МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Т. Т. Черногор, О. П. Пріщенко

Ряди

Навчально-методичний посібник
для здобувачів вищої освіти хімічних та інших технічних спеціальностей
денної і скороченої форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 19.02.2026 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2026

УДК 517.52(075)
Ч-49

Рецензенти:

М. Є. Резуненко, канд. техн. наук, доц.,
Український державний університет залізничного транспорту;

Ю. Л. Геворкян, канд. фіз.-мат. наук, проф.,
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Черногор Т. Т.
Ч-49 Ряди : навч.-метод. посіб. / Т. Т. Черногор, О. П. Пріщенко. Харків : НТУ «ХПІ», 2026. 81 с.

ISBN 978-617-05-0610-8

Навчально-методичний посібник містить теоретичні відомості про числові, функціональні та степеневі ряди. У виданні детально роз’яснено методи розв’язання типових завдань за темою «Ряди» та продемонстровано практичне їх застосування для наближеного обчислення значень функцій, визначених інтегралів та інтегрування диференціальних рівнянь. Для перевірки рівня засвоєння матеріалу посібник пропонує 25 варіантів завдань для контролю знань.

Призначено для здобувачів вищої освіти хімічних та інших технічних спеціальностей денної і скороченої форм навчання.

Бібліогр. 4 назви

УДК 517.52(075)

ISBN 978-617-05-0610-8

ВСТУП

Навчально-методичний посібник присвячений одному з фундаментальних розділів вищої математики – теорія рядів. Видання спрямоване на всебічне висвітлення теоретичних аспектів та формування цілісного математичного мислення у здобувачів вищої освіти (ВО), а також на розвиток їхніх стійких практичних навичок у розв'язанні складних завдань.

Якісне засвоєння курсу вищої математики та здатність вільно застосовувати її методи є невід'ємною складовою фахової підготовки. Знання, набуті здобувачами під час самостійної роботи, стають надійним підґрунтям для майбутньої наукової та професійної діяльності.

Структурно посібник складається з двох частин. Теоретичний блок висвітлює поняття числових, функціональних та степеневих рядів. Детально розглянуто ряди Тейлора і Маклорена, а також практичне застосування степеневих рядів для наближеного обчислення значень функцій, визначених інтегралів та розв'язання диференціальних рівнянь, що має пряме прикладне значення. Контрольний блок містить 25 варіантів завдань для перевірки рівня засвоєння матеріалу, та включає в себе не тільки практичні завдання, але і теоретичні запитання.

Для оптимізації самостійної роботи додано список джерел інформації, що включає як класичні підручники, так і актуальні навчально-методичні видання кафедри.

Головна мета посібника – забезпечити якісну підтримку здобувачам ВО денної та скороченої форм навчання. Видання також стане надійним методичним помічником для молодих викладачів, які розпочинають свою педагогічну діяльність.

1. РЯДИ

1.1. Поняття числового ряду, його збіжність та розбіжність

Нехай задано нескінченну послідовність чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... Вираз вигляду $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається ***числовим рядом***, числа a_1, a_2, a_3, ... – ***членами ряду,*** при цьому a_n називається ***загальним членом ряду***.

Сума n перших членів ряду називається $n-$тою ***частинною сумою ряду*** та позначається S_n, тобто:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Якщо існує скінченна границя $\lim_{n\to\infty} S_n$, то говорять, що ***ряд збігається*** або ***збіжний***, і його сума дорівнює S, тобто $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

У випадку, коли $\lim_{n\to\infty} S_n$ не існує або дорівнює нескінченності, ряд називається ***розбіжним***.

Позначимо $S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ... = r_n$. Якщо $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Величину r_n називають $n-$***им залишком ряду***. Важливим є питання оцінювання $|r_n| = |S - S_n|$. Оцінка $|r_n|$ показує, з якою точністю частинна сума S_n наближує суму S ряду.

Приклад 1. Знайти частинну суму S_n ряду, довести його збіжність, користуючись безпосередньо означенням збіжності ряду. Знайти суму ряду S:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} .$$

Розв'язання

Очевидно, що n-тий член ряду $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ є правильним раціональним дробом відносно n. Представимо a_n як суму простих раціональних дробів

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}$$

та скористаємось методом невизначених коефіцієнтів для знаходження A та B:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}=\frac{A(2n+1)+B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Порівняємо чисельники цих дробів

$1=A(2n+1)+B(2n-1)$. Тоді при

$$n=\frac{1}{2}:\ 1=2A,\ \ A=\frac{1}{2};\ \ n=-\frac{1}{2}:\ 1=-2B,\ \ B=-\frac{1}{2}.$$

В результаті обчислень маємо:

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right).$$

Таким чином, можна записати

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

Отже, існує $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, ряд збігається і сума ряду $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{2}$.

Відповідь: $S_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)$; $S=\dfrac{1}{2}$; ряд збігається.

Приклад 2. Знайти частинну суму S_n ряду, довести його збіжність, користуючись безпосередньо означенням збіжності ряду. Знайти суму ряду S:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Розв'язання

Запишемо загальний член ряду у вигляді суми елементарних дробів, а саме:

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}.$$

Виконуючи алгебраїчні дії, отримаємо:

$$1 \equiv A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1).$$

Послідовно надаємо значення n:

$$n = 0, \text{ тоді } 1 = 2A, \; A = \frac{1}{2};$$

$$n = -1, \text{ тоді } 1 = -B, \; B = -1;$$

$$n = -2, \text{ тоді } 1 = 2C, \; C = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, можна записати:

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Частинна сума S_n буде:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n}}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2}.$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Отже, ряд збігається, при цьому $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2}$, а $S = \frac{1}{4}$.

Відповідь: ряд збігається, оскільки $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2}$; $S = \frac{1}{4}$.

Приклад 3. Знайти частинну суму S_n ряду, довести його збіжність, користуючись безпосередньо означенням збіжності ряду. Знайти суму ряду S :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n} .$$

Розв'язання

Запишемо S_n та зробимо деякі перетворення:

$$S_n = \frac{4-3}{12} + \frac{4^2 - 3^2}{12^2} + \frac{4^3 - 3^3}{12^3} + \dots + \frac{4^n - 3^n}{12^n} =$$

$$= \frac{4}{12} - \frac{3}{12} + \frac{4^2}{12^2} - \frac{3^2}{12^2} + \frac{4^3}{12^3} - \frac{3^3}{12^3} + \dots + \frac{4^n}{12^n} - \frac{3^n}{12^n} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}} - \left(\underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n}} \right) =$$

$$= \left\| \begin{array}{c} \text{кожна сума являє собою спадну геометричну прогресію, сума якої} \\ \text{обчислюється за формулою} : S = \dfrac{b_1}{1-q}. \text{ Для першої суми } b_1 = \dfrac{1}{3}, \\ q = \dfrac{1}{3}, \text{ тоді } S_{n1} = \dfrac{1/3}{1-1/3} = \dfrac{1/3}{2/3} = \dfrac{1}{2}. \text{ Для другої суми } b_1 = \dfrac{1}{4},\ q = \dfrac{1}{4}, \\ \text{тоді } S_{n2} = \dfrac{1/4}{1-1/4} = \dfrac{1/4}{3/4} = \dfrac{1}{3}. \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} .$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{6} .$$

Це означає, що ряд збігається, та має суму $S = \dfrac{1}{6}$.

Відповідь: $S_n = \dfrac{1}{6}$, $S = \dfrac{1}{6}$, ряд збігається.

1.2. Необхідна ознака збіжності та її наслідок

На практиці не завжди достатньо легко обчислити частинну суму ряду S_n та знайти її границю.

Тому для дослідження поведінки ряду користуються ознаками збіжності.

Необхідна ознака збіжності ряду

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Як наслідок необхідної умови збіжності є **достатня умова розбіжності**:

якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то цей ряд є розбіжним.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{5n-2}$.

Розв'язання

Обчислимо границю

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{5n-2} = \frac{3}{5} \neq 0 \Rightarrow$$ ряд розбігається.

Відповідь: ряд розбігається.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4n^2+5}$.

Розв'язання

Очевидно, що $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{4n^2+5} = 0$, а отже, ніякого висновку відносно збіжності чи розбіжності ряду зробити неможливо.

Відповідь: висновок щодо збіжності чи розбіжності ряду за цією ознакою зробити неможливо.

В подальшому будуть розглянуті ознаки збіжності рядів, які дозволять з'ясувати це питання.

Розглянемо найбільш важливі числові ряди.

На основі геометричної прогресії створимо ряд

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} ,$$

який має назву ***геометричного ряду***.

Якщо $|q| < 1$, то його сума обчислюється за формулою $S = \dfrac{a}{1-q}$ і він є збіжним.

Якщо $|q| \geq 1$, то ряд розбігається.

Ряд вигляду

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

називається ***гармонічним*** і він є розбіжним.

Ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, $p \in R$ називається ***узагальненим гармонічним*** і при $p \leq 1$ він є розбіжним, а при $p > 1$, відповідно, збіжним.

Проте цей факт далі детально буде проілюстровано за допомогою інтегральної ознаки Коші.

Дещо узагальнемо попередній ряд та запишемо його у вигляді $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n \pm \alpha)^p}$.

При цьому поведінку ряду (збіжність – розбіжність) визначає p:
при $p \leq 1$ ряд розбігається, а при $p > 1$ ряд збігається.

Розглянемо як працює узагальнений гармонічний ряд.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3 \cdot \sqrt{n}}$.

Розв'язання

Маємо:

$$a_n = \frac{1}{n^3 \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{n^3 \cdot n^{1/2}} = \frac{1}{n^{7/2}} .$$

Порівнюючи з узагальненим гармонічним рядом, маємо:

$$p = \frac{7}{2} > 1 .$$

Отже, ряд збігається.

Відповідь: ряд збігається.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$.

Розв'язання
Оскільки

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{n^{2/3}}, \text{ то } p = 2/3 < 1.$$

Отже, ряд розбігається.

Відповідь: ряд розбігається.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+4)^5}}$.

Розв'язання
Перепишемо

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{(n+4)^5}} = \frac{1}{(n+4)^{5/2}}.$$

Очевидно, що $p = 5/2 > 1$ і ряд збігається.

Відповідь: ряд збігається.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n-8}}$.

Розв'язання
Очевидно, що

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n-8}} = \frac{1}{(n-8)^{1/3}}, \text{ де } p = \frac{1}{3} < 1.$$

Отже, ряд розбігається.

Відповідь: ряд розбігається.

Приклад 10. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(3n-7)^4}}$.

Розв'язання
Маємо:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[5]{(3n-4)^4}} = \frac{1}{(3n-7)^{4/5}} = \frac{1}{3^{4/5}\cdot\left(n-\frac{7}{3}\right)^{4/5}} = \frac{1}{3^{4/5}}\cdot\frac{1}{\left(n-\frac{7}{3}\right)^{4/5}} .$$

Запишемо заданий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{(3n-7)^4}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{4/5}\left(n-\frac{7}{3}\right)^{4/5}} = \frac{1}{3^{4/5}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n-\frac{7}{3}\right)^{4/5}} .$$

Оскільки const $\frac{1}{3^{4/5}}$ не впливає на поведінку ряду, а $p = 4/5 < 1$, то ряд розбігається.

Відповідь: ряд розбігається.

1.3. Основні властивості збіжних рядів

1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний та має суму S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$, де $C-\text{const}$ – також збіжний та має суму CS.

2. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжні і мають суми S_1 та S_2 відповідно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ збігається та має суму $S_1 \pm S_2$.

3. У збіжному ряді можна довільно групувати члени, тобто якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним, то збіжним є ряд, утворений довільним об'єднанням його членів із збереженням порядку їх прямування. Сума ряду при цьому не змінюється.

4. На збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання скінченної кількості членів ряду, при цьому сума ряду, якщо вона існує, змінюється.

Наслідок. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний (розбіжний) тоді і тільки тоді, коли збіжний (розбіжний) довільний його залишок.

1.4. Знакододатні ряди. Ознаки збіжності

Ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n > 0$, називається ***знакододатним рядом***.

Має сенс розглянути найважливіші достатні ознаки збіжності та розбіжності таких рядів.

Перша ознака порівняння

Нехай задано два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n > 0$ такі, що $a_n \le b_n$ $\forall n \in N$. Тоді, якщо

*) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається, то і $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається;

**) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається, то і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ розбігається.

Приклад 11. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 5}$.

Розв'язання

Члени даного ряду менші, ніж відповідні члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, тобто можна записати $\frac{1}{3^n + 5} < \frac{1}{3^n}$. Останній ряд збігається, як нескінченно складна геометрична прогресія. Відповідно, за першою ознакою порівняння збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 5}$.

Відповідь: ряд збігається.

Приклад 12. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.

Розв'язання

Загальний член заданого ряду

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} > \frac{1}{\sqrt{n\cdot n}} = \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n} = b_n,$$

оскільки зі збільшенням знаменника дріб зменшується.

Але ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонічний, розбіжний. Отже, заданий ряд також розбіжний (за першою ознакою порівняння).

Відповідь: ряд розбігається.

Приклад 13. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)\cdot n}$.

Розв'язання

Загальний член заданого ряду

$$a_n = \frac{n+1}{(n+2)\cdot n} = \frac{n+1}{n^2+2n} > \frac{n+1}{n^2+2n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1} = b_n.$$

Зазначимо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ є розбіжний та менший, ніж $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)\cdot n}$. Отже, заданий за умовою ряд також розбіжний.

Відповідь: ряд розбігається.

Приклад 14. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\cdot(n+4)}$.

Розв'язання

Маємо:

$$a_n = \frac{1}{(n+3)\cdot(n+4)} < \frac{1}{(n+3)(n+3)} = \frac{1}{(n+3)^2} = b_n.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)^2}$ є збіжним. А якщо більший ряд збігається, то менший також буде збіжним.

Відповідь: ряд збігається.

Приклад 15. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

Розв'язання

Порівняємо цей ряд з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який є розбіжним. Очевидно, що при $n\to\infty$ маємо $n>\ln n$, звідки $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$.

Отже, за першою ознакою порівняння заданий ряд є також розбіжним.

Відповідь: ряд розбігається.

Друга ознака порівняння (гранична)

Нехай для рядів $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n>0$ та $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, $b_n>0$ існує $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\text{const}\neq 0$, тоді обидва ряди збіжні або розбіжні одночасно (говорять, що ряди ведуть себе однаково).

Доцільно підкреслити, що для рядів виду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_k(n)}{Q_\ell(n)}$, де $P_k(n)$ – многочлен від n степеня k, а $Q_\ell(n)$ – многочлен від n степеня ℓ, питання про збіжність вирішується порівнянням їх з рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ та використанням граничної ознаки порівняння.

Іншими словами, якщо n-й член ряду являє собою відношення многочленів, то доцільно скористатись даною ознакою.

Приклад 16. Дослідити ряд на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$.

Розв'язання

Порівняємо цей ряд з рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$, який збігається, бо є узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $n=4>1$. Візьмемо до уваги, що при $n\to\infty$

$$\frac{1}{(2n+1)^4} \sim \frac{1}{2^4 \cdot n^4}\,.$$

Отже, заданий ряд збіжний за граничною ознакою порівняння.

Відповідь: ряд збігається.

Приклад 17. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{13}}{\left(n^5+n^3+1\right)^2}$.

Розв'язання

Оскільки $a_n = \frac{n^{13}}{\left(n^5+n^3+1\right)^2}$, має сенс розглянути ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{13}}{\left(n^5\right)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{13}}{n^{15}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,,$$

який збігається, бо є узагальненим гармонічним при $p=2$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^{13}} \cdot n^{15}}{\left(n^5+n^3+1\right)^3 \cdot \cancel{n^{13}}} = 1 \neq 0\,.$$

Отже, ряд даний за умовою є також збіжним.

Відповідь: ряд збігається.

Приклад 18. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+2}{n^2+1}$.

Розв'язання

В цьому випадку $a_n = \ln\frac{n^2+2}{n^2+1} = \ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)$. Виберемо для порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.Як відомо, при $x \to 0$ нескінченно мала функція $\ln(1+x) \sim x$. Тому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq 0\,.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+2}{n^2+1}$ також є збіжним.

Відповідь: ряд збігається.

Приклад 19. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\mathrm{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Розв'язання

В даному випадку $a_n=\frac{1}{n}\cdot\mathrm{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$. При $n\to\infty$ нескінченно мала величина $\mathrm{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$ еквівалентна $\frac{1}{\sqrt{n}}$, тому для порівняння виберемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$. Цей ряд збігається, оскільки $p=3/2>1$.

Обчислимо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\frac{1}{n}}\,\mathrm{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\cancel{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=1\neq 0\ \Rightarrow$$ ряди ведуть себе однаково.

Отже, ряд даний за умовою збігається.

Відповідь: ряд збігається.

Слід зауважити, що в розглянутих прикладах виконувалась необхідна ознака збіжності, тобто $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

Ознака Даламбера

Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$ існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell\text{, то }\begin{cases}\ell<1, & \text{ряд збігається;}\\ \ell>1, & \text{ряд розбігається;}\\ \ell=1, & \text{необхідні додаткові дослідження.}\end{cases}$$

Слід зазначити, що ***ознаку Даламбера*** доцільно використовувати, коли в запису *n*-того члена є факторіал або вираз K^n, де $K-\mathrm{const}$.

Приклад 20. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{n \cdot 4^n}$.

Розв'язання

Маємо, що $a_n = \frac{3n+5}{n \cdot 4^n}$ та $a_{n+1} = \frac{3n+8}{(n+1) \cdot 4^{n+1}}$. Обчислимо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+8) \cdot n \cdot 4^n}{(n+1) \cdot 4^{n+1} (3n+5)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+8) \cdot n \cdot \cancel{4^n}}{(n+1) \cdot \cancel{4^n} \cdot 4(3n+5)} = \frac{1}{4} < 1.$$

Отже, за ознакою Даламбера даний ряд збігається.

Відповідь: ряд збігається.

Приклад 21. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Розв'язання

Маємо: $a_n = \frac{n^n}{n!}$ та $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$. Обчислимо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}\, \cancel{n!}}{\cancel{n!}\, \cancel{(n+1)} \cdot n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \approx 2,7 > 1.$$

Таким чином, за ознакою Даламбера заданий ряд розбігається.

Відповідь: ряд розбігається.

Приклад 22. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3^n}$.

Розв'язання

Запишемо $a_n = (n+2)^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3^n}$ та $a_{n+1} = (n+3)^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3^{n+1}}$. Знайдемо границю відношення:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{3^{n+1}}}{(n+2)^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{3^n}}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\text{при } n\to\infty:\\ \sin\dfrac{\pi}{3^{n+1}}\sim\dfrac{\pi}{3^{n+1}} \text{ та } \sin\dfrac{\pi}{3^n}\sim\dfrac{\pi}{3^n}\end{array}\right\|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)^2\cdot\cancel{\pi}\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot\cancel{\pi}\cdot(n+2)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)^2\cdot\cancel{3^n}}{\cancel{3^n}\cdot 3(n+2)^2}=\frac{1}{3}<1.$$

Отже, заданий ряд є збіжним.

Відповідь: ряд збігається.

Приклад 23. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!}=0$, використовуючи ряд, для якого $a_n=\dfrac{n^n}{(2n)!}$ є загальним членом.

Розв'язання

Відповідно до умови, розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!}$. Для доведення збіжності цього ряду скористаємось ознакою Даламбера:

$$a_n=\frac{n^n}{(2n)!} \text{ та } a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}.$$

Обчислимо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot(2n)!}{(2n+2)!\cdot n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n\cdot(n+1)\cdot\cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}\,(2n+1)(2n+2)\cdot n^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n\cdot(n+1)}{(2n+1)(2n+2)}=\left|\begin{array}{l}n\to\infty:\\ (2n+1)(2n+2)\sim 4n^2\\ (n+1)\sim n\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e\cdot\cancel{n}}{4n^{\cancel{2}}}=e\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n}=0<1.$$

Таким чином, за ознакою Даламбера ряд збігається, а отже, згідно з необхідною ознакою збіжності

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0 .$$

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(2n)!} = 0$ – доведено.

Приклад 24. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{100^n}{n!} = 0$.

Розв'язання

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{100^n}{n!}$, загальний член якого $a_n = \dfrac{100^n}{n!}$. Скористаємось ознакою Даламбера. Для цього запишемо $a_{n+1} = \dfrac{100^{n+1}}{(n+1)!}$ та обчислимо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{100^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 100^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{100^n} \cdot 100 \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!} \cdot (n+1) \cdot \cancel{100^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{100}{n+1} = 0 < 1 .$$

Таким чином, маємо збіжний ряд. А відповідно до необхідної ознаки збіжності робимо висновок, що

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{100}{n!} = 0 .$$

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{100}{n!} = 0$ – доведено.

Радикальна ознака Коші

Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \text{, то } \begin{cases} \ell < 1, & \text{ряд збігається;} \\ \ell > 1, & \text{ряд розбігається;} \\ \ell = 1, & \text{необхідні додаткові дослідження.} \end{cases}$$

Радикальною ознакою Коші необхідно користуватись, коли $a_n = (*)^{\alpha(n)}$, де $*$ – раціональний вираз, що залежить від n.

Приклад 25. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

Розв'язання

Очевидно, що $a_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1.$$

Таким чином, маємо збіжний ряд.

Відповідь: ряд збігається.

Приклад 26. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Розв'язання

Для заданого ряду $a_n = \frac{1}{4^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{e} < 1$$ – відповідно, ряд збігається.

Відповідь: ряд збігається.

Приклад 27. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+5}{2n^2+1}\right)^n$.

Розв'язання

Маємо: $a_n = \left(\frac{3n^2+5}{2n^2+1}\right)^n$. Обчислимо:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n^2+5}{2n^2+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+5}{2n^2+1}\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l} n\to\infty: \\ 3n^2+5\sim 3n^2 \\ 2n^2+1\sim 2n^2 \end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cancel{n^2}}{2\cancel{n^2}}=\frac{3}{2}>1\,.$$

Отже, за радикальною ознакою Коші заданий ряд розбігається.

Відповідь: ряд розбігається.

Приклад 28. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n+7}\right)^n$.

Розв'язання

Оскільки $a_n=\left(\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n+7}\right)^n$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n+7}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n+7}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}<1.$$

Доходимо до висновку, що ряд збігається за радикальною ознакою Коші.

Відповідь: ряд збігається.

Приклад 29. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{4n+9}\right)^{3n+5}$.

Розв'язання

Маємо: $a_n=\left(\frac{2n-1}{4n+9}\right)^{3n+5}$, тоді

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{4n+9}\right)^{3n+5}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{4n+9}\right)^{\frac{3n+5}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{4n+9}\right)^{3+\frac{5}{n}}=$$

$$=\left(\frac{2}{4}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}<1\,.$$

Тобто заданий за умовою ряд є збіжним.

Відповідь: ряд збігається.

Інтегральна ознака Коші

Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$ виконується умова

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots,$$

тобто члени ряду монотонно спадають і існує не зростаюча неперервна функція $f(x)$ така, що $f(n) = a_n,\ \forall n \in N$, тоді невласний інтеграл $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ збігається (розбігається) одночасно з заданим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Приклад 30. Дослідити на збіжність узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Розв'язання

Дослідимо цей ряд на збіжність (раніше фактом його поведінки ми користувались), використовуючи інтегральну ознаку Коші. Для цього запишемо відповідний йому невласний інтеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

Оскільки

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{x^{1-p}}{1-p}, & \text{при } p \neq 1; \\ \ln x, & \text{при } p = 1, \end{cases}$$

тоді

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \infty, & \text{при } p \leq 1; \\ \frac{1}{p-1}, & \text{при } p > 1. \end{cases}$$

Тобто при $p \leq 1$ невласний інтеграл розбігається, а при $p > 1$ – збігається. Звідси (на основі інтегральної ознаки Коші) робимо висновок, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ збігається при $p > 1$ та розбігається при $p \leq 1$.

Відповідь: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ збігається при $p > 1$ та розбігається при $p \leq 1$.

Приклад 31. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}$.

Розв'язання

Для даного ряду виконуються всі умови інтегральної ознаки Коші, а саме: $a_n > 0$, $a_n \ge a_{n+1}$, $f_n = a_n$, $\forall n \in N$.

Нехай $f(x) = \frac{1}{4x+1}$. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{4x+1} = \frac{1}{4}\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{d(4x+1)}{4x+1} = \frac{1}{4}\ln|4x+1|\Big|_{1}^{+\infty} = +\infty .$$

Тобто невласний інтеграл розбіжний, а отже, відповідно до інтегральної ознаки Коші, ряд також є розбіжним.

Відповідь: ряд розбігається.

Приклад 32. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{(3n-2)^4}}$.

Розв'язання

Для даного ряду виконуються всі умови інтегральної ознаки Коші, то враховуючи, що $a_n = \frac{1}{\sqrt[5]{(3n-2)^4}}$, можна записати

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{(3x-2)^4}} .$$

Розглянемо невласний інтеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[5]{(3x-2)^4}} = \frac{1}{3}\int\limits_{1}^{+\infty}(3x-2)^{-4/5}\cdot d(3x-2) =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(3x-2)^{1/5}}{1/5}\Bigg|_{1}^{+\infty} = \frac{5}{3}(3x-2)^{1/5}\Big|_{1}^{+\infty} = \infty .$$

Тобто невласний інтеграл розбіжний і відповідно розбіжний ряд.

Відповідь: ряд розбігається.

Приклад 33. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{\ln^5 n}}$.

Розв'язання

Слід підкреслити, що для даного ряду всі умови інтегральної ознаки Коші мають місце. Оскільки $a_n = \dfrac{1}{n\cdot\sqrt[3]{\ln^5 n}}$, позначимо

$$f(x) = \frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{\ln^5 x}}.$$

Розглянемо невласний інтеграл

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{\ln^5 x}}dx = \int_2^{+\infty} (\ln x)^{-5/3}\cdot d(\ln x) =$$

$$= \left.\frac{(\ln x)^{-2/3}}{-2/3}\right|_2^{+\infty} = \left.-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\ln^2 x}}\right|_2^{+\infty} = -\frac{3}{2}\left(0-\frac{1}{\sqrt[3]{\ln^2 2}}\right) =$$

$$= \frac{3}{2\cdot\sqrt[3]{\ln^2 2}} = \text{const}.$$

Маємо, що невласний інтеграл збігається, а отже, збігається і ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[3]{\ln^5 n}}$.

Відповідь: ряд збігається.

Приклад 34. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+5)\cdot\ln^3(n+5)}$.

Розв'язання

Для даного ряду виконуються всі умови інтегральної ознаки Коші. Отже, спираючись на загальний член ряду $a_n = \dfrac{1}{(n+5)\cdot\ln^3(n+5)}$, позначимо

$$f(x) = \frac{1}{(x+5)\cdot\ln^3(x+5)}.$$

Тоді

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+5)\cdot\ln^3(x+5)} = \int_1^{+\infty} \frac{d(\ln(x+5))}{\ln^3(x+5)} =$$

$$=\left\|\int\frac{dU}{U^3}=-\frac{1}{2U^2}+C\right\|=-\frac{1}{2\ln^2(x+5)}\Bigg|_1^{+\infty}=\frac{1}{2\ln^2 6}=\text{const}.$$

Тобто невласний інтеграл збіжний, а відповідно збіжним буде і заданий ряд.

Відповідь: ряд збігається.

Приклад 35. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{n}{3}}{n^2+9}$.

Розв'язання

Для даного ряду виконуються всі умови інтегральної ознаки Коші. Оскільки $a_n=\frac{\operatorname{arctg}\frac{n}{3}}{n^2+9}$, то відповідно $f(x)=\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}{x^2+9}$.

Розглянемо невласний інтеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}{x^2+9}dx=\frac{1}{3}\int\limits_1^{+\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\cdot d\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{3}\frac{\operatorname{arctg}^2\frac{x}{3}}{2}\Bigg|_1^{+\infty}=$$

$$=\frac{1}{6}\operatorname{arctg}^2\frac{x}{3}\Bigg|_1^{+\infty}=\frac{1}{6}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\operatorname{arctg}^2\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{\pi^2}{4}-\operatorname{arctg}^2\frac{1}{3}\right).$$

Таким чином, доходимо до висновку, що інтеграл збігається, а отже, і ряд збіжний.

Відповідь: ряд збігається.

1.5. Числові ряди з довільними членами

Наведені вище ознаки збіжності відносяться до рядів з додатними членами.

Числовий ряд, члени якого можуть бути як додатними, так і від'ємними, називають ***знакозмінним***.

Тобто мова йде про ряди типу $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, в яких знаки a_n можуть певним чином залежати від номера n. Такий ряд називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Приклад 36. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3}$.

Розв'язання

Розглянемо ряд, складений із абсолютних величин заданого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^3}$. Порівняємо цей ряд з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, що є узагальненим гармонічним рядом при $p = 3 > 1$ і є збіжним.

Слід підкреслити, що $\frac{|\cos n|}{n^3} \le \frac{1}{n^3}$. Отже, ряд, складений із абсолютних величин членів заданого ряду, є збіжним згідно з першою ознакою порівняння. Звідси випливає, що заданий ряд є абсолютно збіжним.

Відповідь: ряд абсолютно збігається.

Зауваження. Збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ є достатньою ознакою збіжності рядів із вільним розподілом знаків.

Знакопереміжним рядом називається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$, де $a_n > 0$, в якому знаки членів цього ряду чітко чергуються.

Знакопереміжний ряд є частинним випадком числового ряду з довільними членами. Збіжність знакопереміжного ряда визначають за допомогою теореми Лейбниця.

Теорема Лейбниця. *Якщо в ряді* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$

1) *члени за модулем монотонно спадають* $a_n > a_{n+1}$

та

2) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$,

то він збігається, при цьому його сума за модулем не перевищує абсолютної величини першого члена, а залишок його за модулем не перевищує абсолютної величини першого відкинутого члена.

Слід підкреслити, коли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ збіжний, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ називають ***абсолютно збіжним***.

Кожен абсолютно збіжний ряд є одночасно і збіжним. Проте не кожний збіжний знакозмінний ряд є абсолютно збіжним.

Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ – збіжний, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\cdot a_n\right|$ – розбіжний, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ називають ***умовно збіжним***.

1.6. Властивості абсолютно та умовно збіжних рядів

1. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ є абсолютно збіжним, то абсолютно збіжним є і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C\cdot a_n$, де $C=\mathrm{const}$.

2. Якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ абсолютно збіжні, то абсолютно збіжним є і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$.

3. У абсолютно збіжному ряді можна довільно групувати члени, зберігаючи порядок їх прямування, при цьому сума ряду не змінюється.

4. На абсолютну збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання скінченної кількості членів.

5. Якщо ряд абсолютно збіжний, то будь-який ряд, утворений за допомогою перестановка його членів, також абсолютно збіжний і має ту саму суму, що і заданий ряд.

Приклад 37. Дослідити на збіжність та встановити характер збіжності (абсолютна/умовна) ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{2n+1}{3n+5}$.

Розв'язання

Запишемо ряд з абсолютних величин – членів заданого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n+5}$. Очевидно, що він не є абсолютно збіжним, оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+5}=\frac{2}{3}\neq 0\,.$$

Враховуючи, що для заданого ряду також не виконується умова ознаки Лейбниця, робимо висновок, що даний ряд розбіжний.

Відповідь: ряд розбігається.

Приклад 38. Дослідити на збіжність та встановити характер збіжності (абсолютна/умовна) ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{n+7}}$.

Розв'язання

Заданий ряд є знакозмінним. Ряд, складений із абсолютних величин його членів має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+7}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+7)^{1/2}},\quad p=\frac{1}{2}<1$$

та є розбіжним. Отже, заданий ряд не буде абсолютно збіжним. Але цей ряд буде збіжним, бо він задовольняє умовам теореми Лейбниця для знакозмінних рядів, а саме:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+7}}=0 \text{ та } \frac{1}{\sqrt{n+7}}>\frac{1}{\sqrt{n+8}}\,.$$

Отже, заданий ряд буде умовно збіжним.

Відповідь: ряд умовно збігається.

Приклад 39. Дослідити на збіжність та встановити характер збіжності (абсолютна/умовна) ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n^3}{2^n}$.

Розв'язання

Дослідимо, чи збігається даний ряд абсолютно, тобто дослідимо на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$. Очевидно, що за ознакою Даламбера

$$\left(a_n = \frac{n^3}{2^n} \text{ та } a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} \right) \text{ Маємо:}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 \cdot \cancel{2^n}}{\cancel{2^n} \cdot 2 \cdot n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{2n^3} = \frac{1}{2} < 1 .$$

Таким чином, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ збігається, а отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^3}{2^n}$ збігається абсолютно.

Відповідь: ряд абсолютно збігається.

Приклад 40. Дослідити на збіжність та встановити характер збіжності (абсолютна/умовна) ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n^2+1}$.

Розв'язання

Дослідимо на збіжність ряд, складений із абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ \ (p=1),$$

що є розбіжним, та обчислимо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Оскільки $a_n = \frac{n}{n^2+1}$, маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq 0 \ \Rightarrow \text{ ряди } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \text{ та } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ведуть себе однаково, а саме – розбігаються. Тобто про абсолютну збіжність мова не йде.

Дослідимо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n^2+1}$ на збіжність, використовуючи ознаку Лейбниця. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0 \text{ та } \frac{n}{n^2+1}>\frac{n+1}{(n+1)^2+1},$$

отже ряд збігається.

Відповідь: ряд збігається умовно.

1.7. Функціональні ряди

Розглянемо послідовність функцій

$$U_1(x),\ U_2(x),\ \ldots,\ U_n(x),\ \ldots,$$

які мають спільну область визначення.

Функціональним рядом називається складений з цих функцій вираз

$$U_1(x)+U_2(x)+\ldots+U_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x).$$

Для кожного значення x_0 з області визначення функціональний ряд перетворюється в числовий ряд

$$U_1(x_0)+U_2(x_0)+\ldots+U_n(x_0)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x_0).$$

Якщо останній числовий ряд збігається, точка x_0 називається ***точкою збіжності функціонального ряду***. Множина всіх точок збіжності називається ***областю збіжності функціонального ряду***. Область збіжності позначимо через X .

На практиці для визначення області збіжності функціонального ряду користуються ознакою Даламбера або радикальною ознакою Коші, тобто якщо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=|\ell(x)| \text{ або } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n(x)|}=|\ell(x)|,$$

то для визначення області збіжності слід розв'язати нерівність

$$|\ell(x)|<1.$$

При цьому для дослідження поведінки ряду в точках, де $\ell(x)=1$ (в точках межі області), проводиться додаткове дослідження (це пов'язано з тим, що вказані ознаки збіжності при $\ell(x)=1$ не дають відповіді на питання збіжний ряд чи розбіжний).

Сума n перших членів ряду називається ***n*-ю частинною сумою** $S_n(x)$ **ряду***.

Має місце формула:

$$U_1(x)+U_2(x)+...+U_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}U_k(x)=S_n(x).$$

При цьому

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x),$$

де $x\in \mathrm{X}$, називається ***сумою ряду***, а

$$r_n(x)=S(x)-S_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}U_k(x)$$

– називається ***n*-им залишком ряду***.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ ***називається рівномірно збіжним*** на $[a,b]$, якщо існує збіжний числовий ряд з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ такий, що $|U_n(x)|<a_n$ на цьому проміжку.

При цьому збіжний числовий ряд називається ***мажорованим*** на $[a,b]$ по відношенню до функціонального ряду.

Теорема (ознака Вейєрштрасса). *Якщо функціональний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ *мажорований на проміжку* $[a,b]$, *то він абсолютно і рівномірно збіжний на цьому проміжку.*

Теорема (критерій Коші). *Для того, щоб функціональний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ *був рівномірно збіжним на* $[a,b]$, *необхідно та достатньо, щоб для будь-якого* $\xi>0$ *існував такий номер* N, *що для всіх* $n>N$ і *для будь-якого натурального числа* p *виконувалася нерівність*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}U_k(x)\right|<\xi.$$

1.8. Властивості рівномірно збіжних рядів

1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$, де функції $U_n(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$, рівномірно збіжний та має суму $S(x)$, що являє собою неперервну функцію на $[a, b]$.

2. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$, де функції $U_n(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$, рівномірно збіжний та має суму $S(x)$ на цьому відрізку, то

$$\int_{\alpha}^{x} S(x)\,dx = \int_{\alpha}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{x} U_n(x)\,dx \text{, де } (\alpha, x) \in [a, b].$$

3. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$, де функції $U_n(x)$ неперервні та диференційовані на відрізку $[a, b]$, збіжний на цьому відрізку і має суму $S(x)$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x)$ рівномірно збіжний на відрізку $[a, b]$ і має суму $F(x)$, то для всіх $x \in [a, b]$

$$S'(x) = F(x),$$

тобто

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x).$$

Примітка. Властивості **2** та **3** означають, що при виконанні вказаних умов функціональні ряди можна почленно інтегрувати та диференціювати.

Приклад 41. Визначити область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x)}{n^2}$.

Розв'язання

Скористаємось ознакою Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln^{n+1} x\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot\ln^n x}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{\ln^n x}\cdot\ln x\cdot n^2}{(n+1)^2\ \cancel{\ln^n x}}\right| = |\ln x|.$$

Достатньою умовою збіжності є той факт, що $|\ln x| < 1$, тобто

$$-1 < |\ln x| < 1, \text{ а } \frac{1}{e} < x < e.$$

Таким чином, ряд збігається для $\forall x \in \left(\frac{1}{e}; e\right)$. Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$x = e:\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n e}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ \text{ – цей ряд збігається,}$$

оскільки є узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ при $p = 2 > 1$;

$$x = \frac{1}{e}:\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n \frac{1}{e}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\ \text{ – цей ряд збігається абсолютно,}$$

бо ряд, складений із абсолютних величин його членів, має вигляд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ і є збіжним.

Очевидно, що область збіжності ряду: $\frac{1}{e} \le x \le e$.

Відповідь: $\left[\frac{1}{e}; e\right]$.

Приклад 42. Визначити область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{3^n}$.

Розв'язання

Скористаємось ознакою Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\frac{x}{3^{n+1}}}{\sin\frac{x}{3^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x}{3^{n+1}}}{\frac{x}{3^n}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\cdot 3^n}{x\cdot 3^{n+1}}\right| = \frac{1}{3} < 1\,.$$

Незалежно від значень x

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| < 1\,.$$

Отже, областю збіжності ряду є вся числова вісь від $-\infty$ до $+\infty$, тобто ряд збігається для $\forall x \in (-\infty; +\infty)$.

Відповідь: $-\infty < x < +\infty$.

Примітка. При обчисленні границі слід пам'ятати наслідки I визначної границі, а саме:

якщо $\alpha(x) \to 0$, тоді $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$.

Приклад 43. Визначити область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$.

Розв'язання

В даному випадку необхідна умова збіжності виконується тільки при $x > 0$. Оскільки

$$\left|U_n(x)\right| = \left|\frac{\cos nx}{e^{nx}}\right| < \frac{1}{e^{nx}}\,,$$

а при $x > 0$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^{nx}}$ збігається за радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{e^{nx}}} = \frac{1}{e^x} < 1\,,$$

то заданий за умовою ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$ збігається за ознакою порівняння при $x > 0$.

Таким чином, область збіжності заданого ряду: $0 < x < +\infty$.

Відповідь: $0 < x < +\infty$.

Приклад 44. Визначити область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cos^n x$.

Розв'язання

В цьому випадку доречно скористатись радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|U_n(x)\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|2^n\cos^n x\right|}=2\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\cos^n x\right|}=2\left|\cos x\right|.$$

Тоді, пам'ятаючи, що ряд збігається, якщо $2\left|\cos x\right|<1$, маємо:

$$\left|\cos x\right|<\frac{1}{2}, \text{ тобто } x\in\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2\pi}{3}+\pi k\right), \text{ де } k\in Z.$$

При $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$ не виконується необхідна умова збіжності. Отже, область збіжності заданого ряду $x\in\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2\pi}{3}+\pi k\right)$, $k\in Z$.

Відповідь: $x\in\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2\pi}{3}+\pi k\right)$, $k\in Z$.

Приклад 45. Визначити область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^n+\frac{1}{4^n x^n}\right)$.

Розв'язання

Запишемо заданий ряд як суму двох рядів:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n \text{ та } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n x^n},$$

де $U_{n1}(x)=x^n$, $U_{n2}(x)=\frac{1}{4^n x^n}$.

Застосуємо для кожного з цих рядів радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|U_{n1}(x)\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|x^n\right|}=\left|x\right|;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|U_{n2}(x)\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{4^n x^n}\right|}=\frac{1}{4\left|x\right|}.$$

Сума двох рядів буде утворювати збіжний ряд тільки тоді, коли одночасно будуть виконані умови:

$$\left|x\right|<1 \text{ та } \frac{1}{4\left|x\right|}<1.$$

Тобто

$$-1 < x < 1, \quad -4 < \frac{1}{x} < 4$$

або

$$x < -\frac{1}{4} \text{ та } x > \frac{1}{4}.$$

Таким чином, маємо:

$$-1 < x < -\frac{1}{4}; \; \frac{1}{4} < x < 1.$$

При $x = \pm 1$ та $x = \pm\frac{1}{4}$ не виконується необхідна умова збіжності числових рядів, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Отже, областю збіжності заданого ряду є $\left(-1, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, 1\right)$.

Відповідь: $-1 < x < -\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} < x < 1$.

Приклад 46. Дослідити на рівномірну збіжність на зазначеному проміжку заданий функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$, $(-1, 1)$.

Розв'язання

Очевидно, що в інтервалі $(-1, 1)$ цей ряд збігається, бо він являє собою геометричний ряд, для якого $|q| = |x| < 1$. При цьому залишок ряду

$$r_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Обчислимо границю залишку за умови, що x наближається до граничних точок заданого інтервалу:

$$\lim_{x\to -1+0} |r_n(x)| = \lim_{x\to -1+0} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| = \left\| \frac{(-1+0)^{n+1}}{1-(-1+0)} = \frac{(-1+0)^{n+1}}{2-0} \right\| = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to 1-0} |r_n(x)| = \lim_{x\to 1-0} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| = \left\| \frac{(1-0)^{n+1}}{1-(1-0)} = \frac{(1-0)^{n+1}}{1-1+0} = \frac{(1-0)^{n+1}}{+0} \right\| = \infty.$$

Якщо прийняти $\xi > \frac{1}{2}$, не можна досягти виконання нерівності $|r_n(x)| < \xi$ для $\forall x \in (-1, 1)$. Відповідно до означення рівномірно збіжного ряду, даний ряд не є рівномірно збіжним на проміжку $(-1, 1)$.

Відповідь: ряд не є рівномірно збіжним на проміжку $-1 < x < 1$.

Приклад 47. Дослідити на рівномірну збіжність на зазначеному проміжку заданий функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$, $(-\infty, +\infty)$.

Розв'язання

Для з'ясування щодо питання, скористаємось ознакою Вейєрштрасса. Очевидно, що

$$\left|U_n(x)\right| = \left|\frac{\cos nx}{n!}\right| \le \frac{1}{n!} \quad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

А оскільки числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ збіжний (за ознакою Даламбера), він є мажорованим для заданого ряду.

Таким чином, можна зробити висновок, що заданий ряд є рівномірно збіжним на проміжку $(-\infty, +\infty)$.

Відповідь: ряд є рівномірно збіжним на проміжку $-\infty < x < +\infty$.

Приклад 48. Дослідити на рівномірну збіжність на зазначеному проміжку заданий функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n nx}{n^2}$, $(-\infty, +\infty)$.

Розв'язання

В даному випадку доцільно скористатись ознакою Вейєрштрасса, відповідно до якої, якщо даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ на проміжку має мажорований ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ з додатними членами, такий, що $\left|U_n(x)\right| < a_n$, то даний ряд рівномірно збіжний на цьому проміжку. Очевидно, що

$$\left|U_n(x)\right| = \left|\frac{\sin^n nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

А оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ є збіжним, то він є мажорованим для заданого ряду. Таким чином, заданий ряд є рівномірно збіжним на проміжку $(-\infty, +\infty)$.

Відповідь: ряд є рівномірно збіжним на проміжку $-\infty < x < +\infty$.

1.9. Степеневі ряди

Степеневим рядом називається функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n ,$$

де a_n – дійсні числа, які відповідно називаються ***коефіцієнтами степеневого ряду***.

При $x_0 = 0$ степеневий ряд набуває вигляду:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Цей ряд завжди збіжний за умови, що $x = 0$. Якщо ж він збігається в точці $x \neq 0$, то існує число $R > 0$ таке, що при всіх $|x| < R$ степеневий ряд збігається, а при всіх $|x| > R$ він є розбіжним. Це число R називають ***радіусом збіжності***, а інтервал $(-R, R)$ – ***інтервалом збіжності***.

Теорема Абеля. *Якщо степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *збіжний при* $x = x_0 \neq 0$*, то він є абсолютно збіжним для всіх значень* x*, що задовольняють нерівність* $|x| < |x_0|$*; якщо ж цей ряд є розбіжним при* $x = x_1$*, то він розбіжний всюди, де* $|x| > |x_1|$.

Насідком теореми Абеля і є наявність існування для степеневого ряду інтервалу збіжності.

На кінцях інтервалу збіжності степеневий ряд може як збігатися, так і розбігатися, але в середині інтервалу збіжності ряд абсолютно збігається. На будь-якому відрізку, що належить інтервалу збіжності, степеневий ряд правильно збігається. Питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності розв’язується для кожного ряду окремо.

Областю збіжності степеневого ряду є інтервал збіжності, до якого приєднуються кінці інтервалу, якщо в цих точках ряд збігається.

Для визначення радіуса та інтервалу збіжності, використовуючи ознаку Даламбера або радикальну ознаку Коші, маємо формули:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ або } R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} ,$$

де a_n та a_{n+1} відповідно коефіцієнти при x^n та x^{n+1}.

При цьому, якщо $R=+\infty$, то ряд є збіжним на всій числовій осі.

Якщо ж $R=0$, то ряд збігається лише в одній точці $x=0$. Радіус збіжності для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ визначається за тими ж формулами, що і для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, але інтервал збіжності при цьому знаходять з нерівності $|x-x_0|<R$, тобто

$$-R<x-x_0<R \text{ і}$$

$$-R+x_0<x<R+x_0.$$

Тобто інтервал збіжності в цьому випадку має вигляд:

$$(-R+x_0;\, R+x_0).$$

Властивості степеневих рядів

1. Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ абсолютно і рівномірно збіжний на будь-якому відрізку $[-r, r]$, що цілком міститься в інтервалі збіжності $(-R, R)$.

2. Сума степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ неперервна в середині його інтервалу збіжності $(-R, R)$.

3. Степеневий ряд $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна інтегрувати почленно в його інтервалі збіжності $(-R, R)$, причому радіус збіжності отриманого ряду не змінюється. Для всіх $x\in(-R, R)$ має місце формула:

$$\int_0^x S(x)dx=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

4. Степеневий ряд $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна диференціювати почленно в будь-якій точці x його інтервалу збіжності $\left(-R, R\right)$, причому радіус збіжності отриманого ряду також дорівнює R.

Зокрема, для всіх $x \in \left(-R, R\right)$ справедлива формула:

$$S'\left(x\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}.$$

Слід зазначити, що з властивостей **3** та **4** випливає, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна інтегрувати на відрізку $\left[0, x\right]$, $x \in \left(-R, R\right)$ та диференціювати в будь-якій точці $x \in \left(-R, R\right)$ скільки завгодно разів. При цьому інтервал збіжності отриманого ряду є той самий інтервал $\left(-R, R\right)$.

Приклад 49. Визначити область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^5}$.

Розв'язання

Оскільки $a_n = \frac{1}{n^5}$ та $a_{n+1} = \frac{1}{\left(n+1\right)^5}$, то знайдемо радіус збіжності за формулою:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^5}}{\frac{1}{\left(n+1\right)^5}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)^5}{n^5} = \left|\begin{matrix} n\to\infty: \\ n+1 \sim n \end{matrix}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{n^5} = 1.$$

Таким чином, інтервал збіжності ряду $\left(-1, 1\right)$.

Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x = -1$ та $x = 1$.

При $x = 1$ маємо збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$, оскільки він є узагальненим гармонічним при $p = 5 > 1$.

При $x = -1$ маємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^n}{n^5}$. Цей ряд є абсолютно збіжним, оскільки ряд, складений із абсолютних величин його членів

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$, збіжний.

Отже, область збіжності даного ряду $x\in[-1,1]$.

Слід зазначити, що для визначення радіуса та інтервалу збіжності можна скористатись безпосередньо ознакою Даламбера, тобто виходити з умови, що коли

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|<1\text{, то ряд збіжний.}$$

Маємо:

$$U_n(x)=\frac{x^n}{n^5}\ \text{ та }\ U_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)^5},$$

тоді

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n^5}{(n+1)^5\cdot x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{(n+1)^5}|x|=|x|.$$

За ознакою Даламбера ряд буде збіжним, якщо

$$|x|<1\ \Rightarrow\ -1<x<1.$$

Отже, радіус збіжності $R=1$, а інтервал збіжності $(-1,1)$. Вище було зазначено, що областю збіжності заданого ряду є відрізок $x\in[-1,1]$.

Відповідь: область збіжності заданого степеневого ряду $-1\le x\le 1$.

Приклад 50. Визначити область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n}$.

Розв'язання

Знайдемо радіус збіжності R за формулою:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Оскільки $a_n=\frac{1}{3^n}$, то $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}}}=3$.

Таким чином, інтервал збіжності $|x-1|<3$ або $-3<x-1<3$, $-2<x<4$.

Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x=4$ та $x=-2$.

Нехай $x=4$, маємо числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4-1)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}1^n .$$

Цей ряд розбіжний, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1\neq 0$.

Нехай $x=-2$, маємо числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2-1)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot \cancel{3^n}}{\cancel{3^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n .$$

Цей ряд також розбіжний, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ не існує.

Отже, область збіжності даного ряду – інтервал $(-2, 4)$.

Відповідь: область збіжності заданого степеневого ряду $-2<x<4$.

Приклад 51. Визначити область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!(x-5)^n$.

Розв'язання

Маємо: $a_n=n!$ та $a_{n+1}=(n+1)!$, тоді

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0 .$$

Відповідно ряд збігається тільки при $x-5=0$, тобто в точці $x=5$.

Відповідь: ряд збігається в точці $x=5$.

Приклад 52. Визначити область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^n}{n^n}$.

Розв'язання

Знайдемо радіус збіжності R за формулою:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Оскільки $a_n=\frac{(-1)^n}{n^n}$, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n^n}\right|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n=\infty.$$

Отже, ряд збігається абсолютно для всіх x, що задовольняють нерівності $|x+2|<\infty$, тобто $-\infty<x+2<+\infty$.

Таким чином, інтервал збіжності ряду – вся числова вісь.

Відповідь: область збіжності заданого степеневого ряду – вся числова вісь $-\infty<x<+\infty$.

Приклад 53. Визначити область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 4^n}$.

Розв'язання

Радіус збіжності знаходимо за формулою:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Маємо: $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 4^n}$ та $a_{n+1}=\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 4^{n+1}}$, тоді

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 4^n}}{\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 4^{n+1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)4^{n+1}}{n\cdot 4^n}=4\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=4.$$

Отже, ряд збігається абсолютно для всіх x, що задовольняють нерівності $|x-3|<4$, тобто $-4<x-3<4$. Звідки можна записати, що $-1<x<7$. Це і є інтервал збіжності, $R=4$.

Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності.

При $x=-1$ маємо збіжний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-1-3)^n}{n\cdot 4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot\left(-4^n\right)}{n\cdot 4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-1)^n\cdot\cancel{4^n}}{n\cdot\cancel{4^n}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

що розбігається (гармонічний ряд).

При $x=7$ отримаємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(7-3)^n}{n\cdot 4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

що збігається умовно (за ознакою Лейбниця, а ряд, складений із абсолютних величин його членів, розбіжний, бо є гармонічним).

Отже, область збіжності даного ряду – $(-1;7]$.

Відповідь: область збіжності заданого степеневого ряду $-1<x\le 7$.

1.10. Ряди Тейлора та Маклорена

Рядом Тейлора для функції $f(x)$ називається ряд вигляду

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, де $0!=1$, $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$, при цьому $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ називають коефіцієнтами ряду Тейлора.

При $x_0=0$ ряд Тейлора набуває вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

та називається ***рядом Маклорена***.

Слід зазначити важливість наступних теорем.

Теорема. *Якщо функцію* $f(x)$ *в інтервалі* $(x_0-R,\,x_0+R)$ *можна розкласти в степеневий ряд, то такий розклад єдиний і є рядом Тейлора для даної функції.*

Умови, за яких сума ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ збігається до функції $f(x)$ визначаються наступною теоремою.

Теорема. *Для того, щоб ряд Тейлора* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ *збігався до функції* $f(x)$ *в інтервалі* (x_0-R, x_0+R), *необхідно та достатньо, щоб ця функція мала похідні всіх порядків на цьому інтервалі, а залишковий член її формули Тейлора* $r_n(x)$ *при* $n\to\infty$ *прямував до* 0 *для всіх* x *з цього інтервалу, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0\,,$$

де $C=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$.

Наведемо теорему, яка дає досить прості достатні умови для розкладання функції в ряд Тейлора.

Теорема. *Якщо функція* $f(x)$ *в інтервалі* (x_0-R, x_0+R) *має похідні всіх порядків і існує число* $M>0$ *таке, що*

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M,\ \ \forall x\in(x_0-R, x_0+R)\,,\ n=0,1,2,\ldots,$$

то функцію $f(x)$ *можна розкласти в ряд Тейлора.*

Формули розкладу елементарних функцій в ряд Маклорена та їх області збіжності

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ -\infty<x<+\infty\,;$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ -\infty<x<+\infty\,;$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ -\infty<x<+\infty;$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n, \text{ якщо } m \geq 0,\ -1 \leq x \leq 1,$$

$$\text{якщо } -1 < m < 0,\ -1 < x \leq 1, \text{ якщо } m \leq -1,\ -1 < x < 1;$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,\ -1 < x < 1;$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ -1 < x < 1;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},\ -1 < x \leq 1;$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ -1 \leq x \leq 1;$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ -1 < x < 1.$$

Слід зауважити, що

$$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1),\ (2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n.$$

Розкладання функцій в степеневі ряди в загальному випадку базується на використанні рядів Тейлора та Маклорена.

На практиці степеневі ряди для багатьох функцій можна знайти формально, використовуючи наведені формули розкладу елементарних функцій в ряд Маклорена.

Іноді корисно застосовувати почленне диференціювання та інтегрування рядів. В своїх інтервалах збіжності ряди збігаються до відповідних функцій.

Приклад 54. Записати ряд Маклорена для функції $y = e^{3x}$.

Розв'язання

Ряд Маклорена для функції $y = e^x$ має вигляд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Змінимо x на $3x$, отримаємо:

$$y = e^{3x} = 1 + 3x + \frac{3^2 x^2}{2!} + \ldots + \frac{3^n x^n}{n!} + \ldots ,$$

де область збіжності вся числова вісь.

Відповідь: $1 + 3x + \frac{3^2 x^2}{2!} + \ldots + \frac{3^n x^n}{n!} + \ldots$, $-\infty < x < +\infty$.

Приклад 55. Записати ряд Маклорена для функції $y = \sin 5x$.

Розв'язання

Оскільки в ряд Маклорена необхідно розкласти функцію $\sin 5x$, запишемо ряд Маклорена для функції $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots .$$

Тоді змінивши в цьому ряді x на $5x$, маємо:

$$\sin 5x = 5x - \frac{5^3 x^3}{3!} + \frac{5^5 x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{5^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{n!} + \ldots ,$$

де область збіжності $-\infty < x < +\infty$.

Відповідь: $5x - \frac{5^3 x^3}{3!} + \frac{5^5 x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{5^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{n!} + \ldots$, $-\infty < x < +\infty$.

Приклад 56. Записати ряд Маклорена для функції $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$.

Розв'язання

Пам'ятаючи ряд Маклорена для функції $\operatorname{arctg} x$:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

та змінюючи x на $\frac{x}{2}$, отримаємо:

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3} + \frac{x^5}{2^5 \cdot 5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1} \cdot (2n+1)} + \ldots ,$$

де область збіжності буде $-1 \le \frac{x}{2} \le 1$ або $-2 < x < 2$.

Відповідь: $\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3} + \frac{x^5}{2^5 \cdot 5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1} \cdot (2n+1)} + ...,$

$-2 < x < 2$.

Приклад 57. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = x \cdot \ln\left(1 + x^2\right)$.

Розв'язання

Оскільки

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + ..., \quad |x| < 1,$$

то змінюючи в цій рівності x на x^2 будемо мати:

$$\ln\left(1+x^2\right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n}}{n} + ..., \quad |x| < 1,$$

а тому

$$x \cdot \ln\left(1+x^2\right) = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{3} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{n} + ..., \quad |x| < 1.$$

Відповідь: $x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{3} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{n} + ..., \ -1 < x < 1$.

Приклад 58. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = \ln \sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}$

.

Розв'язання

Як відомо

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1,$$

а тому

$$\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^n x^n}{n}, \quad |x| < \frac{1}{2}$$

та

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1.$$

Звідки маємо:

$$\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}=\frac{1}{3}\left(\ln(1+2x)-\ln(1-x)\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\cdot 2^n+1\right)\cdot\frac{x^n}{n}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(3x-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{3}x^3-\frac{15}{4}x^4+\ldots\right)=x-\frac{1}{2}x^2+x^3-\frac{5}{4}x^4+\ldots,\ |x|<\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $x-\frac{1}{2}x^2+x^3-\frac{5}{4}x^4+\ldots,\ |x|<\frac{1}{2}$.

Приклад 59. Функцію $y=\ln x$ розкласти в ряд Тейлора в околі точки $x_0=1$ та визначити область збіжності отриманого ряду.

Розв'язання

Якщо мова йде про розклад функції в ряд в околі точки $x_0=1$, то в результаті ми повинні отримати степеневий ряд за степенями $(x-1)$. Цю задачу вирішуємо таким чином: знаходимо послідовно похідні та їх значення у відповідній точці та підставляємо їх у формулу Тейлора.

Формула Тейлора має вигляд:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,$$

тоді, відповідно, обчислимо:

$$y(x_0)=y(1)=\ln 1=0;$$

$$y'(x)=\frac{1}{x},\ \ y'(1)=1;$$

$$y''(x)=-\frac{1}{x^2},\ \ y''(1)=-1;$$

$$y'''(x)=\frac{2}{x^3},\ \ y'''(1)=\frac{2}{1};$$

$$y^{(4)}(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4},\ \ y^{(4)}(1)=-1\cdot 2\cdot 3;$$

$$y^{(5)}(x)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5},\ \ y^{(5)}(1)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4.$$

Отже, можна записати, що

$$y^{(n)}(1)=(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!$$

Таким чином,

$$\ln x=0-\frac{1(x-1)}{1!}-\frac{1\cdot(x-1)^2}{2!}+\frac{1\cdot 2(x-1)^3}{3!}-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{4!}(x-1)^4+\ldots$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{n!}(x-1)^n+\ldots=x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+$$

$$+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot(x-1)^n}{n}+\ldots.$$

Визначимо область збіжності цього ряду за формулою:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

де в нашому випадку:

$$a_n=\frac{1}{n},\ a_{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

Тоді

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1.$$

А, отже, область збіжності має вигляд:

$$|x-1|<1,\ -1<x-1<1,\ 0<x<2.$$

Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$x=0:\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(0-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}\cdot(-1)}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

цей рад розбіжний.

$$x=2:\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(2-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Дослідимо поведінку цього ряду, користуючись ознакою Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\ \ \frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}.$$

Тобто, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ є збіжним.

Відповідь:

$$x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot(x-1)^n}{n}+\ldots,\ 0<x\le 2.$$

Але це достатньо довгий шлях. Значно швидше можна отримати результат, скориставшись розкладом функцій $y=\ln(1+x)$ в ряд Маклорена, а саме:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^4}{n}+\ldots,$$

де область збіжності цього ряду $x\in(-1,1]$.

В даному випадку представлено розклад функції за степенями x, а нам потрібно за степенями $x-1$.

Перепишемо

$$\ln x=\ln(1+(x-1))=x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{(x-1)^n}{n}+\ldots.$$

Визначимо область збіжності цього ряду.

Оскільки

$$-1<x\le 1$$

– область збіжності ряду Маклорена для $y=\ln(1+x)$, змінимо x на $(x-1)$, а це означає, що

$$-1<x-1\le 1,\ \text{тобто}\ 0<x\le 2.$$

Відповідь:

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{(x-1)^n}{n}+\ldots,\ 0<x\le 2.$$

Приклад 60. Функцію $y=\sin^2 3x$ розкласти в ряд Маклорена та визначити область збіжності отриманого ряду.

Розв'язання

Як відомо, $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$, тоді $\sin^2 3x=\dfrac{1-\cos 6x}{2}$.

Скористаємось формулою ряду Маклорена для функції

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

та нагадаємо, що область збіжності цього ряду є вся числова вісь.

Отже, можна записати, що

$$\sin^2 3x = \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 6x =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{6^2 x^2}{2!} + \frac{6^4 x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{6^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{6^2 x^2}{2!} - \frac{6^4 x^4}{4!} + \ldots - (-1)^n \frac{6^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{6^2 x^2}{2!} - \frac{6^4 x^4}{4!} + \frac{6^6 x^6}{6!} - \ldots - (-1)^{n-1} \frac{6^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right).$$

Область збіжності цього ряду також вся числова вісь.

Відповідь:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{6^2 x^2}{2!} - \frac{6^4 x^4}{4!} + \frac{6^6 x^6}{6!} - \ldots - (-1)^{n-1} \frac{6^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right),\ -\infty, +\infty.$$

Приклад 61. Функцію $y = \cos^3 x$ розкласти в ряд Маклорена та визначити область збіжності отриманого ряду.

Розв'язання

Перепишемо задану функцію у вигляді

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = \frac{1+\cos 2x}{2} \cdot \cos x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \cdot \cos x =$$

$$= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(\cos(2x - x) + \cos(2x + x)\right) = \frac{1}{2}\cos x +$$

$$+ \frac{1}{4}(\cos x + \cos 3x) = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x.$$

Користуючись рядом Маклорена для функції

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

можна записати, що

$$\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3x)^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}\left(\frac{3}{4} + \frac{3^{2n}}{4}\right),$$

де область збіжності вся числова вісь.

Відповідь: $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{3}{4} + \frac{3^{2n}}{4} \right)$, $-\infty, +\infty$.

Приклад 62. Функцію $y = \frac{1}{x}$ розкласти в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 3$ та визначити область збіжності отриманого ряду.

Розв'язання

Мова йде про ряд Тейлора, що містить степені $x - 3$. Скористаємось тим фактом, що спадна геометрична прогресія являє собою збіжний ряд.

Перепишемо нашу функцію за допомогою тотожних перетворень так, щоб отримати вираз $x - 3$:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x-3+3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x-3}{3} \right)} = \begin{vmatrix} b_1 = 1 \\ q = -\frac{x-3}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x-3}{3} + \frac{(x-3)^2}{3^2} - \frac{(x-3)^3}{3^3} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{(x-3)^n}{3^n} + \ldots \right) =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{x-3}{3^2} + \frac{(x-3)^2}{3^3} - \frac{(x-3)^3}{3^4} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{(x-3)^n}{3^{n+1}} + \ldots .$$

Визначимо область збіжності цього ряду:

$$\left| -\frac{x-3}{3} \right| < 1,$$

$$-3 < x - 3 < 3 \text{ або } 0 < x < 6.$$

Легко переконатись, що при $x = 0$ та $x = 6$ ряди будуть розбіжні.

Відповідь: $\frac{1}{3} - \frac{x-3}{3^2} + \frac{(x-3)^2}{3^3} - \frac{(x-3)^3}{3^4} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{(x-3)^n}{3^{n+1}} + \ldots$, $0 < x < 6$.

Приклад 63. Функцію $y = \frac{1}{3x-5}$ розкласти в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = -1$ та визначити область збіжності отриманого ряду.

Розв'язання

Очевидно, що мова йде про те, щоб задану функцію представити у вигляді степеневого ряду за степенями $x+1$. Представимо задану функцію як суму спадної геометричної прогресії та, пам'ятаючи, що вона завжди збіжна, отримаємо:

$$\frac{1}{3x-5}=\frac{3}{3(x+1)-3-5}=\frac{3}{-8+3(x+1)}=-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{3(x+1)}{8}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} S_{сп.пр.}=\dfrac{b_1}{1-q} \\ b_1=1;\ q=\dfrac{3(x+1)}{8} \end{array}\right|=$$

$$=-\frac{3}{8}\left(1+\frac{3(x+1)}{8}+\frac{3^2(x+1)^2}{8^2}+\frac{3^3(x+1)^3}{8^3}+\ldots+\frac{3^n(x+1)^n}{8^n}+\ldots\right).$$

Область збіжності в цьому випадку буде:

$$\left|\frac{3(x+1)}{8}\right|<1 \text{ або } -1<\frac{3(x+1)}{8}<1,\ -8<3(x+1)<8,$$

$$-\frac{8}{3}<x+1<\frac{8}{3},\ -\frac{11}{3}<x<\frac{5}{3}.$$

Очевидно, що на кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x=-\frac{11}{3}$ та $x=\frac{5}{3}$, отримуємо розбіжні ряди.

Відповідь:

$$-\frac{3}{8}\left(1+\frac{3(x+1)}{8}+\frac{3^2(x+1)^2}{8^2}+\frac{3^3(x+1)^3}{8^3}+\ldots+\frac{3^n(x+1)^n}{8^n}+\ldots\right),\ -\frac{11}{3}<x<\frac{5}{3}.$$

Приклад 64. Функцію $y=e^x$ розкласти в ряд Тейлора в околі точки $x_0=4$ та визначити область збіжності отриманого ряду.

Розв'язання

Відомо, що ряд Маклорена для функції e^x має вигляд:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^4}{n!}+\ldots,$$

а областю збіжності є вся числова вісь.

Оскільки необхідно розкласти функцію в околі точки $x_0 = 4$, тобто отримати ряд за степенями $x-4$, перепишемо задану функцію таким чином:

$$e^x = e^{x-4+4} = e^{x-4} \cdot e^4 .$$

Скористаємось цією формулою та отримаємо:

$$e^x = e^4 \cdot e^{x-4} = e^4 \left(1 + \frac{x-4}{1!} + \frac{(x-4)^2}{2!} + \frac{(x-4)^3}{3!} + \ldots + \frac{(x-4)^n}{n!} + \ldots \right) =$$

$$= e^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n!} .$$

Область збіжності цього ряду буде $-\infty < x-4 < +\infty$, тобто вся числова вісь, а саме: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Відповідь: $e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n!}$, $-\infty < x < +\infty$.

Приклад 65. Функцію $y = \sin \frac{\pi x}{4}$ розкласти в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 2$ та визначити область збіжності отриманого ряду.

Розв'язання

Виконаємо над заданою функцією тотожні перетворення такі, щоб під знаком функції отримати вираз $x-2$:

$$\sin \frac{\pi x}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{4}(x-2+2) \right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}(x-2) + \frac{\pi}{2} \right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(x-2) \right).$$

Тепер скористаємось розкладом:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots, \ (-\infty < x < +\infty),$$

в якому замість x підставимо $\frac{\pi}{4}(x-2)$.

Отримаємо:

$$\cos \frac{\pi}{4}(x-2) = 1 - \frac{\pi^2 (x-2)^2}{4^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4 (x-2)^4}{4^4 \cdot 4!} - \ldots + (-1)^k \cdot \frac{\pi^{2k} (x-2)^{2k}}{4^{2k} \cdot (2k)!} + \ldots .$$

Отриманий ряд збігається до заданої функції при

$$-\infty < \frac{\pi}{4}(x-2) < +\infty \text{ тобто при } -\infty < x < +\infty .$$

Таким чином,

$$\sin\frac{\pi x}{4} = 1 - \frac{\pi^2 (x-2)^2}{4^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4 (x-2)^4}{4^4 \cdot 4!} - \ldots + (-1)^k \frac{\pi^{2k} (x-2)^{2k}}{4^{2k} \cdot (2k)!} + \ldots$$

при $-\infty < x < +\infty$.

Відповідь:

$$1 - \frac{\pi^2 (x-2)^2}{4^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4 (x-2)^4}{4^4 \cdot 4!} - \ldots + (-1)^k \frac{\pi^{2k} (x-2)^{2k}}{4^{2k} \cdot (2k)!} + \ldots, \ -\infty < x < +\infty .$$

1.11. Наближені обчислення функцій за допомогою степеневих рядів

При обчисленні наближеного значення функції $f(x)$ в її розкладі в степеневий ряд зберігають перші n членів (n – скінченна величина), а решту членів відкидають. Для оцінки похибки знайденого наближеного значення необхідно оцінити ***суму відкинутих членів***. Якщо даний ряд знакопостійний, то ряд, складений із відкинутих членів порівнюють з нескінченно спадною геометричною проєкцією. У випадку знакозмінного ряду, члени якого задовольняють теоремі Лейбниця, користуються оцінкою:

$$|R_n| < a_{n+1},$$

де a_{n+1} – перший з відкинутих членів ряду.

Приклад 66. Обчислити до $0,001$ значення $\sin 18^\circ$.

Розв'язання

Скористаємось формулою:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in (-\infty, +\infty) .$$

Припустимо

$$x = 18^\circ = \frac{\pi}{10},$$

тоді

$$\sin 18^\circ = \sin\frac{\pi}{10} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3\cdot 3!} + \frac{\pi^5}{10^5\cdot 5!} - \frac{\pi^7}{10^7\cdot 7!} + \ldots .$$

Маємо ряд лейбницевого типу. Оскільки

$$\frac{\pi}{10} = \frac{3{,}1416}{10} = 0{,}31416 > 0{,}001\,;$$

$$\frac{\pi^3}{10^3\cdot 3!} = \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^3}{3!} = \frac{(0{,}31416)^3}{31} > 0{,}001\,;$$

$$\frac{\pi^5}{10^5\cdot 5!} = \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^5}{5!} = \frac{(0{,}31416)^5}{5!} < 0{,}001\,,$$

то з точністю до $0{,}001$ достатньо взяти два члени ряду. Остаточно маємо:

$$\sin 18^\circ \cong \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3\cdot 3!} \approx 0{,}309\,.$$

Відповідь: $0{,}309$.

Приклад 67. Обчислити $\sqrt[3]{130}$ з точністю до $0{,}0001$.

Розв'язання

Скористаємось біноміальним рядом:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots ,$$

який, як відомо, збігається при $-1 < x < 1$.

Запишемо заданий вираз у вигляді:

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = 5\cdot\sqrt[3]{1+\frac{5}{125}} = 5\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}} = 5\cdot\left(1+\frac{1}{25}\right)^{1/3}.$$

Отже, в нашому випадку замість x підставимо $\frac{1}{25}$, а замість $m - \frac{1}{3}$:

$$\left(1+\frac{1}{25}\right)^{1/3}=1+\frac{1}{3\cdot 5^2}-\frac{2}{3^2\cdot 2!\cdot 5^4}+\frac{2\cdot 5}{3^3\cdot 3!\cdot 5^6}-\frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4\cdot 4!\cdot 5^8}+\ldots .$$

Маємо знакозмінний ряд, що задовольняє теоремі Лейбниця. Тому якщо розглянемо в якості наближеного значення суми цього ряду суму n перших його членів, то будемо мати абсолютну похибку меншу, ніж перший відкинутий член. Оскільки необхідно обчислити значення кореня з точністю до $0,0001$, то для підрахунку необхідно взяти перші три члени, оскільки уже четвертий член, помножений на 5, буде:

$$\frac{5\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!\cdot 5^6}=\frac{1}{81\cdot 625}<0,0001.$$

Виконаємо обчислення (помножимо кожний член ряду на 5) і отримаємо:

$$\sqrt[3]{130}=5,00000+0,06667-0,00089=5,06578\approx 5,0658 .$$

Відповідь: $5,0658$.

Приклад 68. Обчислити $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e}}$ з точністю до $0,00001$.

Розв'язання

Скористаємось формулою Маклорена для функції e^x:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

тоді можна записати

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}}=e^{-1/5}=1-\frac{1}{1!\cdot 5}+\frac{1}{2!\cdot 5^2}-\frac{1}{3!\cdot 5^3}+\frac{1}{4!\cdot 5^4}.$$

Розглянемо тільки п'ять доданків, оскільки знакозмінний ряд задовольняє умовам ознаки Лейбниця, а тому допустима похибка по абсолютній величині повинна бути менша першого з відкинутих членів ряду. Перший із відкинутих членів ряду дорівнює $\dfrac{1}{5!\cdot 5^5}$. Очевидно, що

$$\frac{1}{5!\cdot 5^5}<0,00001.$$

Обчислимо суму доданків, розташованих на парних та непарних місцях:

$$1+0,020000+0,000067=1,020067,$$

$$0,2+0,001333=0,201333.$$

Віднімаючи від першої суми другу, маємо:

$$1,020067-0,201333=0,818737.$$

Отже, $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}=0,81873$.

Відповідь: $0,81873$.

Приклад 69. Обчислити $\ln 1,04$ з точністю до $0,0001$.

Розв'язання

Скористаємось розкладом $\ln(1+x)$ в ряд, тоді отримаємо:

$$\ln 1,04=\ln(1+0,04)=0,04-\frac{0,04^2}{2}+\frac{0,04^3}{3}-\frac{0,04^4}{4}+\ldots,$$

або

$$\ln(1,04)=0,04-0,0008+0,000021-0,0000064\approx 0,0392.$$

Відповідь: $0,0392$.

1.12. Наближені обчислення визначених інтегралів

Дуже часто практично необхідні визначені інтеграли не можуть бути обчислені за допомогою формули Ньютона – Лейбниця або її використання пов'язане з визначенням первісної, що не може бути представлена за допомогою елементарних функцій.

При цьому підінтегральна функція може бути розкладена в степеневий ряд, де границі інтегрування належать інтервалу збіжності цього ряду.

Тоді можливо наближено обчислити значення визначеного інтегралу з наперед заданою точністю.

Приклад 70. Обчислити $\int\limits_0^{1/3} e^{-x^2}dx$ з точністю до $0,001$.

Розв'язання

Формулу Ньютона – Лейбниця тут застосовувати не можна, тому що первісна від e^{-x^2} в елементарних функціях не виражається.

Скориставшись рядом

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ \ x\in(-\infty,+\infty),$$

маємо:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, \; x \in (-\infty, +).$$

Цей ряд є рівномірно збіжним на всій числовій осі, тому його можна інтегрувати на будь-якому скінченному відрізку, а отже, і на відрізку $\left[0, \frac{1}{3}\right]$:

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx = \int_0^{1/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \Bigg|_0^{1/3} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{1!3 \cdot 3^3} + \frac{1}{2!5 \cdot 3^5} - \frac{1}{3!7 \cdot 3^7} + \ldots .$$

Тепер маємо ряд лейбницевого типу. Оскільки $\frac{1}{3} > 0,001$;

$$\frac{1}{1!3 \cdot 3^3} = \frac{1}{81} > 0,001; \quad \frac{1}{2!5 \cdot 3^5} < 0,001,$$

то з точністю до $0,001$ маємо:

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{81} \approx 0,321.$$

Відповідь: $0,321$.

Приклад 71. Обчислити $\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ з точністю до $0,0001$.

Розв'язання

Якщо змінити в підінтегральному виразі $\cos x$ його розкладом в ряд Маклорена, де

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

а область збіжності цього ряду – $x \in (-\infty, +\infty)$, то отримаємо:

$$\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \int_0^{1/2} \frac{1 - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}}{x^2} dx = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \ldots \right) dx =$$

$$=\left(\frac{1}{2!}x-\frac{x^3}{4!3}+\frac{x^5}{6!5}-\ldots\right)\Bigg|_0^{1/2}=\frac{1}{2!\cdot 2}-\frac{1}{4!\cdot 3\cdot 2^3}+\frac{1}{6!\cdot 5\cdot 2^5}-\ldots\approx$$

$$\approx 0,25-0,0017=0,2483\,.$$

Відповідь: $0,2483$.

Приклад 72. Обчислити $\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ з точністю до $0,001$.

Розв'язання

Слід прийняти до уваги, що ряд Маклорена для функції $\ln(1+x)$ має вигляд:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

де область збіжності – $-1<x\le 1$.

Тоді, користуючись цим фактом, маємо право записати:

$$\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\int\limits_0^{0,1}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots}{x}dx=$$

$$=\int\limits_0^{0,1}\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\ldots\right)dx=\left(x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{1}{4}\frac{x^4}{4}+\ldots\right)\Bigg|_0^{0,1}=$$

$$=0,1-\frac{1}{4}\cdot 0,01+\frac{1}{9}\cdot 0,001\approx 0,098\,.$$

Відповідь: $0,098$.

1.13. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів

Інтегрування лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами в загальному випадку не зводиться до квадратур, а їх розв'язання не можна виразити через елементарні функції.

Одним з методів інтегрування таких рівнянь (важливих для застосування) є зображення шуканого розв'язку у вигляді степеневого ряду. Визначення коефіцієнтів такого розкладу полягає в послідовному диференціюванні цього рівняння та подальшому використанню початкових умов.

Приклад 73. Знайти три перших, відмінних від нуля, члени розкладу в ряд розв'язку рівняння $y'' = xy' + y$, що задовольняє задані початкові умови $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Розв'язання

Оскільки початкові умови задано при $x = 0$, то розв'язок рівняння $y(x)$ будемо визначати у вигляді ряду Маклорена:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots .$$

Враховуючи, що за умовою $y(0) = 0$ та $y'(0) = 1$, знаходимо:

$$y''(0) = (xy' + y)\big|_{x=0} = 0 \cdot 1 + 0 = 0;$$

$$y'''(x) = y' + xy'' + y' = 2y' + xy'', \ \ y'''(0) = 2;$$

$$y^{IV}(x) = 2y'' + y'' + xy''' = 3y'' + xy''', \ \ y^{IV}(0) = 0;$$

$$y^{V}(x) = 3y''' + y''' + xy^{IV} = 4y''' + xy^{IV}, \ \ y^{V}(0) = 4 \cdot 2 = 8 .$$

Підставимо знайдені значення похідних у ряд Маклорена:

$$y(x) = \frac{1}{1!} x + \frac{2}{3!} x^3 + \frac{8}{5!} x^5 + \ldots = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \ldots .$$

Відповідь: $y(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \ldots$.

Приклад 74. Знайти три перших, відмінних від нуля, члени розкладу в ряд розв'язку рівняння $y' = x^2 + y^3$, що задовольняє задані початкові умови $y(1) = -1$.

Розв'язання

Оскільки початкова умова задана при $x = 1$, то розв'язок рівняння $y(x)$ будемо знаходити у вигляді ряду Тейлора:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \ldots .$$

За умовою $y = -1$ при $x = 1$. Знайдемо:

$$y'(1)=\left(x^2+y^3\right)\Big|_{x=1}=1^2+(-1)^3=0;$$

$$y''(x)=2x+3y^2\cdot y'; \quad y''(1)=2\cdot 1+3\cdot(-1)^2\cdot 0=2;$$

$$y'''(x)=2+6y\cdot y'\cdot y'+3y^2\cdot y''=2+6y\cdot(y')^2+3y^2\cdot y'';$$

$$y'''(1)=2+6\cdot(1)\cdot 0+3\cdot(-1)^2\cdot 2=2+6=8.$$

Таким чином,

$$y(x)=-1+\frac{2}{2!}(x-1)^2+\frac{8}{3!}(x-1)^3+\ldots=-1+(x-1)^2+\frac{4}{3}(x-1)^3+\ldots$$

Відповідь: $y(x)=-1+(x-1)^2+\frac{4}{3}(x-1)^3+\ldots$.

Приклад 75. Знайти три перших, відмінних від нуля, члени розкладу в ряд розв'язку рівняння $y''-xy=0$ за умови, що $y(0)=1$ та $y'(0)=0$.

Розв'язання

Враховуючи, що початкові умови задано при $x=0$, розв'язок рівняння визначаємо у вигляді ряду Маклорена, а саме:

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots.$$

Оскільки $y(0)=1$ та $y'(0)=0$, визначимо $y''=xy$, тоді $y''(0)=0$.

Тоді, послідовно виконуючи диференціювання рівняння $y''=xy$, отримаємо:

$$y'''=y+xy', \quad y'''(0)=1;$$

$$y^{IV}=y'+y'+xy''=2y'+xy'', \quad y^{IV}(0)=0;$$

$$y^{V}=2y''+y''+xy'''=3y''+xy''', \quad y^{V}(0)=0;$$

$$y^{VI}=3y'''+y'''+xy^{IV}=4y'''+xy^{IV}, \quad y^{VI}(0)=4.$$

В результаті отримаємо розв'язок заданого рівняння:

$$y(x)=1+\frac{x^3}{6}+\frac{x^6}{180}.$$

Відповідь: $y(x)=1+\frac{x^3}{6}+\frac{x^6}{180}$.

2. ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ

Варіант 1

1. Продовжити речення: числовий ряд називається збіжним, якщо … .

2. Інтегральна ознака Коші збіжності числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами (вибрати вірне твердження):

а) якщо $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \ (\to\leftarrow) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (\to\leftarrow)$;

б) якщо $\int_{1}^{\infty} f(x)dx \ (\to\leftarrow) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (\to\leftarrow)$;

в) якщо $\int_{1}^{\infty} f(x)dx \ (\leftarrow\to) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (\leftarrow\to)$,

де $f(x) = a_n \ (n = x)$.

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n(3n-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{5n}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^5+2}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n!}{n^n}$.

5. Дайте означення функціонального ряду; області його збіжності.

6. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ та знайти область збіжності отриманого ряду.

Варіант 2

1. За яких умов у структурі загального члена ряду доцільно застосовувати для дослідження його поведінки граничну ознаку порівняння?

2. Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{2^n}$ записати a_2 та a_5.

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{5n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{5n-1}\right)^{n^2}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n^4}$.

5. Дайте означення рівномірно збіжного функціонального ряду.

6. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y=e^{7x}$ та знайти його область збіжності.

Варіант 3

1. За яких умов в структурі загального члену ряду доцільно застосовувати для дослідження його поведінки ознаку Даламбера?

2. Сума числового ряду обчислюється за формулою:

$S=\lim\limits_{n\to 0}S_n$;	$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$;	$S=\lim\limits_{n\to 5}S_n$;	$S=\lim\limits_{n\to\pm\infty}S_n$.

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n\cdot 4^n}$; б) $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{4n-7}{n^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{3n-1}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\ln n}{n}$.

5. Який функціональний ряд називається мажоровним на проміжку?

6. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y=\sin^2 x$ та знайти її область збіжності.

Варіант 4

1. За яких умов в структурі загального члену ряду доцільно застосовувати для дослідження його поведінки радикальну ознаку Коші?

2. Якщо n-тий член числового ряду $a_n=(-1)^{n-1}\cdot(3n+2)$, то a_4+a_5 – ?

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+3}{4n-1}\right)^{2n+3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{5}{(n+2)^3}$.

5. За яких умов функціональний ряд можна почленно диференціювати; почленно інтегрувати?

6. Функцію $y=\frac{1}{4-x}$ розкласти в ряд Тейлора за степенями $(x-2)$ та знайти область збіжності отриманого ряду.

Варіант 5

1. Необхідна ознака збіжності: якщо ряд збігається, то

$\lim\limits_{x\to0}\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=0$;	$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$;	$\lim\limits_{n\to\infty}a_n^2\neq0$

2. Якою ознакою має сенс скористатися для з'ясування поведінки ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{\sqrt[3]{(2n+7)^2}}$?

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4n+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-7}{5n+2}\right)^{4n-8}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{n^3+8}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{n}{3n^2-2}$.

5. Дайте означення степеневого ряду.

6. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$.

Варіант 6

1. Сформулюйте необхідну умову збіжності рядів.

2. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$ за допомогою ряду, загальним членом якого є дана функція.

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{(2n+1)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{125}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{4n}{5n^2+3}$.

5. Сформулюйте теорему Абеля.

6. Функцію $y=\dfrac{1}{x}$ розкласти в ряд Тейлора за степенями $(x-1)$ та знайти область збіжності отриманого ряду.

Варіант 7

1. За яких умов в структурі загального члену ряду доцільно застосовувати для дослідження його поведінки ознаку Лейбніца?

2. З'ясувати, чи виконується необхідна умова збіжності для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7n^3}{9n^2-1}$.

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{2n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(n+3)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n-3}}$.

5. Що є областю збіжності степеневого ряду.

6. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{x}{5^n}$.

Варіант 8

1. Сформулювати інтегральну ознаку Коші.

2. Яка з умов гарантує збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n > 0)$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$;	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le 1$;	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$?

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n (3n-1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n-3}{5n+2}\right)^{4n+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n^3+5}}$.

5. За якими формулами знаходять радіус збіжності степеневого ряду?

6. Функцію $y = \ln x$ розкласти в ряд Тейлора за степенями $(x-1)$ та визначити його область збіжності.

Варіант 9

1. Ознака Даламбера.

2. Числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ буде розбіжним, якщо

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$;	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8n+1}{7^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(n-2)^3}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n-1}{2n}\right)^n$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \operatorname{arctg} \frac{n}{2n+1}$.

5. Сформулюйте властивості степеневого ряду.

6. Визначити область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

Варіант 10

1. Означення числового ряду. Який ряд називається збіжним (розбіжним)?

2. Знакопереміжний ряд $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^n \cdot a_n + \ldots$ $(a_n \geq 0)$ збігається за ознакою Лейбніца, якщо

$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ та $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;	$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ та $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;	$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ та $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$;	$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ та $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$.

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+2}{3n+1} \right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-7}{n \cdot 5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+2}{4n^2 - n + 7}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sqrt{\dfrac{n(n+1)}{4^n}}$.

5. Який ряд називається рядом Тейлора?

6. Функцію $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8 - x^3}}$ розкласти в ряд Маклорена та визначити його область збіжності.

Варіант 11

1. Сформулюйте радикальну ознаку Коші.

2. Яка з умов гарантує розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$;	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1$;	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$?

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+3)}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n-3}{n \cdot 2^n}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n+5}$.

5. Який ряд називається рядом Маклорена?

6. Визначити область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

Варіант 12

1. Дайте означення знакозмінного ряду. За якої умови ряд називається абсолютно збіжним?

2. Встановити, чи вірне твердження:

$$\text{якщо } \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ (\leftarrow\rightarrow), \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \text{ може } (\rightarrow\leftarrow).$$

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{5n-1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+4}{6n-3}\right)^{2n+1}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{(n+2)^3}}$.

5. Які умови розкладання функції в ряд Тейлора?

6. Визначити область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$.

Варіант 13

1. Який ряд називається знакоперемінним? Сформулюйте ознаку Лейбніца для нього.

2. Ознака Даламбера числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами (вибрати вірне твердження):

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=q$, причому при $q>1(\leftarrow\rightarrow)$, а при $q<1(\rightarrow\leftarrow)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$, причому при $q>1(\leftarrow\rightarrow)$, а при $q<1(\rightarrow\leftarrow)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=q$, причому при $q>1(\rightarrow\leftarrow)$, а при $q<1(\leftarrow\rightarrow)$.

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(4n+1)^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+5}{n\cdot 3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4n-1}{5n+2}\right)^{n^2}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$.

5. Ряд Маклорена для функції $y=e^x$.

6. Визначити область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot x^n}{n^n}$.

Варіант 14

1. Сформулюйте ознаки порівняння двох рядів з додатніми членами.

2. Встановити, чи вірне твердження:

якщо $a_n=(-1)^{n-1}\cdot(3n+2)$, то a_4+a_5 – ?

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5}{(7n-3)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7n-1}{4^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n+5}{8n-1}\right)^{4n+2}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{n}{5^n}$.

5. Ряд Маклорена для функції $y=\sin x$.

6. Визначити область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{n\cdot 3^n}$.

Варіант 15

1. Що таке сума та залишок збіжного числового ряду.

2. Якщо для двох рядів з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2) виконується нерівність $a_n \le b_n$, то:

– із збіжності ряду (1) випливає збіжність ряду (2);
– із розбіжності ряду (1) випливає збіжність ряду (2);
– із збіжності ряду (2) випливає збіжність ряду (1).
Виберіть вірне твердження.

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4+7}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n-1} \right)^n$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{3n}{5n+1} \right)^n$.

5. Ряд Маклорена для функції $y = \cos x$.

6. Функцію $y = \frac{1}{4+3x}$ розкласти в ряд Тейлора за степенями $(x+2)$ та визначити його область збіжності.

Варіант 16

1. Що називається числовим рядом? Коли він збігається, а коли ні?

2. Ознака Коші збіжності числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами (вибрати вірне твердження):

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = q$, при $q > 1 (\leftarrow\rightarrow)$, а при $q < 1 (\rightarrow\leftarrow)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, при $q > 1 (\leftarrow\rightarrow)$, а при $q < 1 (\rightarrow\leftarrow)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, при $q > 1 (\rightarrow\leftarrow)$, а при $q < 1 (\leftarrow\rightarrow)$.

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}}$;   б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7^n}$;   в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(e+1)^n}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3n}{5n-1}$.

5. Ряд Маклорена для функції $y=(1+x)^m$.

6. Функцію $y=e^{-x}$ розкласти в ряд Тейлора за степенями $(x-3)$ та визначити його область збіжності.

Варіант 17

1. Чи виконана необхідна умова збіжності для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3-2}{n^2+1}$?

2. Якщо n-тий член числового ряду $a_n=(-1)^{n+1}\cdot(4n-1)$, то $a_3+a_5=?$

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+n-1}$;   б) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2^n}$;   в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}{5^n}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n^2+3}$.

5. Степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ збігається в точці $x_0=5$, що можна стверджувати відносно його збіжності в точці $x=4$; $x=7$?

6. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{x}{7^n}$.

Варіант 18

1. Знакопереміжний ряд $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^n a_n + ...$ $(a_n \geq 0)$ збігається за ознакою Лейбніца, якщо:

$a_1 < a_2 < a_3 < ...$ та $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$;	$a_1 < a_2 < a_3 < ...$ та $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;	$a_1 > a_2 > a_3 > ...$ та $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;	$a_1 < a_2 < a_3 < ...$ та $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$.

2. Дослідження якого ряду на збіжність дасть відповідь щодо абсолютної збіжності:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$;	$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \lvert a_n \rvert$;	$\left\lvert \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \right\rvert$;	$\sum\limits_{n=1}^{5} \lvert a_n \rvert$?

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+7)^2}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4n^3+2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^{\frac{2n-1}{3}}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{\sqrt{5n+7}}$.

5. Дайте означення функціонального ряду; області його збіжності.

6. Функцію $y = x^2 \cdot \sin 3x$ розкласти в ряд Маклорена та знайти область збіжності отриманого ряду.

Варіант 19

1. Як називається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+3}}$, яку ознаку необхідно використати для дослідження його збіжності?

2. Числовий ряд: означення; збіжність; сума ряду.

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!\cdot 4^{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+4}{2n-1}\right)^{n^2}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}$.

5. Дайте означення функціонального ряду.

6. Розкласти функцію $y=e^x$ в околі точки $x=1$ в степеневий ряд. Визначити область збіжності цього ряду.

Варіант 20

1. Сформулюйте граничну ознаку порівняння. В яких випадках буде доцільним її використання?

2. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається, то

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n^2\neq 0$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$;	$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=0$?

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(2n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4n^3+7}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{4n+5}\right)^{n/3}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n^2-n+1}$.

5. Степеневий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ розбігається в точці $x_0=-3$. Що можна стверджувати відносно його збіжності в точці $x=-4$; $x=0$?

6. Функцію $y=\cos\frac{3x}{2}$ розкласти в ряд Маклорена та знайти область збіжності отриманого ряду.

Варіант 21

1. При яких значеннях знаменника q геометрична прогресія є збіжним рядом?

2. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$ за допомогою ряду, загальним членом якого є дана функція?

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(2n+1)^2-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{(3n-2)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{7n-2}{9n}\right)^{n^2}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\dfrac{3n+4}{3n^2-7}\right)^n$.

5. Що називається областю збіжності функціонального ряду. Як визначити його область збіжності?

6. Визначити область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{x}{5^n}$.

Варіант 22

1. Як на характер збіжності ряду впливає множення всіх його членів на $\mathrm{const}\neq 0$?

2. За радикальною ознакою Коші ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ з додатними членами збігається, якщо:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q>1$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q\le 1$;	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q<1$.

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+7}{n\cdot 2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot n}{4n^3+10}$.

5. Функціональний ряд називається рівномірно збіжним, якщо … .

6. Розкласти в ряд Тейлора за степенями $(x+1)$ функцію $y=e^{3x}$ та визначити область збіжності отриманого ряду.

Варіант 23

1. Дайте означення гармонічного ряду та наведіть приклади збіжних і розбіжних узагальнених числових рядів.

2. Дослідження якого ряду на збіжність дасть відповідь щодо абсолютної збіжності

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$;	$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\lvert a_n\rvert$;	$\left\lvert\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right\rvert$;	$\sum\limits_{n=1}^{8}\lvert a_n\rvert$?

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n!)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+5}\right)^{4n+1}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot 2^n}{n^3+1}$.

5. Функціональний ряд можна почленно диференціювати за умови, що … .

6. Визначити область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2\cdot 4^n}$.

Варіант 24

1. За яких умов в структурі загального члену ряду доцільно застосовувати для дослідження його поведінки радикальну ознаку Коші?

2. Для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+5}$ знайти a_3+a_4 .

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5n^2+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n}\right)^{\frac{n}{7}}$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{5n+7}$.

5. Теорема Абеля.

6. Визначити область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}\cdot 7^n}$.

Варіант 25

1. Як на характер збіжності ряду впливає видалення його перших 7 членів із заданого ряду?

2. За інтегральною ознакою Коші ряд з заданими членами $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається, якщо:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\,(\to\leftarrow)$;	$\int_{1}^{\infty} f(x)dx\,(\to\leftarrow)$;	$\int_{1}^{\infty} f(x)dx\,(\leftarrow\to)$.

3. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{5n+1}\right)^n$.

4. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(4n-3)}$.

5. За якими формулами знаходять область збіжності степеневого ряду?

6. Визначити область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Вища математика в прикладах і задачах : у 2 т. Т. 2. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння та ряди : навч. посіб. / Л. В. Курпа [та ін.] ; за ред. Л. В. Курпи. Харків : НТУ «ХПІ», 2009. 432 с.

https://repository.kpi.kharkov.ua/items/227bd413-6a9c-4046-ba7b-b80aa642ccdd

2. Тулученко Г. Я. Ряди : навч. посібник для студентів електротехнічних спеціальностей. Львів: Львівська політехніка, 2024. 220 с.

http://web.kpi.kharkov.ua/vm/wp-content/uploads/sites/22/2024/02/posibnyk_ryady.pdf

3. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч. Ч. 2 / Н. О. Чікіна [та ін.] ; за ред. Н. О. Чікіної. Харків : Підручник НТУ «ХПІ», 2013. 216 с.

https://repository.kpi.kharkov.ua/items/4d86b745-4f9c-427b-9be9-12b3f2ed4524

4. Вища математика у прикладах та задачах : у 3 ч. Ч. 3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення : навч. посіб. / А. Д. Тевяшев [та ін.]. Харків : ХНУРЕ, 2002. 596 с.

http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/972/tevyashev_visha_matemat3.pdf

ЗМІСТ

Навчальне видання

ЧЕРНОГОР Тетяна Тимофіївна
ПРІЩЕНКО Ольга Петрівна

Ряди

Навчально-методичний посібник
для здобувачів вищої освіти хімічних та інших технічних спеціальностей
денної і скороченої форм навчання

Відповідальна за випуск проф. Першина Ю. І.
Роботу до видання рекомендувала проф. Чікіна Н. О.

В авторській редакції

План 2026 р., поз. 25

Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 3,24.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Електронне видання