонічне коливання (4.6) виникає завдяки періодичному зовнішньому впливу, то його називають **вимушеним коливанням**, а відповідно \vec{f} – **змушувальною силою**.

Додаючи співвідношення (1.5) та (4.6) отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння (4.1)

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t + \delta). \quad (4.7)$$

Сталі величини A та φ у виразі (4.7) визначаються як і раніше (див. розділ 1) з початкових умов: $x(t=0) = x_0$, $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$.

Продиференціювавши вираз (4.7) за часом t , отримаємо

$$\dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - \frac{f\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t + \delta). \quad (4.8)$$

Підставляючи початкові умови до (4.7) та (4.8), отримуємо систему рівнянь для величин A та φ

$$\begin{cases} x_0 - \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \delta = A \cos \varphi, \\ -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0} - \frac{f\omega}{m\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \delta = A \sin \varphi. \end{cases} \quad (4.9)$$

З виразів (4.9) бачимо, що амплітуда і початкова фаза власних коливань (1.5) в цьому випадку визначаються, крім початкових умов, ще й параметрами зовнішнього впливу. Так, зокрема, A та φ будуть відрізнятися від нуля навіть за нульових початкових умов (у разі відсутності зовнішньої сили, при $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, матеріальна точка перебуватиме в положенні рівноваги необмежений час). Розв'язок (4.6), який відповідає вимушеним коливанням залежить лише від параметрів зовнішньої сили: f , ω , δ .

Отже, відповідно до співвідношення (4.7), рух матеріальної точки під впливом періодичної сили є результатом суперпозиції двох однаково спрямованих гармонічних коливань: власного – з частотою ω_0 та вимушеного – частота якого дорівнює частоті зовнішньої сили. Оскільки в загальному випадку $\omega \neq \omega_0$,

то результивний рух (див. рис. 3.10) вже не буде гармонічним коливанням (рис. 4.2). І лише за деяких спеціально обраних початкових умов

$$x(0) = C \cos \delta, \dot{x}(0) = -\omega C \sin \delta,$$

власні коливання в системі не виникають і загальний розв'язок (4.7) описуватиме гармонічні коливання матеріальної точки з циклічною частотою ω

$$x = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t + \delta).$$

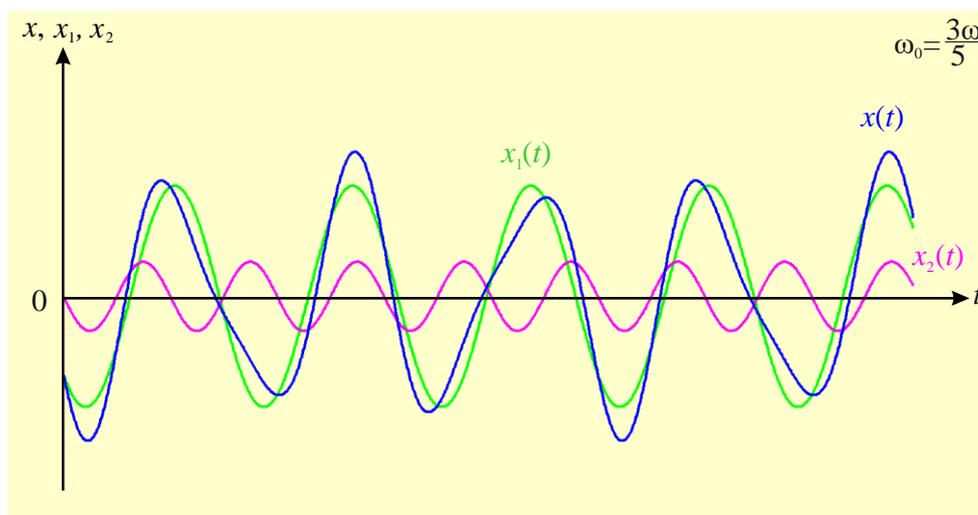


Рисунок 4.2

З виразу (4.6) маємо, що при $\omega < \omega_0$ фаза вимушених коливань співпадає з фазою зовнішньої сили, тому вони одночасно сягають своїх найбільших та найменших значень. Про такі коливання говорять, що вони відбуваються у фазі, або називають їх **синфазними коливаннями**. Взагалі, якщо різниця фаз коливань дорівнює цілому числу 2π , то вони є синфазними.

При $\omega = 0$ зміщення x_2 , відповідно до формули (4.6), буде стаціонарним:

$$x_2 = \frac{f}{m\omega_0^2} \cos \delta = \frac{f}{k} \cos \delta = \text{const},$$

тому загальне розв'язання (4.7) буде відповідати гармонічному коливанню з амплітудою A та частотою ω_0 , яке відбувається поблизу нового положення рівноваги (рис. 4.3), зміщеного на величину x_2 щодо положення рівноваги за відсутності зовнішньої сили.

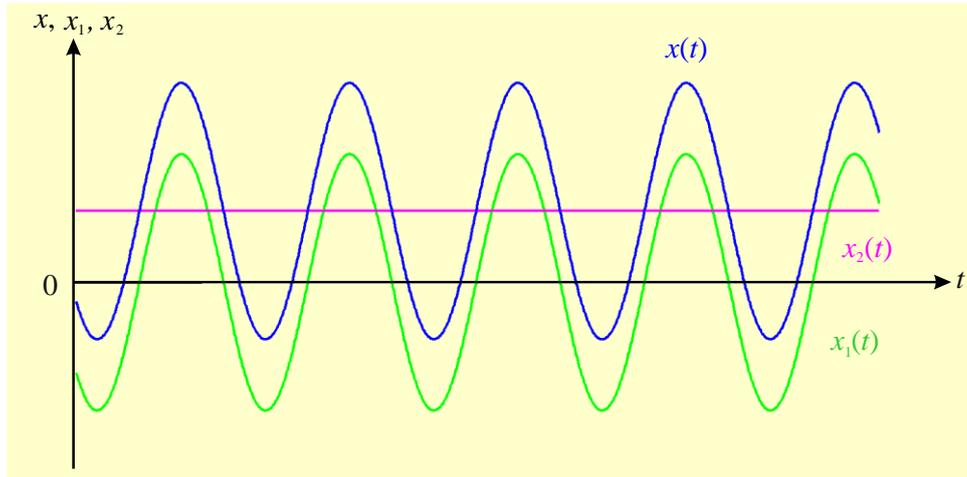


Рисунок 4.3

Якщо частота ω трохи відрізняється від нуля ($\omega \ll \omega_0$), то загальний розв'язок x можна розглядати як гармонічне коливання x_1 , яке відбувається біля повільно рухомого (квазістатичного, тобто майже статичного) положення рівноваги x_2 (рис. 4.4).

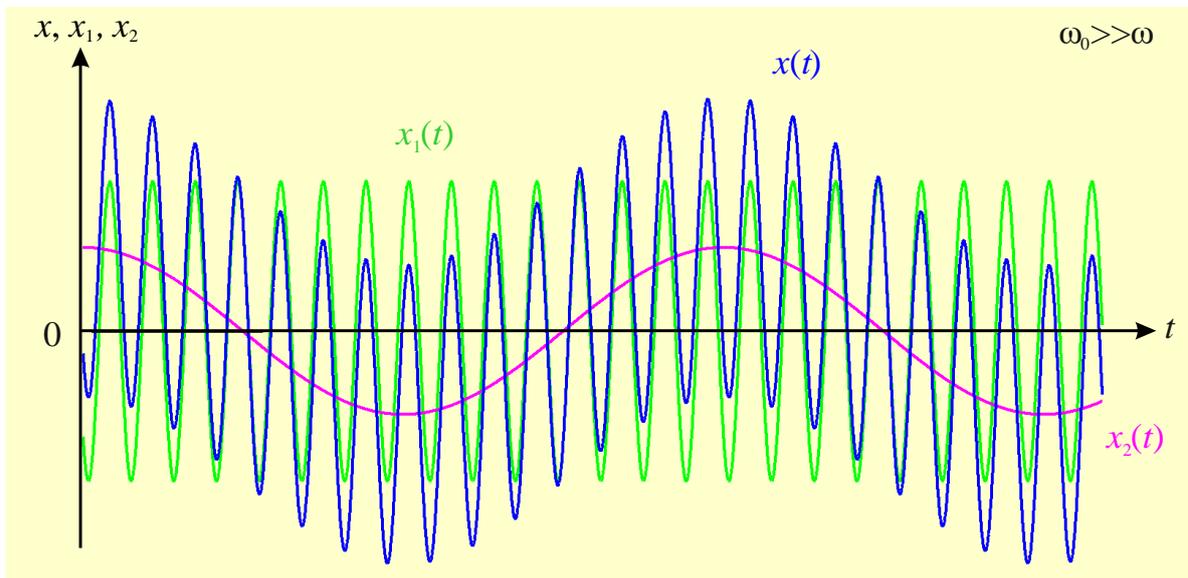


Рисунок 4.4

Зі зростанням частоти ω ($\omega < \omega_0$) амплітуда C вимушених коливань буде монотонно зростати і при необмеженому наближенні ω до значення рівного ω_0 наближається до нескінченності (рис. 4.5).

При $\omega > \omega_0$ вимушені коливання (4.6) знаходяться в протифазі до зовнішньої сили

$$x_2 = -\frac{f}{m|\omega_0^2 - \omega^2|} \cos(\omega t + \delta) = \frac{f}{m|\omega_0^2 - \omega^2|} \cos(\omega t + \delta - \pi)$$

Подальше збільшення частоти ω ($\omega > \omega_0$) приводить до того, що амплітуда

$C = \frac{f}{m|\omega_0^2 - \omega^2|}$ монотонно зменшується та за необмеженого зростання ω набли-

жається до нуля (див. рис. 4.5). За умови, що $\omega \gg \omega_0$, на власне коливання x_1

накладається малоамплітудне високочастотне вимушене коливання x_2 . Іншими

словами, частинний-

розв'язок x_2 вносить у за-

гальний розв'язок x лише

малі осциляції поблизу

власного коливання x_1

(рис. 4.6). Таким чином,

якщо частота ω набагато

більша за частоту ω_0 , то

змушувальна сила суттєво

не впливає на режим влас-

них коливань.

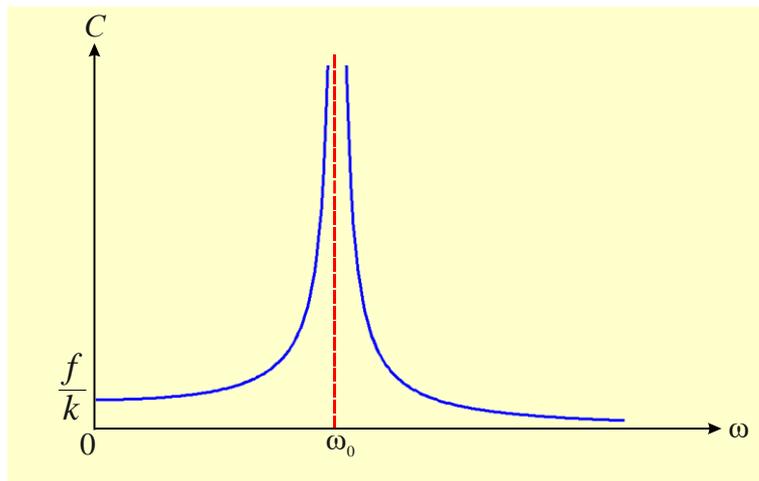


Рисунок 4.5

Розглянемо випадок, коли частота зовнішньої сили дорівнює власній частоті осцилятора: $\omega = \omega_0$. Тоді згідно з формулою (4.5), амплітуда вимушених

коливань стає нескінченною, тому використовувати цю формули для опису по-

ведінки осцилятора неможливо. Крім того, при $\omega = \omega_0$ функції виду

$C \cos(\omega_0 t + \delta)$, де C – стала величина, в цьому легко переконатися безпосеред-

ньою підстановкою, не є частинним розв'язком диференціального рівнян-

ня (4.3).

Для того щоб з'ясувати характер руху, в цьому випадку використаємо ще

раз загальний розв'язок (4.7)

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t + \delta).$$

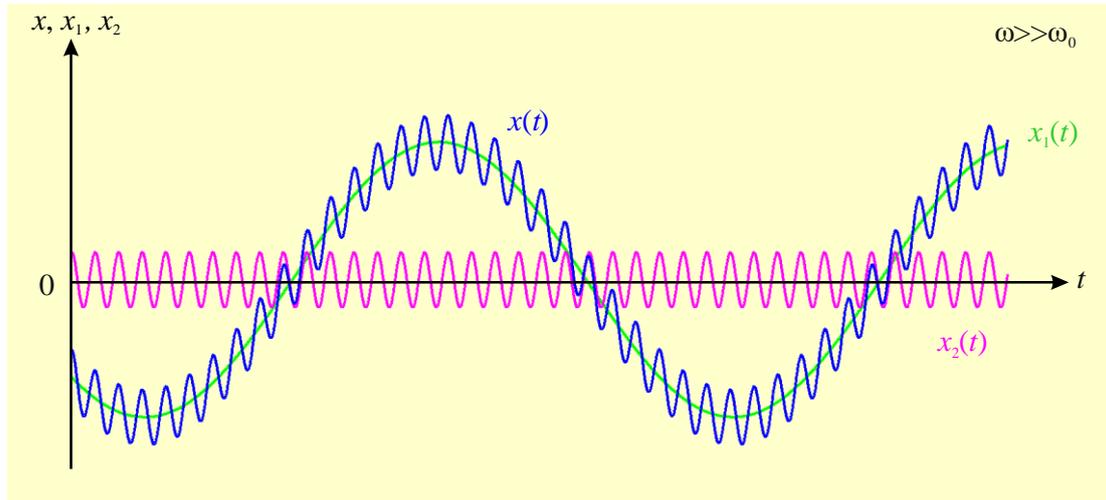


Рисунок 4.6

У першому доданку, який відповідає власним коливанням осцилятора, величини A і φ є константами, які можна записати в будь-якому зручному вигляді. Розписуючи косинус суми, отримаємо¹²

$$A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cos \varphi \cos \omega_0 t - A \sin \varphi \sin \omega_0 t. \quad (4.10)$$

Позначимо

$$A \cos \varphi = B \cos \alpha - \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \delta,$$

$$A \sin \varphi = B \sin \alpha - \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \delta. \quad (4.11)$$

Отже, за допомогою перетворень (4.11) ми перейшли від констант A і φ до нових сталих B і α , які, так само, як A , φ визначаються з початкових умов.

Перепишемо вираз (4.10) з урахуванням (4.11)

$$A \cos(\omega_0 t + \varphi) = B \cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega_0 t + \delta).$$

В цьому випадку загальний розв'язок (4.7) буде

$$x = B \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} [\cos(\omega t + \delta) - \cos(\omega_0 t + \delta)].$$

¹² Оскільки функції $\cos \omega_0 t$ є розв'язком рівняння (1.3), то й функція виду $A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t$ (де A_1, A_2 – довільні сталі), також буде розв'язком цього рівняння.

Розглянемо окремо другий доданок в останньому виразі і перепишемо його (використовуючи тригонометричну формулу для різниці косинусів) у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} [\cos(\omega t + \delta) - \cos(\omega_0 t + \delta)] = \\ & = \frac{-2f}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega + \omega_0)t + 2\delta}{2} \sin \frac{(\omega - \omega_0)t}{2} \end{aligned}$$

Після чого виконаємо граничний перехід $\omega \rightarrow \omega_0$, враховуючи першу важливу границю

$$\begin{aligned} & \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left\{ \frac{-2f}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega + \omega_0)t + 2\delta}{2} \sin \frac{(\omega - \omega_0)t}{2} \right\} = \\ & = \sin(\omega_0 t + \delta) \cdot \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left\{ \frac{ft}{m(\omega_0 + \omega)} \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0)t}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0)t}{2}} \right\} = \\ & = \frac{ft}{2m\omega_0} \sin(\omega_0 t + \delta) \cdot \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left\{ \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0)t}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0)t}{2}} \right\} = \\ & = \frac{ft}{2m\omega_0} \sin(\omega_0 t + \delta) = \frac{ft}{2m\omega_0} \cos \left(\omega_0 t + \delta - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Таким чином, при $\omega = \omega_0$ загальний розв'язок рівняння (4.3) матиме вигляд

$$x = B \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{ft}{2m\omega_0} \cos \left(\omega_0 t + \delta - \frac{\pi}{2} \right), \quad (4.12)$$

перший доданок, як і раніше, відповідає власним коливанням, другий – вимушеним.

Через наявність часу t у (4.12) поза знаком тригонометричної функції вимушене коливання

$$x_2(t) = \frac{ft}{2m\omega_0} \cos \left(\omega_0 t + \delta - \frac{\pi}{2} \right),$$

не є гармонічним, а являє собою коливання з амплітудою, що лінійно зростає (рис. 4.7), яке відстає по фазі від змушувальної сили на $\frac{\pi}{2}$.

Отже, можемо зробити висновок: що співпадіння частоти ω зовнішньої періодичної сили з власною частотою ω_0 осцилятора, викликає необмежене зростання амплітуди вимушених коливань. Це явище називається **резонансом**.

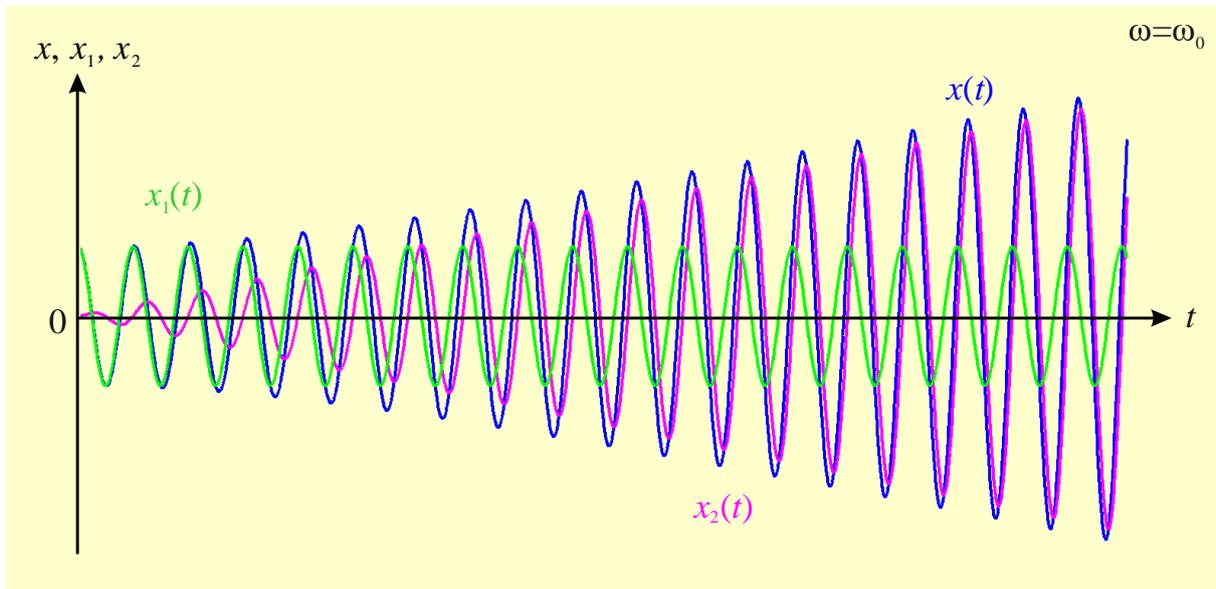


Рисунок 4.7

4.2. Рух поблизу резонансу

Перш ніж описувати поведінку осцилятора поблизу резонансу, з'ясуємо характер руху, що є суперпозицією двох однаково спрямованих і близьких за частотою гармонічних коливань. Розглянемо окремий випадок (він цілком розкриває суть того, що відбувається), коли амплітуди коливань однакові та початкові фази дорівнюють нулю (оскільки коливання відбуваються з різними частотами, завжди можна вибрати початок відліку часу таким чином, щоб початкові фази обох коливань дорівнювали нулю).

Якщо компоненти коливання змінюються за законом: $x_1 = A \cos \omega_1 t$, $x_2 = A \cos \omega_2 t$, то рівняння результитивного коливання $x = x_1 + x_2$ матиме вигляд

$$x = A(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right).$$

При векторному додаванні коливань (див. розділ 3) необхідно врахувати, що вектори \vec{A}_1 і \vec{A}_2 будуть обертатися з різними кутовими швидкостями ω_1 та ω_2 , тому вектор $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ обертатиметься зі змінною кутовою швидкістю, при цьому його довжина також змінюватиметься з часом.

Будемо вважати, що $\omega_2 > \omega_1$, тоді вводячи позначення: $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$ та $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = \varpi$, перепишемо рівняння $x(t)$

$$x = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos \varpi t. \quad (4.13)$$

Оскільки ми розглядаємо випадок $\omega_2 \approx \omega_1$, то $\Delta\omega \ll \varpi$. Це означає, що функція $\cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right)$ у виразі (4.13) змінюється значно повільніше ніж $\cos \varpi t$,

тому протягом часу $T = \frac{2\pi}{\varpi}$, множник $\cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right)$ можна приблизно вважати

сталим. Звідси маємо, що результивне коливання x можна вважати гармонічним коливанням з частотою ϖ і амплітудою, яка є повільною періодичною функцією часу (рис. 4.8). За означенням амплітуда завжди додатна величина, тому її залежність від часу має описуватися функцією: $\left|2A \cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right)\right|$.

Величина $\Delta\omega t = (\omega_2 - \omega_1)t = \Phi(t)$ являє собою різницю фаз коливань x_1 і x_2 . У ті моменти часу, коли x_1 та x_2 опиняються в протифазі:

$$\frac{\Phi(t)}{2} = \frac{\pi(2n+1)}{2} \Rightarrow \Phi(t) = (2n+1)\pi \quad (n=0,1,2,\dots),$$

амплітуда результивного коливання дорівнює нулю. Для моментів часу: $\frac{\Phi(t)}{2} = \pi n \Rightarrow \Phi(t) = 2\pi n$ коливання

x_1 й x_2 відбувається у фазі, тому амплітуда результивного коливання сягає свого максимального значення $2A$ (див. рис. 4.8). Таким чином, при додаванні близьких за частотою гармонічних коливань результивний рух матиме вигляд періодично зростаючих і спадних коливань. Коливальні процеси подібного роду з амплітудою що пульсує називають **биття**. Величина ϖ називається частотою

коливань, а, відповідно, $T = \frac{2\pi}{\varpi}$ – періодом коливань; частота коливань амплі-

туди $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ – називається **частотою биття**, а відповідний проміжок часу $\tilde{T} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ – **періодом биття**. Характер биття має і рух, що є результатом додавання близьких за частотою гармонічних коливань з різними амплітудами та початковими фазами.

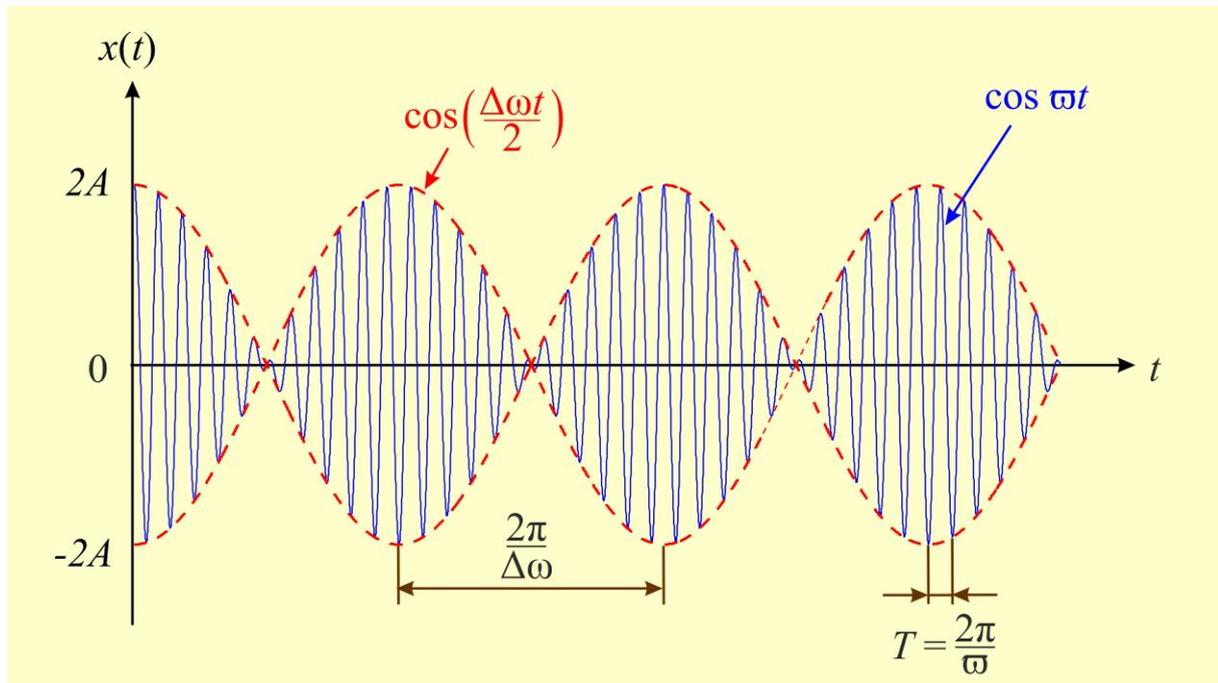


Рисунок 4.8

Перейдемо тепер до розгляду випадку, коли частота ω змушувальної сили досить близька до власної частоти ω_0 осцилятора.

Позначаючи, різницю частот, як $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ перепишемо частинне розв'язання (4.6) у такому вигляді

$$C \cos(\omega t + \delta) = C \cos[\omega_0 t + \delta + \Delta\omega t] = C [\cos \omega_0 t \cos(\delta + \Delta\omega t) - \sin \omega_0 t \sin(\delta + \Delta\omega t)].$$

Врахувавши (4.10), загальний розв'язок (4.7) можна представити

$$x = [A \cos \varphi + C \cos(\Delta\omega t + \delta)] \cos \omega_0 t - [A \sin \varphi + C \sin(\Delta\omega t + \delta)] \sin \omega_0 t.$$

Далі вчинимо так само як і в розділі 3, тобто позначимо

$$A \cos \varphi + C \cos(\Delta\omega t + \delta) = \tilde{A} \cos \psi,$$

$$A \sin \varphi + C \sin(\Delta\omega t + \delta) = \tilde{A} \sin \psi.$$

Тоді відразу можемо записати вирази для \tilde{A} та ψ

$$\tilde{A}^2 = A^2 + C^2 + 2AC \cos(\Delta\omega t + \delta - \varphi), \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{A \sin \varphi + C \sin(\Delta\omega t + \delta)}{A \cos \varphi + C \cos(\Delta\omega t + \delta)}. \quad (4.14)$$

Отже, результивне коливання x матиме наступний вигляд

$$x = \tilde{A} \cos(\omega_0 t + \psi). \quad (4.15)$$

Формули (4.14) і (4.15) виконуються за довільного співвідношення частот компонент коливань. Іншими словами, при додаванні однаконо спрямованих коливань різних частот для величин x , \tilde{A} , ψ можна формально скористатися виразами, отриманими у розділі 3, беручи до уваги, що \tilde{A} та ψ , відповідно до (4.14), будуть функціями часу. Тому результивне коливання вже не буде суто гармонічним (рис. 4.9). Взагалі, характер руху, який описується формулою (4.15) суттєво залежить від співвідношення ω та ω_0 (результивне коливання також може не бути строго періодичним).

Розглянемо окремо величину \tilde{A} . Оскільки, $-1 \leq \cos(\Delta\omega t + \delta - \varphi) \leq 1$, то функція $\tilde{A}^2(t)$ буде здійснювати коливання між двома граничними значеннями $\tilde{A}_{\max}^2 = (A + C)^2$ і $\tilde{A}_{\min}^2 = (A - C)^2$ з частотою $\tilde{\omega} = |\omega - \omega_0|$ (частота ω зовнішньої сили може набувати значення: $\omega > \omega_0$, $\omega < \omega_0$). Сама амплітуда $\tilde{A}(t)$ коливатиметься з тією ж самою частотою в межах від $\tilde{A}_{\max} = A + C$ до $\tilde{A}_{\min} = |A - C|$.

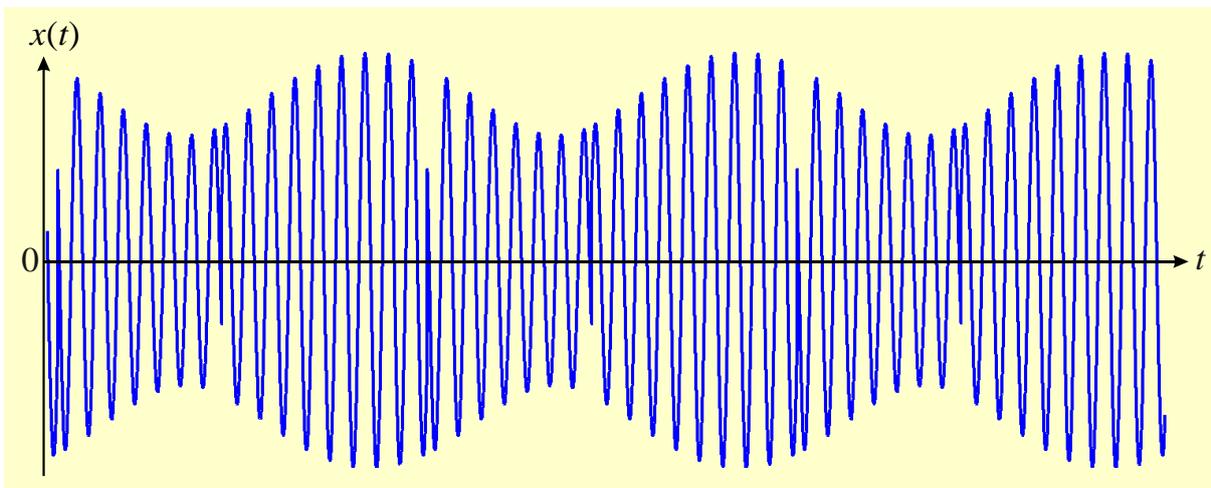


Рисунок 4.9

При $\omega \approx \omega_0$ період коливань величини \tilde{A} : $\tilde{T} = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}}$, значно перевищує період власних коливань $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. За проміжок часу T відхилення амплітуди \tilde{A} від постійного значення мале (фаза ψ також змінюється несуттєво). Тоді коливання (4.15) протягом зазначеного проміжку часу мало відрізняється від розглянутого у розділі 1 гармонічного коливання. Таким чином, поблизу резонансу ($\omega \approx \omega_0$) функцію (4.15) можна вважати гармонічним коливанням з амплітудою, що повільно осцилює (рис. див. 4.8). Іншими словами, рух поблизу резонансу має характер биття, причому частота биття дорівнює модулю різниці власної частоти осцилятора і частоти змушувальної сили: $|\omega - \omega_0|$.

Контрольні запитання

1. Які коливання називаються вимушеними?
2. Запишіть диференціальне рівняння вимушених коливань.
3. За яких умов частота вимушених коливань буде співпадати з частотою змушувальної сили?
4. Коли коливання називають синфазними?
5. Поясніть явище резонансу.
6. За яких умов виникає гармонічне коливання з амплітудою, що пульсує?

РОЗДІЛ 5. РУХ ЧАСТИНКИ ПІД ДІЄЮ СИЛИ ВІДШТОВХУВАННЯ ВІД НЕРУХОМОГО ЦЕНТРУ

5.1. Постановка задачі

Розглянемо випадок, коли сила \vec{F} в кожній точці прямої, вздовж якої рухається матеріальна точка M (рис. 5.1), буде спрямована не до силового центру (до нерухомої точки O), а від нього: $\vec{F} = k\vec{r}$, де \vec{r} – вектор проведений з силового центру до того положення матеріальної точки M , яке вона займає цієї миті. Тоді координата x (проекція вектора \vec{r} на вісь OX) та проекція F_x завжди матимуть однакові знаки. У цьому випадку рівняння руху точки (другий закон Ньютона) в проекції на вісь OX матиме вигляд

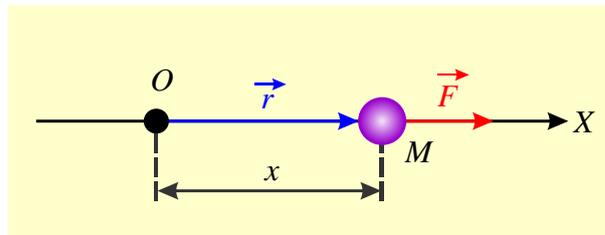


Рисунок 5.1

$$m\ddot{x} = kx, \text{ або } m\ddot{x} - kx = 0. \quad (5.1)$$

Позначимо, як і раніше $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, тоді (5.1) можна переписати

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0. \quad (5.2)$$

Як видно, рівняння (5.1) та (5.2) відрізняються від (1.1), (1.3) знаком при лінійному відносно x доданку.

Для знаходження розв'язку проведено ті самі дії, як і у розділі 1. Підставляючи у диференціальне рівняння (5.2) $x = e^{\lambda t}$, отримаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 - \omega_0^2 = 0$, з якого випливає, що $\lambda_1 = \omega_0$ та $\lambda_2 = -\omega_0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (5.2)

$$x(t) = C_1 e^{\omega_0 t} + C_2 e^{-\omega_0 t}, \quad (5.3)$$

де C_1, C_2 – довільні дійсні константи (величина x є дійсною), які визначаються з початкових умов

$$x(0) = x_0, \quad v_0 = \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (5.4)$$

Підставляючи (5.3) у (5.4), прийдемо до системи рівнянь для C_1, C_2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_0, \\ C_1 - C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}, \end{cases}$$

з яких знайдемо: $C_1 = \frac{x_0\omega_0 + \dot{x}_0}{2\omega_0}$, $C_2 = \frac{x_0\omega_0 - \dot{x}_0}{2\omega_0}$.

Враховуючи отримані значення C_1 та C_2 у рівнянні (5.3), знаходимо часову залежність координати матеріальної точки

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right) \frac{e^{\omega_0 t}}{2} + \left(x_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right) \frac{e^{-\omega_0 t}}{2} \text{ або } x(t) = x_0 \operatorname{ch} \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \operatorname{sh} \omega_0 t. \quad (5.5)$$

Порівнюючи вирази (5.5) і (1.16), бачимо, що $x(t)$ в цьому випадку описується замість тригонометричних функцій відповідними гіперболічними.

Оскільки сила $F_x = kx$ є консервативною, то повна енергія матеріальної точки зберігатиметься. Повторюючи викладки, виконані у розділі 1, можемо відразу записати співвідношення для кінетичної, потенціальної та повної енергії

$$E_k = \frac{m}{2} \dot{x}^2, \quad E_n = -\frac{k}{2} x^2, \quad \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 = E = \text{const}. \quad (5.6)$$

З умови $E = \text{const}$ маємо рівність

$$\frac{m}{2} \dot{x}_0^2 - \frac{k}{2} x_0^2 = E. \quad (5.7)$$

Вирази (5.6) та (5.7) відрізняються від відповідних виразів для гармонічного осцилятора знаком потенціальної енергії. Координата $x=0$ відповідає положенню рівноваги матеріальної точки, тому величина проєкції сили, що діє на неї:

$$F_x(0) = -\left. \frac{dE_n}{dx} \right|_{x=0} = kx = 0. \text{ Отже, в точці } x=0 \text{ потенціальна енергія } E_n(x)$$

має екстремум, а саме – максимум $\left(\left. \frac{d^2 E_n}{dx^2} \right|_{x=0} = -k \right)$.

Повна енергія частинки E (тут і далі кажучи про частинку, маємо на увазі матеріальну точку) може набувати як додатних, так і від'ємних значень, зокрема вона може дорівнювати нулю. Різним знакам енергії будуть відповідати різні типи руху частинки. Тому розглянемо окремо всі три випадки.

5.2. Повна енергія частинки від'ємна

Якщо повна енергія системи менша за нуль, то вводячи позначення: $E = -|E|$, рівності (5.6) та (5.7) можемо переписати у вигляді

$$\frac{k}{2}x^2 - \frac{m}{2}\dot{x}^2 = |E|, \quad \frac{k}{2}x_0^2 - \frac{m}{2}\dot{x}_0^2 = |E|. \quad (5.8)$$

З виразів (5.8) бачимо, що швидкість частинки перетворюється на нуль (точки повороту) на деякому віддаленні від силового центру

$$x_{\min} = \pm \sqrt{\frac{2|E|}{k}} = \pm \sqrt{x_0^2 - \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}.$$

Це означає, що які б не були початкові умови, частинка не може наблизитися до силового центру (до т. O) ні справа, ні зліва на відстань ближче ніж $|x_{\min}|$. З останньої формули також видно, що чим більше енергія E частинки (менше $|E|$), тим менше відстань $|x_{\min}|$, тобто тим ближче до положення рівноваги знаходиться сама точка повороту.

З'ясуємо, як залежить рух матеріальної точки від початкових умов.

Нехай у початковий момент часу частинка знаходиться на додатній півосі (рис. 5.2, *a*), тоді $x_0 > 0$, $F_x > 0$. Якщо при цьому $\dot{x}_0 > 0$ то, вектори \vec{F} та \vec{v}_0 співспрямовані (проекції \dot{x}_0 та F_x однакового знака) і сила, що діє на частинку, весь час її прискорюватиме. Це приведе до того, що частинка буде необмежено віддалятися від свого початкового положення x_0 (див. рис. 5.2, *a*) із швидкістю, що безперервно зростає за модулем, в додатному напрямку осі OX , що впливає з виразу (5.5). Якщо $\dot{x}_0 < 0$, то вектори \vec{F} та \vec{v}_0 протилежно спрямовані (проекції \dot{x}_0 та F_x різних знаків). Тому частинка з положення x_0 (див. рис. 5.2 *a*) здійснюватиме сповільнений рух у напрямку до силового центру (до т. O), доки у точці повороту $x = x_{\min}$ вона не зупиниться. У цьому положенні швидкість змінює свій напрямок на протилежний і частинка під дією сили \vec{F} почне прискорено рухатися на нескінченність у додатному напрямку осі OX , так само, як у попередньому випадку.

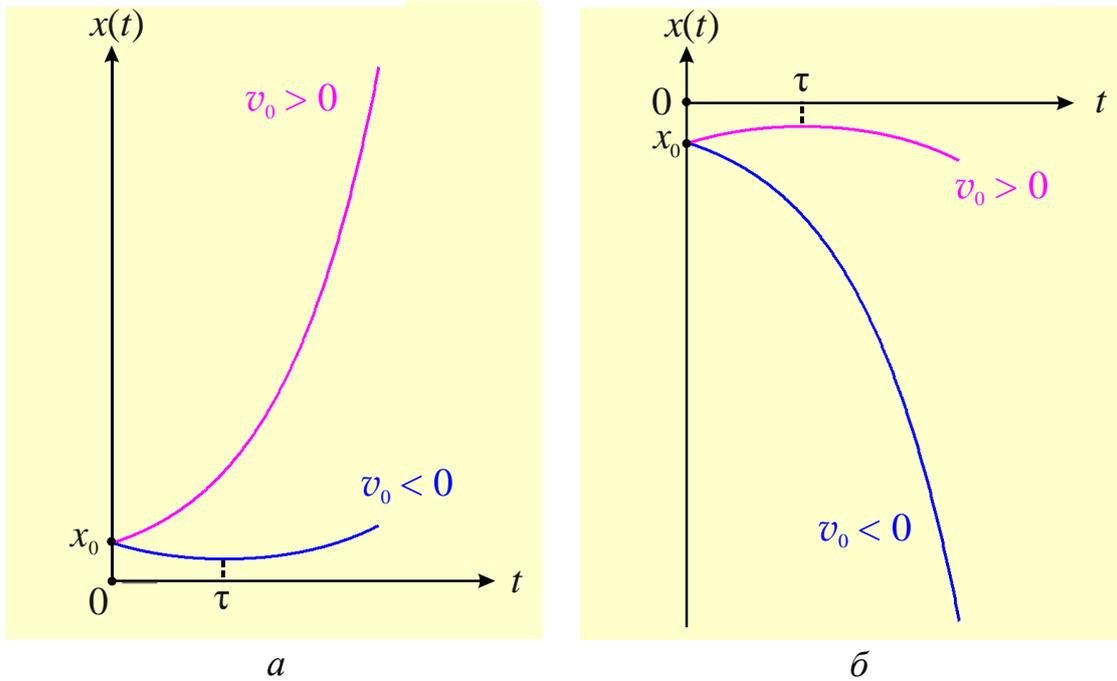


Рисунок 5.2

Визначимо час руху частинки від положення x_0 до x_{\min} , позначимо його τ (див. рис. 5.2, а). Диференціюючи вираз (5.5) за часом знайдемо проєкцію швидкості $\dot{x}(t)$

$$\dot{x}(t) = (x_0\omega_0 + \dot{x}_0)\frac{e^{\omega_0 t}}{2} - (x_0\omega_0 - \dot{x}_0)\frac{e^{-\omega_0 t}}{2}.$$

У момент часу τ частинка зупиняється на мінімальній відстані від силового центру ($x(\tau) = x_{\min}$, $\dot{x}(\tau) = 0$)

$$(x_0\omega_0 + \dot{x}_0)e^{\omega_0\tau} - (x_0\omega_0 - \dot{x}_0)e^{-\omega_0\tau} = 0,$$

помноживши обидві частини останнього виразу на $e^{\omega_0\tau}$, отримаємо

$$e^{2\omega_0\tau} = \frac{\omega_0 x_0 - \dot{x}_0}{\omega_0 x_0 + \dot{x}_0} \Rightarrow \tau = \frac{1}{2\omega_0} \ln \frac{\omega_0 x_0 - \dot{x}_0}{\omega_0 x_0 + \dot{x}_0}.$$

Нехай тепер частинка знаходиться на від'ємній півосі, тоді $x_0 < 0$, $F_x < 0$. Рухи, які робить частинка в цьому випадку (рис. 5.2, б), будуть дзеркальним відображенням рухів, наведених на рис. 5.2, а. Якщо $\dot{x}_0 < 0$ (проєкції \dot{x}_0 та F_x одного знака), то частинка із положення x_0 буде здійснювати рух з безперервно зростаючою за абсолютною величиною швидкістю у бік від'ємних значень ко-

ординат. При $\dot{x}_0 > 0$ (проекції \dot{x}_0 та F_x мають різні знаки) частинка зі свого початкового положення x_0 протягом проміжку часу τ буде наближатися до точки $x = x_{\min}$, після проходження якої напрямок її швидкості зміниться на протилежний і частинка почне прискорено переміщуватися в бік від'ємних значень координат (див. рис. 5.2, б).

Зокрема, якщо $\dot{x}_0 = 0$, то частинка, не змінюючи напрямку свого руху, прямує на нескінченність у бік додатних (при $x_0 > 0$) або від'ємних (при $x_0 < 0$) значень координат.

Розв'язання (5.5) можна подати в іншому вигляді. Для цього перепишемо другу з рівностей (5.8) таким чином:

$$x_0^2 - \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2} = \frac{2|E|}{k}, \left(\frac{x_0}{\sqrt{2|E|/k}} \right)^2 - \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 \sqrt{2|E|/k}} \right)^2 = 1.$$

Враховуючи останнє співвідношення, введемо позначення

$$\text{ch}\delta = \frac{x_0}{\sqrt{2|E|/k}}, \quad \text{sh}\delta = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0 \sqrt{2|E|/k}}, \quad (5.9)$$

де δ – стала величина, яка згідно з (5.9) залежить від початкових умов:

$$\text{th}\delta = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}.$$

Після підставлення формул (5.9) у розв'язок (5.5), остаточно отримаємо

$$x(t) = \sqrt{\frac{2|E|}{k}} \text{ch}(\omega_0 t + \delta). \quad (5.10)$$

5.3. Повна енергія частинки додатна

Якщо повна енергія частинки більша за нуль, то, як випливає з (5.6), її швидкість ніде не набуває нульових значень, тому частинка за заданих початкових умов завжди здійснюватиме рух в одному напрямку. При цьому, відповідно до співвідношень (5.6) і (5.7), мінімальна за абсолютною величиною швидкість частинки буде

$$|\dot{x}_{\min}| = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\dot{x}_0^2 - \omega_0^2 x_0^2}.$$

Якщо $x_0 > 0, \dot{x}_0 > 0$, то частинка зі свого початкового положення йде на нескінченність зі швидкістю, яка безперервно зростає за величиною у додатному напрямку осі OX (рис. 5.3, а). При $x_0 > 0, \dot{x}_0 < 0$ частинка протягом часу τ буде здійснювати сповільнений рух у напрямку до силового центру, у точці $x=0$ її швидкість досягає мінімального за абсолютною величиною значення (у точці $x=0$ проекції сили F_x та прискорення \ddot{x} змінюють знак на протилежний), після проходження точки O напрямки векторів \vec{F} та \vec{v} будуть збігатися й частинка здійснюючи прискорений рух необмежено віддалятиметься від силового центру у бік від'ємних значень координат (див. рис. 5.3, а).

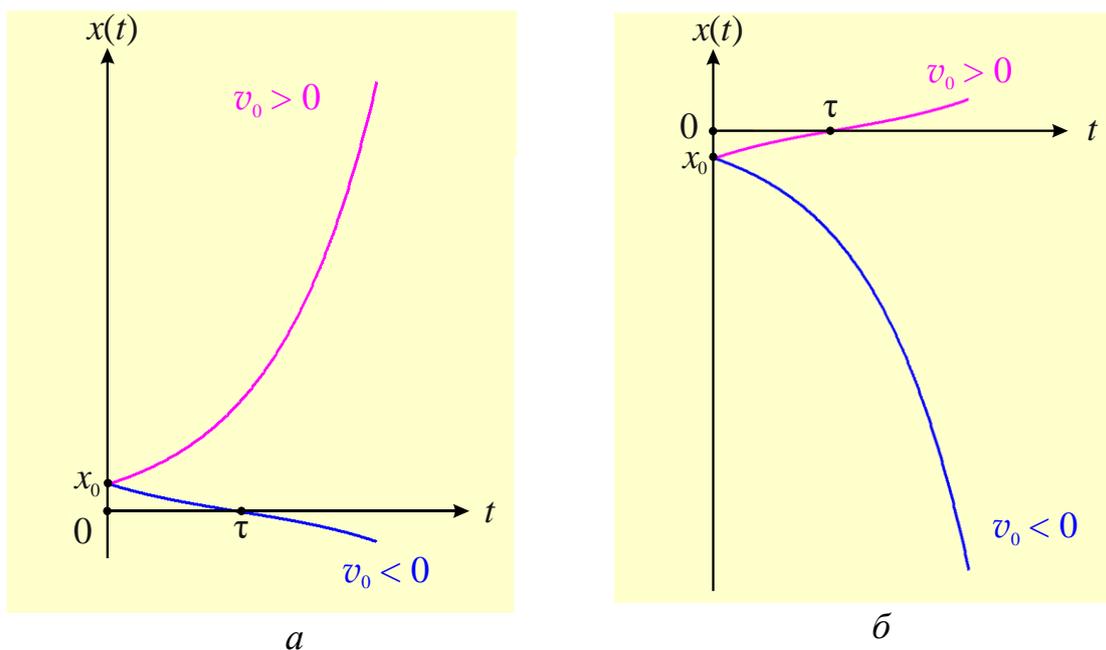


Рисунок 5.3

Знайдемо час сповільненого руху частинки τ . Оскільки за цей проміжок часу частинка проходить шлях від $x = x_0$ до $x = 0$, то з виразу (5.5) випливає

$$(x_0\omega_0 + \dot{x}_0)e^{\omega_0\tau} + (x_0\omega_0 - \dot{x}_0)e^{-\omega_0\tau} = 0,$$

звідси маємо

$$e^{2\omega_0\tau} = \frac{\dot{x}_0 - \omega_0 x_0}{\dot{x}_0 + \omega_0 x_0} \Rightarrow, \quad \tau = \frac{1}{2\omega_0} \ln \frac{\dot{x}_0 - \omega_0 x_0}{\dot{x}_0 + \omega_0 x_0}.$$

Так само, якщо частинка знаходиться у початковий момент часу на від'ємній півосі $x_0 < 0$, то при $\dot{x}_0 < 0$ вона зі свого початкового положення пе-

реститися на нескінченність у бік від'ємних значень координат; якщо $\dot{x}_0 > 0$, то протягом проміжку часу τ вона буде наближатися до початку координат і її швидкість за абсолютною величиною буде зменшуватися, поки не досягне в точці $x=0$ свого мінімального значення, після проходження початку координат вона прискорено буде рухатися у додатному напрямі осі Ox на нескінченність.

При $E > 0$, розв'язанню (5.5) можна надати більш компактний вигляд. Для цього виконаємо перетворення у виразі (5.6)

$$\frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2} - x_0^2 = \frac{2E}{k}, \quad \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 \sqrt{2E/k}} \right)^2 - \left(\frac{x_0}{\sqrt{2E/k}} \right)^2 = 1$$

та введемо нові позначення

$$\operatorname{ch} \gamma = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0 \sqrt{\frac{2E}{k}}}, \quad \operatorname{sh} \gamma = \frac{x_0}{\sqrt{\frac{2E}{k}}},$$

де γ – стала величина, що визначається початковими умовами: $\operatorname{th} \gamma = \frac{\omega_0 x_0}{\dot{x}_0}$.

Після цього розв'язок (5.5) набуде вигляду

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \operatorname{sh}(\omega_0 t + \gamma). \quad (5.11)$$

5.4. Повна енергія частинки дорівнює нулю

Якщо повна енергія частинки дорівнює нулю, то вираз (5.7), за умови, що $x_0 \neq 0$, $\dot{x}_0 \neq 0$, можна розкласти на множники

$$(\dot{x}_0 - \omega_0 x_0)(\dot{x}_0 + \omega_0 x_0) = 0,$$

звідси маємо

$$\dot{x}_0 = \omega_0 x_0, \quad \dot{x}_0 = -\omega_0 x_0. \quad (5.12)$$

При виконанні першої рівності (5.12) (x_0 та \dot{x}_0 завжди одного знака) координата частинки з часом, відповідно до (5.5), змінюватиметься за експоненціальним законом

$$x(t) = x_0 e^{\omega_0 t}. \quad (5.13)$$

Тоді, частинка буде рухатися зі швидкістю, що безперервно зростає за модулем на нескінченність або у бік додатного напрямку осі OX , якщо вона знаходиться на додатній півосі (рис. 5.4, *a*) або, відповідно, у бік від'ємних значень координат, якщо частинка у початковий момент часу розташована на від'ємній півосі (рис. 5.4, *б*).

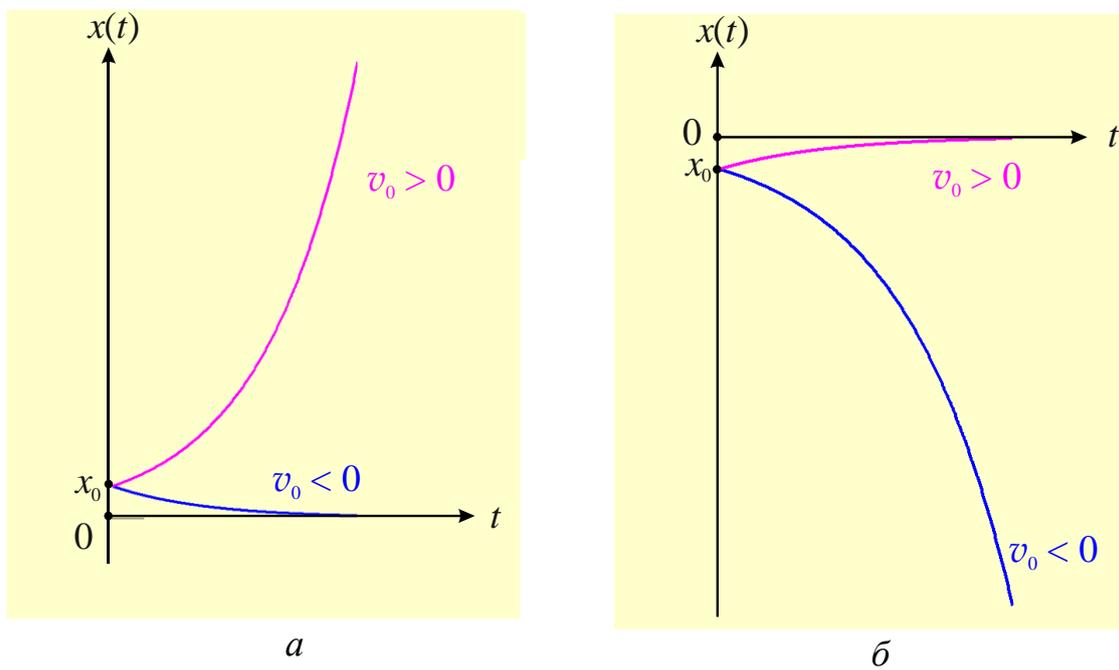


Рисунок 5.4

При виконанні другої рівності (5.12) (x_0 та \dot{x}_0 завжди різних знаків) розв'язання (5.5) описується експонентою, що спадає:

$$x(t) = x_0 e^{-\omega_0 t}. \quad (5.14)$$

Це означає, що з плином часу частинка буде асимптотично наближатися до силового центру праворуч (рис. 5.4, *a*), якщо $x_0 > 0$: при $t \rightarrow \infty, x \rightarrow +0$ або ліворуч (рис. 5.4, *б*), якщо $x_0 < 0$: при $t \rightarrow \infty, x \rightarrow -0$. Іншими словами, розв'язок (5.14) описує рух, при якому частинка буде необмежений час наближатися до положення рівноваги, такий рух ще називають **лімітаційним**. Яке б не було початкове значення координати x_0 , вона не потрапить до положення рівноваги за кінцевий проміжок часу.

Таким чином, за будь-яких не нульових початкових умов, частинка під час свого руху (крім випадку, що описується виразом (5.14)) буде необмежено віддалятися від свого положення рівноваги. Навіть, якщо частинку вивести з

положення рівноваги, не надаючи їй початкової швидкості, то при будь-якому значенні x_0 , вона рухається на нескінченність або у бік додатних значень координат, або у бік від'ємних. Таке положення рівноваги частинки називають **нестійким**.

5.5. Фазова траєкторія частинки

Проаналізуємо рухи частинки на фазовій площині (x, \dot{x}) , для цього використаємо, як і раніше, виразом для повної енергії (5.6). Враховуючи знаки E , запишемо

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2|E|/k}}\right)^2 - \left(\frac{\dot{x}}{\omega_0\sqrt{2|E|/k}}\right)^2 = 1, \quad E < 0,$$

$$\left(\frac{\dot{x}}{\omega_0\sqrt{2E/k}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{2E/k}}\right)^2 = 1, \quad E > 0. \quad (5.16)$$

З (5.16) бачимо, що руху частинки з енергією $E \neq 0$ відповідає на фазовій площині два сімейства гіпербол (рис. 5.5).

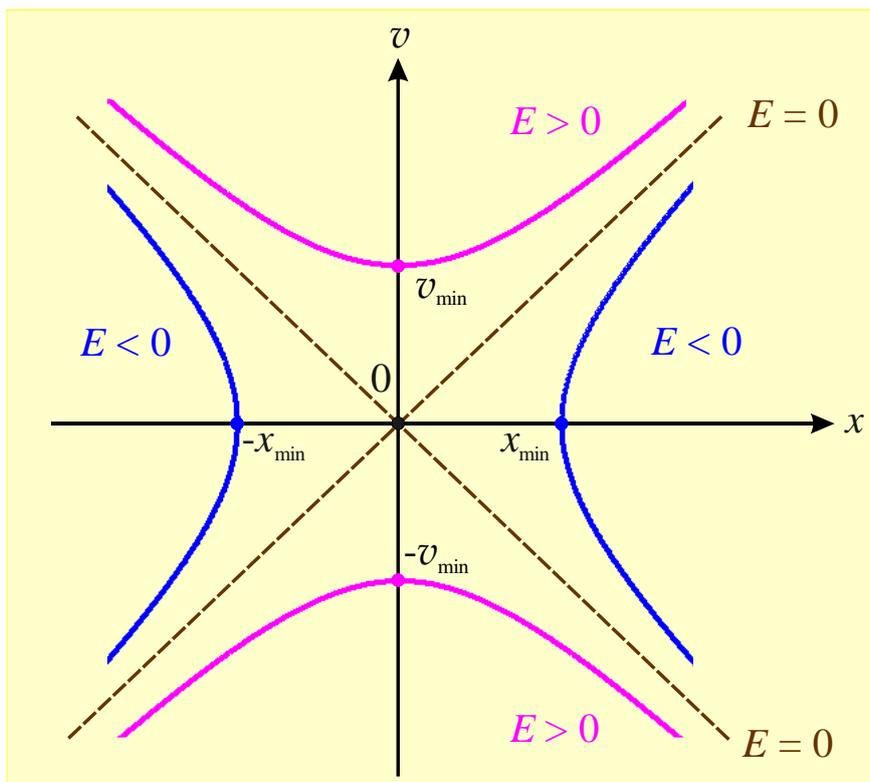


Рисунок 5.5

Вершинами гіпербол є точки повороту частинки: $x = x_{\min}$, $\dot{x} = 0$, якщо рух відбувається з від'ємною енергією (5.10). Вершинам гіпербол при русі з додатною енергією (5.11) відповідає проходження частинки через положення рівноваги (точка O) з мінімально можливою за величиною швидкістю, тобто $x = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_{\min}$.

Асимптотами цих сімейств, згідно з співвідношеннями (5.6), є дві прямолінійні фазові траєкторії, які відповідають руху частинки з повною енергією $E = 0$

$$\dot{x} = \pm \omega_0 x.$$

З рис. 5.5 видно, що ці прямі розділяють фазову площину на ділянки, що відповідають різним типам руху. Лінії на фазовій площині, що мають подібну властивість, називаються **сепаратрисами**.

Напрямок руху зображувальної точки по фазовій траєкторії визначається знаком її швидкості: на тих ділянках фазової траєкторії, де $\dot{x} < 0$ точка рухається у бік зменшення координати x , на ділянках, де $\dot{x} > 0$, відповідно, у бік збільшення координати x .

Вирази (5.16) можна одержати безпосередньо з рівняння (5.2), використовуючи алгоритм, докладно описаний у розділі 1.3. Для цього запишемо рівняння (5.2) у вигляді системи двох рівнянь першого порядку

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= \omega_0^2 x. \end{aligned}$$

Розділивши почленно друге рівняння на перше, отримаємо

$$\frac{dy}{dx} = \omega_0^2 \frac{x}{y}. \quad (5.17)$$

Після інтегрування виразу (5.17) прийдемо до рівняння фазових траєкторій у вигляді

$$\frac{y^2}{2} - \omega_0^2 \frac{x^2}{2} = c, \quad (5.18)$$

де c – стала інтегрування, яка в цьому випадку може набувати як додатних, так

і від'ємних значень. Надаючи константі c різні значення, отримаємо два сімейства гіпербол, які описуються виразами, аналогічними до (5.16)

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2|c|/\omega_0^2}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2|c|}}\right)^2 = 1, c < 0,$$

$$\left(\frac{y}{\sqrt{2c}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{2c/\omega_0^2}}\right)^2 = 1, c > 0.$$

Підставляючи $c = 0$ у вираз (5.18), отримаємо асимптоти цих сімейств: $y = \pm\omega_0 x$.

Зі співвідношення (5.17) випливає, що єдиною особливою точкою в цьому випадку є початок координат: $x = 0, \dot{x} = y = 0$. Ця точка відповідає **нестійкому положенню рівноваги** та крізь неї проходять дві сепаратриси, така **особлива точка** називається **сідлом**, або **сідловою особливою точкою**.

Контрольні запитання

1. Які лінії на фазовій площині називають сепаратрисами?
2. Дайте визначення точкам повороту?
3. За яких умов частинка, що має додатну повну енергію, рухається зі свого початкового положення на нескінченність зі швидкістю, що безперервно зростає?
4. Яке положення рівноваги називають не стійким?
5. Від якої величини залежить характер руху частинки?

РОЗДІЛ 6. РУХ МАТЕМАТИЧНОГО ТА ФІЗИЧНОГО МАЯТНИКА ПРИ ДОВІЛЬНИХ КУТАХ ВІДХИЛЕННЯ

6.1. Період та частота коливань

У розділі 2 були отримані вирази для періоду математичного та фізичного маятника за умови, що кути відхилення від положення рівноваги досить малі. Перейдемо тепер до розгляду випадку довільних кутів відхилення. При цьому, для математичного маятника будемо вважати, що маса m прикріплена не до нитки, а до жорсткого невагомого стрижня тієї ж довжини l (див. рис. 2.1).

Знайдемо спочатку точну формулу для періоду коливань, використовуючи вирази для повної енергії маятників (див. розділ 2)

$$E = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl(1 - \cos\theta),$$

$$E = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} + mgd(1 - \cos\theta).$$

У крайньому положенні, коли маятник зупиняється, його кінетична енергія повністю переходить у потенціальну

$$E = E_{n\max} = mgl(1 - \cos\theta_0),$$

$$E = E_{n\max} = mgd(1 - \cos\theta_0),$$

де θ_0 – максимальне значення кута відхилення (кутова амплітуда коливань).

Прирівнюючи праві частини у відповідних виразах, отримаємо

$$\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl(1 - \cos\theta) = mgl(1 - \cos\theta_0), \quad (6.1)$$

$$\frac{I\dot{\theta}^2}{2} + mgd(1 - \cos\theta) = mgd(1 - \cos\theta_0).$$

Розділимо перше рівняння (6.1) на $\frac{ml^2}{2}$, а друге – на $\frac{I}{2}$

$$\dot{\theta}^2 + 2\frac{g}{l}(1 - \cos\theta) = 2\frac{g}{l}(1 - \cos\theta_0) \quad (6.1')$$

$$\dot{\theta}^2 + 2\frac{mgd}{I}(1 - \cos\theta) = 2\frac{mgd}{I}(1 - \cos\theta_0).$$

Вводячи, як і раніше (див. розділ 2) $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ – для математичного та $\omega_0^2 = \frac{mgd}{I}$ – для фізичного маятника, приведемо рівняння (6.1') до однакового вигляду

$$\dot{\theta}^2 + 2\omega_0^2(1 - \cos\theta) = 2\omega_0^2(1 - \cos\theta_0).$$

Використовуючи тригонометричне співвідношення $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, запишемо

$$\dot{\theta}^2 = 4\omega_0^2\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right). \quad (6.2)$$

Звідки кутова швидкість $\dot{\theta}$ маятника

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm 2\omega_0\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}, \quad (6.3)$$

знаки \pm відповідають різним напрямкам руху маятника (« \leftarrow » руху від θ_0 до $-\theta_0$, « \rightarrow » – у зворотному напрямку). Обравши у (6.3) для визначеності знак « $+$ », виразимо dt

$$dt = \frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\omega_0\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}. \quad (6.4)$$

Оскільки період коливання T – проміжок часу, за який відбувається одне повне коливання, в чотири рази перевищує час руху маятника від положення рівноваги до максимального відхилення θ_0 , то інтегруючи праву частину (6.4) у межах від 0 до θ_0 (як і раніше кут θ відраховуємо від положення рівноваги), а ліву частину – від 0 до T , отримаємо

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\theta_0} \frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}, \quad (6.5)$$

Перетворимо підінтегральний вираз, ввівши нову кутову змінну ϕ за допомогою співвідношення

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \sin \phi \quad (6.6)$$

та введемо для невід'ємної величини таке позначення

$$\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = k. \quad (6.7)$$

Тоді

$$d\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) = \cos\frac{\theta}{2} d\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta}{2}} d\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi} d\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

З іншого боку, використовуючи вирази (6.6) та (6.7), отримаємо

$$d\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) = \sin\frac{\theta_0}{2} d(\sin\phi) = k \cos\phi d\phi.$$

Прирівнюючи праві частини двох останніх формул, знаходимо чисельник підінтегральної функції у (6.5)

$$d\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{k \cos\phi d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi}}.$$

Нові межі інтегрування знайдемо зі співвідношення (6.6), що пов'язує змінні θ та ϕ : 1) $\theta = 0$, то $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \sin\phi = 0, \phi = 0$; 2) $\theta = \theta_0$, то

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \Rightarrow \sin\phi = 1, \phi = \frac{\pi}{2}.$$

Після виконаних перетворень інтеграл (6.5) набуде вигляду

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \cos\phi d\phi}{\sqrt{k^2 - k^2 \sin^2\phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi}} = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi}}. \quad (6.8)$$

Вводячи позначення: $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$, запишемо точний вираз для

періоду коливань математичного та фізичного маятників у компактному вигляді¹³

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K(k), \quad T = 4\sqrt{\frac{I}{mgd}}K(k). \quad (6.9)$$

Величина $K(k)$ (цю величину називають повним еліптичним інтегралом 1-го роду) у формулі (6.9) залежить лише від параметра k , який, відповідно до співвідношення (6.7)), є функцією амплітуди θ_0 і може набувати будь-яких значень в межах інтервалу $[0, 1]$. Знайдемо асимптотику функції $T = T(\theta_0)$, коли параметр k набуває значення, близького до нижньої межі, тобто $k \ll 1$. Якщо $k = 0$, то згідно з (6.8), період коливань маятника збігається з періодом коливань гармонічного осцилятора: $T(0) = T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Значення $k = 0$ відповідає значенню амплітуди коливань $\theta_0 = 0$, це своєю чергою означає, що маятник займає

нижнє вертикальне положення, яке відповідає положенню його рівноваги. При $k \ll 1$ амплітуда θ_0 коливань маятника, відповідно до формули (6.7), також є малою величиною. Коли величина k зростає, то період коливань $T(k)$ маятника згідно з формулою (6.8) теж збільшується (рис. 6.1).

Для знаходження наближеної залежності $T(\theta_0)$

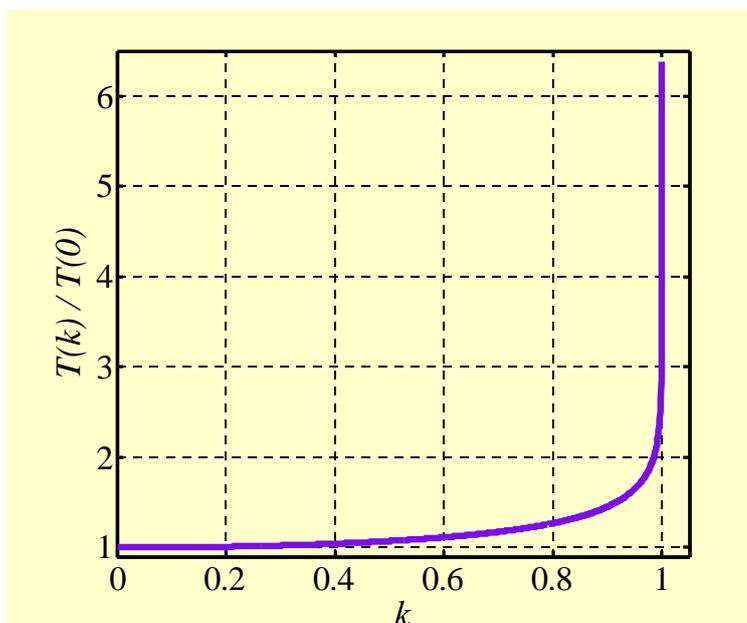


Рисунок 6.1

¹³ Далі будемо розглядати тільки математичний маятник, оскільки всі отримані результати будуть правдивими й для фізичного маятника.

розглянемо допоміжну функцію $f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}$. Вважаючи, що ε мала ($\varepsilon \ll 1$), розкладемо $f(\varepsilon)$ в ряд за степенями ε , що зростають та обмежуючись при цьому трьома першими доданками

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2.$$

Враховуючи підінтегральну функцію (6.8) $\varepsilon = k^2 \sin^2 \phi$ ($k \ll 1, \sin^2 \phi \leq 1$), запишемо

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} \approx 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \phi + \frac{3}{8}k^4 \sin^4 \phi.$$

Якщо використати відомі тригонометричними виразами

$$\sin^2 \phi = \frac{1 - \cos 2\phi}{2}, \quad \sin^4 \phi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\phi + \frac{1}{8}\cos 4\phi,$$

то отримане розкладання можна подати у вигляді

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} \approx 1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 - \frac{k^2}{4} \left(1 + \frac{3}{4}k^2\right) \cos 2\phi + \frac{3}{64}k^4 \cos 4\phi.$$

Підставивши цей вираз у (6.8) і враховуючи при цьому, що

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\phi d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\phi d\phi = 0, \text{ прийдемо до наступних рівностей}$$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4\right),$$

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4\right). \quad (6.10)$$

Підставивши співвідношення (6.7) до (6.10), маємо

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4 \frac{\theta_0}{2}\right).$$

Оскільки в нашому випадку $\theta_0^2 \ll 1$, то можемо написати наближено¹⁴ (до величин четвертого порядку малості по θ_0 включно)

$$k = \sin \frac{\theta_0}{2} \approx \frac{\theta_0}{2} - \frac{\theta_0^3}{48}, \quad k^2 = \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \approx \frac{\theta_0^2}{4} - \frac{\theta_0^4}{48}, \quad k^4 = \sin^4 \frac{\theta_0}{2} \approx \frac{\theta_0^4}{16}.$$

Після підставлення k, k^2, k^4 у формулу (6.10), знаходимо залежність $T(\theta_0)$

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 \right). \quad (6.11)$$

Циклічна частота маятника $\omega = \frac{2\pi}{T}$ при довільних відхиленнях з урахуванням (6.9) дорівнює

$$\omega = \frac{\pi\omega_0}{2K(k)}, \quad (6.12)$$

тоді при $k \ll 1$, використавши (6.10) та (6.11), запишемо

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 \right)^{-1}, \quad (6.13)$$

Використаємо, як і раніше допоміжну функцію $f(\varepsilon) = \frac{1}{1+\varepsilon}$ та розкладемо її при малих ε у ряд, залишаючи при цьому три перші доданки

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon + \varepsilon^2.$$

Для розкладання функції (6.13) в ряд перепишемо її у такому вигляді

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 \right)^{-1} = \omega_0 \frac{1}{1 + \frac{1}{4} k^2 \left(1 + \frac{9}{16} k^2 \right)},$$

вважаючи $\varepsilon = \frac{1}{4} k^2 \left(1 + \frac{9}{16} k^2 \right)$ та залишаючи доданки до четвертого порядку ма-

¹⁴ при малих $\mu = \frac{\theta_0}{2}$, $\sin \mu \approx \mu - \frac{\mu^3}{6}$.

лості включно (до четвертого степеня за k), отримуємо

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4} k^2 - \frac{5}{64} k^4 \right).$$

Беручи до уваги написані вище вирази для k^2 та k^4 , знаходимо залежність частоти від амплітуди коливань

$$\omega(\theta_0) \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{1}{3072} \theta_0^4 \right). \quad (6.14)$$

Підставивши у (6.11) та (6.14) частоту ω_0 з формул (2.7) і (2.26), остаточно отримуємо для періоду та частоти коливань математичного і фізичного маятників наступні розкладання до четвертого порядку включно

$$T(\theta_0) \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 \right), \quad T(\theta_0) \approx 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 \right)$$

$$\omega(\theta_0) \approx \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 - \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{1}{3072} \theta_0^4 \right), \quad \omega(\theta_0) \approx \sqrt{\frac{mgd}{I}} \left(1 - \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{1}{3072} \theta_0^4 \right). \quad (6.15)$$

З формул (6.15) випливає, що зі збільшенням амплітуди коливань період збільшуватиметься (рис. 6.2), а частота ($\theta_0^2 \gg \theta_0^4$), відповідно, зменшуватиметься.

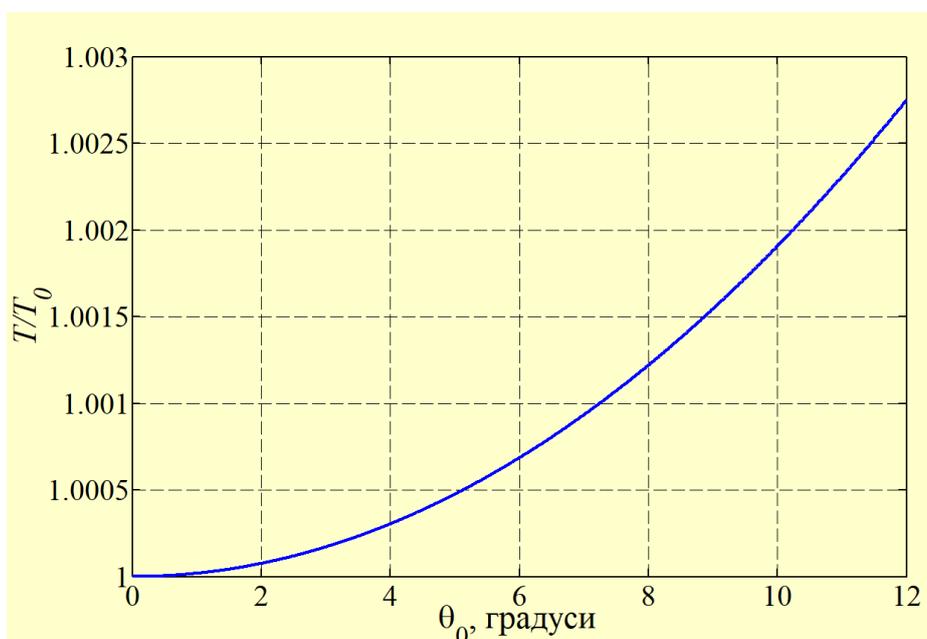


Рисунок 6.2

Співвідношення (6.15) є уточненнями відповідних виразів, отриманих у розділі 2 для малих коливань маятника, частота та період якого не залежать від амплітуди. З формул (6.15) також випливає, що втрата ізохронності буде тим меншою, чим менше θ_0^2 за одиницю. Величини ω_0 та $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ можна інтерпретувати як нульове наближення для частоти та періоду (див. рис. 6.2).

Проаналізуємо залежність ω та T від енергії, яка надається математичному маятнику у початковий момент часу. Для цього використаємо вираз для повної енергії (6.1)

$$\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl(1 - \cos\theta) = mgl(1 - \cos\theta_0).$$

Нагадаємо, що потенціальна енергія E_n визначається від нижнього вертикального положення маятника (рис. 6.3). Використовуючи тригонометричну формулу пониження степеня і співвідношення (6.7), перепишемо праву частину останнього виразу

$$E = mgl(1 - \cos\theta_0) = 2mgl \sin^2 \frac{\theta_0}{2} = 2mglk^2. \quad (6.16)$$

Величина $2mgl$ дорівнює максимально можливому значенню потенціальної енергії маятника, коли він займає верхнє вертикальне положення (див. рис. 6.3). Позначимо цю величину $\tilde{E} = 2mgl$. Тоді згідно з (6.16) параметр k дорівнює

$$k = \sqrt{\frac{E}{\tilde{E}}}. \quad (6.17)$$

З рівностей (6.7) та (6.17) знаходимо залежність амплітуди коливань від повної енергії маятника

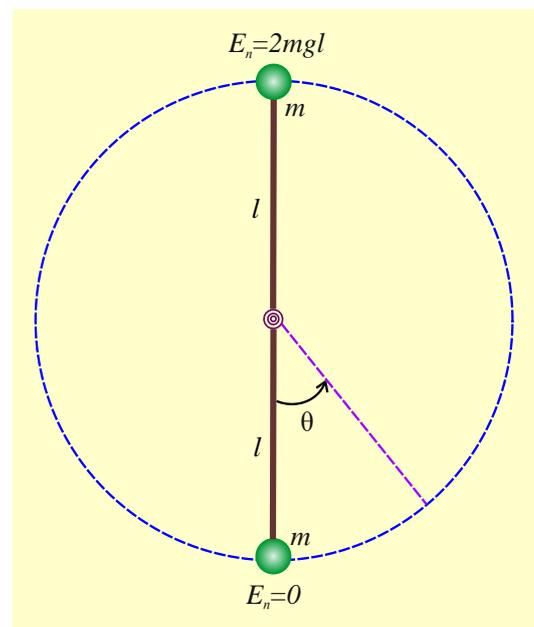


Рисунок 6.3

$$\theta_0 = 2 \arcsin \sqrt{\frac{E}{\tilde{E}}}. \quad (6.18)$$

Умова малості амплітуди $k \ll 1$ виконується, коли $E \ll \tilde{E}$. Таким чином, якщо повна енергія маятника набагато менша за максимально можливе значення його потенціальної енергії, то коливання маятника можемо вважати гармонічними з амплітудою¹⁵

$$\theta_0 = 2 \arcsin \sqrt{\frac{E}{\tilde{E}}} \approx 2 \sqrt{\frac{E}{\tilde{E}}}.$$

Оскільки, амплітуда і повна енергія завжди пов'язані деяким співвідношенням, то залежність частоти (періоду) від амплітуди автоматично викликає залежність від енергії (іноді, коли говорять про неізохронні коливання, то вказують на те, що частота (період) залежить саме від енергії). З формул (6.10), (6.14) та (6.17) визначаємо, що зі зростанням енергії період коливань збільшується, а частота – зменшується

$$T(E) \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{E}{\tilde{E}} \right) + \frac{9}{64} \left(\frac{E}{\tilde{E}} \right)^2 \right), \quad (6.19)$$

$$\omega(E) \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{E}{\tilde{E}} \right) - \frac{5}{64} \left(\frac{E}{\tilde{E}} \right)^2 \right).$$

Розглянемо тепер випадок, коли маятник здійснює коливання із гранично великими амплітудами. Перш ніж знайти асимптотику функції $T(\theta_0)$, коли параметр k набуває значень, близьких до своєї верхньої межі, тобто $k \sim 1$ (цим значенням згідно з (6.7) відповідають амплітуди $\theta_0 \sim \pi$), обчислимо значення T у граничному випадку $k=1$ (ця умова відповідає амплітуді $\theta_0 = \pi$ та повній енергії $E = \tilde{E} = 2mgl$), використавши формулу (6.8)

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\cos \phi}.$$

¹⁵ Аналогічний вираз для амплітуди випливає з формули (2.21).

Обчислимо спочатку інтеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{d\phi}{\cos \phi} &= \int \frac{d(\sin \phi)}{\cos^2 \phi} = \int \frac{d(\sin \phi)}{1 - \sin^2 \phi} = \left\| \sin \phi = y \right\| = \int \frac{dy}{1 - y^2} = \int \frac{dy}{(1 - y)(1 + y)} = \\ &= \int \left(\frac{A}{1 - y} + \frac{B}{1 + y} \right) dy = \left\| A + B = 1, A - B = 0, A = B = \frac{1}{2} \right\| = \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 - y} + \frac{1}{1 + y} \right) dy = \frac{1}{2} (\ln|1 + y| - \ln|1 - y|) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + y}{1 - y} \right| = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right). \end{aligned}$$

Приведемо отриманий результат до вигляду, який будемо використовувати надалі. Застосовуючи тригонометричні співвідношення:

$$\sin \phi = \sin \frac{2\phi}{2} = 2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2},$$

$$1 + \sin \phi = \cos^2 \frac{\phi}{2} + \sin^2 \frac{\phi}{2} + 2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} = \left(\cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \right)^2,$$

$$1 - \sin \phi = \cos^2 \frac{\phi}{2} + \sin^2 \frac{\phi}{2} - 2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} = \left(\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \right)^2,$$

перепишемо вираз під знаком логарифма таким чином:

$$\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \left(\frac{\cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2}}{\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2}} \right)^2 = \left(\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}} \right)^2.$$

Після чого скористаємося формулою для тангенса суми та тим, що $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1$

$$\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right).$$

Враховуючи все вище сказане, запишемо з точністю до константи

$$\int \frac{d\phi}{\cos \phi} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right|, \quad \int \frac{d\phi}{\cos \phi} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right). \quad (6.20)$$

Підставляючи у (6.20) межі інтегрування 0 та $\frac{\pi}{2}$, переконуємося, що $T = \infty$. Цей результат детальніше обговорюватиметься нижче, а поки що зазначимо наступне. Коли маятник займає верхнє вертикальне положення і його швидкість при цьому дорівнює нулю, то маятник знаходиться у стані рівноваги, у цьому положенні прискорення теж дорівнює нулю, так само буде для нижнього вертикального положення. Якщо вивести маятник з нижнього рівноважного положення, відхиливши його на малий кут, після чого відпустити, не надаючи початкової швидкості, то маятник буде здійснювати малі коливання, залишаючись весь час руху поблизу положення рівноваги. Таке положення рівноваги називають **стійким положенням рівноваги**. Якщо маятник вивести в той самий спосіб з верхнього вертикального положення, то він з часом все більше відхилиться від рівноважного положення і зможе знову наблизитися до нього, тільки зробивши майже повний оберт. Тому таке положення рівноваги називають **нестійким положенням рівноваги**. Отже, маятник має два вертикальні положення рівноваги (див. рис. 6.3):

- 1) нижнє стійке: $\theta = 0, E_n = 0$;
- 2) верхнє нестійке: $\theta = \pm\pi, E_n = 2mgl$.

Розглянемо, ще один метод визначення положень рівноваги маятника. Результирна сила \vec{F} , що діє на маятник дорівнює нулю у положенні рівноваги. Це означає, що тангенціальна компонента \vec{F}_τ і нормальна компонента \vec{F}_n сили також мають дорівнювати нулю. Сила \vec{F}_τ є консервативною, тому якщо представити потенціальну енергію маятника як функцію лінійного зміщення s

$$E_n(s) = mgl \left(1 - \cos \frac{s}{l} \right), \quad (6.21)$$

то проєкція \vec{F}_τ на вісь дотичної (див. розділ 2)

$$F_\tau = -\frac{dE_n}{ds} = -mg \sin \frac{s}{l}. \quad (6.22)$$

набуває нульових значень у положеннях рівноваги: $s = 0, s = \pm\pi l$.

У положенні рівноваги також дорівнює нулю обертальний момент M_z , тому, розглядаючи потенціальну енергію як функцію кута відхилення θ

$$E_n(\theta) = mgl(1 - \cos \theta), \quad (6.23)$$

отримуємо вираз

$$M_z = -\frac{dE_n}{d\theta} = -mgl \sin \theta, \quad (6.24)$$

з якого визначаємо положення рівноваги маятника: $\theta = 0$, $\theta = \pm\pi$.

Відповідно до виразів (6.21) – (6.24) умова рівноваги маятника ($\vec{F} = 0$, $M_z = 0$) може бути записана за допомогою двох рівностей, які еквівалентні один одному

$$\frac{dE_n}{d\theta} = 0, \quad \frac{dE_n}{ds} = 0.$$

Отже, у положенні рівноваги потенціальна енергія має екстремум, причому мінімуму потенціальної енергії $E_n = 0$ відповідає стійке положення рівноваги, а максимуму $E_n = 2mgl$ – нестійке.

Зауважимо, що потенціальна енергія є періодичною функцією змінної θ з періодом 2π , тому стійкому положенню рівноваги маятника ($E_n = 0$) відповідають також значення кута $\theta = 2\pi n$ (де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), а нестійкому положенню рівноваги ($E_n = 2mgl$) значення кутової змінної: $\theta = (2n + 1)\pi$ (де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

6.2. Повний оберт маятника (лімітаційний рух)

Оскільки повна енергія E маятника дорівнює максимально можливому значенню потенціальної енергії \tilde{E} (значення параметра $k = 1$), то рух маятника не буде періодичним. Знайдемо вигляд функції $\theta(t)$, що відповідає цьому руху.

Для цього використаємо, наприклад, рівність (6.3) та врахуємо, що

$$k^2 = \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = 1$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm 2\omega_0 \cos \frac{\theta}{2}. \quad (6.25)$$

Розділивши змінні

$$\frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \pm\omega_0 dt \quad (6.26)$$

та інтегруючи, використовуючи першу з формул (6.21) (у цій формулі необхідно лише замінити змінну ϕ на $\frac{\theta}{2}$), отримуємо

$$\ln\left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi + \theta}{4}\right) \right| = \pm\omega_0(t - t_0), \quad (6.27)$$

де t_0 – стала інтегрування, значення якої залежить від вибору початку відліку часу t .

Виразивши з (6.27) шукану величину θ , маємо

$$\theta(t) = 4\operatorname{arctg}\left[e^{\pm\omega_0(t-t_0)}\right] - \pi. \quad (6.28)$$

Розв'язок $\theta(t)$ може бути подано ще в іншому вигляді. Використавши другу формулу (6.21), запишемо

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) = \pm\omega_0(t - t_0).$$

Далі виразимо $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$\frac{1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = e^{\pm 2\omega_0(t-t_0)} \Rightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{e^{\pm 2\omega_0(t-t_0)} - 1}{e^{\pm 2\omega_0(t-t_0)} + 1}. \quad (6.29)$$

Візьмемо спочатку в степені експоненти знак «+»

$$\frac{e^{2\omega_0(t-t_0)} - 1}{e^{2\omega_0(t-t_0)} + 1} = \frac{e^{\omega_0(t-t_0)} - e^{-\omega_0(t-t_0)}}{e^{\omega_0(t-t_0)} + e^{-\omega_0(t-t_0)}} = \frac{\operatorname{sh}\omega_0(t-t_0)}{\operatorname{ch}\omega_0(t-t_0)} = \operatorname{th}\omega_0(t-t_0).$$

Якщо у степені експоненти буде знак « \leftarrow », то

$$\frac{e^{-2\omega_0(t-t_0)} - 1}{e^{-2\omega_0(t-t_0)} + 1} = \frac{e^{-\omega_0(t-t_0)} - e^{\omega_0(t-t_0)}}{e^{-\omega_0(t-t_0)} + e^{\omega_0(t-t_0)}} = -\frac{\operatorname{sh}\omega_0(t-t_0)}{\operatorname{ch}\omega_0(t-t_0)} = -\operatorname{th}\omega_0(t-t_0).$$

Об'єднуючи обидва вирази, запишемо

$$\frac{e^{\pm 2\omega_0(t-t_0)} - 1}{e^{\pm 2\omega_0(t-t_0)} + 1} = \pm \operatorname{th}\omega_0(t-t_0).$$

Таким чином, з урахуванням останньої рівності, співвідношення (6.29) можна переписати у більш компактному вигляді

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \operatorname{th}\omega_0(t-t_0),$$

з якого відразу знаходимо змінну θ у довільний момент часу

$$\theta(t) = \pm 2 \arcsin\left[\operatorname{th}\omega_0(t-t_0)\right]. \quad (6.30)$$

Отже, функції (6.28) та (6.30) описують рух маятника, який він здійснює при повному обороті навколо точки підвісу. Залишається визначити невідому константу t_0 .

Оскільки система, яку ми розглядаємо, є консервативною, то вибір початку відліку часу цілком довільний. Наприклад, будемо вважати початком відліку часу $t=0$ момент проходження маятником стійкого положення рівноваги. Тоді до проходження нижнього вертикального положення час набуває від'ємних значень, а після проходження, відповідно, додатних значення. Оскільки кут θ визначається від стійкого положення рівноваги, то при такому виборі початку відліку часу: $\theta(t=0) = 0$. Підставляючи цю початкову умову до формул (6.28) та (6.30), знаходимо постійну інтегрування: $t_0 = 0$. При іншому виборі початку відліку часу значення константи t_0 змінюватиметься.

Якщо продиференціювати вирази (6.2.4) та (6.2.5) за часом з урахуванням умови $t_0 = 0$, то отримаємо кутову швидкість руху маятника:

для знака « \leftarrow »

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{4\omega_0 e^{\omega_0 t}}{1 + e^{2\omega_0 t}} = \frac{4\omega_0}{e^{-\omega_0 t} + e^{\omega_0 t}} = \frac{2\omega_0}{\operatorname{ch}\omega_0 t}; \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{2\omega_0}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \omega_0 t}} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \omega_0 t} = \frac{2\omega_0}{\operatorname{ch}\omega_0 t},$$

для знака « \leftarrow »

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{4\omega_0 e^{-\omega_0 t}}{1 + e^{-2\omega_0 t}} = -\frac{4\omega_0}{e^{-\omega_0 t} + e^{\omega_0 t}} = -\frac{2\omega_0}{\operatorname{ch}\omega_0 t}; \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{2\omega_0}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \omega_0 t}} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \omega_0 t} = -\frac{2\omega_0}{\operatorname{ch}\omega_0 t}.$$

Об'єднуючи вирази, знайдемо часову залежність кутової швидкості маятника

$$\dot{\theta}(t) = \pm \frac{2\omega_0}{\operatorname{ch}\omega_0 t}. \quad (6.31)$$

Знак « $+$ » у формулі (6.3) означає, що під час руху маятника кут відхилення θ зростає, тому рух відбувається проти годинникової стрілки. Вибір початку відліку часу приводить до того, що знак « $+$ » у співвідношеннях (6.28) та (6.30) буде відповідати при повному оберті наступним етапам руху (рис. 6.4): 1) маятник перебуває у верхньому вертикальному положенні: $\theta = -\pi$, $\dot{\theta} = 0$, коли $t = -\infty$; 2) зі зростанням t величини θ та $\dot{\theta}$ також будуть монотонно зростати і у момент $t = 0$, коли маятник опиниться у своєму нижньому вертикальному положенні: $\theta = 0$, $\dot{\theta} = \dot{\theta}_{\max} = 2\omega_0$, $E_k = E_{k\max}$, $E_n = E_{n\max} = 0$; 3) при подальшому зростанні ($t > 0$) кут θ продовжить монотонно збільшуватися, а кутова швидкість $\dot{\theta}$ буде при цьому монотонно зменшуватися; 4) при $t = \infty$ маятник опиниться у верхньому вертикальному положенні: $\theta = \pi$, $\dot{\theta} = 0$.

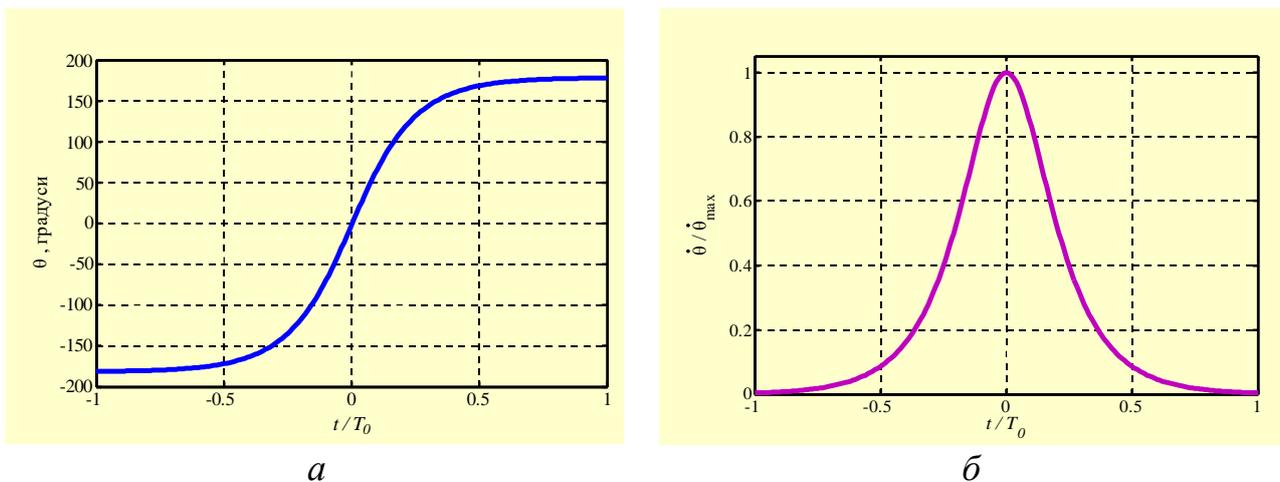


Рисунок 6.4

Знак « \leftarrow » у (6.3) означає, що рух відбувається за годинниковою стрілкою (кут θ зменшується). Тоді у формулах (6.28) та (6.30) знак « \leftarrow » відповідає на-

ступним етапам руху під час повного оберту (рис. 6.5): 1) при $t = -\infty$ маятник знаходиться у верхньому вертикальному положенні: $\theta = \pi, \dot{\theta} = 0$; 2) зі зростанням t кут θ та кутова швидкість $\dot{\theta}$ будуть монотонно зменшуватися (абсолютна величина кутової швидкості $|\dot{\theta}|$ буде монотонно зростати), у момент часу $t = 0$ маятник буде проходити нижнє положення $\theta = 0$ із максимально можливою за модулем швидкістю $|\dot{\theta}|_{\max} = 2\omega_0$; 3) при переході через $\theta = 0$ величина θ монотонно зменшується, а кутова швидкість $\dot{\theta}$ – монотонно зростає (при цьому абсолютна величина кутової швидкості монотонно зменшується); 4) при $t = \infty$ маятник займе верхнє вертикальне положення: $\theta = -\pi, \dot{\theta} = 0$.

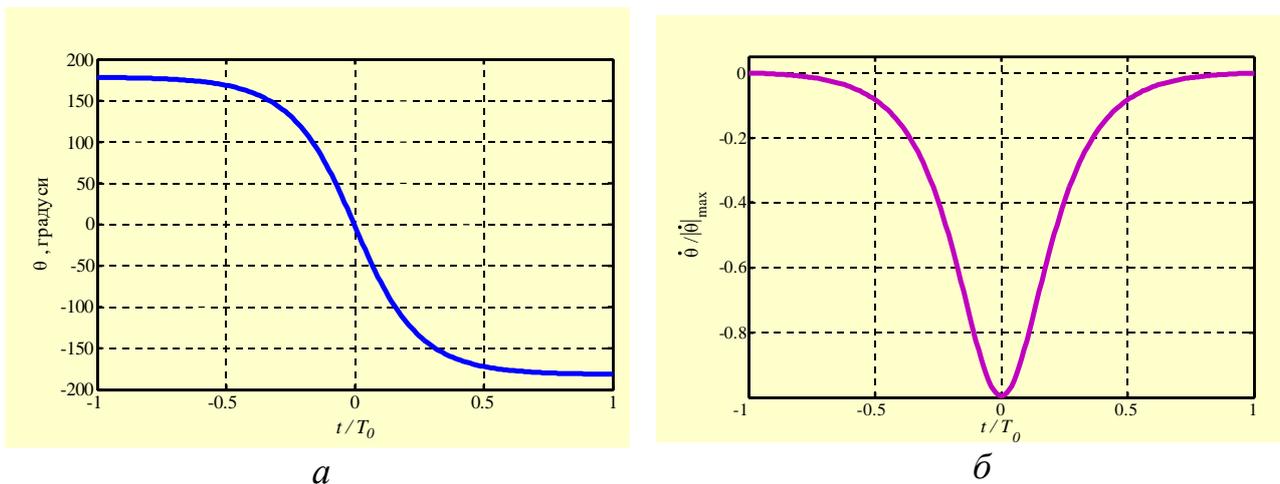


Рисунок 6.5

Зазначимо, що у верхній частині траєкторії руху маятника його потенціальна енергія більша за кінетичну, а у нижній частині навпаки (рис. 6.6). Коли маятник займає горизонтальні положення $\left(\theta = \pm \frac{\pi}{2}\right)$, то енергії набувають однакових значень: $E_n = E_k = mgl$.

Отже, якщо математичний маятник переміщується із положення $\theta = -\pi$ до $\theta = \pi$, то його рух описується наступними рівняннями

$$\theta(t) = 4\operatorname{arctg}\left[e^{\omega_0 t}\right] - \pi, \text{ або } \theta(t) = 2\operatorname{arcsin}\left[\operatorname{th}\omega_0 t\right], \quad (6.32)$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{2\omega_0}{\operatorname{ch}\omega_0 t}.$$

При русі у зворотному напрямку (від $\theta = \pi$ до $\theta = -\pi$) рівняння руху маятника набувають вигляду

$$\theta(t) = 4\operatorname{arctg}\left[e^{-\omega_0 t}\right] - \pi, \quad \text{або} \quad \theta(t) = -2\operatorname{arcsin}\left[\operatorname{th}\omega_0 t\right], \quad (6.33)$$

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{2\omega_0}{\operatorname{ch}\omega_0 t}.$$

З виразу (6.31) для кутової швидкості випливає, що маятник виходить із нестійкого положення рівноваги та наближається до нього з нескінченно малою за величиною швидкістю. Дійсно, якщо час t набуває скільки завгодно великі від'ємні значення, то кутова швидкість

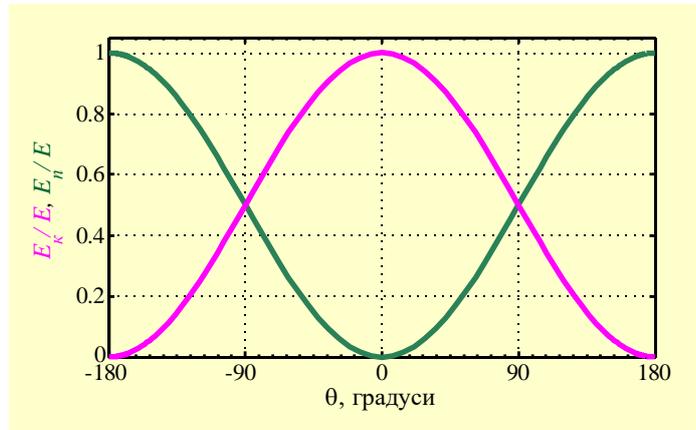


Рисунок 6.6

$$\dot{\theta} = \pm \frac{4\omega_0}{e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}} \approx \pm \frac{4\omega_0}{e^{-\omega_0 t}} = \pm 4\omega_0 e^{\omega_0 t},$$

відповідно при скільки завгодно великих додатних значеннях

$$\dot{\theta} = \pm \frac{4\omega_0}{e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}} \approx \pm \frac{4\omega_0}{e^{\omega_0 t}} = \pm 4\omega_0 e^{-\omega_0 t}.$$

У обох випадках $\dot{\theta}$ є нескінченно малою величиною.

Таким чином, маятник виходить із верхнього вертикального положення за нескінченний час, здійснюючи рух із нескінченно малою за величиною швидкістю. Після чого за кінцевий проміжок часу робить майже повний оборот, і коли маятник знову опиниться в безпосередній близькості до положення нестійкої рівноваги, то він буде наближатися до нього нескінченний час із нескінченно малою за величиною швидкістю. Такому руху якраз і відповідає отримане раніше граничне значення періоду $T = \infty$. При цьому проміжок часу, протягом якого маятник проходить більшу частину свого шляху, визначається величиною ω_0 . З (6.31) видно, що кутова швидкість $\dot{\theta}(t)$ є локалізованою функцією часу (див. рис. 6.4, б та рис. 6.5, б), профіль якої має вигляд відокремленого ім-

пульсу шириною (областю локалізації) $\Delta \sim \frac{1}{\omega_0}$. Величина Δ за порядком дорівнює

періоду малих коливань та є проміжком часу, протягом якого маятник здійснює майже повний оборот, тобто проходить більшу частину свого шляху. Решту часу маятник витрачає на вихід із верхнього рівноважного положення і наближення до нього (цьому руху відповідає експоненціальна залежність кутової швидкості від часу, графік функції $\dot{\theta}(t)$ асимптотично наближається до осі абсцис). Зі сказаного випливає, якщо **повна енергія маятника дорівнює максимально можливому значенню потенціальної енергії, то рух маятника є лімітаційним.**

Розглянемо окремий випадок, коли маятник відхилили від нижнього вертикального положення на довільний кут θ_0 і надали йому початкову кутову швидкість $\dot{\theta}_0$ (при цьому сама величина $\dot{\theta}_0$ може бути як додатною, так і від'ємною, тобто маятник може здійснювати рух у напрямку як за годинниковою, так й проти годинникової стрілки). Якщо при цьому повна енергія маятника дорівнює максимально можливому значенню потенціальної енергії, то маятник зупиниться у верхньому вертикальному положенні. Це випливає з виразу для повної енергії. Справді, підставляючи $E = \tilde{E} = 2mgl$ до (6.1), отримуємо рівність

$$\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl(1 - \cos\theta) = 2mgl, \quad (6.34)$$

з якої видно, що єдине положення маятника, у якому його швидкість перетворюється на нуль, є верхнє вертикальне положення, тобто $\theta = \pm\pi$. Також з формули (6.34) випливає отриманий раніше вираз для кутової швидкості (6.25).

До завершення всього вище сказаного знайдемо час руху τ маятника на інтервалі від $\theta = \theta_0$ до $\theta = \pi$. Оскільки маятник рухається у бік зростання кута θ , то у правій частині рівності (6.26) необхідно вибрати знак «+» і проінтегрувати ліву частину (6.26) від θ_0 до π , а праву – від 0 до τ

$$\int_{\theta_0}^{\pi} \frac{d\theta}{\cos(\theta/2)} = 2\omega_0 \int_0^{\tau} dt,$$

$$\tau = \frac{1}{2\omega_0} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{d\theta}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \left\| \phi = \frac{\theta}{2} \right\| = \frac{1}{\omega_0} \int_{\theta_0/2}^{\pi/2} \frac{d\phi}{\cos\phi}.$$

Використовуючи співвідношення (6.20) переконаємось, що $\tau = \infty$. Іншими словами, яке б початкове положення не займав маятник, він не потрапить у верхнє вертикальне положення за кінцевий час (такий же результат буде під час руху у бік зменшення кутової координати: від $\theta = \theta_0$ до $\theta = -\pi$). При цьому початкова швидкість $\dot{\theta}_0$ маятника кінцева і має цілком певне значення, яке визначається із закону збереження енергії

$$\frac{ml^2\dot{\theta}_0^2}{2} + mgl(1 - \cos\theta_0) = 2mgl.$$

6.3. Рух маятника поблизу верхнього вертикального положення

Розглянемо докладніше рух маятника поблизу нестійкого положення рівноваги (рис. 6.7). Щоб отримати рівняння руху маятника скористаємось (див. розділ 2) другим законом Ньютона: $\vec{F} = m\vec{a}$, де результивна сила $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N}$. Введемо натуральні осі координат: вісь нормалі, додатний напрямок якої визначатиметься одиничним вектором \vec{n} , спрямованим уздовж стрижня до точки підвісу та вісь дотичної з одиничним вектором $\vec{\tau}$, спрямованим у кожній точці від положення рівноваги. Тоді результивну силу \vec{F} можна розкласти на дві взаємно перпендикулярні компоненти, одна з яких спрямована вздовж нормалі до траєкторії, інша – вздовж дотичної (див. рис. 6.7): $\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_\tau$. Оскільки рух маятника відбувається поблизу верхнього вертикального положення, то зручно замість кута θ , який визначається від нижнього положення рівноваги, ввести для розгляду кут відхилення від нестійкого положення рівноваги (див. рис. 6.7): $\chi = \pi - \theta$. Тоді проєкція сили \vec{F}

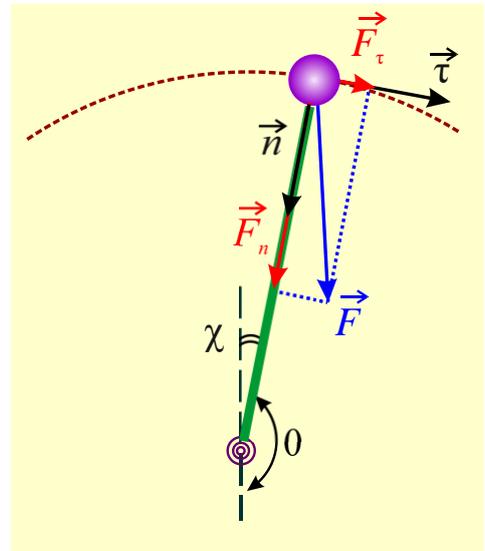


Рисунок 6.7

на нормаль і дотичну визначається кутом χ

$$F_n = mg \cos \chi - N, \quad F_\tau = mg \sin \chi.$$

З останнього співвідношення видно, що величини χ та F_τ мають однакові знаки, тому сила F_τ як і обертальний момент $M_z = mgl \sin \chi$ змушують маятник рухатися від верхнього вертикального до нижнього вертикального положення рівноваги.

Запишемо проєкції результивної сили у вигляді (див. розділ 2): $F_n = ma_n$, $F_\tau = ma_\tau$. Оскільки, $a_\tau = \ddot{s} \equiv \frac{d^2s}{dt^2}$ та $\chi = \frac{s}{l}$ (де s – довжина дуги, визначена від верхнього вертикального положення), то тангенціальне прискорення маятника: $a_\tau = \ddot{\chi}l$. Прирівнюючи праві частини співвідношень для тангенціальної компоненти сили та враховуючи вираз для a_τ , отримуємо

$$ml\ddot{\chi} = mg \sin \chi.$$

Якщо ввести, як і раніше, позначення $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, то рівняння руху маятника набуває вигляду¹⁶

$$\ddot{\chi} - \omega_0^2 \sin \chi = 0. \quad (6.35)$$

Використовуючи те, що рух маятника відбувається навколо верхнього вертикального положення ($\sin \chi \approx \chi$), перейдемо від нелінійного диференціального рівняння до лінійного

$$\ddot{\chi} - \omega_0^2 \chi = 0. \quad (6.36)$$

Якщо помножити (6.36) на довжину стрижня l ($s = \chi l$), то отримаємо рівняння для лінійного зміщення s маятника

$$\ddot{s} - \omega_0^2 s = 0. \quad (6.37)$$

Вирази (6.36) та (6.37) є рівняннями руху математичного маятника для різних змінних поблизу нестійкого положення рівноваги.

¹⁶ Рівняння (6.35) можна отримати простіше, якщо замінити у виразі (1.5) $\theta = \pi - \chi$.

Перетворимо співвідношення для повної енергії маятника

$$E = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl(1 - \cos\theta),$$

використовуючи заміну змінної $\theta = \pi - \chi$

$$E = \frac{ml^2\dot{\chi}^2}{2} + mgl(1 + \cos\chi).$$

Оскільки координата χ мала, то $\cos\chi \approx 1 - \frac{\chi^2}{2}$, у цьому випадку попередня рівність набуде вигляду

$$E = \frac{ml^2\dot{\chi}^2}{2} - \frac{mgl}{2}\chi^2 + 2mgl. \quad (6.38)$$

Позначимо у формулі (6.38) різницю повної енергії маятника і максимально можливого значення потенціальної енергії, як $\Delta E = E - 2mgl = E - \tilde{E}$

$$\frac{ml^2\dot{\chi}^2}{2} - \frac{mgl}{2}\chi^2 = \Delta E. \quad (6.39)$$

Переходячи тепер від кутового зміщення χ до лінійного s , отримаємо

$$\frac{m}{2}\dot{s}^2 - \frac{mg}{2l}s^2 = \Delta E. \quad (6.40)$$

Із закону збереження енергії E , отже, і величини ΔE , випливає

$$\frac{m}{2}\dot{s}_0^2 - \frac{mg}{2l}s_0^2 = \Delta E, \quad \frac{ml^2}{2}\dot{\chi}_0^2 - \frac{mgl}{2}\chi_0^2 = \Delta E, \quad (6.41)$$

де (s_0, \dot{s}_0) та $(\chi_0, \dot{\chi}_0)$ – початкові умови. Значення s_0, χ_0 для консервативної системи можуть бути обрані довільно, однак оскільки рівності (6.39) – (6.41), як і рівняння (6.36) та (6.37) правдиві лише поблизу нестійкого положення рівноваги маятника, то має виконуватися умова: $\chi_0 = \frac{s_0}{l} \ll 1$.

Вирази (6.36) – (6.41) вказують на те, що рух маятника навколо нестійкого положення рівноваги аналогічний рухові матеріальної точки, який розглянутий в розділі 5 (якщо врахувати (2.2), то (6.40) та перший з виразів (6.41) пере-

ходять, відповідно до (5.6) та (5.7), шляхом заміни s на x та ΔE на E). Зазначимо, характер руху маятника залежить від знака величини ΔE . Якщо $\Delta E < 0$, то повна енергія менша за максимально можливе значення потенціальної енергії і маятник здійснює коливальний рух. Оскільки $\chi \ll 1$, то амплітуда θ_0 майже дорівнює π , тому коливання не є гармонічними (рис. 6.8). Для величини s у цьому випадку, враховуючи (5.10) та (2.2), можемо записати

$$s(t) = \sqrt{\frac{2l|\Delta E|}{mg}} \operatorname{ch}(\omega_0 t + \delta),$$

Або, використовуючи введене раніше позначення, $\tilde{E} = 2mgl$

$$s(t) = 2l \sqrt{\frac{|\Delta E|}{\tilde{E}}} \operatorname{ch}(\omega_0 t + \delta). \quad (6.42)$$

Розділивши (6.42) на довжину стрижня, отримаємо залежність $\chi(t)$

$$\chi(t) = 2 \sqrt{\frac{|\Delta E|}{\tilde{E}}} \operatorname{ch}(\omega_0 t + \delta). \quad (6.43)$$

Постійна δ у виразах (6.42) і (6.43) визначається згідно з (5.9) із співвідношення $\operatorname{th} \delta = \frac{\dot{s}_0}{\omega_0 s_0} = \frac{\dot{\chi}_0}{\omega_0 \chi_0}$.

З виразів (6.41) – (6.43) випливає, що мінімальне значення лінійного і кутового зміщення, тобто мінімальне відхилення від нестійкого положення рівноваги (див. розділ 5) визначається початковими умовами

$$s_{\min} = 2l \sqrt{\frac{|\Delta E|}{\tilde{E}}} = \sqrt{s_0^2 - \left(\frac{\dot{s}_0}{\omega_0}\right)^2},$$

$$\chi_{\min} = 2 \sqrt{\frac{|\Delta E|}{\tilde{E}}} = \sqrt{\chi_0^2 - \left(\frac{\dot{\chi}_0}{\omega_0}\right)^2}. \quad (6.44)$$

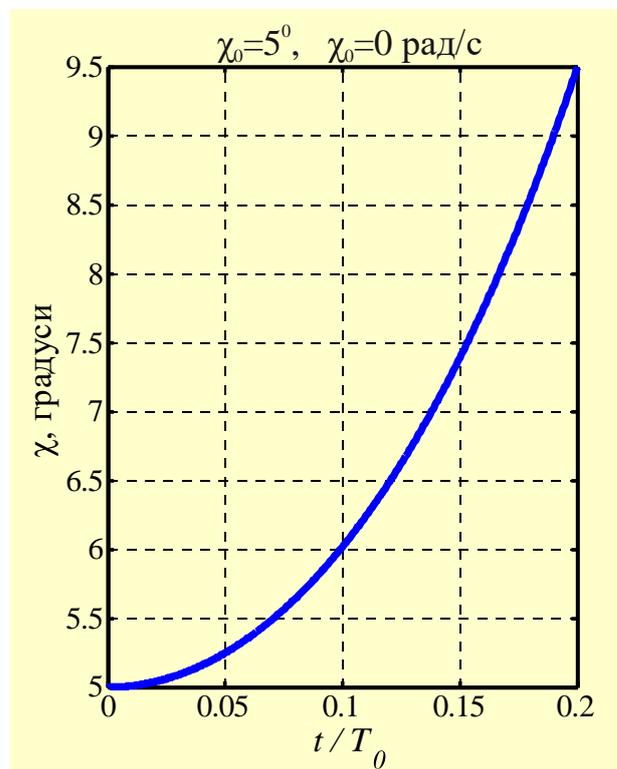


Рисунок 6.8

Зазначимо, що за $\Delta E < 0$ вимога $\frac{s}{l} = \chi \ll 1$ виконується, відповідно до формул (6.42) та (6.43), за умови $\frac{|\Delta E|}{\tilde{E}} \ll 1$.

Відповідно до (6.44), математичний маятник може підійти до свого верхнього вертикального положення тим ближче, чим менше відношення $\frac{|\Delta E|}{\tilde{E}}$ у порівнянні з одиницею (що ближче значення повної енергії до величини \tilde{E}). При цьому мінімальне відхилення від верхнього рівноважного положення однозначно визначається завданням повної енергії маятника – кожному заданому значенню E відповідає одне і лише одне значення мінімального відхилення і навпаки. Тобто, між величинами s_{\min}, χ_{\min} та повною енергією E існує взаємно однозначна відповідність, тому кожній парі початкових умов також відповідає одне і лише одне значення мінімального відхилення, але ця відповідність не є взаємно однозначною.

Початкові умови, які залежать від довільного вибору моменту, $t = 0$ можна завжди подати у вигляді: $\chi(t=0) = \chi_0, \dot{\chi}(t=0) = \dot{\chi}_0 = 0$, якщо за початок відліку часу взяти той момент часу, коли маятник змінює напрям руху на протилежний. Тоді, підставляючи $\delta = \operatorname{arth} \frac{\dot{\chi}_0}{\omega_0 \chi_0} = 0$ до рівності (6.42) та (6.43), знаходимо координати математичного маятника у довільний момент часу¹⁷

$$s(t) = s_0 \operatorname{ch}(\omega_0 t), \quad \chi(t) = \chi_0 \operatorname{ch}(\omega_0 t), \quad (6.45)$$

при цьому, відповідно до (6.44), $\chi_0 = \chi_{\min}$.

Коли повна енергія маятника більша за максимально можливе значення потенціальної енергії ($\Delta E > 0$), то маятник буде здійснювати обертальний рух навколо точки підвісу, при цьому його швидкість ніде не обертається на нуль. Поблизу верхнього вертикального положення, миттєві координати маятника, згідно з виразами (5.11) та (2.2), змінюються за законом гіперболічного синуса

$$s(t) = 2l \sqrt{\frac{\Delta E}{\tilde{E}}} \operatorname{sh}(\omega_0 t + \gamma), \quad (6.46)$$

¹⁷ Формули (6.45) також безпосередньо впливають з другого співвідношення (5.5).

$$\chi(t) = 2\sqrt{\frac{\Delta E}{\tilde{E}}} \operatorname{sh}(\omega_0 t + \gamma), \quad (6.47)$$

де стала γ задовольняє рівності (див. розділ 5) $\operatorname{th}\gamma = \frac{\omega_0 s_0}{\dot{s}_0} = \frac{\omega_0 \chi_0}{\dot{\chi}_0}$.

Із закону збереження енергії бачимо, що модуль лінійної та кутової швидкості (див. розділ 5) у момент проходження маятником верхнього рівноважного положення набуває свого мінімального значення

$$|\dot{s}_{\min}| = 2\omega_0 l \sqrt{\frac{\Delta E}{\tilde{E}}} = \sqrt{\dot{s}_0^2 - \omega_0^2 s_0^2}, \quad |\dot{\chi}_{\min}| = 2\omega_0 \sqrt{\frac{\Delta E}{\tilde{E}}} = \sqrt{\dot{\chi}_0^2 - \omega_0^2 \chi_0^2}. \quad (6.48)$$

Зазначимо, що у цьому випадку відношення $\frac{\Delta E}{\tilde{E}}$ може набувати довіль-

них значень, а умова $\chi = \frac{s}{l} \ll 1$ забезпечується малістю $\operatorname{sh}(\omega_0 t + \gamma)$. З останніх виразів видно, що: 1) між мінімальною швидкістю та повною енергією (так само як і в попередньому випадку, між мінімальним зміщенням та повною енергією) існує взаємно однозначна відповідність; 2) у міру наближення повної енергії E маятника до значення \tilde{E} величина мінімальної швидкості зменшуватиметься.

При $\Delta E = 0$, коли повна енергія маятника дорівнює максимально можливому значення потенціальної енергії $E = \tilde{E} = 2mgl$, рух маятника поблизу його верхнього вертикального положення описується функціями вигляду (5.13) і (5.14). Доведемо це твердження. Підставимо $\Delta E = 0$ у співвідношення (6.39) та (6.40)

$$\frac{ml^2 \dot{\chi}^2}{2} - \frac{mgl}{2} \chi^2 = 0 \Rightarrow l\dot{\chi}^2 - g\chi^2 = 0, \quad (6.49)$$

$$\frac{m}{2} \dot{s}^2 - \frac{mg}{2l} s^2 = 0 \Rightarrow \dot{s}^2 - \frac{g}{l} s^2 = 0. \quad (6.50)$$

Враховуючи вираз $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, розпишемо (6.49) та (6.50) за формулою різ-

ниці квадратів

$$(\dot{\chi} - \omega_0 \chi)(\dot{\chi} + \omega_0 \chi) = 0, \quad (\dot{s} - \omega_0 s)(\dot{s} + \omega_0 s) = 0. \quad (6.51)$$

У такому ж вигляді представимо співвідношення (6.41)

$$(\dot{\chi}_0 - \omega_0 \chi_0)(\dot{\chi}_0 + \omega_0 \chi_0) = 0, (\dot{s}_0 - \omega_0 s_0)(\dot{s}_0 + \omega_0 s_0) = 0. \quad (6.52)$$

Таким чином, ми приходимо до співвідношень, які були розглянуті у розділі 5. Наприклад, функції (5.13) і (5.14) є розв'язками рівнянь (6.51). Вирази (5.13) та (5.14) також впливають із точних розв'язків, що описують повний поворот маятника. Доведемо це твердження. Спочатку запишемо (6.28) у такому вигляді

$$\theta = 4 \operatorname{arctg}(Ce^{\pm \omega_0 t}) - \pi, \quad (6.53)$$

де C , t_0 – постійні величини, які визначаються початковими умовами (якщо початок відліку часу обрано у момент проходження положення $\theta = 0$, то $C = 1$).

Якщо оберт математичного маятника відбувається у напрямку за годинниковою стрілкою, то у (6.53) необхідно вибрати знак « $-$ »

$$\theta = 4 \operatorname{arctg}(Ce^{-\omega_0 t}) - \pi.$$

Цей же рух буде визначатися і функцією¹⁸

$$\theta = \pi - 4 \operatorname{arctg}(Ce^{\omega_0 t}). \quad (6.54)$$

Переходячи до змінної $\chi = \pi - \theta$, дістаємо

$$\chi = 4 \operatorname{arctg}(Ce^{\omega_0 t}). \quad (6.55)$$

Формула (6.55) також впливає з виразу для повної енергії

$$\frac{ml^2 \dot{\chi}^2}{2} + mgl(1 + \cos \chi) = 2mgl.$$

Звідки після простих перетворень знаходимо кутову швидкість

$$\frac{d\chi}{dt} = \pm 2\omega_0 \sin \frac{\chi}{2}.$$

¹⁸ Рух маятника проти годинникової стрілки описується функцією $\theta = 4 \operatorname{arctg}(Ce^{\omega_0 t}) - \pi$ або $\theta = \pi - 4 \operatorname{arctg}(Ce^{-\omega_0 t})$.

За допомогою обчислень, аналогічних тим, які були виконані вище (див. розділ 6.1 та 6.2), замість (6.20) отримаємо інтеграл

$$\int \frac{d\phi}{\sin \phi} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\phi}{2} \right) \right|, \int \frac{d\phi}{\sin \phi} = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \cos \phi}{1 - \cos \phi} \right),$$

І, відповідно, знайдемо залежність $\chi(t)$

$$\chi = 4 \operatorname{arctg} \left(C e^{\pm \omega_0 t} \right) \text{ або } \chi = 4 \operatorname{arctg} \left[e^{\pm \omega_0 (t - t_0)} \right].$$

Знак «+» відповідає руху від $\chi = 0$ (у цьому положенні $t = -\infty$) до $\chi = 2\pi$ ($t = \infty$); знак «-» вказує на рух у зворотному напрямку. Якщо обрати початок відліку часу $t = 0$ у момент проходження маятником нижнього вертикального положення $\chi = \pi$, то $C = 1, t_0 = 0$.

Нехай, наприклад, у момент часу $t = 0$ кут χ в (6.55) дорівнює $\chi(t = 0) = \chi_0 \ll 1$, тоді $C = \operatorname{tg} \frac{\chi_0}{4} \approx \frac{\chi_0}{4}$ і для тих значень змінної t , для яких $C \exp(\omega_0 t) \ll 1$ (тобто коли змінна χ набуває значення в інтервалі $0 \leq \chi \leq \chi_0$), зміна кутової координати наближено відбувається за експоненціальним законом

$$\chi = 4 \operatorname{arctg} \left(C e^{\omega_0 t} \right) \approx 4 C e^{\omega_0 t} \approx \chi_0 e^{\omega_0 t},$$

який описується виразом (5.13). Так само, якщо взяти в експоненті знак «-», то прийдемо до формули (5.14)

$$\chi = 4 \operatorname{arctg} \left(C e^{-\omega_0 t} \right) \approx 4 C e^{-\omega_0 t} \approx \chi_0 e^{-\omega_0 t}.$$

Отже, якщо повна енергія $E \ll \tilde{E} = 2mgl$ (випадок малих коливань), то математичний маятник наближено є гармонічним осцилятором, оскільки його коливання можна вважати гармонічними та ізохронними (якщо амплітуда $\theta_0 \ll 1$, то поправка у виразах (6.14) досить мала і нею можна знехтувати). У цьому випадку можна використовувати результати, отримані в розділі 2. Якщо значення повної енергії E маятника близьке до \tilde{E} , то поблизу верхнього вертикального положення рух маятника, близький до руху матеріальної точки, розглянутого в розділі 5. Зазначимо також, що при проходженні маятником го-

ризоньального положеення $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ тангенціальне та кутове прискорення набувають максимальних за абсолютною величиною значень: $|a_\tau| = g$, $|\ddot{\theta}| = \omega_0^2$. Рух маятника поблизу горизонтального положеення можна приблизно вважати рівнозмінним. Дійсно, оскільки кутова змінна поблизу точки $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ набуває значення $\theta = \pm \frac{\pi}{2} \pm \delta$ ($\delta \ll 1$), то кутове прискорення $\ddot{\theta}$ (та, відповідно, тангенціальне $a_\tau = l\ddot{\theta}$) можна приблизно вважати постійною величиною: $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta = \mp \omega_0^2 \cos \delta = \mp \omega_0^2 \left(1 - \frac{\delta^2}{2} + \dots \right)$.

6.4. Фазові траєкторії маятника

Розглянемо рух математичного маятника на фазовій площині змінних $(\theta, \dot{\theta})$. Рівняння всіх можливих фазових кривих (залежність $\dot{\theta}(\theta)$) дозволяє отримати вираз для повної енергії

$$\frac{I\dot{\theta}^2}{2} + mgl(1 - \cos \theta) = E. \quad (6.56)$$

Спочатку відзначимо деякі особливості фазових траєкторій, які впливають з отриманих раніше співвідношень. По-перше, фазові траєкторії маятника симетричні щодо осі абсцис (осі θ), це безпосередньо впливає з формули для кутової швидкості: $\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2[E - E_n(\theta)]}{I}}$ (де I – момент інерції маятника). Заміна $\dot{\theta}$ на $-\dot{\theta}$ або, що те саме, t на $-t$ не змінює характер руху зображувальної точки, змінюється тільки напрямок її руху на зворотній. Це стосується не лише маятника (див. розділ 1 та розділ 5), а є загальною властивістю консервативних систем, що впливає із закону збереження енергії: зміна знака часу залишає рівняння руху незмінним. Тому, якщо в консервативній системі можливий деякий рух, то завжди можливий і зворотний рух, при якому система проходить ті ж положення з тією ж за модулем швидкістю, але у зворотному порядку. По-друге, фазові траєкторії маятника симетричні щодо осі ординат (осі $\dot{\theta}$), оскільки

ки потенціальна енергія є парною функцією кутової змінної θ : $E_n(\theta) = E_n(-\theta)$. Отже, кутова швидкість залишається незмінною при заміні θ на $-\theta$.

У розділі 2 було показано, що малі коливання математичного маятника близькі до коливань гармонічного осцилятора. Тоді, використовуючи співвідношення (2.20) та (2.21), відразу запишемо рівняння фазових траєкторій маятника

$$\left(\frac{\dot{\theta}}{\theta_0\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2 = 1, \quad (6.57)$$

яке являє собою рівняння еліпса (див. рис. 1.6), півосі якого дорівнюють амплітудам кутового зміщення та кутової швидкості (криві *I*, *II* на рис. 6.9). Якщо замість змінної $\dot{\theta}$ ввести нову змінну $\vartheta = \frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$, (замість фазової площини $(\theta, \dot{\theta})$) також можна розглядати площину змінних (θ, ϑ) , то отримаємо рівняння кола радіус якого дорівнює θ_0 : $\vartheta^2 + \theta^2 = \theta_0^2$. Зі збільшенням повної енергії, амплітуда коливань маятника, згідно з (6.18), теж зростає і фазові траєкторії все більше відрізнятимуться від еліптичної форми, залишаючись при цьому замкнутими (крива *III* на рис. 6.9). А коливання які здійснює маятник, все більше відрізнятимуться від гармонічних та ізохронних. При значеннях повної енергії $0 < E < \tilde{E}$ маятник виконує коливальний (періодичний) рух, фазова траєкторія якого замкнута крива. У верхній напівплощині (див. рис. 6.9) лежить частина траєкторії, що відповідає руху маятника від $\theta = -\theta_0$ до $\theta = \theta_0$, у нижній півплощині – руху у зворотному напрямку.

При енергіях $E > \tilde{E}$ маятник здійснює обертальний рух, при цьому його швидкість ніде на нуль не перетворюється (фазові траєкторії не перетинають вісь абсцис), фазові траєкторії є незамкнені криві. У верхній напівплощині лежать фазові криві, що відповідають обертанню маятника проти годинникової стрілки, в нижній – за стрілкою годинника (див. рис. 6.9). Якщо повна енергія набуває значення $E = \tilde{E}$, то маятник, як було показано вище, здійснює лімітаційний рух. Такому руху на фазовій площині відповідають **сепаратрисні криві**, які поділяють фазову площину на області, що відповідають різним типам руху: коливальному і обертальному. У верхній напівплощині лежить сепаратриса, що

відповідає руху від $\theta = -\pi$ до $\theta = \pi$ (повний оберт проти годинникової стрілки), у нижній – руху у зворотному напрямку (повний оберт за стрілкою годинника).

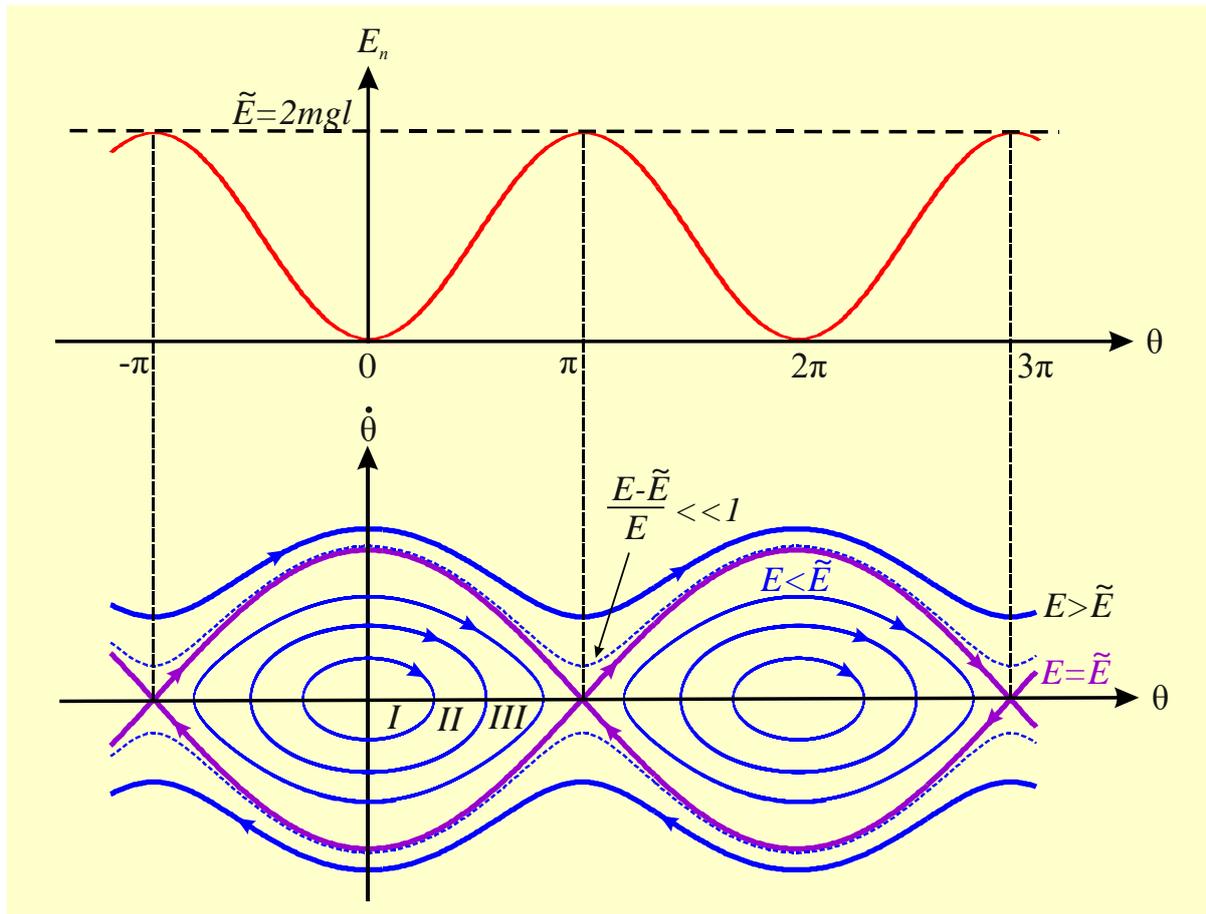


Рисунок 6.9

Вище було показано, що стани рівноваги системи на фазовій площині знаходяться в особливих точках: стійкій рівновазі (нижнє вертикальне положення) відповідає особлива точка типу «центр» оточена замкнутими фазовими траєкторіями, а нестійкому – особлива точка типу «сідло» крізь яку проходить дві сепаратрисы. Особливі точки мають координати $(\pm n\pi, 0)$ парним n та нулю відповідає «центр», а непарним n – «сідло». Зазначимо, що значення координати θ , що відрізняються на величину $2\pi n$ (n – будь-яке ціле число) енергетично еквівалентні, оскільки їм відповідає однакова потенціальна енергія (див. рис. 6.9) і при кожному заданому значенні повної енергії однакова кінетична енергія. Тому ці координати також характеризують однакове просторове положення математичного маятника. Розглянемо рух маятника з повною енергією близькою до значення \tilde{E} . Зупинимось спочатку на коливальному русі: $E < \tilde{E}$, $\theta_0 \sim \pi$. Для зручності, запишемо енергію у вигляді: $E = \tilde{E} + \Delta E$ (де

$\Delta E = E - \tilde{E}$) і введемо безрозмірний параметр $\varepsilon = \frac{\Delta E}{\tilde{E}}$, тоді: $E = \tilde{E}(1 - |\varepsilon|)$. З

рис. 6.9 (пунктирна крива) видно, що чим менше повна енергія відрізняється від максимально можливого значення потенціальної енергії (тобто, чим менше $|\varepsilon|$ порівняно з одиницею), то ближче фазова траєкторія коливального руху до сепаратрисної кривої. При досить малих значеннях $|\varepsilon|$ фазова траєкторія на більшій частині інтервалу $[-\theta_0, \theta_0]$ майже зливається з сепаратрисою, а саме у верхній півплощині вона притискається до сепаратриси знизу, нижній півплощині, відповідно, зверху. Таким чином, можна зробити висновок, що **при коливаннях з гранично великими амплітудами рух маятника на більшій частині шляху при кожному коливанні мало відрізняється від лімітаційного руху**, що описується функціями (6.32) та (6.33). Істотною буде відмінність лише при переміщенні поблизу верхнього вертикального положення. При коливальному русі швидкість маятника перетворюється на нуль в точках $\theta = \pm\theta_0$, а рух маятника поблизу точок повороту, як було показано вище, можна наближено описати виразами (6.42) і (6.43). Наприклад, коли маятник виходить з положення $\theta = \theta_0$ сила що повертає F_τ та обертальний момент M_z (разом з ними тангенціальне та кутове прискорення пропорційні $\sin \chi \ll 1$) малі за абсолютною величиною, у зв'язку з чим маятник буде досить повільно набирати швидкість. Коли маятник наближається до точки повороту, його швидкість буде повільно спадати до нуля. Тому більшу частину часу періоду коливання маятник буде проводити поблизу точок повороту. При лімітаційному русі ($E = \tilde{E}$) маятник перебуватиме у безпосередній близькості до нестійкого положення рівноваги необмежено довго, здійснюючи свій рух із нескінченно малою за величиною швидкістю. У верхньому вертикальному положенні $\theta = \pm\pi$ швидкість маятника перетворюється на нуль. Відзначимо, що якщо повна енергія маятника дорівнює \tilde{E} , то єдине положення, в якому його швидкість перетворюється на нуль це верхнє вертикальне положення. Під час наближення маятника до цього положення його швидкість, а також сила що повертає та обертальний момент, які в цьому випадку уповільнюють маятник, безперервно зменшуватимуться за абсолютною величиною через це маятник буде необмежено довго наближатися до верхнього рівноважного положення. У самому рівноважному положенні швидкість дорівнює

нулю та $F_\tau = 0$, $M_z = 0$, тому маятник не може вийти з цього положення за кінцевий час. При коливаннях з амплітудами близькими до π в точках повороту швидкість дорівнює нулю, але при цьому $|F_\tau|, |M_z| \sim \chi_0 \neq 0$ і маятник буде виходити та наблизитися до цих точок протягом кінцевого проміжку часу.

Якщо $E > \tilde{E}$ ($\Delta E > 0$), то маятник здійснює обертальний рух. Використовуючи введене раніше позначення, запишемо повну енергію у вигляді: $E = \tilde{E} + \Delta E = \tilde{E}(1 + \varepsilon)$. Малим значенням ε буде відповідати фазова траєкторія, яка майже зливатиметься з верхньою гілкою сепаратриси при обертанні маятника проти годинникової стрілки або з нижньою гілкою при обертанні за годинниковою стрілкою. Таким чином, якщо повна енергія маятника не набагато перевищує максимально можливе значення потенціальної енергії, то як і в разі коливань, рух маятника на більшій частині шляху при кожному оберті мало відрізняється від лімітаційного руху. Відмінність буде спостерігатися лише поблизу нестійкого положення рівноваги. При обертанні, швидкість маятника ніде на нуль не перетворюється і він пройде верхнє вертикальне положення з малою (у міру малості ε) за величиною швидкістю (6.48). Зазначимо також, що під час обертового руху кутова швидкість $|\dot{\theta}|$ маятника буде здійснювати коливання між максимальним значенням у момент проходження нижнього вертикального положення та мінімальним значенням при проходженні верхнього вертикального положення. Для мінімальної швидкості $|\dot{\theta}|_{\min}$ (величини $\dot{\theta}$ та $\dot{\chi}$ рівні за модулем і відрізняються лише знаком: під час руху за годинниковою стрілкою кут χ збільшується, а кут θ зменшується, під час руху проти годинникової стрілки – навпаки), використовуючи (6.48) або закон збереження енергії (6.56), запишемо

$$|\dot{\theta}|_{\min} = 2\omega_0 \sqrt{\varepsilon}. \quad (6.58)$$

Враховуючи, що повна енергія маятника

$$E = \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}_{\max}^2, \quad (6.59)$$

зберігається під час руху, перетворимо формулу (6.58) до наступного вигляду

$$2\omega_0 \sqrt{\varepsilon} = 2\omega_0 \sqrt{\frac{E}{\tilde{E}} - 1} = 2\omega_0 \sqrt{\frac{l\dot{\theta}_{\max}^2}{4g} - 1},$$

звідки приходимо до рівності

$$|\dot{\theta}|_{\min} = |\dot{\theta}|_{\max} \sqrt{1 - \frac{4\omega_0^2}{\dot{\theta}_{\max}^2}} \quad (6.60)$$

Максимальне значення кутової швидкості маятника, відповідно до (6.59), становитиме

$$|\dot{\theta}|_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{ml^2}} = \sqrt{\frac{2\tilde{E}(1+\varepsilon)}{ml^2}} = 2\omega_0\sqrt{1+\varepsilon}.$$

Якщо $\varepsilon \ll 1$ (повна енергія близька до значення \tilde{E}), то максимальна швидкість обертання майже збігається з максимальною швидкістю лімітаційного руху $2\omega_0$, при цьому мінімальна кутова швидкість, як це випливає з (6.58), буде досить мала: при наближенні повної енергії до значення $\tilde{E} = 2mgl$, параметр ε , а разом з ним і $|\dot{\theta}|_{\min}$ наближаються до нуля. У разі коливального руху, за аналогією можемо для максимального значення кутової швидкості відразу записати вираз: $|\dot{\theta}|_{\max} = 2\omega_0\sqrt{1-|\varepsilon|}$, звідки так само випливає, що при $|\varepsilon| \ll 1$ максимальна кутова швидкість $|\dot{\theta}|_{\max} \approx 2\omega_0$.

Коли повна енергія маятника набагато більша за максимальне можливе значення потенціальної енергії (це своєю чергою означає, що кінетична енергія значно перевищує $2mgl$), то максимальне і мінімальне значення кутової швидкості мало відрізняються один від одного. Дійсно, вираз (6.59) та умова $E \gg \tilde{E}$ приводять до нерівності $|\dot{\theta}|_{\max} \gg 2\omega_0$. Тоді з формули (6.60) випливає:

$$|\dot{\theta}|_{\min} \approx \left(1 - \frac{\mu^2}{2}\right) |\dot{\theta}|_{\max}, \text{ де } \mu = \left(\frac{2\omega_0}{|\dot{\theta}|_{\max}}\right) \ll 1. \text{ Зі збільшенням кінетичної енергії пері-$$

од обертання маятника зменшуватиметься та при досить великих значеннях E_k , обертальний рух стає майже рівномірним.

6.5. Період коливального та обертового руху маятника при значеннях енергії близьких до \tilde{E}

Розглянемо рух маятника від точки повороту $\theta = \theta_0$ до нижнього рівноважного положення $\theta = 0$. Час руху маятника на цій ділянці траєкторії становить чверть періоду коливань. Розділимо умовно дугу кола на дві ділянки: від $\theta = \theta_0$ до $\theta = \theta_1$ та від $\theta = \theta_1$ до $\theta = 0$, де θ_1 – це довільний кут досить близький до π . Знайдемо час руху на кожній ділянці окремо.

Якщо обрати початкові умови у вигляді $\chi(t=0) = \chi_0, \dot{\chi}(t=0) = 0$, то рух маятника поблизу нестійкого положення рівноваги буде описуватися виразом (6.45). Підставляючи початкову ($\chi_0 = \pi - \theta_0$) та кінцеву ($\chi_1 = \pi - \theta_1$) кутові координати у (6.45), маємо

$$\chi_1 = \chi_0 \operatorname{ch}(\omega_0 t_1) = \chi_0 \frac{e^{\omega_0 t_1} + e^{-\omega_0 t_1}}{2}, \quad (6.61)$$

де t_1 – час руху маятника на ділянці $[\theta_0, \theta_1]$.

Перепишемо рівність (6.61) у такому вигляді

$$\frac{2\chi_1}{\chi_0} = e^{\omega_0 t_1} + e^{-\omega_0 t_1}.$$

Далі будемо вважати¹⁹, що $\chi_1 \gg \chi_0$, тоді величина у лівій частині (6.61) набагато більша за одиницю, тому основний внесок у правій частині дасть перший доданок

$$e^{\omega_0 t_1} \approx \frac{2\chi_1}{\chi_0},$$

тоді час проходження першої ділянки

$$t_1 \approx \frac{1}{\omega_0} \ln \frac{2\chi_1}{\chi_0}. \quad (6.62)$$

Враховуючи початкові умови та вираз (6.44) знайдемо початкову координату

¹⁹ Кут θ_0 досить близький до π , тому $\chi_0 \ll 1$. Довільний кут θ_1 завжди можна вибрати так, щоб $\pi - \theta_1 = \chi_1 \ll 1$ та $\chi_1 \gg \chi_0$.

$$2\sqrt{\frac{|\Delta E|}{\tilde{E}}} = \sqrt{\chi_0^2 - \left(\frac{\dot{\chi}_0}{\omega_0}\right)^2} \Rightarrow \chi_0 = 2\sqrt{|\varepsilon|},$$

яку підставимо до (6.62)

$$t_1 \approx \frac{1}{\omega_0} \ln \frac{\chi_1}{\sqrt{|\varepsilon|}}. \quad (6.63)$$

Рух на другій ділянці: від $\theta = \theta_1$ до $\theta = 0$ мало відрізняється від лімітаційного – фазова траєкторія математичного маятника буде практично зливатись із сепаратрисою. Для знаходження часу проходження t_2 цієї ділянки, скористаємося функцією (6.54), яка описує рух маятника при повному обороті за годинниковою стрілкою

$$\theta = \pi - 4\operatorname{arctg}\left[e^{\omega_0 t}\right]. \quad (6.64)$$

Оскільки, згідно з (6.64), у момент часу $t = 0$ маятник перебував у положенні $\theta = 0$, то у момент часу t_2 він займав положення θ_1

$$\theta_1 = \pi - 4\operatorname{arctg}\left[e^{\omega_0 t_2}\right].$$

Після перетворень дістаємо

$$e^{\omega_0 t_2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \theta_1}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\chi_1}{4} \approx \frac{\chi_1}{4}.$$

Враховуючи, що $t_2 = -|t_2|$ приходимо до рівності

$$|t_2| \approx \frac{1}{\omega_0} \ln \frac{4}{\chi_1}. \quad (6.65)$$

Додаючи вирази (6.63) та (6.65), знаходимо час руху маятника від крайнього положення $\theta = \theta_0$ до нижнього вертикального $\theta = 0$

$$\frac{T}{4} = t_1 + |t_2| \approx \frac{1}{\omega_0} \left(\ln \frac{2\chi_1}{\chi_0} + \ln \frac{4}{\chi_1} \right) = \frac{1}{\omega_0} \ln \frac{8}{\chi_0}.$$

Підставляючи $\chi_0 = \pi - \theta_0$ та $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ в останній вираз, отримуємо залежність $T(\theta_0)$

$$T(\theta_0) \approx \frac{4}{\omega_0} \ln \left(\frac{8}{\pi - \theta_0} \right) = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \left(\frac{8}{\pi - \theta_0} \right). \quad (6.66)$$

Використовуючи рівність (6.44), запишемо ще один вираз для періоду коливань математичного маятника

$$T(E) \approx \frac{4}{\omega_0} \ln \left(\frac{4\sqrt{\tilde{E}}}{\sqrt{|\Delta E|}} \right). \quad (6.67)$$

Знайдемо тепер період обертання маятника за умови, що його повна енергія близька до значення \tilde{E} ($\Delta E > 0$). Для цього розглянемо рух на половині довжини кола: від $\theta = \pi$ до $\theta = 0$. Цьому інтервалу траєкторії відповідає проміжок часу, що дорівнює половині періоду. Зробимо так само, як і у попередньому випадку, розділимо дугу на дві ділянки: 1) від $\theta = \pi$ до $\theta = \theta_1$; 2) від $\theta = \theta_1$ до $\theta = 0$. Як зазначалося раніше, якщо повна енергія маятника трохи відрізняється від \tilde{E} , то фазові траєкторії коливального і обертального руху на більшій частині проміжку $[-\pi, \pi]$ майже зливаються з сепаратрисою, а принципова відмінність між ними буде лише поблизу точок $\theta = \pm\pi$. Тоді на ділянці від $\theta = \theta_1$ до $\theta = 0$ коливальний або обертальний рух математичного маятника з досить високою точністю можна вважати лімітаційним. Максимальні швидкості в обох випадках, як було показано вище, майже збігатимуться, і в основному наближенні їх можна вважати однаковими, рівними $2\omega_0$. Тому, час проходження другої ділянки при коливальному та обертальному русі буде однаковим. Час проходження маятником першої ділянки траєкторії суттєво залежить від характеру його руху (коливання або обертання). Для знаходження цього часу, використаємо формулу (6.47)

$$\chi(t) = 2\sqrt{\frac{\Delta E}{\tilde{E}}} \operatorname{sh}(\omega_0 t + \gamma) = 2\sqrt{\varepsilon} \cdot \operatorname{sh}(\omega_0 t + \gamma).$$

За початок відліку часу виберемо момент проходження маятником нестійкого положення рівноваги

$$\chi(t=0) = 0, \dot{\chi}(t=0) = \dot{\chi}_{\min} \Rightarrow \gamma = 0.$$

Позначаючи час руху від $\chi = 0$ до $\chi_1 = \pi - \theta_1$ через t'_1 , дістаємо

$$\chi(t') = \chi_1 = 2\sqrt{\varepsilon} \cdot \operatorname{sh}\omega_0 t'_1 = \sqrt{\varepsilon} (e^{\omega_0 t'_1} - e^{-\omega_0 t'_1}).$$

Перепишемо цю рівність у вигляді

$$\frac{\chi_1}{\sqrt{\varepsilon}} = e^{\omega_0 t'_1} - e^{-\omega_0 t'_1}.$$

За досить малого ε завжди можна обрати θ_1 так, щоб виконувалася умова $\sqrt{\varepsilon} \ll \chi_1 \ll 1$. Тоді в правій частині останнього виразу перший доданок значно більший за другий

$$\frac{\chi_1}{\sqrt{\varepsilon}} \approx e^{\omega_0 t'_1} \Rightarrow t'_1 \approx \frac{1}{\omega_0} \ln \frac{\chi_1}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (6.68)$$

Додаючи (6.65) та (6.68), знаходимо час, за який маятник здійснює половину обороту

$$\frac{T}{2} = t'_1 + |t_2| \approx \frac{1}{\omega_0} \left(\ln \frac{\chi_1}{\sqrt{\varepsilon}} + \ln \frac{4}{\chi_1} \right) = \frac{1}{\omega_0} \ln \frac{4}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Враховуючи, що $\varepsilon = \frac{\Delta E}{\tilde{E}}$ отримуємо період обертання математичного маятника

$$T(E) \approx \frac{2}{\omega_0} \ln \left(\frac{4\sqrt{\tilde{E}}}{\sqrt{\Delta E}} \right). \quad (6.69)$$

Порівнюючи рівності (6.67) та (6.69) бачимо, що за умови, коли абсолютна величина відхилення повної енергії від значення \tilde{E} буде однаковою для коливання та обертання, то $t_1 = t'_1$ і період коливань буде вдвічі перевищувати період обертання (зазначимо, що від вибору θ_1 залежатиме час проходження маятником першої та другої ділянки, проте на величину самого періоду кут θ_1 не впливає). З отриманих виразів також випливає, що з наближенням повної енергії до значення $\tilde{E} = 2mgl$ період як коливального, так і обертального руху маятника повільно зростає і в граничному випадку $E = \tilde{E}$ перетворюється на нескінченність.

Контрольні запитання

1. Як змінюється період коливань математичного маятника при збільшенні амплітуди коливань?
2. Яку повну енергію повинен мати математичний маятник, щоб його коливання можна було вважати гармонічними?
3. Яке положення рівноваги називають стійким?
4. Який рух маятника називають лімітаційним?
5. Які особливі точки на фазовій площині відповідають стійкому та не стійкому положенням рівноваги?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ostrovsky L. Slowly varying oscillations and waves: from basics to modernity. Singapore: World scientific publishing, 2022. 372 p.
2. Corduneanu C. Almost periodic oscillations and waves. New York: Springer, 2009. 313 p.
3. Fitzpatrick R. Oscillations and Waves. Boca Raton: CRC Press, 2013. 249 p.
4. Vistnes A.I. Physics of oscillations and waves: with use of MatLAB and Python. New York: Springer, 2018. 584 p.
5. Franklin J. Mathematical methods for oscillations and waves. Cambridge: University press, 2020. 274 p.
6. Smith W. F. Waves and oscillations a prelude to quantum mechanics. Oxford: University press, 2010. 402 p.
7. Воробйов В. В., Воробйова Л. Д., Киба С. П. Основи прикладної теорії коливань : підручник для студентів машинобудівних та електромеханічних спеціальностей. Кременчук: П. П. Щербатих О.В., 2020. С. 156.

Навчальне видання

АНДРЕЄВ Олександр Миколайович
АНДРЕЄВА Ольга Миколаївна
ПЕРЕТЯТЬКО Анастасій Олександрович

ЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ В КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМАХ

Навчальний посібник
для бакалаврів та магістрів усіх спеціальностей
денної та заочної форм навчання

Відповідальна за випуск проф. Любченко О. А.

Роботу до видання рекомендувала проф. Любченко О. А.

В авторській редакції

План 2025 р., поз. 73

Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 6,4

Видавничий центр НТУ «ХП».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.

Електронне видання