МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Н. О. Чікіна, І. В. Антонова

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ. ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Навчальний посібник

Харків
НТУ «ХПІ»
2026

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Н. О. Чікіна, І. В. Антонова

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ.
ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Навчальний посібник
для студентів технічних спеціальностей
усіх форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою НТУ «ХПІ»,
протокол № 1 від 19.02.2026 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2026

УДК 517.2(075) + 517.3(075)
Ч-60

Рецензенти:

О. П. Нечуйвітер, д-р фіз.-мат. наук,
зав. кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики,
ННІ «Українська інженерно-педагогічна академія»
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (м. Харків);

М. Є. Резуненко, канд. техн. наук, зав. кафедри вищої математики і фізики,
Український державний університет залізничного транспорту (м. Харків)

Чікіна Н. О.

Ч60 Математичний аналіз. Функції декількох змінних : навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання / Н. О. Чікіна, І. В. Антонова. Харків : НТУ «ХПІ», 2026. 256 с.

ISBN 978-617-05-0616-0

Навчальний посібник містить основні розділи математичного аналізу функцій декількох змінних, а саме: теорія границь, диференціальне та інтегральне числення. Наведено основні поняття і теоретичні положення, розібрані основні типи задач з розділів курсу вищої математики, а саме: «Функції декількох змінних», «Кратні інтеграли», «Криволінійні та поверхневі інтеграли». Приклади розв'язання задач супроводжуються поясненнями, коментарями, кольоровою графікою, що робить посібник максимально пристосованим до мети самоосвіти.

Призначено для студентів інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів, а також для тих, хто самостійно вивчає або займається прикладними питаннями математичного аналізу.

Іл. 111. Бібліогр. 8 назв.

УДК 517.2(075) + 517.3(075)

ISBN 978-617-05-0616-0

Вступ

Навчальний посібник охоплює три частини курсу вищої математики для студентів технічних спеціальностей, а саме: «Функції декількох змінних», «Кратні інтеграли» і «Криволінійні та поверхневі інтеграли». Перший і третій розділи посібника побудовані на основі перероблених та доповнених матеріалів навчально-методичних посібників, що були видані авторами у 2019 та 2023 роках, і на які є посилання в списку джерел інформації.

Автори поєднали ці три частини не випадково, бо вважають це доцільним, оскільки існує прямий зв'язок між їх теоретичними положеннями та практичним застосуванням.

Основною метою посібника є засвоєння студентами системи фундаментальних уявлень розділів курсу «Вища математика» на рівні, достатньому для засвоєння технічних дисциплін в спектрі інженерних спеціальностей НТУ «ХПІ».

Означений матеріал посібника в свою чергу поділений на 11 тем. Кожна тема посібника починається з відповідної теоретичної частини курсу, де наводяться основні положення, означення та властивості введених понять.

Теоретичні положення кожної теми викладені в чіткій логічній послідовності, наведені методи дослідження як функцій двох змінних, так і функцій декількох змінних. При цьому автори вважають, що доведення теорем не є самоціллю. Замість цього наводяться додаткові ілюстрації або приклади, що пояснюють смисл нових понять та їх властивостей.

Посібник має достатню кількість зразків розв'язання важливих типів практичних завдань. Мова йде про знаходження найменшого та найбільшого значень функцій в замкненій області, фізичні та механічні застосування подвійних та потрійних інтегралів, а також криволінійних та поверхневих.

Автори знайомлять читачів з різними прийомами розв'язання задач, одночасно порівнюючи доцільність та ефективність застосованих методів.

Крім того, кожна тема має перелік контрольних запитань та завдань для самостійної роботи, до яких додані відповіді. Така форма викладання матеріалу дозволяє студентам використовувати посібник в сучасних умовах дистанційного навчання.

Задля поширення знань студентів з означеної тематики додатково в посібник включені теми, які **не є обов'язковими**, але є логічним подовженням розглянутих тем і мають достатню кількість прикладів для ілюстрації застосувань введених понять. А саме, в посібник включена тема «**Інтеграли, що залежать від параметра**», де розглядаються як власні, так і невласні інтеграли. Автори знайомлять студентів з **гамма (Г)-функцією** та **бета (В)-функцією** та їх застосуванням при обчисленні інтегралів, а також наведені приклади їх механічних застосувань. У якості прикладу поширення інтегрального числення у багатовимірному просторі розглядаються теми «***n*-кратні інтеграли»** і **«Невласні кратні інтеграли».**

Особливістю цього навчального посібника є його наближеність до електронного навчального видання із систематизованим викладом навчального матеріалу, що відповідає певній освітній програмі, містить об'єкти різних форматів та забезпечує інтерактивну взаємодію зі студентами.

Для зручності користування навчальним посібником у PDF-файлі створено інтерактивний зміст. Навігація по розділах здійснюється через панель закладок (Bookmarks), яка відкривається у вікні перегляду документа.

Посібник ставить ціллю не тільки надати читачеві ті або інші відомості з математичного аналізу, які є необхідними для вивчення спеціальних дисциплін. Він призначений для того, щоб розвивати у студентів логічне мислення, сприяти розвитку навичок застосування математичного апарату і підготувати до самостійного поповнення математичних знань.

Посібник призначений в першу чергу студентам інженерно-технічних спеціальностей, а також буде корисним для самоосвіти.

Автори

Розділ 1. Функції декількох змінних

1. Функції декількох змінних. Геометричний зміст частинних похідних функції $z = f(x, y)$

1.1. Функції двох змінних

1.1.1. *Поняття функції двох змінних*

Розглянемо довільну множину D точок, що лежать в координатній площині XOY.

Означення. Якщо кожній точці $P(x;y)\in D$ поставити у відповідність одне дійсне число z, то, як кажуть, на множині D задано *функцію* $z=f(x,y)$ або $z=f(P)$.

Змінні x,y називаються *аргументами* або *незалежними змінними*; множина D називається *областю* визначення функції.

Область визначення D функції $z=f(x,y)$ двох змінних це множина пар (x,y), для яких вираз $f(x,y)$ має смисл.

Найчастіше обмеження виникають у таких випадках:

1. $z=\dfrac{1}{g(x,y)}$ – знаменник не дорівнює нулю, тобто $g(x,y)\neq 0$.
2. $z=\sqrt[2n]{g(x,y)}$ – підкореневий вираз $g(x,y)\geq 0$.
3. $z=\ln g(x,y)$ – вираз під знаком логарифма $g(x,y)>0$.
4. $z=\arcsin g(x,y)$ або $z=\arccos g(x,y)$ – вираз $|g(x,y)|\leq 1$.

Приклад 1.1. Знайти область визначення функції $z=\dfrac{1}{\sqrt{2x-y^2}}$.

Розв'язання. Задана функція містить корінь парного степеню, що стоїть у знаменнику дробу. Знайдемо область визначення цієї функції з системи нерівностей:

$$\begin{cases} 2x - y^2 \geq 0, \\ 2x - y^2 \neq 0. \end{cases}$$

Об'єднуючи обидві умови в одну, одержимо: $2x > y^2$, або

$$x > \frac{1}{2} y^2 . \tag{1.1}$$

Межа області визначення – парабола $x = \frac{1}{2} y^2$, яка поділяє координатну площину на дві частини. Очевидно, точки параболи не належать області визначення. Для того, щоб встановити, в якій з частин площини виконується умова $x > \frac{1}{2} y^2$, достатньо перевірити цю умову для будь-якої точки площини, що не належить параболі. Візьмемо, наприклад, точку $(1;0)$, і підставимо її координати у нерівність (1.1): $1 > \frac{1}{2} \cdot 0^2$, $1 > 0$. Нерівність виконується, це означає, що обрана точка $(1;0)$ та всі інші точки, що знаходяться у тій же самій частині координатної площини, і є шуканою областю визначення D.

Отже, областю визначення заданої функції є заштрихована частина площини, що знаходиться між гілками параболи $x = \frac{1}{2} y^2$ (рис. 1.1).

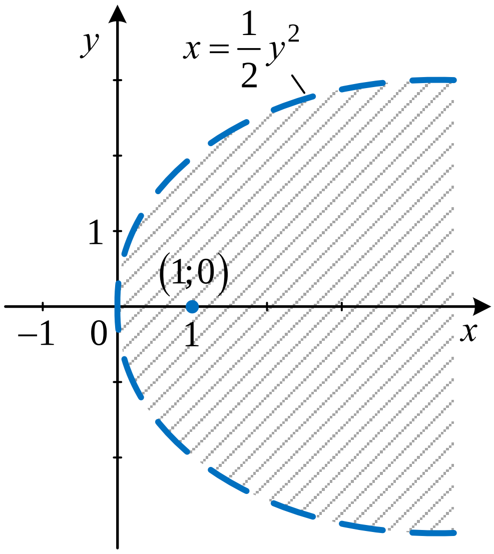


Рисунок 1.1

Межа області D – парабола $x = \frac{1}{2} y^2$ – не належить області D, тому на рисунку вона позначена пунктиром.

Приклад 1.2. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{x+y} + \dfrac{1}{\sqrt{y-3x}}$.

Розв'язання. Задана функція складається з двох доданків, кожен з яких має відповідну область визначення. В таких випадках область визначення функції $z = f(x,y)$ знаходиться з системи нерівностей, які задають область визначення кожного з доданків:

$$\begin{cases} x+y \ge 0, \\ y-3x \ge 0, \\ y-3x \ne 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x+y \ge 0, \\ y-3x > 0, \end{cases}$$

тобто, область визначення заданої функції задається наступним чином:

$$\begin{cases} y \ge -x, \\ y > 3x. \end{cases} \tag{1.2}$$

З першої нерівності системи (1.2) маємо, що шукана множина точок знаходиться вище або на прямій $y=-x$. Аналогічно, з другої нерівності системи (1.2) шукана множина точок знаходиться вище прямої $y=3x$, але точки цієї прямої області визначення функції не належать, тому вона позначена пунктиром.

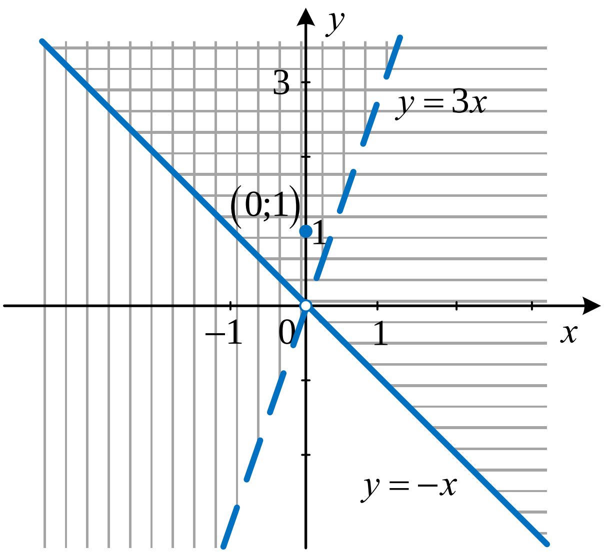


Рисунок 1.2

Виконуючи відповідні вказаним умовам штрихування, отримаємо на площині область з подвійним штрихування (рис. 1.2).

Зауваження. Можна перевірити, що область визначення знаходиться саме в тій частин площини, яка має подвійне штрихування.

Для цього візьмемо, наприклад, точку $(0;1)$ площини, яка не належить прямим (рис. 1.2), і підставимо її координати у систему нерівностей (1.2):

$$\begin{cases} 1 \geq -0, \\ 1 > 3 \cdot 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \geq 0, \\ 1 > 0. \end{cases}$$

Нерівності системи виконуються.

Приклад 1.3. Знайти область визначення функції $z = \dfrac{\ln(x-y)}{\sqrt{y - x^2 + 1}}$.

Розв'язання. В даному випадку потрібно врахувати наступні обмеження:

$$\begin{cases} x - y > 0, \\ y - x^2 + 1 \geq 0, \\ y - x^2 + 1 \neq 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x - y > 0, \\ y - x^2 + 1 > 0, \end{cases}$$

звідки маємо

$$\begin{cases} y < x, \\ y > x^2 - 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Межами шуканої області визначення є пряма $y = x$ та парабола $y = x^2 - 1$. Обидві лінії не належать області визначення.

Згідно умов (1.3) виконаємо відповідне штрихування на координатній площині. Область, яка має подвійне штрихування, і є шуканою областю визначення заданої функції.

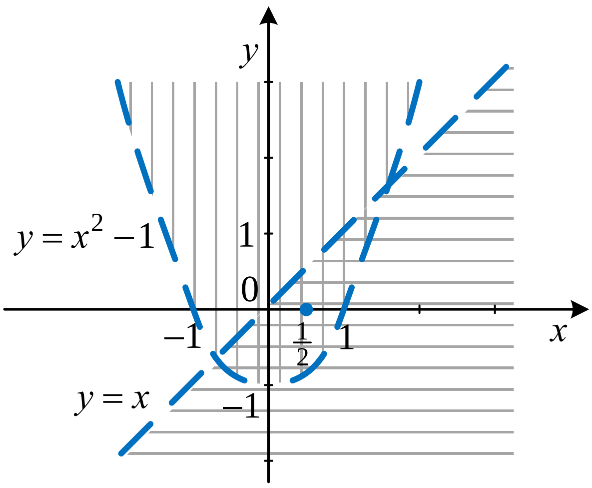


Рисунок 1.3

Приклад 1.4. Знайти область визначення функції

$$z = \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}} + \arccos\left(x + y - 2\right).$$

Розв'язання. Область визначення заданої функції задається системою відповідних нерівностей:

$$\begin{cases} x - 1 \neq 0, \\ \left|x + y - 2\right| \leq 1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \neq 1, \\ -1 \leq x + y - 2 \leq 1, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ y \leq 3 - x, \\ y \geq 1 - x. \end{cases} \tag{1.4}$$

Межами шуканої області визначення є паралельні прямі $y = 3 - x$ та $y = 1 - x$, що поділяють координатну площину на три частини.

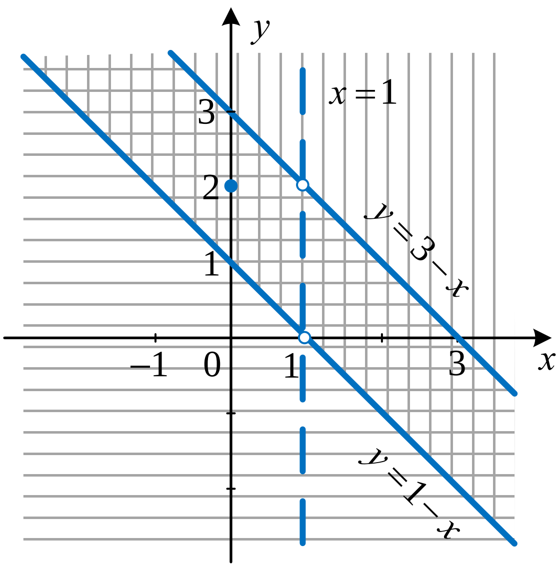


Рисунок 1.4

Умова $y \leq 3 - x$ визначає частину площини, яка нижче прямої $y = 3 - x$. Аналогічно, умова $y \geq 1 - x$ визначає частину площини, яка вище прямої $y = 1 - x$.

Зробимо відповідні штрихування.

Умови (1.4) виконуються в тій частині координатній площині, яка має подвійне штрихування. Крім того, зі смуги видалені точки, що належать прямій $x = 1$ (рис. 1.4).

Виберемо систему координат у просторі $OXYZ$ і розглянемо функцію $z = f\left(x, y\right)$, визначену на множині $D \subset XOY$.

Означення. Множина всіх точок $M\left(x; y; z\right)$, де координати x, y точок $M\left(x; y; z\right)$ знаходяться в області D визначення функції $z = f\left(x, y\right)$, називається *поверхнею*.

Тому рівняння $z = f\left(x, y\right)$ називається *рівнянням поверхні.*

1.1.2. *Функції декількох змінних*

Точкою тривимірного простору називається впорядкована трійка чисел (x, y, z). Множина усіх можливих впорядкованих сукупностей n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ називається n*-вимірним координатним простором* і позначається $\mathbb{R}^n$. Кожна впорядкована сукупність $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *точкою* цього простору і позначається як $M(x_1; x_2; \dots; x_n)$. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ називаються *координатами точки* M.

Означення. Нехай Ω – довільна множина n-вимірного простору. Кажуть, що *функція* f *визначена на множині* Ω, якщо кожній точці $(x_1; x_2; \dots; x_n) \in \Omega$ поставлено у відповідність дійсне число W.

Позначення: $W = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $x_1, x_2, \dots, x_n$ – незалежні змінні.

Область визначення функцій $W = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ декількох змінних знаходиться за тими ж правилами, що і для функцій $z = f(x, y)$ двох змінних.

Відстанню між двома точками $M_1(x_1; x_2; \dots; x_n)$ і $M_2(y_1; y_2; \dots; y_n)$ координатного простору $\mathbb{R}^n$ називається число $d(M_1, M_2)$, що визначається формулою:

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

Множина точок $\{M : d(M, M_0) < \varepsilon\}$, де $\varepsilon > 0$, називається ε*-околом точки* M_0.

Діаметром множини Ω точок координатного простору $\mathbb{R}^n$ називається число, якщо воно існує, яке є найбільшою попарною відстанню між точками цієї множини.

1.2. Границя і неперервність

Кажуть, що точка $P(x; y)$ *наближається до точки* $P_0(x_0; y_0)$, якщо відстань $d(P, P_0)$ між точками P і P_0 наближається до нуля, тобто $d(P, P_0) \to 0$ за умови $P(x; y) \to P_0(x_0; y_0)$. При цьому, очевидно, $x \to x_0$ і $y \to y_0$ водночас.

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, визначену в деякому околі точки $P_0(x_0; y_0)$, за винятком хіба що самої точки $P_0(x_0; y_0)$.

> ***Означення.*** Число A називається *границею функції* $z = f(x, y)$ при $P \to P_0$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що з умови $d(P, P_0) < \delta$ слідує умова $|f(P) - A| < \varepsilon$.

Символічний запис: $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$ або $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

Для функції двох змінних мають місце теореми з теорії границь, які були отримані для функції однієї змінної, зокрема, теореми про границю суми, добутку, частки і теореми про граничний перехід в нерівностях.

Приклад 1.5. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^3 + y^3}{\sin(x + y)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 + y^3}{\sin(x + y)} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \left| \begin{array}{c} \sin\alpha \underset{\alpha \to 0}{\sim} \alpha, \\ \sin(x + y) \underset{x + y \to 0}{\sim} (x + y) \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{x + y} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - xy + y^2}{1} = 0.$$

При розкладанні чисельника дробового виразу на множники скористались формулою суми кубів: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Відповідь: 0.

Приклад 1.6. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.

Розв'язання. Припустимо, що точка $P(x; y)$ наближається до початку координат $O(0;0)$ по прямих $y = ax$, які проходять через початок координат. Тоді маємо:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (y=ax)}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2ax^2}{x^2+a^2x^2} = \frac{2a}{1+a^2}.$$

Таким чином, наближаючись до початку координат по прямих $y = ax$ при різних значеннях a, отримаємо різні граничні значення. Це означає, що розглянута границя в точці $O(0;0)$ не існує.

Відповідь: границя не існує.

Для функцій декількох змінних вводиться також поняття повторної границі. Необхідність таких границь пов'язана з вивченням границь функцій при зміні тільки однієї незалежної змінної і фіксованих значеннях інших.

Розглянемо функцію $z = f(x,y)$ двох змінних, яка визначена в прямокутнику $Q = \{(x,y): |x-x_0| < d_1, |y-y_0| < d_2\}$ окрім, можливо, відрізків $x = x_0$ і $y = y_0$. При фіксованому значенні змінної y функція $f(x,y)$ стає функцією однієї змінної x. Нехай для будь-якого y, що задовольняє умові $0 < |y-y_0| < d_2$, існує границя функції $f(x,y)$ за умови $x \to x_0$:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y-\text{фікс.}}} f(x,y) = g(y),$$

тобто, у загальному випадку ця границя залежить від y. Далі, нехай існує границя функції $g(y)$ за умови $y \to y_0$:

$$\lim_{y\to y_0} g(y) = c.$$

В цьому випадку говорять, що в точці $P_0(x_0;y_0)$ існує повторна границя функції $f(x,y)$:

$$\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y) = c.$$

Аналогічно визначається границя $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$. Вказані повторні границі тоді і тільки тоді існують, співпадають і дорівнюють c, якщо в точці $P_0(x_0;y_0)$ існує границя $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = c$, а також існують внутрішні границі в обох повторних границях $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ і $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$.

Приклад 1.7. Обчислити повторні границі:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2} \text{ і } \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Розв'язання.

Маємо $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x-\text{фікс.}\\ x\neq y}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x^2}=0.$

Аналогічно, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=0.$

Відповідь: 0.

Зауваження. У **Прикладі 1.6** було доведено, що границя функції $f(x,y)$ в точці $O(0;0)$ не існує. Таким чином, можна зробити висновок, що з існування і рівності повторних границь функції в заданій точці не випливає існування границі функції в цій точці.

Означення. Функція $z=f(x,y)$ називається *неперервною в точці* $P_0(x_0;y_0)$, якщо вона визначена в деякому околі точки P_0 і

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0) \text{ або } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

Означення. Функція $z=f(x,y)$ називається *неперервною на деякій множині* D, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

Для неперервних функцій двох змінних, як і для функції однієї змінної, мають місце наступні теореми:

Теорема 1.1 (неперервність суми, добутку, частки). *Нехай функції* $u(x,y)$ *і* $v(x,y)$ *неперервні в точці* $P_0(x_0;y_0)$, *тоді функції* $u(x,y)\pm v(x,y)$, $u(x,y)\cdot v(x,y)$ *та* $\dfrac{u(x,y)}{v(x,y)}$ *також є неперервними в точці* $P_0(x_0;y_0)$, *а частка неперервна за умови* $v(x_0,y_0)\neq 0$.

Теорема 1.2 (неперервність складної функції). *Нехай функції* $u(x,y)$ *і* $v(x,y)$ *неперервні в точці* $P_0(x_0;y_0)$, *а функція* $z=f(u,v)$ *неперервна в точці* $Q_0(u(x_0,y_0);v(x_0,y_0))$, *тоді складна функція* $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ *також є неперервною в точці* $P_0(x_0;y_0)$.

Теорема 1.3 (властивості неперервних функцій в обмеженій замкненій області). *Нехай функція* $z=f(x,y)$ *неперервна в обмеженій замкненій області* $\bar{D}$, *тоді:*

1) *функція* $z=f(x,y)$ *обмежена в області* $\bar{D}$;

2) *функція* $z=f(x,y)$ *приймає свої найменше і найбільше значення в області* $\bar{D}$;

3) *нехай* m *– найменше, а* M *– найбільше значення функції* $z=f(x,y)$ *в області* $\bar{D}$. *Тоді для будь-якого* c, $m\le c\le M$, *існує точка* $P\in\bar{D}$, *в якій* $f(P)=c$, *тобто* $f(x,y)$ *приймає будь-яке проміжне значення в області* $\bar{D}$.

Приклад 1.8. Показати, що функція

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{якщо } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x^2+y^2=0\end{cases}$$

неперервна по кожній зі змінних x і y окремо.

Розв'язання. Нехай $y \neq 0$, x_0 – довільне фіксоване число. Тоді

$$\lim_{x \to x_0} f(x,y) = \lim_{x \to x_0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2x_0 y}{x_0^{\;2} + y^2} = f(x_0, y).$$

Якщо $y = 0$, то при будь-якому $x_0 \neq 0$ маємо: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x,0) = f(x_0,0) = 0.$ Крім того, якщо $y = 0$ і $x_0 = 0$, то $\lim\limits_{x \to 0} f(x,0) = f(0,0) = 0.$

Таким чином, при кожному фіксованому y функція $f(x,y)$ неперервна по змінній x. Оскільки функція $f(x,y)$ симетрична відносно x і y, то при кожному фіксованому x функція $f(x,y)$ неперервна по змінній y.

1.3. Частинні похідні функції двох змінних

Розглянемо функцію $z = f(x,y)$ двох змінних. Дамо приріст однієї зі змінних шляхом фіксації іншої змінної, і розглянемо наступні вирази:

$$f(x + \Delta x, y) - f(x,y) = \Delta_x z;$$

$$f(x, y + \Delta y) - f(x,y) = \Delta_y z;$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y) = \Delta z.$$

Величини $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ називаються *частинними приростами* за змінними x і y відповідно, а вираз Δz називається *повним приростом.*

Означення. Границя (якщо вона існує) $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ за умови $\Delta x \to 0$, називається *частинною похідною функції* $z = f(x,y)$ *за змінною* x і позначається одним з символів: $\dfrac{\partial z}{\partial x}, f'_x(x,y), z'_x$.

Таким чином,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Аналогічно, *частинна похідна за змінною* y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x,y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right)}{\Delta y}.$$

Приклад 1.9. Знайти частинні похідні функції $z=x^3-3y^2+5xy$.

Розв'язання. Застосуємо правила диференціювання суми функцій та виразів, що мають постійні множники. Частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial x}$ функції знайдемо за умовою, що $y=\text{const}$. Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^3-3y^2+5xy\right)'_x=3x^2-0+5y\cdot 1=3x^2+5y.$$

Аналогічно діємо при знаходженні частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial y}$, але тепер вважаємо, що $x=\text{const}$:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^3-3y^2+5xy\right)'_y=0-3\cdot 2y+5x\cdot 1=-6y+5x.$$

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+5y$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-6y+5x.$

Приклад 1.10. Знайти частинні похідні функції $z=\frac{3y-x}{x+5y}$.

Розв'язання. Використаємо правило диференціювання частки функцій.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{3y-x}{x+5y}\right)'_x=\frac{\left(3y-x\right)'_x\cdot\left(x+5y\right)-\left(3y-x\right)\cdot\left(x+5y\right)'_x}{\left(x+5y\right)^2}=\left\| y=\text{const}\right\|=$$

$$=\frac{\left(-1\right)\cdot\left(x+5y\right)-\left(3y-x\right)\cdot 1}{\left(x+5y\right)^2}=\frac{-x-5y-3y+x}{\left(x+5y\right)^2}=\frac{-8y}{\left(x+5y\right)^2}.$$

Аналогічно:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{3y-x}{x+5y}\right)'_y=\frac{\left(3y-x\right)'_y\cdot\left(x+5y\right)-\left(3y-x\right)\cdot\left(x+5y\right)'_y}{\left(x+5y\right)^2}=\left\| x=\text{const}\right\|=$$

$$=\frac{3\cdot(x+5y)-(3y-x)\cdot 5}{(x+5y)^2}=\frac{3x+15y-15y+5x}{(x+5y)^2}=\frac{8x}{(x+5y)^2}.$$

Відповідь: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-8y}{(x+5y)^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{8x}{(x+5y)^2}$.

Приклад 1.11. Довести, що $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{x}{y}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, якщо $z=e^{-\frac{y}{x}}$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^{-\frac{y}{x}}\right)'_x=\|\,y=\text{const}\,\|=e^{-\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{y}{x}\right)'_x=e^{-\frac{y}{x}}\cdot(-y)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{y}{x^2}\cdot e^{-\frac{y}{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^{-\frac{y}{x}}\right)'_y=\|\,x=\text{const}\,\|=e^{-\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{y}{x}\right)'_y=e^{-\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot 1=-\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{y}{x}}.$$

Підставимо знайдені похідні у задану рівність:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{x}{y}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2}\cdot e^{-\frac{y}{x}}\cdot\frac{x}{y}-\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{y}{x}}=\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{y}{x}}-\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{y}{x}}=0.$$

Рівність доведено.

1.4. Геометричний смисл частинних похідних функції $z=f(x,y)$

Відомо, що графік функції $z=f(x,y)$ являє собою певну поверхню (рис. 1.5).

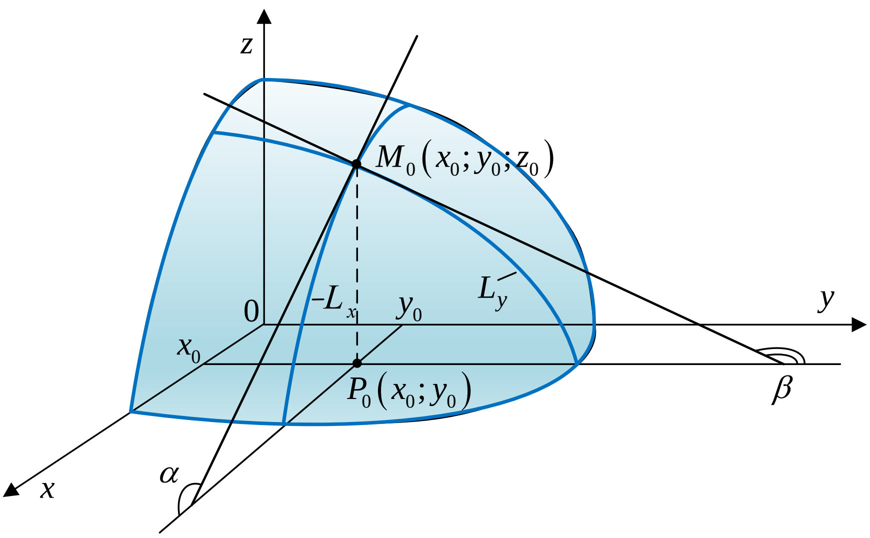


Рисунок 1.5

Виберемо на площині XOY довільну точку $P_0(x_0;y_0)$ і відповідну їй точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ на поверхні. Проведемо площину $y=y_0$ через точку M_0. У перерізі з поверхнею отримуємо лінію L_x. Тоді

$$\boxed{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} = \operatorname{tg}\alpha.} \tag{1.5}$$

Аналогічним чином при побудові площини $x=x_0$ в перерізі з поверхнею отримуємо лінію L_y і

$$\boxed{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} = \operatorname{tg}\beta\,.} \tag{1.6}$$

Приклад 1.12. Який кут утворює з додатним напрямом осі ординат

дотична до лінії $\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2}, \\ x=1 \end{cases}$ в точці $M_0\left(1;1;\sqrt{3}\right)$?

Розв'язання. За формулою (1.6) маємо: $\operatorname{tg}\beta = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}$, точка $P_0(1;1)$.

Оскільки $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, то $\operatorname{tg}\beta=\left.\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right|_{P_0}=\frac{1}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

тобто $\operatorname{tg}\beta=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, значить, $\beta=\frac{\pi}{6}$.

Відповідь: $\beta=\frac{\pi}{6}$.

1.5. Диференціал функцій двох змінних

Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена в деякому δ-околі точки $P(x;y)$.

Означення. Функція $z = f(x,y)$ називається *диференційованою в точці* $P(x;y)$, якщо її повний приріст може бути представлений в наступному вигляді:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \tag{1.7}$$

де $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, A і B величини, які не залежать від $\Delta x, \Delta y$.

Приріст Δz складається з двох частин: основна частина приросту $A\Delta x + B\Delta y,$ лінійна по відношенню до $\Delta x, \Delta y,$ і нелінійна частина $o(\rho)$ – нескінченно мала більш високого порядку, ніж ρ.

Основна частина приросту $A\Delta x + B\Delta y$ називається *повним диференціалом функції* $z = f(x,y)$ і позначається символом dz. Тобто,

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \tag{1.8}$$

Таким чином, у випадку диференційованої функції маємо:

$$\Delta z = dz + o(\rho).$$

Теорема 1.4 (достатня умова існування частинних похідних). *Нехай функція $z = f(x,y)$ диференційована в точці $P(x;y)$. Тоді в заданій точці існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, більш того:*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

Таким чином, вираз (1.8) має вигляд

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Як і у випадку функції однієї змінної, під диференціалами dx, dy незалежних змінних розуміють довільні прирости $\Delta x, \Delta y$. Тоді

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\,.} \tag{1.9}$$

Вирази $\frac{\partial z}{\partial x}dx$ і $\frac{\partial z}{\partial y}dy$ називаються *частинними диференціалами функції* $z = f(x, y)$ *за змінними* x *і* y відповідно і позначаються $d_x z$ і $d_y z$.

Аналогічно, *диференціал функції* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ має наступний вид:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\,.$$

Теорема 1.5 (достатня умова диференційованості функції). *Нехай функція* $z = f(x, y)$ *має частинні похідні в деякому околі точки* $P(x; y)$, *неперервні в самій точці* $P(x; y)$, *тоді вона диференційована в заданій точці.*

Приклад 1.13. Знайти повний диференціал функції $z = \frac{x^3}{y^2}$.

Розв'язання. Повний диференціал функції знайдемо за формулою (1.9). Частинні похідні заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{x^3}{y^2}\right)'_x = \| y = \text{const} \| = \frac{1}{y^2}\cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{y^2}.$$

Аналогічно, $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{x^3}{y^2}\right)'_y = \| x = \text{const} \| = x^3 \cdot \left(-2y^{-3}\right) = -\frac{2x^3}{y^3}.$

Тоді повний диференціал заданої функції має вигляд:

$$dz = \frac{3x^2}{y^2}dx - \frac{2x^3}{y^3}dy\,.$$

Відповідь: $dz = \frac{3x^2}{y^2}dx - \frac{2x^3}{y^3}dy$.

Приклад 1.14. Знайти частинні диференціали функції $z = \ln\frac{y}{x}$.

Розв'язання. Частинні диференціали знайдемо за формулами:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx,\ \ d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Попередньо спростимо задану функцію, використовуючи властивість логарифмів: $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$. Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\frac{y}{x}\right)'_x = (\ln y - \ln x)'_x = \| y = \text{const} \| = 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\ln y - \ln x)'_y = \| x = \text{const} \| = \frac{1}{y} - 0 = \frac{1}{y}.$$

Відповідь: $d_x z = -\frac{dx}{x},\ \ d_y z = \frac{dy}{y}$.

1.6. Застосування повного диференціала до наближених обчислень

Розглянемо диференційовану функцію $z = f(x, y)$. Повний її приріст Δz виражається формулою

$$\Delta z = dz + o(\rho).$$

При достатньо малих $\Delta x, \Delta y$

$$\Delta z \approx dz. \tag{1.10}$$

Запишемо рівняння (1.10) в розгорнутому вигляді:

$$z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x, y) \approx \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\Delta y.$$

Звідки

$$\boxed{z(x+\Delta y, y+\Delta y) \approx z(x,y) + \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\Delta y.} \tag{1.11}$$

Формула (1.11) може бути використана для апроксимації значення функції двох змінних в точці $P_1(x+\Delta x; y+\Delta y)$, достатньо близькій до точки $P(x; y)$.

Приклад 1.15. Обчислити наближене значення виразу $\frac{\sqrt{9{,}03}}{(0{,}49)^2}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $z=\frac{\sqrt{x}}{y^2}$. Виберемо $x=9,\quad y=\frac{1}{2},$ тоді $\Delta x=0{,}03,\ \Delta y=-0{,}01$. Наближене значення заданого виразу знайдемо за формулою (1.11).

Частинні похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)'_x=\frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)'_y=\sqrt{x}\cdot\left(-2y^{-3}\right)=-\frac{2\sqrt{x}}{y^3},$$

обчислимо їх значення при відомих значеннях x та y:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=9\\ y=\frac{1}{2}}}=\left.\frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{\substack{x=9\\ y=\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{2}{3},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=9\\ y=\frac{1}{2}}}=-\left.\frac{2\sqrt{x}}{y^3}\right|_{\substack{x=9\\ y=\frac{1}{2}}}=-\frac{2\sqrt{9}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=-48.$$

Відповідне значення функції: $\quad z\Big|_{\substack{x=9\\ y=\frac{1}{2}}}=\left.\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right|_{\substack{x=9\\ y=\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{9}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=12.$

Тоді наближене значення заданого виразу:

$$\frac{\sqrt{9{,}03}}{(0{,}49)^2}\approx 12+\frac{2}{3}\cdot 0{,}03-48\cdot(-0{,}01)=12+0{,}02+0{,}48=12{,}5.$$

До речі, значення заданого виразу, що обчислено за допомогою калькулятора:

$$\frac{\sqrt{9{,}03}}{(0{,}49)^2}\approx 12{,}5156011.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{9{,}03}}{(0{,}49)^2}\approx 12{,}5.$

Контрольні запитання

1. Дайте означення: а) m-вимірної кулі; б) m-вимірної сфери; в) ε- околу точки в m-вимірному просторі.

2. Дайте означення околу точки.

3. Сформулюйте означення неперервної на заданій множині функції.

4. Які точки називаються точками розриву функції $U = f\left(M\right)$? Наведіть приклади точок розриву функцій двох та трьох змінних.

5. Сформулюйте означення обмеженої функції на заданій множині.

6. Сформулюйте означення границі функції $f\left(x,y\right)$ в точці $P_0\left(x_0;y_0\right)$.

7. Що таке повний приріст функції $f\left(x,y\right)$ в точці $P_0\left(x_0;y_0\right)$?

8. Запишіть вираз для повного приросту функції $U = xy$ в точці $P(1;2)$ через прирости Δx та Δy її аргументів.

9. Що називається частинним приростом функції $f\left(x,y\right)$, $f\left(x,y,z\right)$? Запишіть частинні прирости функції $U = xy$ в точці $P(1;2)$.

10. Сформулюйте теорему об арифметичних діях над неперервними функціями.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти область визначення функції $z = \dfrac{\ln\left(2-x\right)}{\sqrt{y-x}}$.

2. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin 2xy}{y}$.

3. Знайти частинні похідні першого порядку функції $z = x^3 + \dfrac{y^2}{6} + 5\sqrt{xy}$.

4. Який кут утворює з додатним напрямом осі ординат дотична до лінії

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2, \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{у точці } M_0\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right).$$

5. Довести, що $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, якщо $z = e^{\frac{y}{x}}$.

6. Знайти повний диференціал функції $z=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$ в точці $P_0(-1;1)$.

7. Знайти область визначення функції $z=\sqrt{\ln\left(y^2-3x+7\right)}-\dfrac{1}{x-y}$.

8. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\left(1+x^2y^2\right)^{\frac{y}{xy^2+x^3}}$.

9. Знайти частинні похідні першого порядку функції

$$z=\cos(3x-y)+\ln\sqrt[3]{x^2-y^2}.$$

10. Який кут утворює з додатним напрямом осі абсцис дотична до лінії

$$\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4}, \\ y=4 \end{cases} \text{ в точці } M_0(2;4;5)?$$

11. Довести, що $\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\dfrac{1}{y^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=8\cos^2\left(x^2+y^2\right)$, якщо $z=\sin\left(x^2+y^2\right)$.

12. Знайти повний диференціал функції $u=\cos(xy+yz)$ в точці $M_0\left(\dfrac{\pi}{6};1;\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Відповіді

1. Частина площини XOY, що знаходиться вище прямої $y=x$ та зліва від прямої $x=2$. **2**. 0. **3**. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2+\dfrac{5}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{y}{x}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{3}+\dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$. **4**. 135^0. **6**. $dz\big|_{P_0}=dx$.

7. Частина площини XOY, що знаходиться зовні параболи $y^2=3(x-2)$, без точок, в яких $x=y$. Точки параболи належать області визначення. **8**. 1.

9. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-3\sin(3x-y)+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2x}{x^2-y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin(3x-y)-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2y}{x^2-y^2}$.

10. 45^0. **12**. $du\big|_{M_0}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(dx+\dfrac{\pi}{3}dy+dz\right)$.

2. Диференціювання складної та неявно заданої функції. Рівняння дотичної та нормалі до поверхні. Частинні похідні і диференціали вищих порядків

2.1. Диференціювання складної функції

1. Розглянемо функцію $z = f(x,y)$ в деякій відкритій області *D*. Нехай змінні x, y є функціями змінної t в деякому інтервалі, тобто $z = f(x,y),\quad x = x(t),\quad y = y(t)$ там, де $a \le t \le b$.

Підставляючи значення $(x(t), y(t))$ у вираз функції $z = f(x,y)$, отримаємо складну функцію $z = f\left[x(t), y(t)\right]$.

Теорема 2.1. *Нехай функція $z = f(x,y)$ має в області D неперервні частинні похідні z'_x і z'_y, і існують похідні $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ на $[a,b]$, тоді існує похідна $\frac{dz}{dt}$ складної функції на $[a,b]$, обчислена за формулою*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \tag{2.1}$$

Приклад 2.1. Знайти похідну $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = e^{x^2+y}$, $x = t^2$, $y = \cos 2t$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу (2.1), отримуємо:

$$\frac{dz}{dt} = e^{x^2+y}\cdot 2x\cdot 2t + e^{x^2+y}\cdot 1\cdot(-2\sin 2t) =$$

$$= e^{t^4+\cos 2t}\cdot 2t^2\cdot 2t + e^{t^4+\cos 2t}\cdot(-2\sin 2t) = 2e^{t^4+\cos 2t}\left(2t^3 - \sin 2t\right).$$

Відповідь: $2e^{t^4+\cos 2t}\left(2t^3 - \sin 2t\right)$.

2. Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, за умови, що $y = y(x)$, і обчислимо $\frac{dz}{dx}$, застосовуючи формулу (2.1):

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx},$$

звідки

$$\boxed{\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.} \qquad (2.2)$$

Приклад 2.2. Знайти похідну $\frac{dz}{dx}$, якщо $z=x^3+2xy^4+\cos y,\ \ y=2x^2+e^x$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (2.2):

$$\frac{dz}{dx}=3x^2+2y^4+\left(8xy^3-\sin y\right)\left(4x+e^x\right)=\left\|y=2x^2+e^x\right\|=$$

$$=3x^2+2\left(2x^2+e^x\right)^4+\left(8x\left(2x^2+e^x\right)^3-\sin\left(2x^2+e^x\right)\right)\left(4x+e^x\right).$$

Відповідь: $3x^2+2\left(2x^2+e^x\right)^4+\left(8x\left(2x^2+e^x\right)^3-\sin\left(2x^2+e^x\right)\right)\left(4x+e^x\right)$.

3. Розглянемо випадок, коли $x,\ y$ залежать не від однієї змінної t, а від декількох, наприклад $x=x(u,v),\ y=y(u,v)$. Складна функція набуває вигляду

$$z=f\left[x(u,v),y(u,v)\right].$$

Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v}$ обчислюються за такими формулами:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.} \qquad (2.3)$$

Приклад 2.3. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z=\sin(2x-3y)$, $x=u^2-v^2,\ \ y=uv$.

Розв'язання. Застосуємо формули (2.3): $\frac{\partial z}{\partial v}=-\cos(2x-3y)\cdot(3u+4v)$;

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\cos(2x-3y)\cdot 2\cdot 2u+\cos(2x-3y)\cdot(-3)\cdot v=\cos(2x-3y)\cdot(4u-3v).$$

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial u}=\cos(2x-3y)\cdot(4u-3v)$; $\frac{\partial z}{\partial v}=-\cos(2x-3y)\cdot(3u+4v)$.

Розглянемо складну функцію

$$z = f\left[x(u,v), y(u,v)\right] \tag{2.4}$$

і припустимо, що частинні похідні $z'_x, z'_y, x'_u, x'_v, y'_u, y'_v$ є неперервними. Відомо, що диференціал функції $z = f(x,y)$, де x, y незалежні змінні, має вигляд $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Можна довести, що диференціал складної функції (2.4) має таку ж форму, тобто і в даному випадку $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

2.2. Диференціювання функцій, що задані неявно

Неявна функція двох змінних задається рівнянням

$$F(x,y,z) = 0, \tag{2.5}$$

що зв'язує три змінні.

Теорема 2.2 (існування неявної функції). *Нехай функція $F(x,y,z)$ неперервна разом з її частинними похідними в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і $F(x_0,y_0,z_0)=0$, а $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, тоді рівняння* (2.5) *має єдиний розв'язок $z = z(x,y)$, неперервний в околі точки $P_0(x_0;y_0)$, такий, що $z(x_0,y_0)=z_0$. Більш того, функція $z = z(x,y)$ має неперервні частинні похідні.*

Знайдемо частинні похідні z'_x і z'_y.

Якщо підставити $z = z(x,y)$ в рівняння (2.5) замість z, отримаємо тотожність

$$F\left[x, y, z(x,y)\right] \equiv 0.$$

Обчислимо диференціал лівої і правої частин:

$$dF = F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0,$$

звідки

$$dz = -\frac{F'_x}{F'_z}dx - \frac{F'_y}{F'_z}dy. \tag{2.6}$$

Але, з іншого боку,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (2.7)$$

Порівнюючи рівняння (2.6) і (2.7), отримуємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \qquad (2.8)$$

Зауваження. Розглядаючи окремий випадок для неявно заданої функції $f(x,y)=0$ однієї змінної, отримуємо:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}. \qquad (2.9)$$

Приклад 2.4. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ функції $y(x)$, що задана неявно рівнянням $x^2y + \ln(x-y) = 5.$

Розв'язання. Функція $y = y(x)$ задана неявно рівнянням $f(x,y) = x^2y + \ln(x-y) - 5$. Похідну $\frac{dy}{dx}$ знайдемо за формулою (2.9):

Знайдемо частинні похідні функції $f(x,y)$:

$$f'_x = \left(x^2y + \ln(x-y) - 5\right)'_x = \left\| y = \text{const} \right\| =$$

$$= 2x \cdot y + \frac{1}{x-y} \cdot (x-y)'_x - 0 = 2xy + \frac{1}{x-y},$$

$$f'_y = \left(x^2y + \ln(x-y) - 5\right)'_y = \left\| x = \text{const} \right\| =$$

$$= x^2 \cdot 1 + \frac{1}{x-y} \cdot (x-y)'_y - 0 = x^2 - \frac{1}{x-y}.$$

Тоді похідна неявно заданої функції: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + \frac{1}{x-y}}{x^2 - \frac{1}{x-y}} = -\frac{2xy \cdot (x-y) + 1}{x^2 \cdot (x-y) - 1}.$

Відповідь: $-\frac{2xy \cdot (x-y) + 1}{x^2 \cdot (x-y) - 1}.$

Приклад 2.5. Знайти похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = z(x, y)$, що задана неявно рівнянням $x^2 + y^2 - z^2 + 3xyz + 1 = 0$.

Розв'язання. Функція $z = z(x, y)$ задана неявно рівнянням

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 3xyz + 1.$$

Похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ знайдемо за формулами (2.8): $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'_x}{F'_z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F'_y}{F'_z}$.

Частинні похідні функції $F(x, y, z)$:

$$F'_x = \left(x^2 + y^2 - z^2 + 3xyz + 1\right)'_x = \| y, z = \text{const} \| = 2x + 3yz,$$

$$F'_y = \left(x^2 + y^2 - z^2 + 3xyz + 1\right)'_y = \| x, z = \text{const} \| = 2y + 3xz,$$

$$F'_z = \left(x^2 + y^2 - z^2 + 3xyz + 1\right)'_z = \| x, y = \text{const} \| = -2z + 3xy.$$

Тоді похідні неявно заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x + 3yz}{-2z + 3xy} = \frac{2x + 3yz}{2z - 3xy}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y + 3xz}{-2z + 3xy} = \frac{2y + 3xz}{2z - 3xy}.$$

Відповідь: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x + 3yz}{2z - 3xy}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y + 3xz}{2z - 3xy}$.

2.3. Рівняння дотичної та нормалі до поверхні

Нехай поверхня S задається рівнянням $F(x, y, z) = 0$.

Означення. *Дотична площина* до поверхні S в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ є площиною, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і містить всі дотичні прямі до кривих, що проходять через точку M_0 і лежать на поверхні (рис. 2.1).

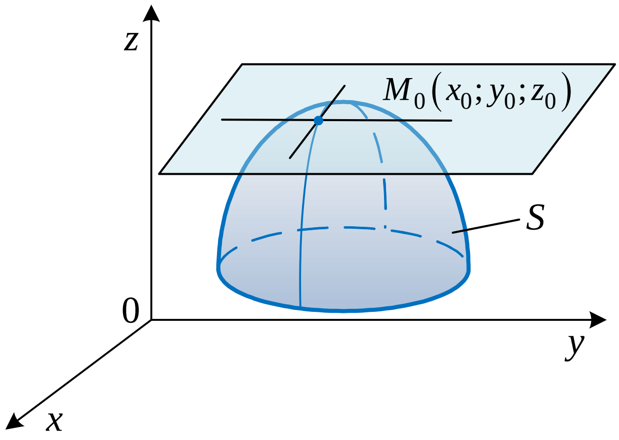


Рисунок 2.1

Теорема 2.3. *Нехай функція $F(x,y,z)$ диференційована в точці M_0 і принаймні одна з її частинних похідних в цій точці не дорівнює нулю. Тоді рівняння дотичної площини набуває вигляду*

$$F'_x\big|_{M_0}(x-x_0)+F'_y\big|_{M_0}(y-y_0)+F'_z\big|_{M_0}(z-z_0)=0. \qquad (2.10)$$

З'ясуємо, який вигляд має рівняння дотичної площини на випадок, коли поверхня задана рівнянням

$$z=f(x,y). \qquad (2.11)$$

Перепишемо рівняння (2.11) наступним чином:

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0.$$

Звідки $F'_x=-f'_x,\ \ F'_y=-f'_y,\ \ F'_z=1$. Тоді з рівняння (2.10), отримуємо:

$$z-z_0=f'_x\big|_{P_0}(x-x_0)+f'_y\big|_{P_0}(y-y_0). \qquad (2.12)$$

Означення. Пряма, що проходить через точку дотику, перпендикулярно дотичній площині, називається *нормаллю* до поверхні.

Очевидно, що нормальний вектор дотичної площини є напрямним вектором нормалі, тому *рівняння нормалі* набуде вигляду

$$\frac{x-x_0}{F'_x\big|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{F'_y\big|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{F'_z\big|_{M_0}} \qquad (2.13)$$

у випадку неявно заданої функції, і

$$\boxed{\frac{x-x_0}{f'_x\big|_{P_0}}=\frac{y-y_0}{f'_y\big|_{P_0}}=\frac{z-z_0}{-1}} \qquad (2.14)$$

– *у разі її явного завдання*.

Приклад 2.6. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z=(x+3)^3+(2y-1)^3-4$ у точці $P_0(-2;1)$.

Розв'язання. Поверхня задана явно рівнянням $z=f(x,y)$, тому для складання рівнянь дотичної площини та нормалі скористаємось формулами (2.12) і (2.14).

Знайдемо частинні похідні від заданої функції:

$$f'_x=\left((x+3)^3+(2y-1)^3-4\right)'_x=\|\, y=\text{const}\,\|=3(x+3)^2,$$

$$f'_y=\left((x+3)^3+(2y-1)^3-4\right)'_y=\|\, x=\text{const}\,\|=3\cdot(2y-1)^2\cdot 2=6(2y-1)^2.$$

Значення частинних похідних у точці P_0:

$$f'_x(P_0)=3(x+3)^2\Big|_{x=-2}=3(-2+3)^2=3,$$

$$f'_y(P_0)=6(2y-1)^2\Big|_{y=1}=6(2\cdot 1-1)^2=6.$$

Обчислимо координату z_0 точки дотику на заданій поверхні:

$$z_0=(x_0+3)^3+(2y_0-1)^3-4=(-2+3)^3+(2\cdot 1-1)^3-4=-2.$$

Тоді з рівняння (2.12) маємо:

$$z-(-2)=3\cdot(x-(-2))+6\cdot(y-1),\text{ або } 3x+6y-z-2=0$$

– рівняння дотичної площини, а з рівняння (2.14)

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{6}=\frac{z+2}{-1} \text{ – рівняння нормалі.}$$

Відповідь: рівняння дотичної площини: $3x+6y-z-2=0$;

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{6}=\frac{z+2}{-1} \text{ – рівняння нормалі.}$$

Приклад 2.7. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^3+2y^2-z^2+1=0$ в точці $M_0(-2;2;1)$.

Розв'язання. Оскільки функція $z=f(x,y)$ задана неявно, скористаємось формулами (2.10) і (2.13). Знайдемо частинні похідні:

$$F'_x\big|_{M_0}=3x^2\big|_{M_0}=12,\ F'_y\big|_{M_0}=4y\big|_{M_0}=8,\ F'_z\big|_{M_0}=-2z\big|_{M_0}=-2.$$

Підставляючи в рівняння (2.10), отримуємо:

$12(x+2)+8(y-2)-2(z-1)=0$ або $6x+4y-z+5=0$.

Відповідно, рівняння нормалі набуває вигляду $\dfrac{x+2}{6}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Відповідь: рівняння дотичної площини: $6x+4y-z+5=0$;

$\dfrac{x+2}{6}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-1}{-1}$ – рівняння нормалі.

Зауваження. **Приклад 2.6** теж можна було розв'язувати, використовуючи формули для випадку неявного завдання поверхні. Для цього рівняння поверхні $z=f(x,y)$ достатньо переписати у вигляді $F(x,y,z)=z-f(x,y)$, а потім скористатись формулами (2.10) і (2.13).

2.4. Частинні похідні і диференціали вищих порядків

2.4.1. *Частинні похідні вищих порядків*

Нехай функція $z=f(x,y)$ має частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Ці похідні, самі по собі є функціями x і y, також можуть мати частинні похідні, які називаються *частинними похідними другого порядку* функції $z=f(x,y)$.

Символічні позначення:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y).$$

Аналогічно визначаються частинні похідні третього, четвертого та вищих порядків.

Частинні похідні вищого порядку, взяті за різними змінними, називаються *мішаними частинними похідними*, наприклад,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},\ldots$$

Приклад 2.8. Знайти частинні похідні другого порядку функції

$$z=3x^2+5y^4-10x\sqrt{y}+7.$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо похідні першого порядку:

$$z'_x=\left(3x^2+5y^4-10x\sqrt{y}+7\right)'_x=\|\, y=\text{const}\,\|=6x-10\sqrt{y},$$

$$z'_y=\left(3x^2+5y^4-10x\sqrt{y}+7\right)'_y=\|\, x=\text{const}\,\|=20y^3-\frac{5x}{\sqrt{y}}.$$

Похідні другого порядку знаходимо як похідні від похідних першого порядку за відповідною змінною:

$$z''_{xx}=\left(6x-10\sqrt{y}\right)'_x=\|\, y=\text{const}\,\|=6,$$

$$z''_{xy}=\left(6x-10\sqrt{y}\right)'_y=\|\, x=\text{const}\,\|=-10\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=-\frac{5}{\sqrt{y}},$$

$$z''_{yx}=\left(20y^3-\frac{5x}{\sqrt{y}}\right)'_x=\|\, y=\text{const}\,\|=-\frac{5}{\sqrt{y}},$$

$$z''_{yy}=\left(20y^3-\frac{5x}{\sqrt{y}}\right)'_y=\|\, x=\text{const}\,\|=20\cdot 3y^2-5x\cdot\left(-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\right)=60y^2+\frac{5x}{2\sqrt{y^3}}.$$

Відповідь: $z''_{xx}=6,\ z''_{xy}=z''_{yx}=-\dfrac{5}{\sqrt{y}},\ z''_{yy}=60y^2+\dfrac{5x}{2\sqrt{y^3}}.$

Приклад 2.9. Для функції $z=\ln\sqrt{4x-3y}$ перевірити, що $z''_{xy}=z''_{yx}$.

Розв'язання. Очевидно, $4x-3y>0$. Спростимо задану функцію, використавши наступну властивість логарифмів: $\ln a^b = b\ln a$. Маємо

$$\ln\sqrt{4x-3y}=\ln\left(4x-3y\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln\left(4x-3y\right).$$

Знайдемо похідні першого порядку:

$$z'_x=\left(\frac{1}{2}\ln\left(4x-3y\right)\right)'_x=\left\| y=\text{const}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4x-3y}\cdot\left(4x-3y\right)'_x=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\left(4x-3y\right)}\cdot 4=\frac{2}{4x-3y},$$

$$z'_y=\left(\frac{1}{2}\ln\left(4x-3y\right)\right)'_y=\left\| x=\text{const}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4x-3y}\cdot\left(4x-3y\right)'_y=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\left(4x-3y\right)}\cdot\left(-3\right)=\frac{-3}{2\cdot\left(4x-3y\right)}.$$

Тоді мішані похідні другого порядку мають вигляд:

$$z''_{xy}=\left(\frac{2}{4x-3y}\right)'_y=\left\| x=\text{const}\right\|=2\cdot\left(\left(4x-3y\right)^{-1}\right)'_y=$$

$$=2\cdot\frac{-1}{\left(4x-3y\right)^2}\cdot\left(4x-3y\right)'_y=\frac{-2}{\left(4x-3y\right)^2}\cdot\left(-3\right)=\frac{6}{\left(4x-3y\right)^2},$$

$$z''_{yx}=\left(\frac{-3}{2\cdot\left(4x-3y\right)}\right)'_x=\left\| y=\text{const}\right\|=-\frac{3}{2}\cdot\left(\left(4x-3y\right)^{-1}\right)'_x=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot\frac{-1}{\left(4x-3y\right)^2}\cdot\left(4x-3y\right)'_x=\frac{3}{2\cdot\left(4x-3y\right)^2}\cdot 4=\frac{6}{\left(4x-3y\right)^2}.$$

Бачимо, що знайдені мішані похідні рівні, в чому й потрібно було пересвідчитись.

Теорема 2.4 (про рівність мішаних похідних). *Якщо в точці* $P(x;y)$ *існують і неперервні мішані похідні* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ *і* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, *то вони рівні між собою*.

Аналогічна теорема має місце для мішаних похідних будь-якого порядку.

2.4.2. *Диференціали вищих порядків*

Розглянемо функцію $z = f(x,y)$. Якщо x, y незалежні змінні, то $dx,\ dy$ є константами, тоді диференціал $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ функції $z = f(x,\ y)$ буде функцією змінних $x,\ y$. Тому *можна говорити про диференціал диференціалу функції, який називається диференціалом функції другого порядку*.

Аналогічним чином визначаються *диференціали вищих порядків*. Символічно вони позначаються наступним чином:

$$d(dz) = d^2 z, \quad d\left(d^2 z\right) = d^3 z, \ldots, \quad d\left(d^{k-1} z\right) = d^k z.$$

Нехай функція $z = f(x,y)$ неперервна разом зі своїми частинними похідними до порядку k включно. Якщо x, y незалежні змінні, то dx, dy – константи, отже,

$$d^2 x = d^3 x = \ldots = d^k x = 0,$$
$$d^2 y = d^3 y = \ldots = d^k y = 0.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} d^2 z &= d\left(z'_x dx + z'_y dy\right) = \left(z'_x dx + z'_y dy\right)'_x dx + \left(z'_x dx + z'_y dy\right)'_y dy = \\ &= z''_{xx} dx^2 + z''_{yx} dydx + z''_{xy} dxdy + z''_{yy} dy^2 = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dxdy + z''_{yy} dy^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Неважко показати, що

$$d^3 z = z'''_{xxx} dx^3 + 3z'''_{xxy} dx^2 dy + 3z'''_{xyy} dxdy^2 + z'''_{yyy} dy^3.$$

Приклад 2.10. Знайти повний диференціал другого порядку функції $z=\sin(ax+by)$.

Розв'язання. Повний диференціал другого порядку заданої функції знайдемо за формулою (2.15).

Похідні першого порядку:

$$z'_x=\left(\sin(ax+by)\right)'_x=\|a,b,y=\text{const}\|=a\cos(ax+by),$$

$$z'_y=\left(\sin(ax+by)\right)'_y=\|a,b,x=\text{const}\|=b\cos(ax+by).$$

Похідні другого порядку:

$$z''_{xx}=\left(a\cos(ax+by)\right)'_x=\|a,b,y=\text{const}\|=-a^2\cdot\sin(ax+by),$$

$$z''_{xy}=\left(a\cos(ax+by)\right)'_y=\|a,b,x=\text{const}\|=-ab\cdot\sin(ax+by),$$

$$z''_{yx}=\left(b\cos(ax+by)\right)'_x=\|a,b,y=\text{const}\|=-ab\cdot\sin(ax+by),$$

$$z''_{yy}=\left(b\cos(ax+by)\right)'_y=\|a,b,x=\text{const}\|=-b^2\cdot\sin(ax+by).$$

Тоді повний диференціал другого порядку заданої функції набуває вигляду:

$$d^2z=-a^2\cdot\sin(ax+by)dx^2-2ab\cdot\sin(ax+by)dxdy-b^2\cdot\sin(ax+by)dy^2=$$
$$=-\sin(ax+by)\cdot\left(a^2dx^2+2abdxdy+b^2dy^2\right).$$

Контрольні запитання

1. Дайте означення частинних похідних другого порядку функції $f(x,y)$.

2. Яка частинна похідна другого порядку функції $f(x,y)$ називається мішаною? Скільки їх?

3. Сформулюйте теорему о рівності мішаних частинних похідних другого порядку функції $f(x,y)$.

4. Сформулюйте теорему о незалежності n-х мішаних частинних похідних функції $f(x,y)$ від порядку диференціювання. Доведіть, що $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$.

5. Дайте означення диференціалу другого порядку функції $f(x,y)$.

6. Яка функція називається неявною? Наведіть приклади рівнянь виду $f(x,y)=0$ або виду $F(x,y,z)=0$, що визначають неявно задану функцію.

7. Наведіть рівняння дотичної і нормалі до поверхні, що задана рівнянням $z=f(x,y)$ в точці $P_0(x_0;y_0)$.

8. Наведіть рівняння дотичної і нормалі до поверхні, що задана неявно рівнянням $F(x,y,z)=0$, в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти похідну $\dfrac{dz}{dx}$ функції $z=4x\cdot e^{y}$, якщо $y=\operatorname{tg}3x$.

2. Знайти похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функції $z=u^3+2v$, якщо $u=e^{x+y}$, $v=3x-4y$.

3. Знайти похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функції $x^2+y^2=\sin(x-2z)$.

4. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^2+3y^2-4z+5xy+9=0$ у точці $M_0(1;-2;3)$.

5. Знайти похідні другого порядку функції $z=3x^2+2y^4-8xy^2-1$.

6. Знайти похідну $\dfrac{dz}{dt}$ функції $z=\left(x^2+y^2\right)\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, якщо $x=\cos 2t$, $y=\sin 2t$.

7. Знайти похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функції $z=u^3\cdot\cos 2v$, якщо $u=e^{x+y}$, $v=3x-4y$.

8. Знайти похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функції $\sqrt{x^2-y^2}=\sin(2x+3z)$.

9. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=-3$ у точці $M_0(1;2;-4)$.

10. Для функції $z=\arccos(x+y)$ перевірити, що $z''_{xy}=z''_{yx}$.

Відповіді

1. $4e^{\operatorname{tg}3x}\left(1+\dfrac{3x}{\cos^2 3x}\right)$. **2**. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3e^{3(x+y)}+6$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3e^{3(x+y)}-8$.

3. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{\cos(x-2z)}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{\cos(x-2z)}$.

4. Рівняння дотичної площини: $8x+7y+4z-6=0$;

рівняння нормалі: $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+2}{7}=\dfrac{z-3}{4}$.

5. $z''_{xx}=6$; $z''_{xy}=z''_{yx}=-16y$; $z''_{yy}=24y^2-16x$. **6**. 2.

7. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3e^{3(x+y)}\cdot\left(\cos(6x-8y)-2\cdot\sin(6x-8y)\right)$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{3(x+y)}\cdot\left(3\cos(6x-8y)+8\sin(6x-8y)\right)$.

8. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x-2\sqrt{x^2-y^2}\cdot\cos(2x+3z)}{3\sqrt{x^2-y^2}\cdot\cos(2x+3z)}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{3\sqrt{x^2-y^2}\cdot\cos(2x+3z)}$.

9. Рівняння дотичної площини: $4x+z=0$;

рівняння нормалі: $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z+4}{1}$.

3. Екстремум функції двох змінних. Найбільше та найменше значення функції двох змінних в замкненій області

Одним з основних застосувань диференціального числення є задача дослідження функції на екстремум. Означення екстремуму функції $z = f(P)$ двох змінних в точці $P_0(x_0; y_0)$ відповідає означенню екстремуму функції однієї змінної. Крім того, з означення витікає, що точка $P_0(x_0; y_0)$ є внутрішньою точкою області визначення функції.

3.1. Екстремум функції двох змінних

Позначимо δ-окіл точки P_0 через $O(P_0, \delta)$.

Означення. *Точкою максимуму (мінімуму) функції* $z = f(P)$ називається точка P_0, якщо існує такий δ-окіл точки P_0, в якому виконується (крім самої точки) нерівність

$$f(P) < f(P_0) \quad \left(f(P) > f(P_0)\right) \quad \forall P \in O(P_0, \delta).$$

Точки максимуму і мінімуму функції називаються її *точками екстремуму*.

3.1.1. *Необхідні умови існування екстремуму функції двох змінних*

Теорема 3.1. *Нехай функція* $z = f(x, y)$ *диференційована в точці* $P_0(x_0; y_0)$ *і має екстремум в цій точці, тоді*

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Дійсно, припустимо, що функція $z = f(x, y)$ має в точці $P_0(x_0; y_0)$ екстремум.

З означення екстремуму випливає, що функція $z = f(x, y)$ при $y = y_0$ як функція однієї змінної x досягає екстремуму при $x = x_0$. Але для функції $f(x, y_0)$ однієї змінної, як відомо, це означає, що $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} = 0$.

Аналогічно, функція $z = f(x, y)$ при $x = x_0$ як функція однієї змінної y досягає екстремуму при $y = y_0$. Це означає, що $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} = 0$.

Означення. Точки, в яких частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = f(x, y)$ дорівнюють нулю, називаються *критичними або стаціонарними точками*.

Однак бувають випадки, коли в деяких точках якихось частинних похідних функції декількох змінних не існує, а решта дорівнюють нулю. І в таких точках (поряд зі стаціонарними) можливий екстремум.

Приклад 3.1. Знайти стаціонарні точки функції

$$z = 4x^3 + y^2 - 2x^2 + 4xy - 5.$$

Розв'язання. Знайдемо точки, в яких виконується необхідна умова існування екстремуму (стаціонарні точки). Для цього знайдемо частинні похідні заданої функції:

$$z'_x = \left(4x^3 + y^2 - 2x^2 + 4xy - 5\right)'_x = 12x^2 - 4x + 4y,$$

$$z'_y = \left(4x^3 + y^2 - 2x^2 + 4xy - 5\right)'_y = 2y + 4x.$$

Складемо та розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 12x^2 - 4x + 4y = 0, \\ 2y + 4x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - x + y = 0, \\ y = -2x, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = x, \\ y = -2x. \end{cases}$$

Система має два розв'язки, а саме

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = -2. \end{cases}$$

Відповідь: точки $P_1(0;0)$ і $P_2(1;-2)$ – стаціонарні.

З'ясуємо, в чому полягає ***геометричний смисл*** необхідних умов існування екстремумів функції. Рівняння (2.12) дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $P_0(x_0; y_0)$ має вигляд:

$$z - z_0 = f'_x\big|_{P_0}(x - x_0) + f'_y\big|_{P_0}(y - y_0),$$

де $z_0 = f(x_0, y_0)$. Виконання необхідних умов екстремуму вимагає, щоб

$$\begin{cases} f'_x\big|_{P_0} = \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} = 0, \\ f'_y\big|_{P_0} = \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} = 0. \end{cases}$$

Тоді, в свою чергу, з рівняння (2.12) отримаємо, що $z = z_0$, тобто *дотична площина до поверхні* $z = f(x, y)$ *в точці* $P_0(x_0; y_0)$ *паралельна координатній площині* XOY.

Зауваження. Точками екстремуму неперервної функції $z = f(x, y)$ можуть бути точки, в яких $z = f(x, y)$ недиференційована.

Поверхня, що задається рівнянням $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, є конусом з вершиною у початку координат і віссю, що співпадає з координатною віссю OZ. В точці $O(0;0)$ функція $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ має мінімум, але в цій точці вона недиференційована. Тому можна зробити такий висновок:

точками екстремуму можуть бути стаціонарні точки функції $z = f(x, y)$ *і точки, в яких функція недиференційована.*

3.1.2. *Достатні умови існування екстремуму функції двох змінних*

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, що має неперервні частинні похідні першого і другого порядків в деякому околі стаціонарної точки $P_0(x_0; y_0)$. Введемо позначення:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_0}, \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_0}, \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_0}, \quad \Delta = AC - B^2.$$

Теорема 3.2. *Якщо в стаціонарній точці $P_0(x_0; y_0)$ виконується нерівність $AC - B^2 > 0$, то в точці $P_0(x_0; y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має екстремум. Причому, якщо $A < 0$ – максимум, а якщо $A > 0$ – мінімум.*

Якщо $AC - B^2 < 0$ – екстремуму немає. Якщо $AC - B^2 = 0$, то екстремум в точці $P_0(x_0; y_0)$ може бути, може і не бути.

Приклад 3.2. Дослідити функцію на екстремум: $z = x^2 + y^2 - 4x + 8y + 7$.

Розв'язання. Знайдемо точки, в яких виконується необхідна умова існування екстремуму (стаціонарні точки). Для цього знайдемо частинні похідні заданої функції:

$$z'_x = \left(x^2 + y^2 - 4x + 8y + 7\right)'_x = 2x - 4,$$

$$z'_y = \left(x^2 + y^2 - 4x + 8y + 7\right)'_y = 2y + 8.$$

Складемо та розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ 2y + 8 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 4, \\ 2y = -8, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = -4. \end{cases}$$

Отже, точка $P_0(2; -4)$ – стаціонарна. Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремуму в ній. Для цього знайдемо другі похідні заданої функції:

$$A = z''_{xx} = (2x - 4)'_x = 2, \quad B = z''_{xy} = (2x - 4)'_y = 0, \quad C = z''_{yy} = (2y + 8)'_x = 2.$$

Обчислимо величину Δ: $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4$.

Оскільки $\Delta > 0,$ то робимо висновок, що екстремум у точці $P_0\left(2;-4\right)$ існує. Величина $A = 2 > 0$, тому цей екстремум – мінімум. Значення функції у знайденій точці мінімуму:

$$z_{\min} = z\left(P_0\right) = \left(x^2 + y^2 - 4x + 8y + 7\right)\Big|_{P_0} = 2^2 + (-4)^2 - 4\cdot 2 + 8\cdot(-4) + 7 = -13.$$

Відповідь: $z_{\min} = z\left(2,-4\right) = -13.$

Приклад 3.3. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = x^2 + 4y^2 - 3xy - 8x + 19y + 2.$$

Розв'язання. Знайдемо точки, в яких виконується необхідна умова існування екстремуму: $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$

Оскільки

$$z'_x = \left(x^2 + 4y^2 - 3xy - 8x + 19y + 2\right)'_x = 2x - 3y - 8,$$

$$z'_y = \left(x^2 + 4y^2 - 3xy - 8x + 19y + 2\right)'_y = 8y - 3x + 19,$$

то

$$\begin{cases} 2x - 3y - 8 = 0, \\ 8y - 3x + 19 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ -3x + 8y = -19. \end{cases}$$

Звідки знаходимо $y = -2$, а $x = \dfrac{1}{2}\cdot\left(8 + 3y\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\left(8 + 3\cdot(-2)\right) = 1$. Отже, точка $P_0\left(1;-2\right)$ – стаціонарна.

Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремуму в знайденій точці:

$$A = z''_{xx} = \left(2x - 3y - 8\right)'_x = 2, \quad B = z''_{xy} = \left(2x - 3y - 8\right)'_y = -3,$$

$$C = z''_{yy} = \left(8y - 3x + 19\right)'_y = 8.$$

Обчислимо величину Δ:

$$\Delta = AC - B^2 = 2\cdot 8 - (-3)^2 = 7.$$

Оскільки $\Delta > 0$, то робимо висновок, що екстремум у точці $P_0(1;-2)$ існує. Величина $A = 2 > 0$, тому це мінімум. Обчислимо значення функції у знайденій точці мінімуму:

$$z_{\min} = z(P_0) = \left(x^2 + 4y^2 - 3xy - 8x + 19y + 2\right)\Big|_{P_0} =$$

$$= 1^2 + 4\cdot(-2)^2 - 3\cdot 1\cdot(-2) - 8\cdot 1 + 19\cdot(-2) + 2 = -21.$$

Відповідь: $z_{\min} = z(1,-2) = -21.$

Приклад 3.4. Дослідити функцію на екстремум: $z = e^{\frac{y}{2}}\left(6 - x^2 - 2y\right)$.

Розв'язання. Знайдемо стаціонарні точки функції:

$$z'_x = \left(e^{\frac{y}{2}}\left(6 - x^2 - 2y\right)\right)'_x = e^{\frac{y}{2}}\cdot\left(6 - x^2 - 2y\right)'_x = e^{\frac{y}{2}}\cdot(-2x) = -2xe^{\frac{y}{2}},$$

$$z'_y = \left(e^{\frac{y}{2}}\left(6 - x^2 - 2y\right)\right)'_y = \left(e^{\frac{y}{2}}\right)'_y\cdot\left(6 - x^2 - 2y\right) + e^{\frac{y}{2}}\cdot\left(6 - x^2 - 2y\right)'_y =$$

$$= e^{\frac{y}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(6 - x^2 - 2y\right) + e^{\frac{y}{2}}\cdot(-2) = e^{\frac{y}{2}}\cdot\left(3 - \frac{x^2}{2} - y - 2\right) = e^{\frac{y}{2}}\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2} - y\right).$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -2xe^{\frac{y}{2}} = 0, \\ e^{\frac{y}{2}}\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2} - y\right) = 0, \end{cases} \qquad \text{або} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ \frac{x^2}{2} + y = 1, \end{cases}$$

оскільки за властивостями показникової функції $e^{\frac{y}{2}} > 0$. Тому

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Отримали стаціонарну точку $P_0(0;1)$. Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремуму у знайденій точці:

$$A = z''_{xx} = \left(-2xe^{\frac{y}{2}}\right)'_x = -2e^{\frac{y}{2}}\Big|_{P_0} = -2e^{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{e},$$

$$B=z''_{xy}=\left(-2xe^{\frac{y}{2}}\right)'_y=-2x\cdot e^{\frac{y}{2}}\cdot\frac{1}{2}=-xe^{\frac{y}{2}}\Big|_{P_0}=-0\cdot e^{\frac{1}{2}}=0,$$

$$C=z''_{yy}=\left(e^{\frac{y}{2}}\cdot\left(1-\frac{x^2}{2}-y\right)\right)'_y=\left(e^{\frac{y}{2}}\right)'_y\left(1-\frac{x^2}{2}-y\right)+e^{\frac{y}{2}}\cdot\left(1-\frac{x^2}{2}-y\right)'_y=$$

$$=e^{\frac{y}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{x^2}{2}-y\right)+e^{\frac{y}{2}}\cdot(-1)=e^{\frac{y}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{y}{2}-1\right)=$$

$$=e^{\frac{y}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{y}{2}\right)\Big|_{P_0}=e^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{0^2}{4}-\frac{1}{2}\right)=-e^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{e}.$$

Обчислимо величину Δ:

$$\Delta=AC-B^2\Big|_{P_0}=-2\sqrt{e}\cdot\left(-\sqrt{e}\right)-0^2=2e.$$

Оскільки $\Delta>0,$ то екстремум у точці $P(0;1)$ існує. Величина $A=-2\sqrt{e}<0,$ тому це максимум. Обчислимо значення функції у знайденій точці максимуму:

$$z_{\max}=z\left(P_0\right)=\left(e^{\frac{y}{2}}\left(6-x^2-2y\right)\right)\Big|_{P_0}=e^{\frac{1}{2}}\left(6-0^2-2\cdot1\right)=4\sqrt{e}.$$

Відповідь: $z_{\max}=z(0,1)=4\sqrt{e}.$

Зауваження. Зверніть увагу на необхідні умови (3.1) існування екстремуму функції двох змінних. Якщо ці умови виконуються, то

$$dz\big|_{P_0}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{P_0}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{P_0}dy=0$$

для будь-яких значень диференціалів незалежних змінних dx, dy.

Крім того, в достатніх умовах існування екстремуму функції $z=f(x,y)$ двох змінних фігурують її частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{P_0}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{P_0}$,

$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_0}$, обчислені в знайденій стаціонарній точці $P_0(x_0;y_0)$. Це пов'язує достатні умови існування екстремуму функції $z=f(x,y)$ в точці $P_0(x_0;y_0)$ з диференціалом другого порядку

$$d^2z\big|_{P_0}=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_0}dx^2+2\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{P_0}dxdy+\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_0}dy^2.$$

Зауваження. А якщо треба буде знайти екстремум функції трьох або чотирьох, і взагалі декількох змінних? Чи можливо це зробити і за яких умов?

Розглянемо функцію $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$, яка визначена в деякому околі точки $M_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$. Означення екстремуму такої функції аналогічно означенню екстремуму функції двох змінних.

3.1.3. *Необхідні умови екстремуму функції декількох змінних*

Необхідні умови існування екстремуму функції $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ в точці $M_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{M_0}=0,\ k=1,2,...,n,$$

тобто, якщо функція $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ має екстремум в точці $M_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$, то

$$du\big|_{M_0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{M_0}dx_1+...+\left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{M_0}dx_n=0$$

для будь-яких значень диференціалів незалежних змінних $dx_1,...,dx_n$.

Тепер щодо достатніх умов існування екстремуму функції $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ в точці $M_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$.

Розглянемо так звані *квадратичні форми*, які мають такий вигляд: $Q(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, де a_{ij} – деякі числа, такі, що $a_{ij} = a_{ji}$. Числа a_{ij} називаються *коефіцієнтами квадратичної форми*, а побудована з них симетрична матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею квадратичної форми*. Визначники

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називаються *головними (кутовими) мінорами матриці A.*

Квадратична форма $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *додатно визначеною (від'ємно визначеною)*, якщо вона приймає додатні (від'ємні) значення при будь-яких значеннях змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, що одночасно не дорівнюють нулю. Очевидно, $Q(0, 0, ..., 0) = 0$.

Приклади:

1) квадратична форма $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_2^2$ додатно визначена;

2) квадратична форма $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1 x_2 - 4x_2^2$ є знакозмінною, тому що вона приймає як додатні, так і від'ємні значення;

3) квадратична форма $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1 x_2 + 4x_2^2$ є квазізнакозмінною, оскільки $Q(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2)^2 \geq 0$ для всіх x_1, x_2, але $Q(x_1, x_2) = 0$ не тільки в точці $(0;0)$, а і, наприклад, в точці $(2;1)$.

Знаковизначеність квадратичної форми здійснюється за допомогою ***критерію Сильвестра***:

1. Для того, щоб квадратична форма $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ була *додатно визначеною*, необхідно і достатньо, щоб усі головні мінори її матриці A були додатними: $\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad ..., \quad \Delta_n > 0.$

2. Для того, щоб квадратична форма $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ була *від'ємно визначеною*, необхідно і достатньо, щоб знаки головних мінорів її матриці A чергувалися наступним чином: $\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \quad \Delta_4 > 0, \quad ...$.

Існує певний зв'язок між квадратичними формами та диференціалами другого порядку в точці $M_0\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$:

$$d^2u\Big|_{M_0} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\Bigg|_{M_0} dx_i\, dx_j.$$

Цей вираз свідчить, що другий диференціал функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точці $M_0\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$ є квадратичною формою від змінних $dx_1,\ dx_2, ..., dx_n$, а частинні похідні другого порядку $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{M_0}$ – коефіцієнти цієї квадратичної форми.

3.1.4. *Достатні умови існування екстремуму функції декількох змінних*

Теорема 3.3. *Нехай функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ диференційована в деякому околі точки $M_0\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$ і двічі диференційована в самій точці $M_0\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$, причому M_0 є стаціонарною точкою функції, тобто $du\big|_{M_0} = 0$. Тоді в цій точці функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має мінімум (максимум), якщо $d^2u\big|_{M_0}$ є додатно (від'ємно) визначеною квадратичною формою від змінних $dx_1,\ dx_2, ..., dx_n$.*

Якщо $d^2u\big|_{M_0}$ є знакозмінною квадратичною формою, то в точці $M_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$ функція не має екстремуму.

Якщо $du\big|_{M_0}=0$, а $d^2u\big|_{M_0}$ є квазізнакозмінною квадратичною формою, то функція $u=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ може мати в точці $M_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$ екстремум, а може і не мати його.

Приклад 3.5. Знайти точки екстремуму функції

$$u=x^2+2y^2+z^2-xy+2z-7x+2.$$

Розв'язання. Складемо систему рівнянь для знаходження стаціонарних точок функції:

$$\begin{cases} u'_x=2x-y-7=0, \\ u'_y=4y-x=0, \\ u'_z=2z+2=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y=7, \\ x=4y, \\ z=-1. \end{cases} \Rightarrow \text{ т. } M_0(4;1;-1).$$

Для перевірки достатніх умов існування екстремуму функції обчислимо частинні похідні другого порядку:

$$u''_{xx}=2,\ u''_{xy}=u''_{yx}=-1,\ u''_{yy}=4,\ u''_{xz}=u''_{zx}=0,\ u''_{yz}=u''_{zy}=0,\ u''_{zz}=2.$$

Таким чином, $d^2u\big|_{M_0}=2dx^2-2dxdy+4dy^2+2dz^2$. Матриця цієї квадратичної форми від змінних $dx,\ dy, dz$ має вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо головні мінори матриці:

$$\Delta_1=2>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=7>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=14>0.$$

За критерієм Сильвестра маємо, що $d^2u\big|_{M_0}$ є додатно визначеною квадратичною формою від змінних $dx,\ dy, dz$. Це означає, що в точці $M_0(4;1;-1)$ функція має мінімум, і $u_{\min} = u(M_0) = -13.$

Відповідь: $u_{\min} = u(M_0) = -13.$

Зауваження. З **Теореми 3.3** випливає як частковий випадок **Теорема 3.2**. Дійсно, нехай $dz\big|_{P_0} = 0$, тобто точка $P_0(x_0; y_0)$ є стаціонарною точкою функції $z = f(x, y)$.

Введемо позначення: $A = a_{11} = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_0}$, $B = a_{12} = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_0}$, $C = a_{22} = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_0}$.

Тоді з **Теореми 3.3** і **критерію Сильвестра** випливають наступні твердження:

1) якщо $AC - B^2 = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_0} \cdot \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_0} - \left(\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_0}\right)^2 > 0,$ то в точці $P_0(x_0; y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має екстремум (максимум при $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_0} < 0$ і мінімум при $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_0} > 0$);

2) якщо $AC - B^2 < 0,$ то в точці $P_0(x_0; y_0)$ функція $z = f(x, y)$ не має екстремуму;

3) якщо $AC - B^2 = 0,$ то в точці $P_0(x_0; y_0)$ функція $z = f(x, y)$ може мати екстремум, а може і не мати його, що повністю співпадає зі змістом **Теореми 3.2.**

3.2. Найбільше і найменше значення функції двох змінних в замкненій області

Нехай функція $z=f\left(x,y\right)$ неперервна в деякій обмеженій замкненій області $\overline{D}$. Відомо, що в області $\overline{D}$ неперервна функція приймає найменше і найбільше значення.

Якщо функція $z=f\left(x,y\right)$ приймає найменше (найбільше) значення у внутрішній точці області $\overline{D}$, то в ній, очевидно, функція має екстремум – мінімум (максимум). Тобто, нас цікавлять точки, в яких можливий екстремум.

Однак функція $z=f\left(x,y\right)$ також може досягати свого найменшого (найбільшого) значення на межі області $\overline{D}$. Тому, щоб знайти ***найменше (найбільше) значення функції в області*** $\overline{D}$, необхідно:

1. Знайти значення функції в точках, в яких можливий екстремум – в стаціонарних точках функції, які належать області D.

2. Знайти найменше та найбільше значення функції на межі області $\overline{D}$.

3. Порівнюючи отримані результати, знайти найменше і найбільше значення функції в обмеженій замкненій області $\overline{D}$.

Приклад 3.6. Знайти найменше і найбільше значення функції $z=4xy-x^2y-y^2x$ в замкненій області $\overline{D}$, що задана нерівностями $x\geq -1,\ y\geq 3,\ y\leq 6-x$.

Розв'язання. Побудуємо задану область (рис. 3.1).

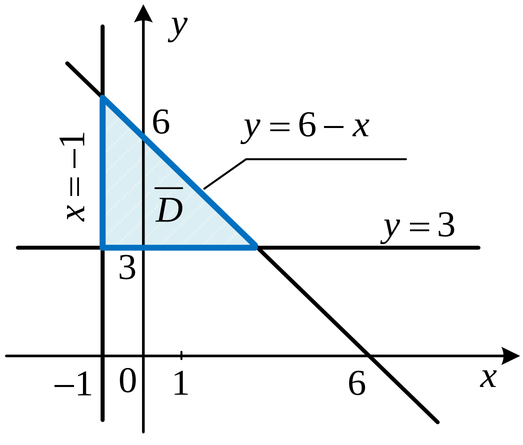


Рисунок 3.1

Знайдемо частинні похідні і складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4y - 2xy - y^2 = 0, \\ 4x - x^2 - 2xy = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y(4 - 2x - y) = 0, \\ x(4 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Звідки отримуємо чотири точки: $P_1(0;0)$; $P_2(0;4)$; $P_3(4;0)$; $P_4\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Лише точка $P_2(0;4)$ є внутрішньою точкою області (рис. 3.2).

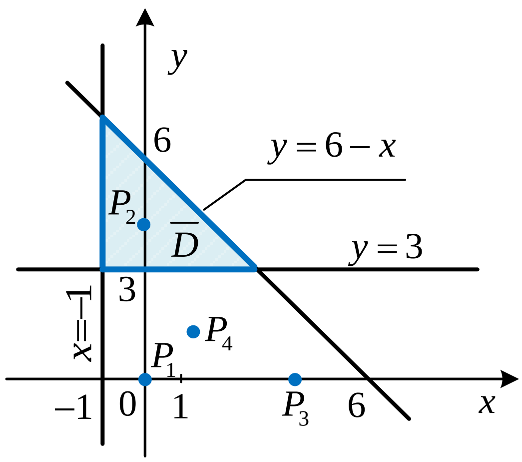


Рисунок 3.2

Значення функції в цій точці $z(P_2) = 0$. Розглянемо поведінку функції на межі області.

На прямій L_1: $y = 3$ функція $Z_1 = z|_{L_1} = 3x - 3x^2$, $(-1 \le x \le 3)$.

На прямій L_2: $x = -1$ функція $Z_2 = z|_{L_2} = -5y + y^2$, $(3 \le y \le 7)$.

На прямій L_3: $y = 6 - x$ функція $Z_3 = z|_{L_3} = 2x^2 - 12x$, $(-1 \le x \le 3)$.

У кожному з цих випадків вирішується задача пошуку найбільшого й найменшого значення функції однієї змінної на відповідних відрізках.

Застосовуючи відомий алгоритм, отримаємо:

На прямій L_1: $y = 3$: $z_{\text{найм}} = z(3,3) = -18$, $z_{\text{найб}} = z\left(\frac{1}{2}, 3\right) = \frac{3}{4}$.

На прямій L_2: $x = -1$: $z_{\text{найм}} = z(-1,3) = -6$, $z_{\text{найб}} = z(-1,7) = 14$.

На прямій L_3: $y = 6 - x$: $z_{\text{найм}} = z(3,3) = -18$, $z_{\text{найб}} = z(-1,7) = 14$.

Порівнюючи отримані результати, маємо

$$z_{\text{найм}} = z(3,3) = -18, \ \ z_{\text{найб}} = z(-1,7) = 14.$$

Відповідь: $z_{\text{найм}} = z(3,3) = -18$, $z_{\text{найб}} = z(-1,7) = 14$.

Приклад 3.7. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = x^2 + y^2 + xy + 5x - 2y + 3$ в замкненій області $\overline{D}$, що обмежена лініями $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$.

Розв'язання. Задана область є прямокутником, що обмежений вертикальними прямими $x = 0$, $x = 2$ і горизонтальними прямими $y = 0$, $y = 3$. Досліджувана функція $z(x, y)$ неперервна в цій області (рис. 3.3).

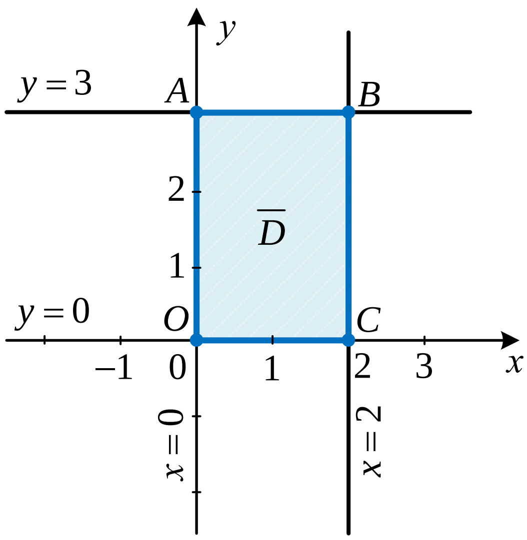


Рисунок 3.3

Знайдемо стаціонарні точки заданої функції. Для цього знайдемо її частинні похідні:

$$z'_x = \left(x^2 + y^2 + xy + 5x - 2y + 3\right)'_x = 2x + y + 5,$$

$$z'_y = \left(x^2 + y^2 + xy + 5x - 2y + 3\right)'_y = 2y + x - 2.$$

Запишемо та розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + 5 = 0, \\ 2y + x - 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = -5, \\ x + 2y = 2, \end{cases}$$

звідки отримуємо $x=-4$, а з першого рівняння системи знаходимо $y=-2x-5=-2\cdot(-4)-5=3$.

Отже, $P_1(-4;3)$ – стаціонарна точка заданої функції. Вона не належить заданій області, а значить, виключаємо її з подальшого розгляду.

Проаналізуємо поведінку заданої функцій на межі області, для цього розглянемо окремо кожну пряму – сторону прямокутника $OABC$ (рис. 3.3).

1) На прямій L_1: $x=0$ функція $Z_1=z\big|_{L_1}=y^2-2y+3,\ (0\le y\le 3)$.

Похідна функції $Z_1'(y)=\left(y^2-2y+3\right)'=2y-2,\quad y=1$. Це значення належить відрізку $[0,3]$. Отже, отримали точку $P_2(0;1)$, що належить стороні OA прямокутника. Значення заданої функції у точці P_2: $z(P_2)=1^2-2\cdot 1+3=2$.

2) На прямій L_2: $x=2$ функція $Z_2=z\big|_{L_2}=y^2+17,\ (0\le y\le 3)$. Її похідна $Z_2'(y)=\left(y^2+17\right)'=2y$. З умови існування стаціонарних точок: $2y=0$, звідки $y=0$. Стаціонарна точка $P_3(2;0)$ співпадає з вершиною C прямокутника $OABC$.

Відповідне значення функції: $z(P_3)=z(C)=0^2+17=17$.

3) На прямій L_3: $y=0$ функція $Z_3=z\big|_{L_3}=x^2+5x+3,\ (0\le x\le 2)$. Її похідна $Z_3'(x)=\left(x^2+5x+3\right)'=2x+5,\ x=-\dfrac{5}{2}$. Знайдена стаціонарна точка $P_4\left(-\dfrac{5}{2};0\right)$ не належить заданій області $\overline{D}$, отже, виключаємо її з подальшого розгляду.

4) На прямій L_4: $y=3$ функція $Z_4=z\big|_{L_4}=x^2+8x+6,\ (0\le x\le 2)$. Похідна $Z_4'(x)=\left(x^2+8x+6\right)'=2x+8,\ x=-4$. Знайдена стаціонарна точка $P_5(-4;3)$ співпадає з точкою $P_1(-4;3)$, яка не належить заданій області $\overline{D}$ і вже виключена з подальшого розгляду.

Обчислимо також значення заданої функції $z(x,y)$ у кутових точках прямокутника $OABC$:

$$z(O)=z(0,0)=\left(x^2+y^2+xy+5x-2y+3\right)\Big|_O=3,$$

$$z(A)=z(0,3)=\left(x^2+y^2+xy+5x-2y+3\right)\Big|_A=0+3^2+0+0-2\cdot3+3=6,$$

$$z(B)=z(2,3)=\left(x^2+y^2+xy+5x-2y+3\right)\Big|_B=2^2+3^2+2\cdot3+5\cdot2-2\cdot3+3=26,$$

$$z(C)=z(2,0)=\left(x^2+y^2+xy+5x-2y+3\right)\Big|_C=17.$$

Доповнимо рисунок 3.3 усіма знайденими точками (рис. 3.4)

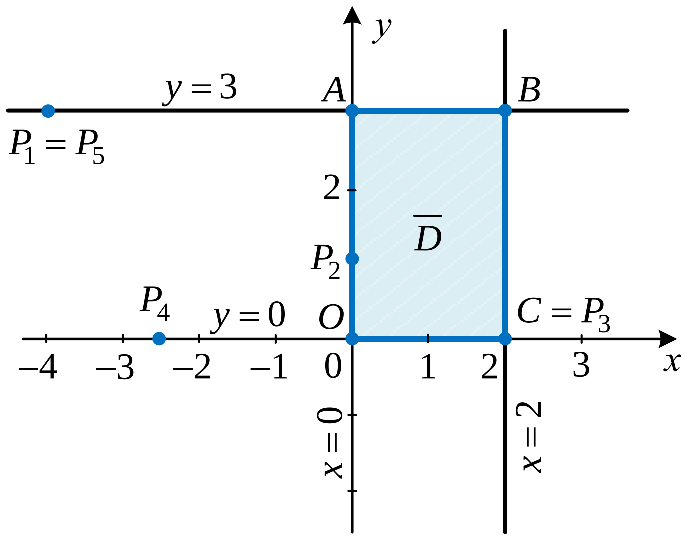


Рисунок 3.4

Аналізуючи всі знайдені значення функції, робимо висновок, що

$$z_{\text{найм}}=z(P_2)=2,\ z_{\text{найб}}=z(B)=26.$$

Відповідь: $z_{\text{найм}}=z(P_2)=2$, $z_{\text{найб}}=z(B)=26.$

Приклад 3.8. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2-2y^2-4x+6y+1$ в замкненій області $\overline{D}$, що обмежена лініями $y=x$, $x+y=4$, $y=1$.

Розв'язання. Область $\overline{D}$ є трикутник, обмежений похилими прямими $y=x$ і $x+y=4$ та горизонтальною прямою $y=1$ (рис. 3.5).

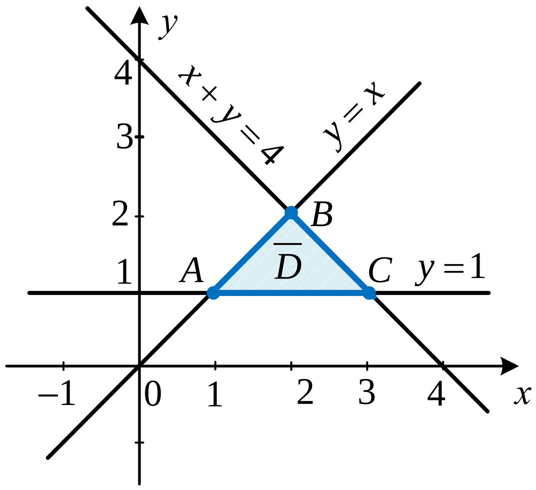


Рисунок 3.5

Задана функція неперервна в цій області. Знайдемо стаціонарні точки функції, для чого дослідимо її перші частинні похідні:

$$z'_x = \left(x^2 - 2y^2 - 4x + 6y + 1\right)'_x = 2x - 4,$$

$$z'_y = \left(x^2 - 2y^2 - 4x + 6y + 1\right)'_y = -4y + 6.$$

Запишемо та розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ -4y + 6 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Стаціонарна точка $P_1\left(2; \dfrac{3}{2}\right)$ належить області $\overline{D}$. Обчислимо значення функції в цій точці:

$$z(P_1) = \left(x^2 - 2y^2 - 4x + 6y + 1\right)\Big|_{P_1} = 2^2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot 2 + 6 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}.$$

Тепер дослідимо задану функцію на межі області, тобто на відрізках прямих, що утворюють трикутник ABC. Розглянемо окремо кожний відрізок.

1) На прямій L_1: $y = x$, функція $Z_1 = z\big|_{L_1} = -x^2 + 2x + 1,\ (1 \le x \le 2)$.

Знайдемо стаціонарні точки цієї функції, для чого потрібно дослідити її першу похідну: $Z'_1(x) = \left(-x^2 + 2x + 1\right)' = -2x + 2,\ -2x + 2 = 0,\ x = 1,$ а відповідне значення $y = 1$. Знайдена точка $P_2(1;1)$ співпадає з вершиною A трикутника. Обчислимо значення функції в цій точці:

$$z(P_2)=Z_1(1)=\left(-x^2+2x+1\right)\Big|_{x=1}=-1^2+2\cdot1+1=2.$$

2) На прямій L_2: $y=4-x$ функція $Z_2=z\big|_{L_2}=-x^2+6x-7$, $(2\le x\le 3)$.

Дослідимо першу похідну цієї функції: $Z_2'(x)=\left(-x^2+6x-7\right)'=-2x+6$, тому $-2x+6=0$, і $x=3$, а $y=4-3=1$. Знайдена точка $P_3(3;1)$ співпадає з вершиною C трикутника.

Обчислимо значення функції в цій точці:

$$z(P_3)=Z_2(3)=\left(-x^2+6x-7\right)\Big|_{x=3}=-3^2+6\cdot3-7=2.$$

3) На прямій L_3: $y=1$, функція $Z_3=z\big|_{L_3}=x^2-4x+5$, $(1\le x\le 3)$.

Досліджуємо першу похідну цієї функції: $Z_3'(x)=\left(x^2-4x+5\right)'=2x-4$. Тоді $2x-4=0$, $x=2$ при $y=1$. Знайдена точка $P_4(2;1)$ належить відрізку AC. Обчислимо значення функції в цій точці:

$$Z_3(2)=\left(x^2-4x+5\right)\Big|_{x=2}=2^2-4\cdot2+5=1.$$

Залишилось знайти значення функції в кутовій точці $B(2;2)$:

$$z(B)=\left(x^2-2y^2-4x+6y+1\right)\Big|_{B}=2^2-2\cdot2^2-4\cdot2+6\cdot2+1=1.$$

Доповнимо наш рисунок всіма знайденими точками (рис. 3.6).

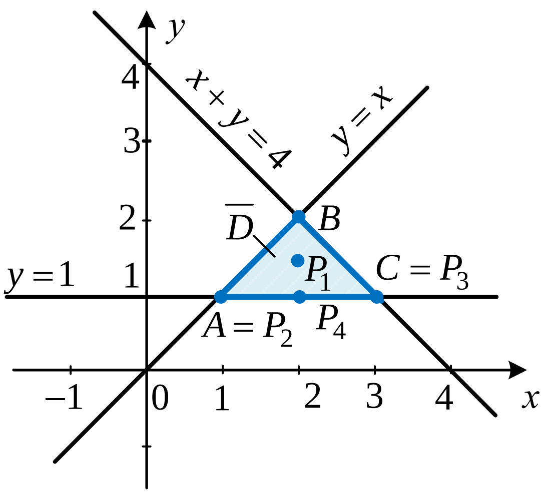


Рисунок 3.6

Аналізуючи отримані результати, робимо висновок, що найменшим та найбільшим значеннями функції в заданій області $\overline{D}$, відповідно, є наступні:

$$z_{\text{найм}} = z(P_4) = z(B) = 1,\ z_{\text{найб}} = z(A) = z(C) = 2.$$

Відповідь: $z_{\text{найм}} = z(P_4) = z(B) = 1,\ z_{\text{найб}} = z(A) = z(C) = 2.$

Приклад 3.9. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 4 - (x+1)^2 - y^2$ в замкненій області $\overline{D}$, що обмежена лінією $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1.$

Розв'язання. Межею області $\overline{D}$ є еліпс з центром у початку координат та півосями $a = 2$, $b = 1$. Побудуємо задану область (рис. 3.7).

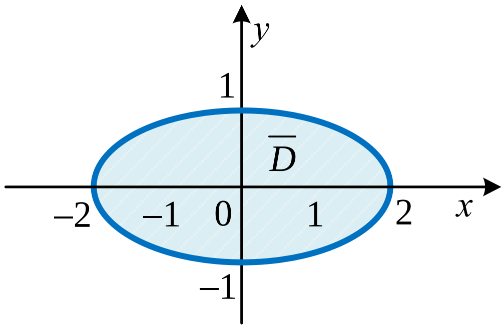


Рисунок 3.7

Як і в прикладах вище, почнемо з дослідження заданої функції на існування стаціонарних точок. Частинні похідні цієї функції:

$$z'_x = \left(4 - (x+1)^2 - y^2\right)'_x = -2(x+1),$$

$$z'_y = \left(4 - (x+1)^2 - y^2\right)'_y = -2y.$$

З необхідної умови існування екстремумів запишемо та розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -2(x+1) = 0, \\ -2y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Знайдена стаціонарна точка $P_1(-1;0)$ належить області $\overline{D}$.

Обчислимо значення заданої функції в цій точці:

$$z(P_1) = \left(4 - (x+1)^2 - y^2\right)\Big|_{P_1} = 4 - (-1+1)^2 - 0^2 = 4.$$

Переходимо до дослідження функції на межі області, тобто за умови, що $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ або $y^2=1-\frac{x^2}{4}$. Підставимо це значення у задану функцію та отримаємо функцію однієї змінної:

$$Z_1(x)=\left(4-(x+1)^2-y^2\right)\Big|_{y^2=1-\frac{x^2}{4}}=4-(x+1)^2-\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=$$

$$=4-\left(x^2+2x+1\right)-1+\frac{x^2}{4}=3-x^2-2x-1+\frac{x^2}{4}=2-\frac{3}{4}x^2-2x.$$

Знайдемо стаціонарні точки цієї функції. Її похідна

$$Z_1'(x)=\left(2-\frac{3}{4}x^2-2x\right)'=-\frac{3}{4}\cdot 2x-2=-\frac{3}{2}x-2.$$

Тоді з умови $Z_1'(x)=0$ виходить, що

$$-\frac{3}{2}x-2=0,\quad -\frac{3}{2}x=2,\quad x=-\frac{4}{3},$$

звідки знаходимо $y^2=1-\frac{x^2}{4}=1-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$, тобто $y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{5}{9}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Отже, отримали стаціонарні точки $P_2\left(-\frac{4}{3};\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ і $P_3\left(-\frac{4}{3};-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ на межі області $\overline{D}$.

Обчислимо значення заданої функції в цих точках:

$$z(P_2)=z(P_3)=Z_1\left(-\frac{4}{3}\right)=\left(2-\frac{3}{4}x^2-2x\right)\Big|_{x=-\frac{4}{3}}=2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=$$

$$=2-\frac{3}{4}\cdot\frac{16}{9}+\frac{8}{3}=2-\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=\frac{10}{3}.$$

Доповнимо наш рисунок знайденими точками (рис. 3.8).

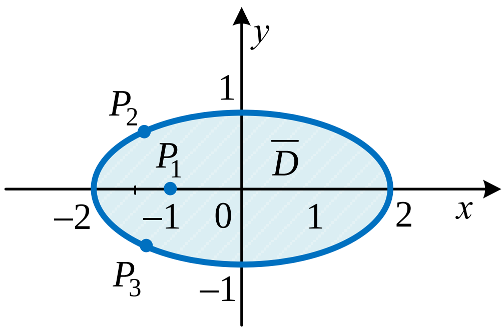


Рисунок 3.8

Серед всіх знайдених вище значень функції оберемо найменше та найбільше значення: $z_{\text{найм}} = z(P_2) = z(P_3) = \dfrac{10}{3}$, $z_{\text{найб}} = z(P_1) = 4$.

Відповідь: $z_{\text{найм}} = z(P_2) = z(P_3) = \dfrac{10}{3}$; $z_{\text{найб}} = z(P_1) = 4$.

3.3. Умовний екстремум

Нехай на площині XOY задана функція $z = f(x,y)$ і лінія L рівнянням $\varphi(x,y) = 0$. На лінії L потрібно знайти точку $P_0(x_0;y_0)$, в якій значення функції найменше або найбільше в порівнянні зі значеннями цієї функції в точках лінії L, розташованих в деякому околі точки $P_0(x_0;y_0)$. Такі точки називаються *точками умовного екстремуму функції* $z = f(x,y)$ *на лінії* L. Очевидно, що точки звичайного екстремуму також є точками *умовного екстремуму* функції для будь-яких ліній, що проходять через ці точки.

Припустимо, функція $z = f(x,y)$ задана в області D на площині XOY і лінія L задана в цій області рівнянням зв'язку

$$\varphi(x,y) = 0. \tag{3.2}$$

3.3.1. *Метод виключення дослідження функції на умовний екстремум*

Найпростішим методом дослідження функції $z = f(x,y)$ на умовний екстремум є *метод виключення*.

Виразимо з *рівняння зв'язку* $\varphi(x,y) = 0$ змінну y явно через x, тобто, $y = y(x)$, і підставимо це в вираз функції $z = f(x,y)$, отримаємо функцію однієї змінної $z = f[x, y(x)] = \Phi(x)$.

Далі знайдемо значення x, при яких функція $\Phi(x)$ досягає екстремуму, і, визначивши відповідне значення y з рівняння зв'язку, отримаємо шукану точку умовного екстремуму.

Приклад 3.10. Знайти екстремум функції $z = 4x^2 + y^2$ за умови, що $x + y = 2$.

Розв'язання. Знайдемо y з рівняння зв'язку і підставимо в вираз заданої функції: $y = 2 - x$, $\Phi(x) = z\big|_{y=2-x} = 4x^2 + (2-x)^2 = 5x^2 - 4x + 4$.

Знайдемо стаціонарні точки отриманої функції:

$$\Phi'(x) = 10x - 4,\ \Phi'(x) = 0,\ x = \frac{2}{5}.$$

Обчислимо $\Phi''(x)$: $\Phi''(x) = 10 > 0$, тобто, в точці $x = \dfrac{2}{5}$ функція має мінімум. Обчислимо $y\left(\dfrac{2}{5}\right)$: $y\left(\dfrac{2}{5}\right) = 2 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{8}{5}$.

Таким чином, в точці $P_0\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{8}{5}\right)$ функція $z = 4x^2 + y^2$ має умовний мінімум і $z(P_0) = 4\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{8}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{5}$.

Відповідь: $z_{\min} = z\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{8}{5}\right) = \dfrac{16}{5}$.

Зауваження. Схема застосування цього методу очевидна. Але застосувати цей метод на практиці, особливо для функцій декількох змінних, вдається дуже рідко, особливо на етапі виключення змінних.

Приклад 3.11. Знайти екстремум функції $z = 3x^2 + (y-1)^2 - 5$ за умови $x - y = 2$.

Розв'язання. Застосуємо метод виключення. Виразимо з рівняння зв'язку змінну y через x: $y = x - 2$. Підставимо його у вираз для заданої функції $z = f(x, y)$:

$$f[x, y(x)] = \Phi(x) = \left(3x^2 + (y-1)^2 - 5\right)\Big|_{y=x-2} = 3x^2 + (x-2-1)^2 - 5 =$$

$$= 3x^2 + (x-3)^2 - 5 = 3x^2 + x^2 - 6x + 9 - 5 = 4x^2 - 6x + 4.$$

Знайдемо стаціонарні точки цієї функції:

$$\Phi'(x) = \left(4x^2 - 6x + 4\right)' = 8x - 6.$$

З умови, що $\Phi'(x) = 0$, знаходимо: $8x - 6 = 0$, $x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Тоді $y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} - 2 = -\frac{5}{4}$. Отже, $P_0\left(\frac{3}{4}; -\frac{5}{4}\right)$ – стаціонарна точка.

Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремуму у цій точці. Для цього знайдемо другу похідну функції $\Phi(x)$: $\Phi''(x) = (8x - 6)' = 8 > 0$. Згідно другої достатньої умови існування екстремуму функції однієї змінної маємо мінімум у точці P_0.

Таким чином, точка $P_0\left(\frac{3}{4}; -\frac{5}{4}\right)$ – точка умовного мінімуму заданої функції.

Значення функції в цій точці:

$$z_{\min} = z(P_0) = \left(3x^2 + (y-1)^2 - 5\right)\Big|_{P_0} = 3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{5}{4} - 1\right)^2 - 5 =$$

$$= \frac{27}{16} + \left(-\frac{9}{4}\right)^2 - 5 = \frac{27}{16} + \frac{81}{16} - \frac{80}{16} = \frac{28}{16} = \frac{7}{4}.$$

Відповідь: $z_{\min} = z\left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right) = \frac{7}{4}.$

3.3.2. *Метод невизначених множників Лагранжа*

Не завжди можна виразити явно y через x з рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$. Універсальним і ефективним методом дослідження функції на умовний екстремум є метод невизначених множників Лагранжа, або просто *метод Лагранжа.*

У точках умовного екстремуму сумарна похідна функції $z = f\left[x, y(x)\right]$ дорівнює нулю, тому

$$\frac{dz}{dx} = f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \qquad (3.3)$$

З рівняння (3.2) зв'язку

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi'_x(x,y)}{\varphi'_y(x,y)}. \tag{3.4}$$

Підставляючи вираз (3.4) в рівняння (3.3), отримуємо:

$$f'_x(x,y)-f'_y(x,y)\cdot\frac{\varphi'_x(x,y)}{\varphi'_y(x,y)}=0.$$

Точки умовного екстремуму задовольняють рівнянню зв'язку, тому маємо систему з двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} f'_x-f'_y\cdot\dfrac{\varphi'_x}{\varphi'_y}=0,\\ \varphi(x,y)=0. \end{cases} \tag{3.5}$$

З першого рівняння системи (3.5):

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x}=\frac{f'_y}{\varphi'_y}=-\lambda.$$

Таким чином, отримуємо систему з трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} f'_x+\lambda\varphi'_x=0,\\ f'_y+\lambda\varphi'_y=0,\\ \varphi(x,y)=0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Для того щоб полегшити запам'ятовування цих рівнянь, вводиться допоміжна функція:

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y). \tag{3.7}$$

Тоді система (3.6) прийме такий вид:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=0. \end{cases}} \tag{3.8}$$

Вищевказаний метод був запропонований Лагранжем.

Приклад 3.12. Знайти екстремум функції $z = x^2 + y^2$ за умови $\frac{x}{2} + \frac{y}{8} - 1 = 0.$

Розв'язання. Складемо допоміжну функцію – функцію Лагранжа:

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{8} - 1\right) = 0.$$

Обчислимо частинні похідні та застосуємо умови (3.8):

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \frac{\lambda}{2} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \frac{\lambda}{8} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{x}{2} + \frac{y}{8} - 1 = 0. \end{cases}$$

З першого і другого рівнянь системи знаходимо λ:

$$\lambda = -4x, \quad \lambda = -16y.$$

Порівнюючи ці вирази, отримуємо:

$$4x = 16y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{4}.$$

Підставляємо результат в третє рівняння системи:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{32} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 17x = 32 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{32}{17} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{8}{17}.$$

До речі, $\lambda = -4x,$ тому $\lambda = -\frac{128}{17}.$

Таким чином, точка $P_0\left(\frac{32}{17}; \frac{8}{17}\right)$ є стаціонарною точкою, яку дослідимо за допомогою достатніх умов існування екстремуму. Для цього запишемо функцію Лагранжа $F(x, y, \lambda)$ при $\lambda = -\frac{128}{17}$:

$$F\left(x, y, -\frac{128}{17}\right) = \left(x^2 + y^2 + \lambda\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{8} - 1\right)\right)\Bigg|_{\lambda = -\frac{128}{17}} = x^2 + y^2 - \frac{128}{17}\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{8} - 1\right).$$

Знайдемо другі похідні цієї функції. Для цього використаємо знайдені вище значення перших похідних при відомому значенні $\lambda = -\frac{128}{17}$:

$$F'_x = 2x - \frac{64}{17}, \quad F'_y = 2y - \frac{16}{17}.$$

Далі, нехай

$$A = F''_{xx} = \left(2x - \frac{64}{17}\right)'_x = 2, \quad B = F''_{xy} = \left(2x - \frac{64}{17}\right)'_y = 0,$$

$$C = F''_{yy} = \left(2y - \frac{16}{17}\right)'_y = 2.$$

Тоді $\Delta(P_0) = \left(AC - B^2\right)\Big|_{P_0} = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0$. Робимо висновок, що умовний екстремум у точці $P_0\left(\frac{32}{17}; \frac{8}{17}\right)$ існує. Оскільки величина $\Delta(P_0) = 4 > 0$, то це точка умовного мінімуму.

Значення функції в цій точці: $z_{\min} = z(P_0) = \left(x^2 + y^2\right)\Big|_{P_0} = \frac{64}{17}$.

Відповідь: $z_{\min} = z\left(\frac{32}{17}, \frac{8}{17}\right) = \frac{64}{17}$.

Приклад 3.13. Знайти екстремум функції $z = x^3 + y^3$ за умови $x^2 + y^2 = 8$ $(x > 0,\ y > 0)$.

Розв'язання. Застосуємо метод невизначених множників Лагранжа.

Складемо функцію Лагранжа за формулою (3.7), де $f(x, y) = x^3 + y^3$, $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 8$, тоді

$$F(x, y, \lambda) = x^3 + y^3 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 8\right) = x^3 + y^3 + \lambda x^2 + \lambda y^2 - 8\lambda.$$

Знайдемо частинні похідні цієї функції за кожною з трьох змінних:

$$F'_x = \left(x^3 + y^3 + \lambda x^2 + \lambda y^2 - 8\lambda\right)'_x = 3x^2 + 2\lambda x,$$

$$F'_y = \left(x^3 + y^3 + \lambda x^2 + \lambda y^2 - 8\lambda\right)'_y = 3y^2 + 2\lambda y,$$

$$F'_\lambda = \left(x^3 + y^3 + \lambda x^2 + \lambda y^2 - 8\lambda\right)'_\lambda = x^2 + y^2 - 8.$$

Запишемо необхідну умову існування екстремуму функції у вигляді системи:

$$\begin{cases} F'_x = 3x^2 + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = 3y^2 + 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 8 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(3x + 2\lambda) = 0, \\ y(3y + 2\lambda) = 0, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$$

Оскільки за умовою $x > 0,\ y > 0,$ то перше та друге рівняння можемо поділити на множники x та $y,$ які не є розв'язками системи. Тоді

$$\begin{cases} 3x + 2\lambda = 0, \\ 3y + 2\lambda = 0, \\ x^2 + y^2 = 8, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{2\lambda}{3}, \\ y = -\dfrac{2\lambda}{3}, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$$

Підставимо значення x та y з перших двох рівнянь у третє:

$$\left(-\frac{2\lambda}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2\lambda}{3}\right)^2 = 8,\ \ 2\left(-\frac{2\lambda}{3}\right)^2 = 8,\ \ \lambda^2 = 9, \text{ звідки } \lambda_{1,2} = \pm 3.$$

Оскільки $x = y = -\dfrac{2\lambda}{3} > 0,$ то обираємо від'ємне значення $\lambda.$ Отже, $x = y = 2.$

Таким чином, отримали стаціонарну точку $P_0(2;2),$ яку дослідимо за допомогою достатніх умов існування екстремуму. Для цього запишемо функцію Лагранжа $F(x, y, \lambda)$ при $\lambda = -3$:

$$F(x, y, -3) = \left(x^3 + y^3 + \lambda x^2 + \lambda y^2 - 8\lambda\right)\Big|_{\lambda=-3} = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 24.$$

Знайдемо другі похідні цієї функції. Для цього використаємо знайдені вище значення перших похідних при відомому значенні $\lambda = -3$:

$$F'_x = 3x^2 - 6x,\ \ F'_y = 3y^2 - 6y.$$

Далі, нехай

$$A = F''_{xx} = \left(3x^2 - 6x\right)'_x = 6x - 6, \quad B = F''_{xy} = \left(3x^2 - 6x\right)'_y = 0,$$

$$C = F''_{yy} = \left(3y^2 - 6y\right)'_y = 6y - 6.$$

Обчислимо значення цих величин у стаціонарній точці $P_0(2;2)$:

$$A(P_0)=(6x-6)\big|_{x=2}=6\cdot 2-6=6,\ \ B(P_0)=0,$$

$$C(P_0)=(6y-6)\big|_{y=2}=6\cdot 2-6=6.$$

Тоді $\Delta(P_0)=\left(AC-B^2\right)\Big|_{P_0}=6\cdot 6-0^2=36>0.$ Робимо висновок, що умовний екстремум у точці $P_0(2;2)$ існує. Оскільки величина $A(P_0)=6>0,$ то це точка умовного мінімуму.

Значення функції в цій точці:

$$z_{\min}=z(P_0)=\left(x^3+y^3\right)\Big|_{\substack{x=2\\y=2}}=2^3+2^3=16.$$

Відповідь: $z_{\min}=z(P_0)=16.$

Контрольні запитання

1. Дайте означення точки екстремуму (максимуму і мінімуму) функції двох змінних.

2. Сформулюйте необхідну умову існування екстремуму функції двох змінних. В чому полягає його геометричний смисл?

3. Сформулюйте достатню умову існування екстремуму функції двох змінних.

4. В чому полягає спосіб знаходження найбільшого й найменшого значень функції двох змінних?

5. Наведіть означення точки умовного екстремуму функції $f(x,y)$ на лінії L.

6. У чому полягає метод множників Лагранжа пошуку точок умовного екстремуму?

Завдання для самостійної роботи

1. Дослідити функції на екстремум:

а) $z = 5x^2 + y^2 + 2x - 4y$; б) $z = 6(x+y) - x^2 - y^2$.

2. Знайти найменше і найбільше значення функції в замкненій області $\bar{D}$:

а) $z = x^2 - xy + y^2$, $\bar{D}$: $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3$;

б) $z = x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 1$, $\bar{D}$: $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2$.

3. Дослідити функції на екстремум:

а) $z = 2x^3 + xy^2 - 216x$; б) $z = e^{\frac{x}{2}} \cdot (x + y^2)$.

4. Знайти найменше і найбільше значення функції в замкненій області $\bar{D}$:

а) $z = x^2 - y^2$, $\bar{D}$: $x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$;

б) $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$, $\bar{D}$: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Відповіді

1. а) $z_{\min} = z\left(-\frac{1}{5}, 2\right) = -\frac{21}{5}$; б) $z_{\max} = z(3,3) = 18$.

2. а) $z_{\text{найм}} = z(0,0) = 0$, $z_{\text{найб}} = z(0,3) = z(3,0) = 9$;

б) $z_{\text{найм}} = z(2,0) = -5$, $z_{\text{найб}} = z(0,2) = z(4,2) = 23$.

3. а) $z_{\min} = z(6,0) = -864$, $z_{\max} = z(-6,0) = 864$; б) $z_{\min} = z(-2,0) = -\frac{2}{e}$.

4. а) $z_{\text{найм}} = z(0,2) = -4$, $z_{\text{найб}} = z(2,0) = 4$;

б) $z_{\text{найм}} = z(0,0) = 0$, $z_{\text{найб}} = z\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

4. Скалярні поля. Похідна за напрямом. Градієнт

4.1. Скалярні поля

Означення. Якщо в області D двовимірного або області Ω тривимірного простору визначена деяка скалярна функція $U(M)=U(x,y)$ або $U(M)=U(x,y,z)$, відповідно, то говорять, що *в області* $D\,(\Omega)$ *задано* скалярне поле $U(M)$.

Якщо функція $U(M)=U(x,y)$ визначена в області D двовимірного простору, то поле $U(M)$ називається *пласким*. Якщо функція не залежить від часу, то скалярне поле $U(M)$ називається *стаціонарним*. Скалярне поле, яке змінюється з плином часу, називається *нестаціонарним* полем.

Застосуємо розглянутий раніше математичний апарат диференціювання функцій декількох змінних до скалярних полів. При цьому фактично мова піде про певну інтерпретацію операції диференціювання. Реальні скалярні поля не залежать від вибору системи координат у тому розумінні, що поле є функцією точки множини (лінії, поверхні, області на площині або у просторі) і, можливо, часу (нестаціонарні поля) без будь-яких посилань на системи координат.

Обмежимося розглядом таких скалярних полів, в яких функція $U(x,y)$ або, відповідно, $U(x,y,z)$ є неперервною і має неперервні частинні похідні по всіх змінних необхідного порядку.

Приклади скалярних полів

1. Пласкі поля.

Пласкими полями вважаються, наприклад, поля в метеорології: температурне поле або поле тиску в даний момент часу на поверхні землі і так далі.

2. Поле щільності маси.

3. Поле щільності заряду.

У теоретичних основах електротехніки розглядається скалярне поле $\rho(M)$ об'ємної щільності V електричного заряду, що визначається в точках даної області $\Delta V \subset V$ відношенням $\rho(M) = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta V}$.

Нехай скалярне поле $U(M) = U(x, y, z)$ задано в області Ω тривимірного простору.

Означення. Геометричне розташування точок області Ω, в якій функція $U(x, y, z)$ приймає однакові значення, утворює деяку поверхню, яка називається *поверхнею рівня* (або *еквіпотенціальною поверхнею*) даного скалярного поля.

Звідси випливає, що рівняння поверхні рівня має вигляд $U(x, y, z) = C$, де C – константа, і кожному значенню константи відповідає своя поверхня рівня. Таким чином, через кожну точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ даної області Ω проходить, єдина поверхня рівня $U(x_0, y_0, z_0) = C_0$ з відповідним значенням константи C_0. Тобто увесь простір заповнений цими поверхнями і, очевидно, поверхні рівня не перетинаються.

У разі плаского поля поняття поверхні рівня замінюється поняттям *лінії рівня*. Прикладами таких ліній можуть бути відображені ізобари (лінії рівного тиску) та ізотерми (лінії рівних температур).

Зауваження. Якщо припустити, що лінії або поверхні рівня перетинаються, то, наприклад, перетиналися би ізотерми – лінії рівних температур. Виникає питання: яка температура в точці перетину ізотерм?

Приклад 4.1. Знайти лінії рівня скалярного поля $U(x, y) = 3x - y$.

Розв'язання. Лінії рівня заданого скалярного поля визначимо з умови $U(x, y) = C$ $(C = \text{const})$. Тоді $3x - y = C$ або $y = 3x + C$.

Надаючи C різних дійсних значень, одержимо сім'ю паралельних прямих.

Приклад 4.2. Знайти лінії рівня скалярного поля $U(x,y)=y^2-4x.$

Розв'язання. За означенням, лінії рівня заданого скалярного поля мають вигляд

$$y^2-4x=C \text{ або } y^2=4x+C \ \ (C=\text{const}).$$

Надаючи C різних дійсних значень, одержимо сім'ю парабол з вершиною на осі OX, гілки яких напрямлені вправо.

Приклад 4.3. Знайти лінії рівня скалярного поля

$$U(x,y)=\ln\left(x^2+y^2-2y\right).$$

Розв'язання. За означенням, лінії рівня заданого скалярного поля мають вигляд $\ln\left(x^2+y^2-2y\right)=C \ \ (C=\text{const})$, звідки

$$x^2+y^2-2y=e^C, \ x^2+y^2-2y+1-1=e^C, \ x^2+(y-1)^2=e^C+1.$$

Надаючи C різних дійсних значень, одержимо сім'ю концентричних кіл з центром у точці $(0;1)$ та радіусом $R=\sqrt{e^C+1}$.

Приклад 4.4. Знайти поверхні рівня скалярного поля

$$U(x,y,z)=2x-3y+5z\,.$$

Розв'язання. Поверхні рівня заданого скалярного поля визначимо з умови $U(x,y,z)=C \ \ (C=\text{const})$, тобто $2x-3y+5z=C$.

Надаючи C різних дійсних значень, одержимо сім'ю паралельних площин з вектором нормалі $\vec{n}=(2;-3;5)$.

Приклад 4.5. Знайти поверхні рівня скалярного поля

$$U(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+(z+1)^2.$$

Розв'язання. Поверхні рівня заданого скалярного поля мають вигляд:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+(z+1)^2=C \ \ (C=\text{const}).$$

Якщо $C>0$, то поділивши обидві частини рівності на C, одержимо

$$\frac{x^2}{4C}+\frac{y^2}{9C}+\frac{(z+1)^2}{C}=1.$$

Надаючи C різних додатних дійсних значень, одержимо сім'ю еліпсоїдів з центром у точці $(0;0;-1)$ з півосями $a=\sqrt{4C}=2C_1$, $b=\sqrt{9C}=3C_1$, $c=\sqrt{C}=C_1$ $\left(C_1=\sqrt{C}>0\right)$. Якщо $C=0$, одержуємо точку $(0;0;-1)$. При $C<0$ скалярне поле $U(x,y,z)$ не існує.

Відповідь: $\dfrac{x^2}{4C}+\dfrac{y^2}{9C}+\dfrac{(z+1)^2}{C}=1 \quad (C>0)$.

4.2. Похідна за напрямом

Нехай задано скалярне поле $U(M)=U(x,y,z)$. Частинні похідні виражають швидкість зміни поля в напрямах відповідних осей координат. Наприклад, швидкість зміни поля $U(x,y,z)$ у напрямі осі OX : U'_x. Передбачається, що точка рухається тільки по прямій, що паралельна цій осі. Тим часом у багатьох фізичних питаннях виникає інтерес до швидкості зміни поля і у інших напрямах.

Введемо поняття похідної функції $U(x,y,z)$ в будь-якому заданому напрямі. Розглянемо скалярне поле $U=U(x,\ y,\ z)$ в деякій області Ω. Візьмемо довільну точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ в цій області і промінь l, що проходить через цю точку (рис. 4.1).

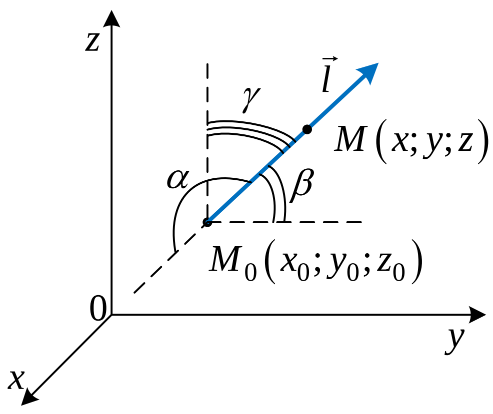


Рисунок 4.1

Візьмемо точку $M(x;\ y;\ z)\in\Omega$ на промені l. Введемо позначення: $\Delta U=U(M)-U(M_0)$ і $\Delta l=\left|\overrightarrow{M_0M}\right|$.

За означенням, $\lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{\Delta U}{\Delta l}$ називається *похідною скалярного поля* $U(M)$ *за* *напрямом* l і позначається символом $\frac{\partial U(M_0)}{\partial l}$ або $\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{M_0}$.

Частинні похідні $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ можна розглядати як похідні функції $U = U(x, y, z)$ за напрямом осей координат.

Нехай промінь l утворює кути α, β, γ з осями координат OX, OY, OZ відповідно. Очевидно, що існує одиничний вектор $\vec{l}^{\,0} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, який збігається за напрямом з променем l.

Теорема. *Нехай функція* $U = U(x, y, z)$ *має неперервні частинні похідні першого порядку в точці* $M_0(x_0; y_0; z_0)$. *Тоді в цій точці скалярне поле* $U = U(x, y, z)$ *має похідну в будь-якому напрямі* l, *і*

$$\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot \cos\gamma. \tag{4.1}$$

Похідна за напрямом характеризує швидкість зміни скалярного поля $U(M)$ в точці M_0 в напрямі l. Якщо похідна скалярного поля за напрямом l додатна, то функція в цьому напрямі зростає, і спадає, якщо похідна від'ємна.

Якщо поле $U(M)$ пласке, то похідна за напрямом l розраховується за формулою:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \sin\alpha, \tag{4.2}$$

де α – кут, утворений напрямом l з додатним напрямом осі OX.

Зауваження. Відзначимо, що похідна $\frac{\partial U(M)}{\partial l}$ є функцією не тільки точки M, але і напряму l, тобто, може обчислюватися в одній і тій же точці, але в різних напрямах, і мати при цьому, взагалі кажучи, різні значення.

Приклад 4.6. Знайти похідну скалярного поля

$$U(x,y,z)=x^2-3y^2+5xz-10$$

у точці $M_0(1;3;-2)$ за напрямом вектора $\vec{l}=(-1;-2;2)$.

Розв'язання. Похідну скалярного поля за заданим напрямом $\vec{l}$ знайдемо за формулою (4.1).

Частинні похідні функції $U(x,y,z)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\left(x^2-3y^2+5xz-10\right)'_x=2x+5z,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\left(x^2-3y^2+5xz-10\right)'_y=-3\cdot 2y=-6y,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\left(x^2-3y^2+5xz-10\right)'_z=5x.$$

Значення похідних у точці M_0:

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial x}=\left(2x+5z\right)\Big|_{M_0}=2\cdot 1+5\cdot(-2)=-8,$$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial y}=-6y\Big|_{M_0}=-6\cdot 3=-18,\qquad \frac{\partial U(M_0)}{\partial z}=5x\Big|_{M_0}=5\cdot 1=5.$$

Модуль вектора $\vec{l}$: $\left|\vec{l}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{9}=3.$

Його напрямні косинуси: $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{2}{3}$.

Тоді похідна заданого скалярного поля в точці M_0 за напрямом вектора $\vec{l}$:

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial l}=-8\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-18\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+5\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{3}+\frac{36}{3}+\frac{10}{3}=\frac{54}{3}=18.$$

Виходячи з отриманого результату, можна також зробити висновок, що скалярне поле $U(x,y,z)$ зростає в напрямі вектора $\vec{l}$.

Відповідь: $\frac{\partial U(M_0)}{\partial l}=18.$

Приклад 4.7. Знайти похідну скалярного поля

$$U(x,y,z)=3\ln\left(x^2-y^2\right)+\sqrt[3]{z}-2$$

у точці $A(-3;2;1)$ за напрямом від цієї точки до точки $B(-3;-1;5)$.

Розв'язання. Визначимо напрям: $\overrightarrow{AB}=(-3+3;-1-2;5-1)=(0;-3;4)$. Похідну заданого скалярного поля за напрямом $\overrightarrow{AB}$ знайдемо за формулою (4.1).

Частинні похідні функції $U(x,y,z)$:

$$U'_x=\left(3\ln\left(x^2-y^2\right)+\sqrt[3]{z}-2\right)'_x=3\cdot\frac{1}{x^2-y^2}\cdot 2x+0=\frac{6x}{x^2-y^2},$$

$$U'_y=\left(3\ln\left(x^2-y^2\right)+\sqrt[3]{z}-2\right)'_y=3\cdot\frac{1}{x^2-y^2}\cdot(-2y)+0=-\frac{6y}{x^2-y^2},$$

$$U'_z=\left(3\ln\left(x^2-y^2\right)+\sqrt[3]{z}-2\right)'_z=0+\frac{1}{3}\cdot z^{-\frac{2}{3}}-0=\frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}.$$

Значення частинних похідних у точці $A(-3;2;1)$:

$$U'_x(A)=\left.\left(\frac{6x}{x^2-y^2}\right)\right|_A=\frac{6\cdot(-3)}{(-3)^2-2^2}=-\frac{18}{5},$$

$$U'_y(A)=\left.\left(-\frac{6y}{x^2-y^2}\right)\right|_A=-\frac{6\cdot 2}{(-3)^2-2^2}=-\frac{12}{5},\qquad U'_z(A)=\left.\frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}\right|_A=\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}=\frac{1}{3}.$$

Оскільки $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{0^2+(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=5$, то маємо напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$: $\cos\alpha=\frac{0}{5}=0$, $\cos\beta=-\frac{3}{5}$, $\cos\gamma=\frac{4}{5}$.

Тоді похідна заданого скалярного поля в точці $A(-3;2;1)$ за напрямом вектора $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$:

$$\frac{\partial U(A)}{\partial l}=-\frac{18}{5}\cdot 0-\frac{12}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{36}{25}+\frac{4}{15}=\frac{108+20}{75}=\frac{128}{75}.$$

З одержаного результату можна зробити висновок, що функція $U(x,y,z)$ зростає в напрямі вектора $\overrightarrow{AB}$.

Відповідь: $\frac{\partial U(A)}{\partial l}=\frac{128}{75}$.

Приклад 4.8. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}$ у точці $M_0(2;0;1)$ за напрямом, який утворює з координатними осями OX і OY, відповідно, кути $\alpha=45^0$, $\beta=60^0$, а з віссю OZ – тупий кут γ.

Розв'язання. Похідну заданого скалярного поля знайдемо за формулою (4.1). Частинні похідні функції $U(x,y,z)$:

$$U'_x=\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}\right)'_x=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x=\frac{2x}{2z^2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{z^2\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$U'_y=\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}\right)'_y=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_y=\frac{2y}{2z^2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{z^2\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$U'_z=\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}\right)'_z=\sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(-2z^{-3}\right)=-\frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{z^3}.$$

Значення похідних у точці $M_0(2;0;1)$:

$$U'_x(M_0)=\left.\frac{x}{z^2\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{M_0}=\frac{2}{1^2\sqrt{2^2+0^2}}=\frac{2}{2}=1,$$

$$U'_y(M_0)=\left.\frac{y}{z^2\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{M_0}=\frac{0}{1^2\sqrt{2^2+0^2}}=0,$$

$$U'_z(M_0)=-\left.\frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{z^3}\right|_{M_0}=-\frac{2\sqrt{2^2+0^2}}{1^3}=-4.$$

Для того щоб знайти напрямний $\cos\gamma$, скористаємось основною тотожністю, що пов'язує напрямні косинуси: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Тоді, якщо $\cos\alpha=\cos 45^0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta=\cos 60^0=\dfrac{1}{2}$, то

$$\cos\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\pm\sqrt{1-\frac{2}{4}-\frac{1}{4}}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}.$$

Оскільки з умови задачі відомо, що кут γ – тупий, тобто $\gamma > 90^0$, то його косинус від'ємний. А отже, виходить, що $\cos\gamma = -\dfrac{1}{2}$.

Тоді похідна заданого скалярного поля за заданим напрямом

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial l} = 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\,.$$

Відповідь: $\dfrac{\partial U(M_0)}{\partial l} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\,.$

4.3. Градієнт скалярного поля

Означення. *Градієнтом скалярного поля* $U(M) = U(x,y,z)$ називається вектор

$$\mathrm{grad}U(M) = \frac{\partial U(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U(M)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U(M)}{\partial z}\vec{k}. \qquad (4.3)$$

Безпосередньо з означення випливає, що *градієнт в даній точці* M *спрямований по нормалі до поверхні рівня розглянутого скалярного поля, що проходить через цю точку.*

Якщо *скалярне поле пласке, то градієнт у відповідній точці спрямований по нормалі до лінії рівня поля, що проходить через цю точку*.

З урахуванням того, що $\vec{l}^{\,0} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$, отримуємо $\dfrac{\partial U(M)}{\partial l} = \mathrm{grad}U(M)\cdot\vec{l}^{\,0}$, тобто похідна скалярного поля $U(M)$ в напрямі $\vec{l}$ дорівнює скалярному добутку векторів $\mathrm{grad}U(M)$ і $\vec{l}^{\,0}$.

Звідси випливають наступні ***властивості градієнта і похідної за напрямом***.

Властивості градієнта і похідної за напрямом скалярного поля

Властивість 1. *Похідна скалярного поля* $U(M)$ *за напрямом* $\vec{l}$ *дорівнює проєкції градієнта поля на цей напрям:*

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l} = \operatorname{grad} U(M) \cdot \vec{l}^{\,0} = \left|\operatorname{grad} U(M)\right| \cdot \left|\vec{l}^{\,0}\right| \cdot \cos\varphi =$$

$$= \left|\operatorname{grad} U(M)\right| \cdot \cos\varphi = \text{Пр}_{\vec{l}} \operatorname{grad} U(M),$$

де $\varphi -$ *кут між векторами* $\operatorname{grad} U(M)$ *і* $\vec{l}$.

Властивість 2. *Похідна за напрямом не залежить від вибору кривої* L, *яка проведена в цьому напрямі.*

Властивість 3. *Якщо напрям вектора* $\vec{l}$ *збігається з напрямом вектора* $\operatorname{grad} U(M)$, *то кут* φ *дорівнює нулю,* $\cos\varphi = 1$, *а похідна скалярного поля за цим напрямом, що обчислена в точці* M, *приймає найбільше значення, яке дорівнює* $\left|\operatorname{grad} U(M)\right|$. *Тому,*

$$\max \left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{M_0} = \left|\operatorname{grad} U(M_0)\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial z}\right)^2}\,.$$

Властивість 4. *Якщо напрям вектора* $\vec{l}$ *перпендикулярний напряму вектора* $\operatorname{grad} U(M)$, *то* $\varphi = \frac{\pi}{2}, \cos\varphi = 0$ *і тоді* $\frac{\partial U(M)}{\partial l} = 0.$

Похідна скалярного поля, що обчислена в точці M *за всіма іншими напрямами, приймає ненульові значення, які не перевищують за абсолютною величиною* $\left|\operatorname{grad} U(M)\right|$.

Властивість 5. *Вектор* $\operatorname{grad} U(M)$ *вказує напрям найбільш швидкого зростання скалярного поля* $U(M)$.

Ось деякі властивості градієнта скалярного поля.

Нехай $U(x,y,z), V(x,y,z)$ *– диференційовані функції, тоді:*

1) $\operatorname{grad}(U+V)=\operatorname{grad}U+\operatorname{grad}V$;

2) $\operatorname{grad}(CU)=C\operatorname{grad}U$;

3) $\operatorname{grad}(UV)=V\operatorname{grad}U+U\operatorname{grad}V$;

4) $\operatorname{grad}\left(\dfrac{U}{V}\right)=\dfrac{V\operatorname{grad}U-U\operatorname{grad}V}{V^2}$, $(V\neq 0)$;

5) $\operatorname{grad}f(U)=f'(U)\operatorname{grad}U$.

Приклад 4.9. Знайти одиничний вектор $\vec{l}^{\,0}$ напряму найшвидшого зростання скалярного поля $U(x,y,z)=xy+xz+yz$ в точці $M_0(4;2;-3)$.

Розв'язання. Як зазначено у ***властивості 5***, напрямом найшвидшого зростання скалярного поля $U(M)$ є напрям вектора $\operatorname{grad}U(M)$:

$$\operatorname{grad}U(M)=\frac{\partial U(M)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U(M)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U(M)}{\partial z}\vec{k}=$$

$$=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}.$$

Тоді $\operatorname{grad}U(M_0)=-\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k}$, звідси знаходимо одиничний вектор напряму найбільш швидкого зростання скалярного поля:

$$\vec{l}^{\,0}=\frac{\operatorname{grad}U(M_0)}{|\operatorname{grad}U(M_0)|}=\frac{1}{\sqrt{38}}\left(-\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k}\right)=-\frac{1}{\sqrt{38}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{38}}\vec{j}+\frac{6}{\sqrt{38}}\vec{k}.$$

І, крім того, згідно з ***властивістю 3***,

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial l}=|\operatorname{grad}U(M_0)|=\sqrt{38}.$$

Відповідь: $\vec{l}^{\,0}=-\dfrac{1}{\sqrt{38}}\vec{i}+\dfrac{1}{\sqrt{38}}\vec{j}+\dfrac{6}{\sqrt{38}}\vec{k}$.

Приклад 4.10. Знайти градієнт і величину градієнта скалярного поля $U(x,y,z)=xz^2(y-5x)^3$ у точці $M_0(0;-1;2)$.

Розв'язання. Градієнт заданого скалярного поля будемо шукати за формулою (4.3).

Частинні похідні функції $U(x,y,z)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\left(xz^2(y-5x)^3\right)'_x=\left(xz^2\right)'_x\cdot(y-5x)^3+xz^2\cdot\left((y-5x)^3\right)'_x=$$

$$=z^2\cdot(y-5x)^3+xz^2\cdot 3(y-5x)^2\cdot(-5)=z^2\cdot(y-5x)^2\cdot(y-5x-15x)=$$

$$=z^2\cdot(y-5x)^2\cdot(y-20x),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\left(xz^2(y-5x)^3\right)'_y=xz^2\cdot 3(y-5x)^2=3xz^2\cdot(y-5x)^2,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\left(xz^2(y-5x)^3\right)'_z=x\cdot 2z\cdot(y-5x)^3=2xz\cdot(y-5x)^3.$$

Обчислимо значення похідних у точці $M_0(0;-1;2)$:

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial x}=\left(z^2\cdot(y-5x)^2\cdot(y-20x)\right)\Big|_{M_0}=2^2\cdot(-1-5\cdot 0)^2\cdot(-1-20\cdot 0)=-4,$$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial y}=\left(3xz^2\cdot(y-5x)^2\right)\Big|_{M_0}=3\cdot 0\cdot 2^2\cdot(-1-5\cdot 0)^2=0,$$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial z}=\left(2xz\cdot(y-5x)^3\right)\Big|_{M_0}=2\cdot 0\cdot 2\cdot(-1-5\cdot 0)^3=0.$$

Тоді градієнт заданого скалярного поля в точці M_0

$$\operatorname{grad}U(M_0)=(-4;0;0),$$

а його величина:

$$\left|\operatorname{grad}U(M_0)\right|=\sqrt{(-4)^2+0^2+0^2}=4.$$

Відповідь: $\operatorname{grad}U(M_0)=(-4;0;0)$; $\left|\operatorname{grad}U(M_0)\right|=4$.

Приклад 4.11. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{x}}{y^2}-\dfrac{3y}{\sqrt{z}}$ у точці $M_0(1;2;4)$ за напрямом його найбільшого зростання.

Розв'язання. Напрямом найбільшого зростання скалярного поля, заданого функцією $U(x,y,z)$, є напрям його градієнту. Значення похідної скалярного поля за напрямом її градієнта дорівнює модулю цього градієнта. Отже, задача зводиться до знаходження величини (модуля) градієнта заданого скалярного поля $U(x,y,z)$ у відповідній точці M_0.

Градієнт скалярного поля $U(x,y,z)$ у точці M_0 знайдемо за формулою (4.3). Частинні похідні функції $U(x,y,z)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}-\frac{3y}{\sqrt{z}}\right)'_x=\frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2y^2\cdot\sqrt{x}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}-\frac{3y}{\sqrt{z}}\right)'_y=\sqrt{x}\cdot\left(-2y^{-3}\right)-\frac{3}{\sqrt{z}}\cdot 1=-\frac{2\sqrt{x}}{y^3}-\frac{3}{\sqrt{z}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}-\frac{3y}{\sqrt{z}}\right)'_z=-3y\cdot\left(-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\right)=\frac{3y}{2\sqrt{z^3}}.$$

Обчислимо значення похідних у точці $M_0(1;2;4)$:

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial x}=\left.\frac{1}{2y^2\sqrt{x}}\right|_{M_0}=\frac{1}{2\cdot 2^2\cdot\sqrt{1}}=\frac{1}{8},$$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial y}=\left.-\frac{2\sqrt{x}}{y^3}-\frac{3}{\sqrt{z}}\right|_{M_0}=-\frac{2\sqrt{1}}{2^3}-\frac{3}{\sqrt{4}}=-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}=-\frac{7}{4},$$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial z}=\left.\frac{3y}{2\sqrt{z^3}}\right|_{M_0}=\frac{3\cdot 2}{2\sqrt{4^3}}=\frac{3}{8}.$$

Градієнт заданого скалярного поля: $\operatorname{grad}U(M_0)=\left(\frac{1}{8};-\frac{7}{4};\frac{3}{8}\right)$.

Похідна заданого скалярного поля за напрямом його найбільшого зростання

$$\max\frac{\partial U(M_0)}{\partial l}=\left|\operatorname{grad}U(M_0)\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(-\frac{7}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{64}+\frac{49}{16}+\frac{9}{64}}=\sqrt{\frac{206}{64}}=\frac{\sqrt{206}}{8}.$$

Відповідь: $\max\frac{\partial U(M_0)}{\partial l}=\frac{\sqrt{206}}{8}$.

4.4*. Метод градієнтного спуску для пошуку локального екстремуму

Якщо задачу пошуку локального мінімуму (максимуму) функції декількох змінних неможливо вирішити в уявному вигляді, то у такому випадку застосовують чисельні методи – *метод спуску* або *підйому*. Існують *методи оптимального покоординатного спуску* та *метод найшвидшого (градієнтного) спуску*.

Основна ідея методу градієнтного спуску полягає в тому, щоб на кожному кроці чисельного алгоритму йти в напрямі найшвидшого спуску, і цей напрям задається *антиградієнтом*.

Градієнтний спуск – це ітераційний алгоритм оптимізації першого порядку (Оптимізація (математика) – Вікіпедія (wikipedia.org)), в якому для знаходження локального мінімуму функції здійснюються кроки, пропорційні *протилежному значенню* градієнта функції в поточній точці.

Якщо натомість здійснюються кроки пропорційно *самому* значенню градієнта, то відбувається наближення до локального максимуму цієї функції; і ця процедура тоді відома як *градієнтний підйом*.

Знайти точку мінімуму функції $U = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ можна також шляхом зведення багатовимірної задачі оптимізації до послідовності одновимірних задач на кожному кроці оптимізації. Такий спосіб називається *методом покоординатного спуску*.

Різниця полягає в тому, що у методі градієнтного спуску напрям оптимізації визначається градієнтом цільової функції, тоді як у методі покоординатного спуску проводиться спуск на кожному кроці вздовж одного з координатних напрямів.

Розглянемо наступну задачу. Уявімо, що маємо **сферичну деталь**, яка повинна точно сідати у спеціально оброблене гніздо. Через виробничі допуски та мікронерівності поверхні потенціальна енергія деталі змінюється залежно від її зсуву в напрямах x та y від центру гнізда. Нехай

$$U\left(x, y\right) = x^4 + y^4 - 4x^2 - 4y^2$$

– м**одель потенційної енергії,** де x, y – зміщення центру деталі від геометричного центру гнізда (мм), U – потенційна енергія (умовні одиниці). **Фізичний смисл** членів $\left(x^4 + y^4\right)$ моделює швидке зростання енергії при великому відхиленні (жорсткість форми гнізда). Члени $\left(-4x^2 - 4y^2\right)$ створюють «ями» в центрі, що притягують деталь у положення мінімуму енергії. Спочатку ***вирішимо цю задачу аналітично***:

Приклад 4.12.1. Знайти точки екстремуму функції

$$U(x,y)=x^4+y^4-4x^2-4y^2.$$

Розв'язання. Частинні похідні заданої функції:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\left(x^4+y^4-4x^2-4y^2\right)'_x=4x^3-8x,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\left(x^4+y^4-4x^2-4y^2\right)'_y=4y^3-8y.$$

Знайдемо стаціонарні точки. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial U}{\partial y}=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}4x^3-8x=0,\\ 4y^3-8y=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}x^3-2x=0,\\ y^3-2y=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}x\left(x^2-2\right)=0,\\ y\left(y^2-2\right)=0.\end{cases}$$

Розв'язки системи: $x_1=0$, $x_2=\sqrt{2}$, $x_3=-\sqrt{2}$, $y_1=0$, $y_2=\sqrt{2}$, $y_3=-\sqrt{2}$.
Поєднуючи значення попарно, отримуємо дев'ять стаціонарних точок:

$$P_1(0;0),\ P_2\left(0;\sqrt{2}\right),\ P_3\left(0;-\sqrt{2}\right), P_4\left(\sqrt{2};0\right),\ P_5\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right),\ P_6\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right),$$

$$P_7\left(-\sqrt{2};0\right),\ P_8\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right),\ P_9\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right).$$

Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремуму в кожній із знайдених стаціонарних точок. Для других похідних маємо:

$$A=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\left(4x^3-8x\right)'_x=12x^2-8,\ B=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\left(4x^3-8x\right)'_y=0,$$

$$C=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\left(4y^3-8y\right)'_y=12y^2-8.$$

Знайдемо визначник:

$$\Delta=AC-B^2=\left(12x^2-8\right)\left(12y^2-8\right)-0=16\left(3x^2-2\right)\left(3y^2-2\right).$$

Обчислимо значення цього виразу для кожної стаціонарної точки:

1. Точка $P_1(0;0)$: $\Delta_1 = 16(3\cdot 0^2 - 2)(3\cdot 0^2 - 2) = 16\cdot 4 = 64 > 0$, екстремум існує: $A_1 = (12x^2 - 8)\big|_{P_1} = 12\cdot 0^2 - 8 = -8 < 0$ – це **точка максимуму**.

2-3. Точки $P_2(0;\sqrt{2})$, $P_3(0;-\sqrt{2})$: екстремуму немає, тому що

$$\Delta_{2,3} = 16(3\cdot 0^2 - 2)\left(3\cdot\left(\pm\sqrt{2}\right)^2 - 2\right) = 16\cdot(-2)\cdot 4 = -128 < 0.$$

4-5. Точки $P_4(\sqrt{2};0)$, $P_7(-\sqrt{2};0)$: екстремуму немає, тому що

$$\Delta_{4,7} = 16\left(3\cdot\left(\pm\sqrt{2}\right)^2 - 2\right)(3\cdot 0^2 - 2) = 16\cdot 4\cdot(-2) = -128 < 0,$$

6-9. Точки $P_5(\sqrt{2};\sqrt{2})$, $P_6(\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $P_8(-\sqrt{2};\sqrt{2})$, $P_9(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$:

$\Delta_{5,6,8,9} = 16\left(3\cdot\left(\pm\sqrt{2}\right)^2 - 2\right)\left(3\cdot\left(\pm\sqrt{2}\right)^2 - 2\right) = 16\cdot 4\cdot 4 = 256 > 0$, екстремуми існують. $A_{5,6,8,9} = (12x^2 - 8)\big|_{P_5,P_6,P_8,P_9} = 12\cdot\left(\pm\sqrt{2}\right)^2 - 8 = 16 > 0$ – це **точки мінімуму**.

Отже, отримали результат:

Точка $(x;y)$	Характер точки
$(0;0)$	Локальний максимум
$(0;\pm\sqrt{2}),(\pm\sqrt{2};0)$	Немає екстремуму
$(\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{2})$	Локальний мінімум

Значення функції в точках екстремуму:

$$U_{\max} = \left(x^4 + y^4 - 4x^2 - 4y^2\right)\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 0,$$

$$U_{\min} = \left(x^4 + y^4 - 4x^2 - 4y^2\right)\Big|_{\substack{x=\pm\sqrt{2},\\ y=\pm\sqrt{2}}} =$$

$$= \left(\pm\sqrt{2}\right)^4 + \left(\pm\sqrt{2}\right)^4 - 4\left(\pm\sqrt{2}\right)^2 - 4\left(\pm\sqrt{2}\right)^2 = -8.$$

Приклад 4.12.2. Знайти положення $(x; y)$, де деталь перебуватиме у **стійкій рівновазі** (мінімум енергії).

Розв'язання. Для вирішення задачі використаємо **метод градієнтного спуску**, який імітує, як деталь «знаходить» правильне місце у гнізді.

Для цього:

1. Побудуємо графік поверхні $U(x, y)$ і контурні лінії.

2. Задамо кілька стартових точок $(x_0; y_0)$, які імітують початкове неточне встановлення деталі.

3. Виконаємо декілька кроків градієнтного спуску з фіксованим кроком η, поки зміни координат не стануть менші за допуск ε (наприклад, 0,001 мм).

4. Порівняємо знайдені положення з аналітичним мінімумом.

5. Оцінимо похибку наближення.

Градієнт заданої функції:

$$\mathrm{grad}U(x, y) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}\right) = \left(4x^3 - 8x; 4y^3 - 8y\right).$$

Починаємо з довільної точки $(x_0; y_0)$ і рухаємось у напрямі, протилежному градієнту:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \eta \cdot \dfrac{\partial U}{\partial x} = x_k - \eta \cdot \left(4x_k^3 - 8x_k\right), \\ y_{k+1} = y_k - \eta \cdot \dfrac{\partial U}{\partial y} = y_k - \eta \cdot \left(4y_k^3 - 8y_k\right), \end{cases}$$

де η – крок (наприклад, 0,05 мм).

Умова зупинки (допуск позиції): $\varepsilon = \sqrt{\left(x_{k+1} - x_k\right)^2 + \left(y_{k+1} - y_k\right)^2} < 0{,}001.$

Наведемо **повні таблиці ітерацій** для двох стартових точок при допуску по позиції $\varepsilon < 0{,}001$ (крок $\eta = 0{,}05$).

Побудуємо таблиці ітерації метода градієнтного спуску для різних стартових точок.

Візьмемо першу стартову точку $(-2{,}5; -1{,}5)$.

Таблиця ітерацій градієнтного спуску для першої стартової точки $(-2,5;-1,5)$ (допуск позиції $\varepsilon = 0,001$):

k	***x***	***y***	***U(x, y)***	***ε***
0	-2,5000	-1,5000	10,1250	0
1	-0,375	-1,425	-4,5418	2,1263
2	-0,51445	-1,41627	-4,9886	0,1397
3	-0,693	-1,41462	-5,6904	0,1786
4	-0,90364	-1,4143	-6,5995	0,2106
5	-1,11752	-1,41423	-7,4358	0,2139
6	-1,28541	-1,41422	-7,8791	0,1679
7	-1,3748	-1,41421	-7,9879	0,0894
8	-1,40503	-1,41421	-7,9993	0,0302
9	-1,4123	-1,41421	-8,0000	0,0073
10	-1,41383	-1,41421	-8,0000	0,0015
11	-1,41414	-1,41421	-8,0000	0,0003

Алгоритм зупинився на кроці 11, тому що позиція змінилась менше ніж на 0,001, при цьому отримали точку $(x;y) \approx (-1,4141;-1,4142)$.

Друга стартова точка $(2;2)$.

Таблиця ітерацій градієнтного спуску для другої стартової точки $(2;2)$ (допуск позиції $\varepsilon = 0,001$):

k	***x***	***y***	***U(x, y)***	***ε***
0	2,0000	2,0000	0,0000	0
1	1,2000	1,2000	-7,3728	1,1314
2	1,3344	1,3344	-7,9037	0,1901
3	1,3929	1,3929	-7,9929	0,0828
4	1,4096	1,4096	-7,9997	0,0235
5	1,4133	1,4133	-8,0000	0,0052
6	1,4140	1,4140	-8,0000	0,0011
7	1,4142	1,4142	-8,0000	0,0002

Алгоритм зупинився на кроці 7, тому що позиція змінилась менше ніж на $0{,}001$, кінцева точка $(x;y)\approx(1{,}4142;1{,}4142)$. Порівняємо результати обчислень в **Прикладах 4.12.1** і **4.12.2.**

В результаті аналітичного розв'язку знайдено мінімуми функції:

$$(x;y)=\left(\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{2}\right),\ \sqrt{2}\approx 1{,}4142.$$

Відповідні значення функції в точках мінімуму: $U_{\min}=-8$.

Результати чисельного методу градієнтного спуску:

1. Стартова точка $(-2{,}5;-1{,}5)$:

- кількість ітерацій: 11;
- знайдена точка: $(x;y)\approx(-1{,}4141;-1{,}4142)$;
- найближчий аналітичний мінімум: $(x;y)=\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$;
- абсолютна похибка координат: $\Delta x=0{,}0001$, $\Delta y=0{,}0000$;
- значення функції: $U\approx-8{,}0000$.

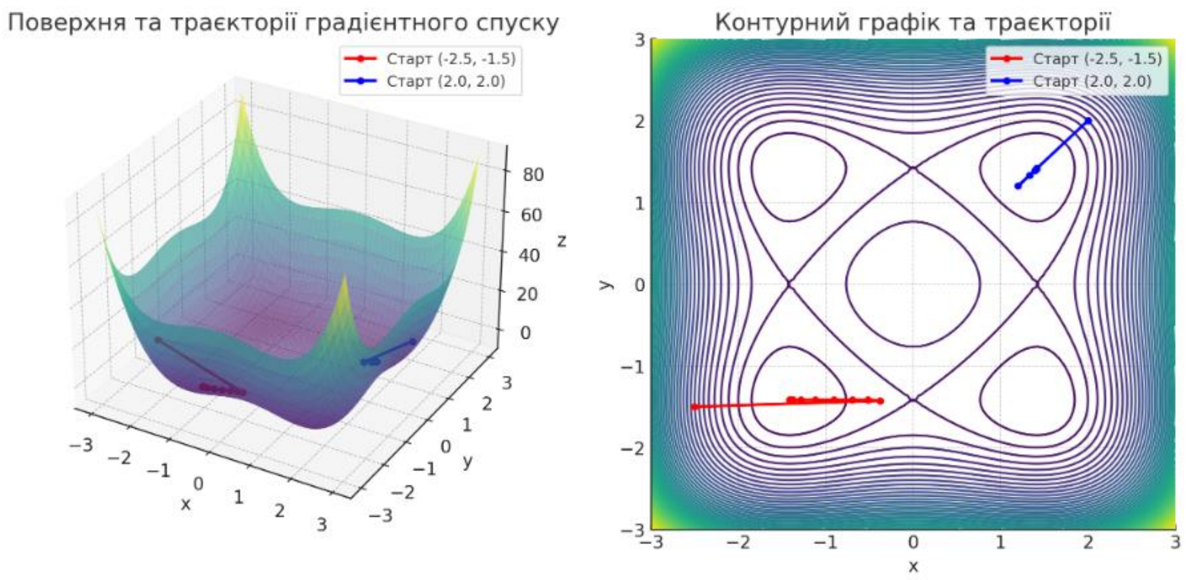
Похибка за значенням функції: $\varepsilon=\left|U-U_{\min}\right|<0{,}001$.

2. Стартова точка $(2;2)$**:**

- кількість ітерацій: 7;
- знайдена точка: $(x;y)\approx(1{,}4142;1{,}4142)$;
- найближчий аналітичний мінімум: $(x;y)=\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$;
- абсолютна похибка координат: $\Delta x=0{,}0000$, $\Delta y=0{,}0000$;
- значення функції: $U\approx-8{,}0000$;

Похибка за значенням функції: $\varepsilon=\left|U-U_{\min}\right|<0{,}001$.

Графік поверхні та контурний графік



Контрольні запитання

1. Дайте означення скалярного поля. Наведіть приклади.
2. Дайте означення поверхні рівня скалярного поля. Наведіть приклади.
3. Дайте означення похідної за напрямом.
4. Як пов'язана похідна за напрямом з частинними похідними?
5. Дайте означення градієнта скалярного поля.
6. Який зв'язок між похідною за напрямом та градієнтом?
7. Сформулюйте властивості градієнта.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти лінії рівня скалярного поля $U(x,y)=x^2-4y$.

2. Знайти поверхні рівня скалярного поля $U(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z)=z-\ln(x+y)$ в точці $M_0(-1;2;1)$ за напрямом $\vec{l}=2\vec{i}-3\vec{k}$.

4. Знайти величину і напрям градієнта скалярного поля $U(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ в точці $M_0(5;12)$.

5. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z)=x^2+4yz$ за напрямом градієнта в точці $M_0(0;1;-1)$.

6. Знайти лінії рівня скалярного поля $U(x,y)=x^2+4y^2-2x+16y$.

7. Знайти поверхні рівня скалярного поля $U(x,y,z)=x^2+4y^2+9z^2$.

8. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z)=(x+y+z)^2-4y$ в точці $M_0(2;-1;0)$ за напрямом з цієї точку до початку координат.

9. Знайти величину і напрям градієнта скалярного поля $U(x,y,z)=z(x^2-yz)$ в точці $M_0(-2;1;-1)$.

10. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xyz$ за напрямом градієнта в точці $M_0(0;1;2)$.

Відповіді

1. Сім'я парабол $x^2=4(y+C)$ з вершинами на осі OY. **2**. Сім'я сфер $x^2+y^2+z^2=C^2$ з центрами у початку координат; $R=C, C>0$. Якщо $C=0$, маємо точку – початок координат. **3**. $-\frac{5}{\sqrt{13}}$. **4**. $\mathrm{grad}U(M_0)=\left(\frac{5}{13};\frac{12}{13}\right)$, $|\mathrm{grad}U(M_0)|=1$. **5**. $4\sqrt{2}$. **6**. Сім'я еліпсів з центром в точці $O_1(1;-2)$ і півосями $a=\sqrt{C+17}, b=\frac{\sqrt{C+17}}{2}$, якщо $C>-17$, і точка $O_1(1;-2)$, якщо $C=-17$. **7.** Сім'я еліпсоїдів з центром в точці $O_1(0;0;0)$ і півосями $a=\sqrt{C}, b=\sqrt{\frac{C}{4}}, c=\sqrt{\frac{C}{9}}$, якщо $C>0$, і точка $O_1(0;0;0)$, якщо $C=0$. **8**. $-\frac{6}{\sqrt{5}}$. **9**. $\mathrm{grad}U(M_0)=(4;-1;6)$, $|\mathrm{grad}U(M_0)|=\sqrt{53}$. **10**. 6.

Розділ 2. Кратні інтеграли

5*. Інтеграли, що залежать від параметра

5.1. Власні інтеграли, що залежать від параметра

Розглянемо функцію $f(x,\lambda)$ двох змінних, що визначена та неперервна для всіх $x \in [a,b]$ і всіх значень $\lambda \in [c,d]$. Нехай для кожного $\lambda \in [c,d]$ функція $f(x,\lambda)$ інтегрована в проміжку $[a,b]$.

Якщо обчислювати інтеграл $\int_a^b f(x,\lambda)dx$ за умови, що $\lambda \in [c,d]$, то для кожного значення $\lambda \in [c,d]$ буде існувати відповідне значення інтеграла $\int_a^b f(x,\lambda)dx$, таким чином інтеграл $\int_a^b f(x,\lambda)dx$ є деякою функцією від λ. Позначимо цю функцію через $I(\lambda)$, тобто

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x,\lambda)dx. \tag{5.1}$$

Інтеграл $\int_a^b f(x,\lambda)dx$, що є функцією змінної λ, яка називається ***параметром***, називається *інтегралом, що залежить від параметра*.

Інтеграли виду (5.1) називаються також *власними інтегралами, що залежать від параметра*.

При знайомстві з інтегралами, що залежать від параметра, виникають питання щодо області визначення функцій $I(\lambda) = \int_a^b f(x,\lambda)dx$, а також як для таких функцій виконувати операції математичного аналізу (обчислення границь, диференціювання та інтегрування).

Далі розглянемо питання, пов'язані з властивостями функції $I(\lambda)$, а саме: її неперервність, диференційованість і інтегрованість. Властивості інтеграла (5.1) мають безліч застосувань, особливо при обчисленні невласних інтегралів.

5.2. Властивості власних інтегралів, що залежать від параметра

5.2.1. *Неперервність інтегралів, що залежать від параметра*

Теорема 5.1. *Якщо функція* $f(x,\lambda)$ *неперервна при* $x \in [a,b]$ *і* $\lambda \in [c,d]$, *то функція* $I(\lambda) = \int\limits_a^b f(x,\lambda)dx$ *неперервна на інтервалі* $[c,d]$.

Іноді той факт, що функція $I(\lambda) = \int\limits_a^b f(x,\lambda)dx$ неперервна, записують у вигляді $\lim\limits_{\xi \to \lambda} \int\limits_a^b f(x,\xi)dx = \int\limits_a^b f(x,\lambda)dx.$

Приклад 5.1. Довести, що функція $I(\lambda)$ неперервна, якщо

$$I(\lambda) = \int\limits_1^e (x+\lambda)\ln x dx.$$

Розв'язання. Функція $f(x,\lambda) = (x+\lambda)\ln x$, де $x \in [1,e]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, неперервна за цих умов. Тоді за **теоремою 5.1** маємо, що функція $I(\lambda) = \int\limits_1^e (x+\lambda)\ln x dx$ неперервна для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$.

Перевіримо, що функція $I(\lambda)$ дійсно неперервна, обчислюючи відповідний інтеграл:

$$I(\lambda) = \int\limits_1^e (x+\lambda)\ln x dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln x, \, dv = (x+\lambda)dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, \, v = \dfrac{(x+\lambda)^2}{2} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{(x+\lambda)^2}{2} \cdot \ln x \Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{(x+\lambda)^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{(e+\lambda)^2}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_1^e \left(x + 2\lambda + \frac{\lambda^2}{x} \right) dx =$$

$$= \frac{(e+\lambda)^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2\lambda x + \lambda^2 \ln x \right)\Bigg|_1^e = \frac{1}{4}\left(e^2 + 4\lambda + 1\right),$$

тобто функція $I(\lambda) = \int\limits_1^e (x+\lambda)\ln x dx = \frac{1}{4}\left(e^2 + 4\lambda + 1\right)$ неперервна.

Приклад 5.2. Знайти $I(3)$, якщо $I(\lambda)=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+\lambda^2}$.

Розв'язання. При $\lambda=0$ підінтегральна функція і функція $I(\lambda)$ мають нескінченний розрив. Знайдемо $I(\lambda)$:

$$I(\lambda)=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+\lambda^2}=\frac{1}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{\lambda}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{\lambda}-\operatorname{arctg}0\right)=\frac{1}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{\lambda},$$

за умови $\lambda\neq 0$. Звідки $I(3)=I(\lambda)\big|_{\lambda=3}=\frac{1}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{\lambda}\Bigg|_{\lambda=3}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{18}$.

Відповідь: $I(3)=\frac{\pi}{18}$.

Приклад 5.3. Знайти $I\left(\frac{1}{2}\right)$, якщо $I(\lambda)=\int\limits_3^5\frac{xdx}{x^2-\lambda^2}dx$.

Розв'язання. Знайдемо $I(\lambda)$:

$$I(\lambda)=\int\limits_3^5\frac{xdx}{x^2-\lambda^2}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-\lambda^2\right|\Big|_3^5=\frac{1}{2}\left(\ln\left|25-\lambda^2\right|-\ln\left|9-\lambda^2\right|\right)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{25-\lambda^2}{9-\lambda^2}\right|.$$

Звідки $I\left(\frac{1}{2}\right)=I(\lambda)\big|_{\lambda=\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{25-\lambda^2}{9-\lambda^2}\right|\Bigg|_{\lambda=\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{99}{35}$.

Відповідь: $I\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{99}{35}$.

Зауваження. **Теорема 5.1** має місце і в тому випадку, коли область інтегрування є довільною замкненою обмеженою областю. Наприклад, якщо функція $f(x,\lambda)$ неперервна при $\lambda\in[c,d]$, $a(\lambda)\le x\le b(\lambda)$, де $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ неперервні на $[c,d]$. В цьому випадку можна розглядати інтеграл

$$I(\lambda)=\int\limits_{a(\lambda)}^{b(\lambda)}f(x,\lambda)dx,$$

який залежить від параметра λ, і має змінні межі інтегрування.

Приклад 5.4. Знайти $I(4)$, якщо $I(\lambda)=\int\limits_{\lambda^2}^{1}(x-2\lambda)dx$.

Розв'язання. Знайдемо $I(\lambda)$:

$$I(\lambda)=\int\limits_{\lambda^2}^{1}(x-2\lambda)dx=\frac{x^2}{2}-2\lambda x\Bigg|_{\lambda^2}^{1}=\left(\frac{1}{2}-2\lambda\right)-\left(\frac{\lambda^4}{2}-2\lambda^3\right)=\frac{1}{2}-2\lambda+2\lambda^3-\frac{\lambda^4}{2}.$$

Звідки

$$I(4)=I(\lambda)\big|_{\lambda=4}=\frac{1}{2}-2\lambda+2\lambda^3-\frac{\lambda^4}{2}\Bigg|_{\lambda=4}=\frac{1}{2}-8+128-\frac{256}{2}=-7{,}5.$$

Відповідь: $I(4)=-7{,}5$.

5.2.2. *Інтегрування інтегралів, що залежать від параметра*

Теорема 5.2. *Якщо функція* $f(x,\lambda)$ *неперервна при* $x\in[a,b]$ *і* $\lambda\in[c,d]$, *то для* $I(\lambda)=\int\limits_a^b f(x,\lambda)dx$ *маємо:*

$$\int\limits_c^d I(\lambda)d\lambda=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,\lambda)dx\right)d\lambda=\int\limits_c^d d\lambda\int\limits_a^b f(x,\lambda)dx. \qquad (5.2)$$

Інтеграл у правій частині виразу (5.2) називається ***повторним***. Згідно запису в першу чергу береться ***внутрішній інтеграл*** за змінною x за умови $x\in[a,b]$. Результат інтегрування – функція $I(\lambda)$, яка потім інтегрується – ***зовнішній інтеграл*** – за змінною λ, де $\lambda\in[c,d]$.

Аналогічний вигляд має повторний інтеграл, де внутрішнє інтегрування проводиться за змінною λ:

$$\int\limits_c^d I(\lambda)d\lambda=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,\lambda)d\lambda\right)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,\lambda)d\lambda. \qquad (5.3)$$

Повторні інтеграли в правих частинах рівнянь (5.2) і (5.3) відрізняються порядком інтегрування – вибором того, за якою змінною проводиться інтегрування в першу чергу. Відповідні інтеграли називаються внутрішніми. В формулі (5.2) внутрішнім є інтеграл $I(\lambda)$.

Значення інтеграла не змінюється при зміні порядку інтегрування, тобто, інтеграл (5.2) може бути записаний у вигляді (5.3):

$$\int_c^d I(\lambda)d\lambda = \int_c^d d\lambda \int_a^b f(x,\lambda)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,\lambda)d\lambda.$$

Приклад 5.5. Обчислити інтеграл від функції $I(\lambda)$ на відрізку $[0,1]$, якщо $I(\lambda) = \int_{\lambda^2}^1 (x - 2\lambda)dx$.

Розв'язання. З **Прикладу 5.4** маємо, що:

$$I(\lambda) = \frac{1}{2} - 2\lambda + 2\lambda^3 - \frac{\lambda^4}{2}.$$

Згідно з формулою (5.2) маємо

$$\int_0^1 I(\lambda)d\lambda = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - 2\lambda + 2\lambda^3 - \frac{\lambda^4}{2}\right)d\lambda = \frac{\lambda}{2} - \lambda^2 + \frac{\lambda^4}{2} - \frac{\lambda^5}{10}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = -\frac{1}{10}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{10}$.

5.2.3. *Диференціювання інтегралів, що залежать від параметра*

Теорема 5.3. *Якщо функція* $f(x,\lambda)$ *і її частинна похідна* $f'_\lambda(x,\lambda)$ *неперервні для всіх* $x \in [a,b]$ *і всіх значень* $\lambda \in [c,d]$, *то функція* $I(\lambda) = \int_a^b f(x,\lambda)dx$ *має неперервну похідну* $I'(\lambda)$ *і має місце формула*

$$I'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\int_a^b f(x,\lambda)dx = \int_a^b f'_\lambda(x,\lambda)dx. \tag{5.4}$$

Ця теорема ще має назву ***правило Лейбніца,*** яка встановлює при деяких умовах можливість перестановки дій інтегрування за змінною x і диференціювання за параметром λ.

Правило Лейбніца застосовується при знаходженні функції за її повним диференціалом або при пошуку складних визначених інтегралів, таких, наприклад, як $\int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+\lambda^2\right)^n}$.

Приклад 5.6. Знайти $I'(\lambda)$ та $I''(\lambda)$, якщо $I(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\lambda\sin x)dx$ (функція Бесселя).

Розв'язання. Знайдемо $I'(\lambda)$ та $I''(\lambda)$ за ***правилом Лейбніца*** (5.4):

$$I'(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos(\lambda\sin x)\right)'_{\lambda}dx=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(\lambda\sin x)\cdot\sin x dx,$$

$$I''(\lambda)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(\lambda\sin x)\cdot\sin x\right)'_{\lambda}dx=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\lambda\sin x)\cdot\sin^2 x dx.$$

Відповідь: $I'(\lambda)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(\lambda\sin x)\cdot\sin x dx,\ I''(\lambda)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\lambda\sin x)\cdot\sin^2 x dx.$

В формулі (5.4) $I'(\lambda)=\int_a^b f'_{\lambda}(x,\lambda)dx$ межі інтегрування постійні. З'ясуємо, який вигляд буде мати аналогічна формула у випадку змінних меж інтегрування $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$. Розглянемо $I(\lambda)=\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x,\lambda)dx$.

Теорема 5.4. *Якщо функція $f(x,\lambda)$ і її частинна похідна $f'_{\lambda}(x,\lambda)$ неперервні для всіх $x\in[a,b]$ і всіх значень $\lambda\in[c,d]$, функції $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ неперервні в інтервалі $[c,d]$, мають неперервні похідні і задовольняють умовам $a\le a(\lambda)\le b(\lambda)\le b$, то функція $I(\lambda)$ має неперервну похідну $I'(\lambda)$ і має місце формула*

$$I'(\lambda)=\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f'_{\lambda}(x,\lambda)dx+f\left(b(\lambda),\lambda\right)\cdot b'(\lambda)-f\left(a(\lambda),\lambda\right)\cdot a'(\lambda). \tag{5.5}$$

Приклад 5.7. Знайти похідну $I'(\lambda)$, якщо $I(\lambda)=\int\limits_{\lambda}^{\lambda^2} e^{-\lambda x^2}dx$.

Розв'язання. Для виконання умов $a \le a(\lambda) \le b(\lambda) \le b$ **Теореми 5.4** з'ясуємо, при яких значеннях λ воно виконується для заданого інтеграла $I(\lambda)$:

$$a(\lambda)=\lambda, b(\lambda)=\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 \ge \lambda,$$

тобто $\lambda(\lambda-1)\ge 0$. Очевидно, $\lambda>1$ або $\lambda<0$.

Оскільки $a(\lambda)=\lambda \Rightarrow a'(\lambda)=1;\;\; b(\lambda)=\lambda^2 \Rightarrow b'(\lambda)=2\lambda.$

Тоді за формулою (5.5) маємо:

$$I'(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}\int\limits_{\lambda}^{\lambda^2} e^{-\lambda x^2}dx=-\int\limits_{\lambda}^{\lambda^2} x^2e^{-\lambda x^2}dx+2\lambda e^{-\lambda^5}-e^{-\lambda^3}.$$

Відповідь: $I'(\lambda)=-\int\limits_{\lambda}^{\lambda^2} x^2e^{-\lambda x^2}dx+2\lambda e^{-\lambda^5}-e^{-\lambda^3}, \lambda\notin[0,1].$

5.3. Невласні інтеграли, що залежать від параметра

Наведені в пункті **5.1** теореми відносяться до інтегралів зі скінченними межами інтегрування і неперервними підінтегральними функціями. У випадку невласних інтегралів відповідна теорія значно складніше.

Розглянемо найбільш застосовані випадки невласних інтегралів, що залежать від параметра, виду:

$$I(\lambda)=\int\limits_{a}^{\infty} f(x,\lambda)dx. \tag{5.6}$$

Область визначення функції $I(\lambda)$ є сукупністю значень λ, при яких інтеграл (5.6) збігається.

Означення. Невласний інтеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x,\lambda)dx$, що залежить від параметра λ, називається *правильно збіжним*, якщо існує така додатна неперервна функція $\varphi(x)$, що при всіх значеннях x і λ, що розглядаються, виконується нерівність $|f(x,\lambda)|\le\varphi(x)$ і невласний інтеграл $\int\limits_{a}^{\infty}\varphi(x)dx$ збігається.

Невласні інтеграли, що правильно збігаються, мають наступні ***властивості***:

1) якщо функція $f(x,\lambda)$ неперервна при $x\in[a,\infty)$ і $\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]$, а інтеграл $\int\limits_a^\infty f(x,\lambda)dx$ збігається правильно, то він є неперервною функцією параметра λ;

2) якщо $f(x,\lambda)$ має неперервну частинну похідну $f'_\lambda(x,\lambda)$ і інтеграл $\int\limits_a^\infty f'_\lambda(x,\lambda)dx$ збігається правильно, то функція $I(\lambda)$ диференційована і має місце формула

$$I'(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}\int\limits_a^\infty f(x,\lambda)dx=\int\limits_a^\infty f'_\lambda(x,\lambda)dx. \tag{5.7}$$

Приклад 5.8. Обчислити за допомогою диференціювання по параметру:

$$I(\lambda)=\int\limits_0^\infty\frac{1-e^{-x\lambda}}{xe^x}dx,\quad \lambda>-1.$$

Розв'язання. За формулою (5.7) маємо:

$$I'(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}\int\limits_0^\infty\frac{1-e^{-x\lambda}}{xe^x}dx=\int\limits_0^\infty\frac{xe^{-x\lambda}}{xe^x}dx=\int\limits_0^\infty e^{-x(\lambda+1)}dx=-\frac{e^{-x(\lambda+1)}}{\lambda+1}\Bigg|_0^\infty=\frac{1}{\lambda+1}.$$

Звідси $I(\lambda)=\ln(\lambda+1)$ за умови $\lambda>-1$.

Відповідь: $I(\lambda)=\ln(\lambda+1)$, $\lambda>-1$.

Приклад 5.9. Обчислити інтеграл **Пуассона:**

$$I(\lambda)=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos\lambda x dx.$$

Розв'язання. Зазначимо, що при $\lambda=0$ маємо інтеграл Пуассона $I(0)=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Оскільки $\left|e^{-x^2}\cos\lambda x\right|\le e^{-x^2}$, то інтеграл $I(\lambda)=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos\lambda x dx$ правильно збігається, тому

$$I'(\lambda)=\int\limits_0^\infty\left(e^{-x^2}\cos\lambda x\right)'_\lambda dx=-\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}\sin\lambda x dx.$$

Інтегруємо частинами:

$$I'(\lambda) = -\int_0^\infty xe^{-x^2} \sin\lambda x dx = \left\| \begin{matrix} u = \sin\lambda x, \ dv = xe^{-x^2} dx \\ du = \lambda\cos\lambda x, \ v = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}e^{-x^2} \cdot \sin\lambda x \Big|_0^\infty}_{\to 0} - \frac{\lambda}{2} \underbrace{\int_0^\infty e^{-x^2} \cos\lambda x dx}_{I(\lambda)} = -\frac{\lambda}{2} I(\lambda),$$

тобто $I'(\lambda) = -\dfrac{\lambda}{2} I(\lambda) \Rightarrow \dfrac{I'(\lambda)}{I(\lambda)} = -\dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow \ln I(\lambda) = -\dfrac{\lambda^2}{4} + C.$

Але $I(0) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \ln I(\lambda) = -\dfrac{\lambda^2}{4} + \ln\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, звідки $I(\lambda) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$.

Відповідь: $I(\lambda) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$.

Розглянемо деякі неелементарні функції, які визначені невласними інтегралами, що залежать від параметра.

5.3.1. *Гамма-функція*

Гамма-функція ($\mathbf{\Gamma}$-функція), яка зустрічається в різних розділах математичного аналізу і його застосувань, визначається наступним чином:

$$\mathbf{\Gamma}(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} dx.$$

Функція $\mathbf{\Gamma}(\lambda)$ визначена і неперервна при $\lambda > 0$. Очевидно,

$$\mathbf{\Gamma}(\lambda+1) = \int_0^\infty x^\lambda e^{-x} dx = \left\| \begin{matrix} u = x^\lambda, \ dv = e^{-x} dx \\ du = \lambda x^{\lambda-1} dx, \ v = -e^{-x} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \underbrace{-x^\lambda e^{-x} \Big|_0^\infty}_{\to 0} + \lambda \underbrace{\int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} dx}_{\Gamma(\lambda)} = \lambda \mathbf{\Gamma}(\lambda).$$

Таким чином, отримано рекурентну формулу

$$\boxed{\mathbf{\Gamma}(\lambda+1)=\lambda\mathbf{\Gamma}(\lambda),}$$

яка є ***найважливішою властивістю*** **Γ**-функції.

З означення **Γ**-функції випливає, що $\mathbf{\Gamma}(1)=\int\limits_0^{\infty} e^{-x}dx=1$. Користуючись отриманою рекурентною формулою, для натуральних значень $\lambda\ (\lambda=n)$ маємо, що

$$\mathbf{\Gamma}(n+1)=n\mathbf{\Gamma}(n)=n(n-1)\mathbf{\Gamma}(n-1)=n(n-1)(n-2)\mathbf{\Gamma}(n-2)=\ldots=n!,$$

тобто $\mathbf{\Gamma}(n+1)=n!,\quad n\in\mathbb{N}$.

В деяких застосуваннях **Γ**-функції часто зустрічається її значення $\mathbf{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right)$. Користуючись результатом **Прикладу 5.9**, визначимо значення $\mathbf{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\mathbf{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\left\|\begin{array}{c} x=t^2, \\ dx=2tdt \end{array}\right\|=2\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.$$

Далі, скористаємось рекурентною формулою $\mathbf{\Gamma}(\lambda+1)=\lambda\mathbf{\Gamma}(\lambda)$:

$$\mathbf{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\quad \mathbf{\Gamma}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\mathbf{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\quad \mathbf{\Gamma}\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\mathbf{\Gamma}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\ \ldots\ .$$

Зауваження. При інших значеннях λ відповідні інтеграли можна обчислити наближеними методами.

Якщо $0<\lambda<1$, має місце *формула доповнення*:

$$\boxed{\mathbf{\Gamma}(\lambda)\mathbf{\Gamma}(1-\lambda)=\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}.}$$

Розглянемо приклади застосування **Γ**-функції при обчисленні невласних інтегралів.

Приклад 5.10. Обчислити $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx.$

Розв'язання. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = \left\| \begin{matrix} t=\sqrt{x},\ x=t^2 \\ dx=2tdt \end{matrix} \right\| = 2\int\limits_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{t}t\,dt = 2\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$

Відповідь: $\sqrt{\pi}$.

Приклад 5.11. Обчислити $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x^2}dx$.

Розв'язання.

$$\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty 2x^2 e^{-x^2}dx = \left\| \begin{matrix} u=x,\ dv=2xe^{-x^2}dx \\ du=dx,\ v=-e^{-x^2} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}x\left(-e^{-x^2}\right)\Big|_0^\infty}_{\to 0} + \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

5.3.2. *Бета-функція*

Бета-функція (**B**-функція), як і деякі інші інтеграли з параметром, визначається через $\mathbf{\Gamma}$-функцію:

$$\mathbf{B}(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad p>0,\ q>0, \text{ або}$$

$$\mathbf{B}(p,q) = \int\limits_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy, \quad p>0,\ q>0.$$

B-функція симетрична відносно аргументів: $\mathbf{B}(p,q) = \mathbf{B}(q,p)$.

Зв'язок між* B*-функціями і* Γ*-функціями виражається наступною формулою:

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Приклад 5.12. Обчислити $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \cdot \sin^2 x\,dx$.

Розв'язання.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \cdot \sin^2 x\,dx = \left\| \begin{array}{c} t=\cos^2 x,\ \sin^2 x = 1-t \\ x=\arccos\sqrt{t},\ dx = -\dfrac{dt}{2\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-t}} \end{array} \right\| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_1^0 t^2(1-t)\cdot\frac{dt}{\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-t}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{B}\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathbf{\Gamma}\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\mathbf{\Gamma}\left(\frac{3}{2}\right)}{\mathbf{\Gamma}\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{3!} = \frac{\pi}{32}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{32}$.

Зауваження. Скористались тим, що:

1. $\mathbf{\Gamma}(n+1) = n!,\ n\in\mathbb{N}$, тобто $\mathbf{\Gamma}(4) = 3!$.

2. $\mathbf{B}(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\quad p>0,\ q>0$, і $\mathbf{B}(p,q) = \dfrac{\mathbf{\Gamma}(p)\cdot\mathbf{\Gamma}(q)}{\mathbf{\Gamma}(p+q)}$.

В-функції і **Г**-функції є інтегралами Ейлера.

Приклад 5.13. Обчислити $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3}}{(1+x)^2}dx$.

Розв'язання.

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3}}{(1+x)^2}dx = \left\| \begin{array}{c} p-1=\dfrac{3}{4},\ \ p=\dfrac{7}{4} \\ p+q=2,\ \ q=\dfrac{1}{4} \end{array} \right\| = \mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma(2)}.$$

Для обчислення значень $\mathbf{\Gamma}\left(\frac{7}{4}\right)$ скористаємось формулами зниження:

$$\mathbf{\Gamma}(\lambda+1)=\lambda\mathbf{\Gamma}(\lambda)\quad(\lambda>0)\quad\Rightarrow\quad\left(\mathbf{\Gamma}\left(\frac{7}{4}\right)=\frac{3}{4}\mathbf{\Gamma}\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

та доповнення $\mathbf{\Gamma}(\lambda)\mathbf{\Gamma}(1-\lambda)=\dfrac{\pi}{\sin\lambda\pi}$ $(0<\lambda<1)$:

$$\mathbf{\Gamma}\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\mathbf{\Gamma}\left(1-\frac{3}{4}\right)=\left\|\mathbf{\Gamma}\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\mathbf{\Gamma}\left(\frac{1}{4}\right)\right\|=\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{4}}=\pi\sqrt{2}.$$

Тому $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sqrt[4]{x^3}}{(1+x)^2}dx=\frac{\mathbf{\Gamma}\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\mathbf{\Gamma}\left(\frac{7}{4}\right)}{\mathbf{\Gamma}(2)}=\mathbf{\Gamma}\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{3}{4}\mathbf{\Gamma}\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3\pi\sqrt{2}}{4}$.

Відповідь: $\dfrac{3\pi\sqrt{2}}{4}$.

5.4. Застосування інтегралів, що залежать від параметрів, у прикладній механіці

Інтеграли з параметрами природно виникають при обчисленні:

- мас, моментів інерції, розподілу тиску (механіка, транспорт),
- розподілу температури (матеріалознавство),
- потоку рідини (гідродинаміка),
- розрахунку середніх значень,
- при перевірці статистичних гіпотез та ін.

Наведемо приклади застосування поняття інтегралів, що залежать від параметрів.

Приклад 5.14. Момент інерції плаского області.

Момент інерції плаского області відносно осі OX (див. п. 6.3):

$$I_{OX}=\iint_D y^2\gamma(x,y)\,dxdy.$$

Якщо щільність $\gamma(x,y)$ залежить тільки від x: $\gamma=\gamma(x)$, а область інтегрування $0\le x\le L$, $0\le y\le h(x)$, то маємо:

$$I_{OX}=\int_0^L\left(\int_0^{h(x)}y^2\gamma(x)dy\right)dx.$$

Внутрішній інтеграл – інтеграл з параметром x:

$$F(x)=\gamma(x)\int_0^{h(x)}y^2dy=\gamma(x)\left(\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{h(x)}\right)=\gamma(x)\frac{h^3(x)}{3}.$$

І тоді момент інерції $I_{OX}=\frac{1}{3}\int_0^L\gamma(x)h^3(x)dx$. Функція $h(x)$ товщини балки та її щільність $\gamma(x)$ стають параметрами для внутрішнього інтеграла.

Приклад 5.15. Розподіл температури після заливання металу.

Нехай температура в литій формі: $T(x,y)=T_0e^{-ay}\sin(bx)$, де T_0 – початкова або максимальна температура (константа); e^{-ay} – експоненціальне зменшення температури по товщині ($a>0$, коефіцієнт теплопровідності / затухання температури, константа); $\sin(bx)$ – коливання або нерівномірність температури по довжині (b – частота зміни температури вздовж осі OX, константа).

Середня температура в перерізі: $\overline{T}(x)=\frac{1}{H}\int_0^H T(x,y)dy$, це ***інтеграл з параметром*** x.

Інтеграл середньої енергії по всьому об'єму: $E=\int_0^L\left(\int_0^H T(x,y)dy\right)dx$, де H та L – геометричні розміри литої прямокутної форми.

Приклад 5.16. Перевірка статистичних гіпотез.

Для перевірки статистичних гіпотез необхідно вміти обчислювати ймовірності того чи іншого відхилення набору теоретичних частот $p_1,p_2,\ldots,p_m$ від набору емпіричних частот $p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*$. Існують такі функції від випадкових величин $p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*$, розподіл яких не залежить ні від гіпотетичної функції розподілу, ні від кількості n випробувань, якщо тільки n достатньо велике.

Серед таких функцій частіше за інших розглядають функцію

$$\overline{\chi}^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(p_i^* - p_i\right)^2}{p_i}, \tag{5.8}$$

яка називається статистикою Пірсона або статистикою χ^2 (*хі*-квадрат).

Як встановлено американським математиком К. Пірсоном, випадкова величина χ^2 при великих значеннях n розподілена за диференціальним законом:

$$p_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}, \ t \geq 0, \\ 0, \ t < 0, \end{cases} \tag{5.9}$$

де $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$ – гамма функція.

Хі-квадрат $\left(\chi^2\right)$ розподіл представляє собою частковий випадок гамма-розподілу і має всі його властивості.

6. Подвійні інтеграли

Подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ обчислюється для функції двох змінних $z=f(x,y)$ у двовимірній області D та узагальнює поняття визначеного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Існує тісний зв'язок між подвійними інтегралами та інтегралами, що залежать від параметра, оскільки подвійний інтеграл *сам по собі є* інтегралом, що залежить від параметра, якщо одна з меж або область інтегрування залежить від параметра. Далі побачимо, що обчислення подвійного інтеграла можна звести до послідовності обчислень одновимірних інтегралів, де результат кожного одновимірного інтеграла може бути функцією параметра.

Подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ – це інтеграл по двовимірній області D. Якщо зафіксувати одну змінну, наприклад, x, і інтегрувати по y, то отримаємо

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = F(x) .$$

Це вже інтеграл, що залежить від параметра x.

6.1. Основні означення

Припустимо, що функція $z=f(x,y)$ визначена в деякій зв'язній, обмеженій і замкненій області D простору $\mathbb{R}^2$ (рис. 6.1).

Розіб'ємо область D довільно на n замкнених елементарних областей $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$, які не мають спільних внутрішніх точок. В кожній елементарній області σ_k виберемо довільну точку $P_k(x_k;y_k)$. Припустимо, що область D має площу, що дорівнює S, а елементарні області σ_k мають площу, яку позначимо $\Delta\sigma_k\,(k=1,2,\ldots,n)$.

Складемо суму

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta\sigma_k . \tag{6.1}$$

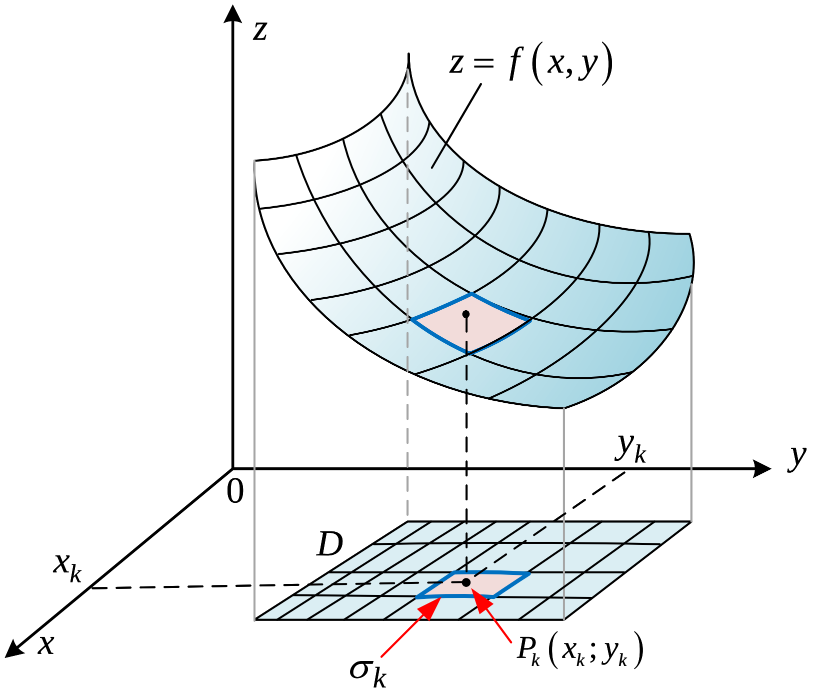


Рисунок 6.1

Сума (6.1) називається *інтегральною*. Позначимо через $d(\sigma_k)$ діаметр елементарної області σ_k.

Означення. Границя інтегральної суми (6.1) за умови $\max d(\sigma_k) \to 0$ (якщо вона існує) називається *подвійним інтегралом* функції $z = f(x, y)$ по області D і позначається символом

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma \text{ або } \iint_D f(x,y)\,dxdy,$$

тобто

$$\lim_{\max d(\sigma_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta\sigma_k = \iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_D f(x,y)\,dxdy. \qquad (6.2)$$

Область D називається *областю інтегрування,* а $d\sigma$ або $dxdy$ – диференціалом площі. Область, що має площу, називається *квадрируємою*.

Границя (6.2) інтегральної суми не залежить від способу ділення області D на елементарні області σ_k і вибору точок $P_k(x_k; y_k)$ в них, оскільки ділення області D на елементарні області і вибір точок в них довільні.

Існування границі (6.2) інтегральної суми встановлюється наступною теоремою.

Теорема 6.1. *Для кожної функції* $z = f(x,y)$, *яка є неперервною в області* D, *існує подвійний інтеграл* (6.2).

6.1.1. *Властивості подвійного інтеграла*

1. Лінійність подвійного інтеграла.

Припустимо, що є дві інтегровані в області D *функції* $z = f_1(x,y)$ *і* $z = f_2(x,y)$, *і довільні константи* α, β, *тоді має місце рівність*:

$$\iint\limits_D (\alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y))dxdy = \alpha\iint\limits_D f_1(x,y)dxdy + \beta\iint\limits_D f_2(x,y)dxdy .$$

2. Адитивність подвійного інтеграла.

Нехай область D *є об'єднанням областей* D_1 *і* D_2, *тобто* $D = D_1 \bigcup D_2$, *які не мають спільних внутрішніх точок, а функція* $f(x,y)$ *інтегрована в області* D, *то має місце рівність*:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy .$$

3. Інтегрування нерівностей.

Нехай функції $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ *інтегровані в області* D *і в цій області* $f_1(x,y) \geq f_2(x,y)$, *тоді в області* D

$$\iint\limits_D f_1(x,y)dxdy \geq \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy .$$

Якщо $f(x,y)$ *невід'ємна інтегрована в області* D *функція, то*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0 .$$

4. Оцінка подвійного інтеграла.

Нехай функція $f(x,y)$ *є інтегрованою в області* D, *числа* m *і* M *є* *найменшим і найбільшим значеннями функції* $f(x,y)$ *в області* D, *а* S_D *є площею області* D. *Тоді має місце нерівність*:

$$m \cdot S_D \le \iint_D f(x,y)dS \le M \cdot S_D .$$

5. Теорема про середнє значення функції в області.

Нехай функція $f(x,y)$ *неперервна в області* D, *тоді існує хоча б одна така точка* $P_0(x_0;y_0) \in D$, *в якій виконується рівність*:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0) \cdot S_D . \tag{6.3}$$

Зауваження. Величина $f_{\text{сер}}(D) = \frac{1}{S_D}\iint_D f(x,y)dxdy$ називається *середнім інтегральним значенням функції* $f(x,y)$ в області D.

Приклад 6.1. Оцінити інтеграл $\iint_D \left(x^2 + y^2 - 3x + 2y - 4\right)dxdy$, де область D: $x + y \le 1,\ x, y \ge 0.$

Розв'язання. Для того, щоб оцінити значення інтеграла, необхідно знайти найменше (m) і найбільше (M) значення функції $f(x,y)$ в області інтегрування D, і площу S_D області D. Область інтегрування – прямокутний трикутник (рис. 6.2), площа якого $S_D = \frac{1}{2}$.

Знайдемо найменше (m) і найбільше (M) значення функції $z = x^2 + y^2 - 3x + 2y - 4$ в області D. Для цього спочатку визначимо стаціонарні точки цієї функції:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}, \\ y = -1. \end{cases}$$

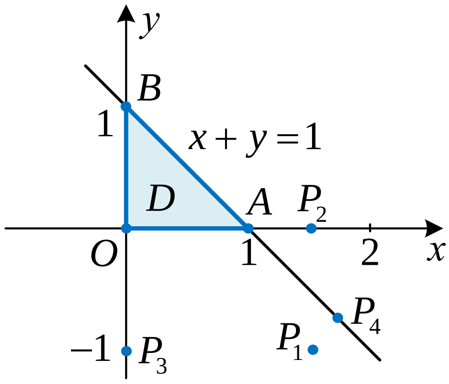


Рисунок 6.2

Знайдена точка $P_1\left(\dfrac{3}{2};-1\right)$ не належить області D (рис. 6.2). Проаналізуємо значення функції на межі області D.

1) OA: $y=0,\ 0\le x\le 1,\ Z_1(x)=f(x,y)\big|_{y=0}=x^2-3x-4,\ Z_1'(x)=2x-3.$

Точка $P_2\left(\dfrac{3}{2};0\right)$ не належить межі заданої області (рис. 6.2). Знайдемо значення функції на кінцях відрізку OA: $f(O)=f(0,0)=-4,\ f(A)=f(1,0)=-6.$

2) OB: $x=0,\ 0\le y\le 1,\ Z_2(y)=f(x,y)\big|_{x=0}=y^2+2y-4,\ Z_2'(y)=2y+2.$ Точка $P_3(0;-1)$ не належить межі заданої області. Крім того, $f(B)=f(0,1)=-1.$

3) AB: $x+y=1,\ Z_3(x)=f(x,y)\big|_{y=1-x}=2x^2-7x-1,\ Z_3'(x)=4x-7.$

Точка $P_4\left(\dfrac{7}{4};-\dfrac{3}{4}\right)$ також не належить межі області D (рис. 6.2).

Залишилось порівняти значення заданої функції в кутових точках межі області D:

$$f(O)=f(0,0)=-4,\ f(A)=f(1,0)=-6,\ f(B)=f(0,1)=-1,\ \text{тобто}$$

$$m=f_{\text{найм}}(x,y)=f(1,0)=-6,\quad M=f_{\text{найб}}(x,y)=f(0,1)=-1.$$

Таким чином, згідно ***властивості 4*** подвійного інтеграла

$$(-6)\cdot\frac{1}{2}\le\iint_D f(x,y)\,dxdy\le(-1)\cdot\frac{1}{2}\quad \text{або}\quad -3\le\iint_D f(x,y)\,dxdy\le-\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $-3\le\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy\le-\frac{1}{2}.$

6.1.2. *Геометричні застосування подвійних інтегралів*

1. Площа плаского фігури.

Нехай у подвійному інтегралі (6.2) підінтегральна функція $f(x,y)=1$, тоді

$$\iint_D dxdy = S_D\,,$$

де S_D – площа області D.

2. Об'єм тіла.

Означення. *Циліндричне тіло – це тіло, що обмежене* поверхнею $z=f(x,y)$, площиною $z=0$ і бічною циліндричною поверхнею з твірною, що паралельна осі OZ, і напрямною, що є межею області D.

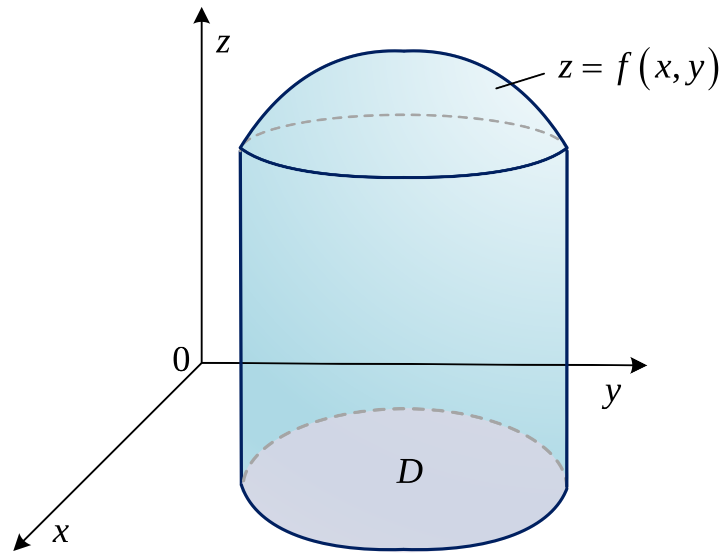


Рисунок 6.3

Нехай $f(x,y)$ – неперервна невід'ємна функція, що визначена в області D (рис. 6.3), тоді

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = V\,,$$

де V – об'єм циліндричного тіла.

6.1.3. *Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах*

Припустимо, область D така, що кожна пряма, що паралельна осі OY перетинає межу області D не більше, ніж в двох точках (рис. 6.4).

При цьому верхня і нижня межі області описуються однозначними залежностями виду $y = y_B(x)$ і $y = y_H(x)$. Така область називається *правильною в напрямі осі* OY.

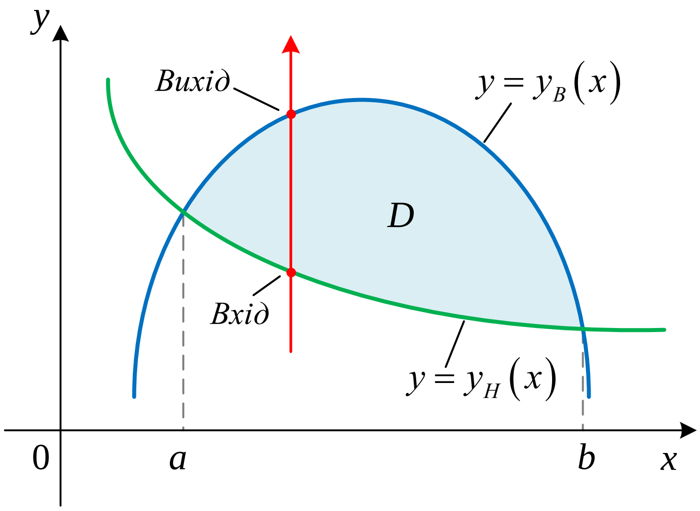


Рисунок 6.4.

Аналогічно вводиться поняття області, *яка є правильною в напрямі осі* OX.

У цьому випадку ліва і права межі області D описуються однозначними залежностями виду $x = x_Л(y)$ і $x = x_П(y)$ (рис. 6.5).

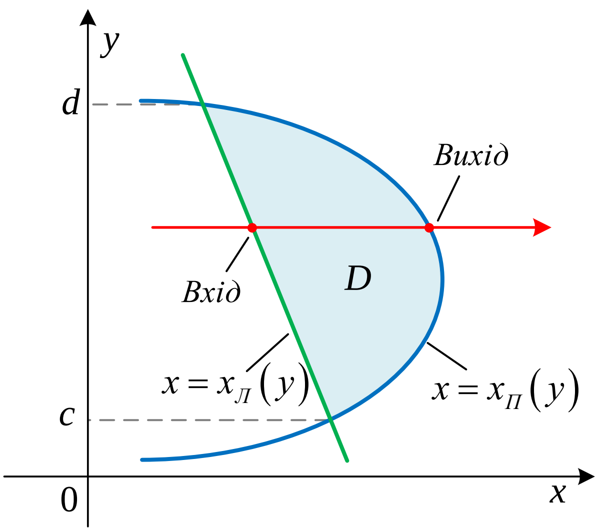


Рисунок 6.5.

Якщо виконуються обидві ці властивості, то область D називається *правильною*.

Нехай область інтегрування D є правильною в напрямі осі OY, а підінтегральна функція невід'ємна, тобто $f(P) \geq 0 \ (\forall P \in D)$.

Для отримання правила, за яким обчислюються подвійні інтеграли, скористаємося його геометричним смислом і теоремою про обчислення об'єму тіла шляхом інтегрування площ паралельних перерізів (рис. 6.6).

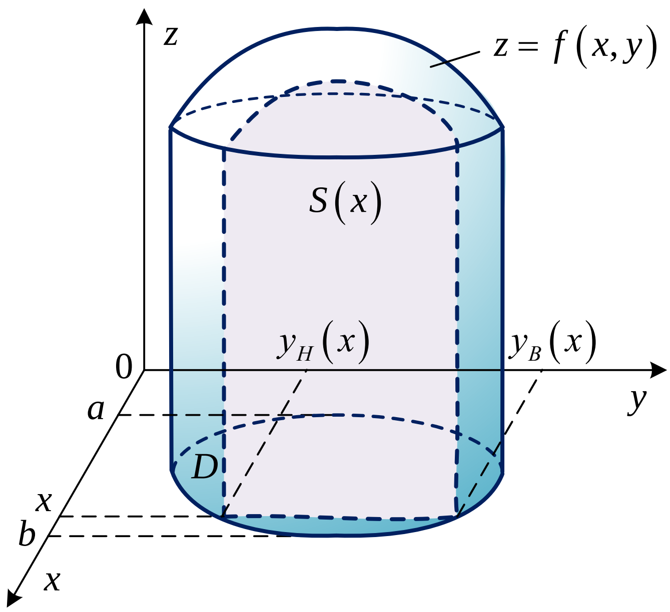


Рисунок 6.6

З одного боку, $V = \int\limits_a^b S(x)dx$, де площа поперечного перерізу $S(x)$ обчислюється за допомогою одновимірного інтеграла:

$$S(x) = \int\limits_{y_H(x)}^{y_B(x)} f(x, y)dy,$$

де x – константа, а y – змінна інтегрування.

З іншого боку, об'єм циліндричного тіла $V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$. Таким чином, маємо, що

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b S(x)dx,$$

тобто

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\underbrace{\int\limits_{y_H(x)}^{y_B(x)} f(x,y)dy}_{S(x)} \right] dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_H(x)}^{y_B(x)} f(x,y)dy. \qquad (6.4)$$

Інтеграл у правій частині (6.4) називається ***повторним інтегралом***.

Розглянемо часткові випадки обчислення подвійних інтегралів.

1. Область D інтегрування є криволінійною трапецією, тобто $y_H(x)=0$, $y_B(x)=f(x)$, $a \le x \le b$, тоді площа області D

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_0^{f(x)} dy = \int\limits_a^b \left(y\Big|_0^{f(x)} \right) dx = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

2. Область D є правильною в напрямі осі OX (рис. 6.5), тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_Л(y)}^{x_П(y)} f(x,y)dx. \qquad (6.5)$$

3. Область D є правильною в напрямі осі OY (рис. 6.4), тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_H(x)}^{y_B(x)} f(x,y)dy. \qquad (6.6)$$

4. Область D є правильною в обох напрямах, тоді можна використовувати обидва повторних інтеграла (6.5) і (6.6), при цьому результат отримаємо один і той же, тобто

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_H(x)}^{y_B(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_Л(y)}^{x_П(y)} f(x,y)dx. \qquad (6.7)$$

Приклад 6.2. Привести до виду повторного подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, якщо область D: $2x+3y \le 6$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, обираючи у внутрішньому інтегралі напрям інтегрування: а) за змінною y; б) за змінною x.

Розв'язання.

1. Побудова області інтегрування.

Область інтегрування D − частина площини XOY, що обмежена прямою $2x+3y=6$ і осями координат $OX\left(y=0\right)$ і $OY\left(x=0\right)$ (рис. 6.7). Якщо область D правильна, то можна переходити від подвійного інтеграла до повторного, тобто виконати розстановку меж інтегрування. Очевидно, область D є правильною.

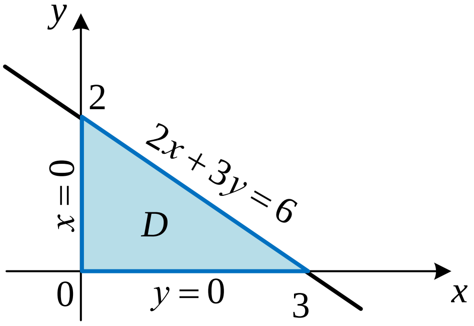


Рисунок 6.7

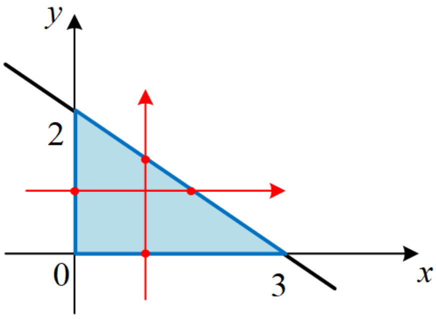


Рисунок 6.8

2. Перехід від подвійного інтеграла до повторного.

а) У цьому випадку внутрішнє інтегрування проводиться за змінною y. Область інтегрування проєктується у відрізок $\left[0,3\right]$ осі OX. При цьому $y_H\left(x\right)=0$, а $y_B\left(x\right)=2-\frac{2}{3}x$ (рис. 6.7). Таким чином,

$$\iint_D f\left(x,y\right)dxdy=\int_0^3 dx\int_0^{2-\frac{2}{3}x} f\left(x,y\right)dy.$$

б) Внутрішнє інтегрування проводиться за змінною x. Область інтегрування проєктується у відрізок $\left[0,2\right]$ осі OY. При цьому $x_Л\left(y\right)=0$, а $x_П\left(y\right)=3-\frac{3}{2}y$ (рис. 6.8). Тому, $\iint_D f\left(x,y\right)dxdy=\int_0^2 dy\int_0^{3-\frac{3}{2}y} f\left(x,y\right)dx.$

Відповідь: а) $\int_0^3 dx\int_0^{2-\frac{2}{3}x} f\left(x,y\right)dy$; б) $\int_0^2 dy\int_0^{3-\frac{3}{2}y} f\left(x,y\right)dx.$

Приклад 6.3. Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2-1}^{x+1} f(x,y)dy$.

Розв'язання. При побудові другого повторного інтеграла використаємо еквівалентний опис області (рис. 6.9):

$$D: \quad -1 \le y \le 0,\ -\sqrt{y+1} \le x(y) \le \sqrt{y+1};$$

$$0 \le y \le 2,\ y-1 \le x(y) \le 1.$$

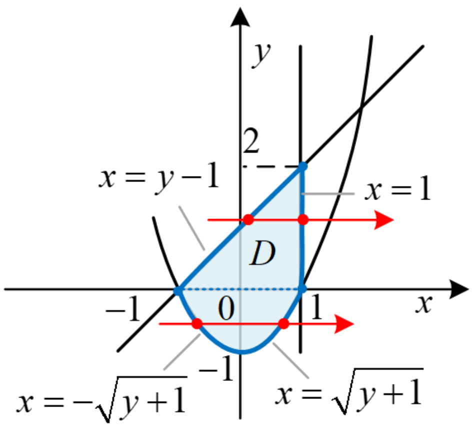


Рисунок 6.9

Такому опису області інтегрування відповідає наступний вид повторного інтеграла:

$$\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y-1}^{1} f(x,y)dx.$$

Таким чином,

$$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2-1}^{x+1} f(x,y)dy = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y-1}^{1} f(x,y)dx.$$

Відповідь: $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y-1}^{1} f(x,y)dx$.

Приклад 6.4. Змінити порядок інтегрування:

$$\text{а)} \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{1-y} f(x,y)dx; \quad \text{б)} \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{x} f(x,y)dy.$$

Розв'язання. Якщо треба змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі, то розв'язання завдання треба починати з побудови області інтегрування.

а) Область інтегрування відновлюється з заданого інтеграла: $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{1-y} f(x,y)dx$. З зовнішнього інтеграла маємо, що $0 \le y \le 1$, а з внутрішнього: $-\sqrt{1-y} \le x(y) \le 1-y$. Це означає, що область інтегрування знаходиться в частині площини, де $0 \le y \le 1$, при цьому її ліва межа задається рівнянням $x_Л(y) = -\sqrt{1-y}$, а права – рівнянням $x_П(y) = 1-y$ (рис. 6.10).

Лінія, що обмежує область інтегрування зверху, складається з двох частин, кожна з яких задається своїм рівнянням. У таких випадках область інтегрування розбивають на частини D_1 и D_2 (*властивість адитивності*), що не мають спільних внутрішніх точок, і область інтегрування $D = D_1 \cup D_2$ (рис. 6.11).

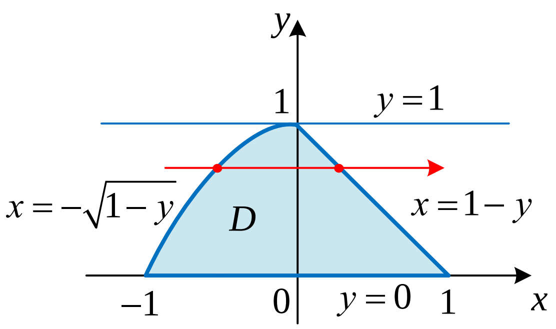


Рисунок 6.10

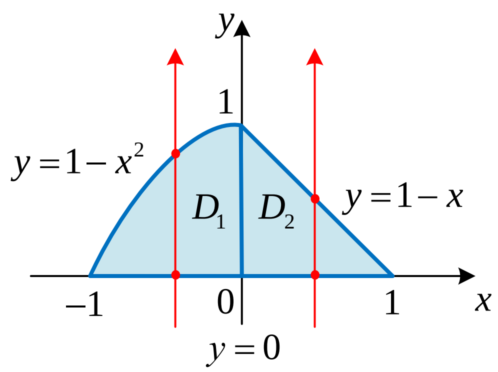


Рисунок 6.11

В кожній з цих областей межі інтегрування задаються однозначними залежностями:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Очевидно, що область інтегрування слід розбити на частини D_1 і D_2, які проєктуються у відрізки $[-1,0]$ і $[0,1]$ осі OX. Для встановлення залежності $y = y_В(x)$ треба зробити перетворення рівнянь меж області.

Ліва межа області $x_Л(y)=-\sqrt{1-y}$, звідси $x^2=1-y$, або, після перетворення, $y=1-x^2$, де $x\le 0$. Таким чином, визначаємо рівняння верхньої межі області D_1: $y_В(x)=1-x^2$. Тоді

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy=\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{0}^{1-x^2} f(x,y)dy.$$

Аналогічно, для правої межі області: $x_П(y)=1-y$ або $y=1-x$, тобто рівняння верхньої межі області D_2: $y_В(x)=1-x$. Тому,

$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy=\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{1-x} f(x,y)dy.$$

Остаточно маємо:

$$\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{1-y} f(x,y)dx=\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{0}^{1-x^2} f(x,y)dy+\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{1-x} f(x,y)dy.$$

б) Відновлюємо область інтегрування за заданим інтегралом $\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{x} f(x,y)dy$. З зовнішнього інтеграла: $0\le x\le 2$, а з внутрішнього: $-\sqrt{4-x^2}\le y(x)\le x$. Тобто, область інтегрування знаходиться у частині координатної площини, де $0\le x\le 2$, при цьому її нижня межа задається рівнянням $y_Н(x)=-\sqrt{4-x^2}$, а верхня – рівнянням $y_В(x)=x$ (рис. 6.12).

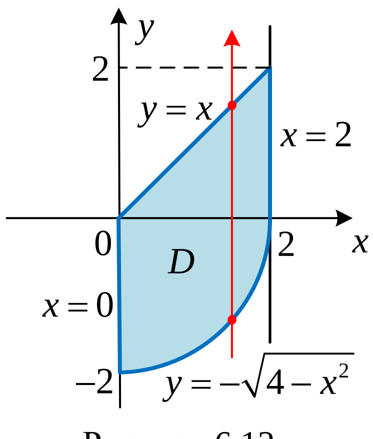


Рисунок 6.12

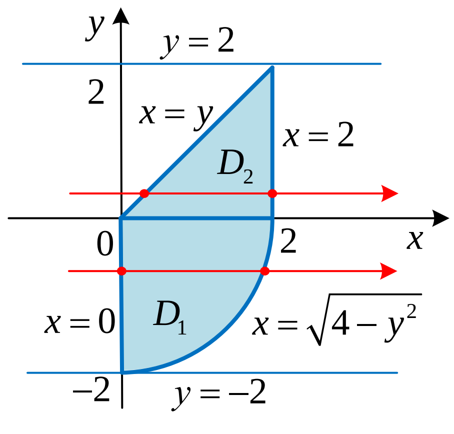


Рисунок 6.13

Очевидно, область інтегрування необхідно розбити на частини D_1 і D_2, які проєктуються у відрізки $[-2,0]$ і $[0,2]$ осі OY (рис. 6.13).

Для знаходження залежностей $x = x_Л(y)$ і $x = x_П(y)$ треба зробити перетворення рівнянь меж області інтегрування.

Нижня межа області задається рівнянням $y_Н(x) = -\sqrt{4-x^2}$, звідси $y^2 = 4 - x^2$, або, після перетворень, $x^2 + y^2 = 4$, де $y \le 0$. Таким чином, рівняння правої межі області D_1: $x_П(y) = \sqrt{4-y^2}$. Тоді

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy = \int_{-2}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Аналогічно, для лівої межі області D_2: $x_Л(y) = y$. Таким чином,

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy = \int_{0}^{2} dy \int_{y}^{2} f(x,y)\,dx.$$

Маємо:

$$\int_{0}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{x} f(x,y)\,dy = \int_{-2}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{2} dy \int_{y}^{2} f(x,y)\,dx.$$

Відповідь: а) $\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{1-x^2} f(x,y)\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1-x} f(x,y)\,dy;$

б) $\int_{-2}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{2} dy \int_{y}^{2} f(x,y)\,dx.$

Приклад 6.5. Обчислити $\iint_D (3 - x^2 + y)\,dxdy$, де D: $0 \le x \le 1; y = -1;\ y = 3$ (рис. 6.14).

Розв'язання. Виберемо порядок інтегрування за формулою (6.6):

$$\iint_D (3 - x^2 + y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{-1}^{3} (3 - x^2 + y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\left[(3 - x^2)y + \frac{1}{2}y^2 \right] \Bigg|_{-1}^{3} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 (16 - 4x^2)\,dx = \left(16x - \frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{44}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{44}{3}$.

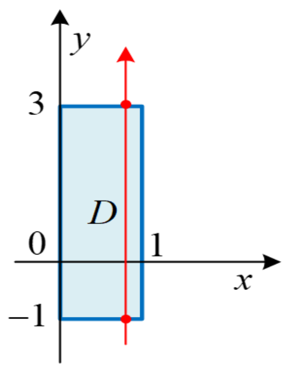


Рисунок 6.14

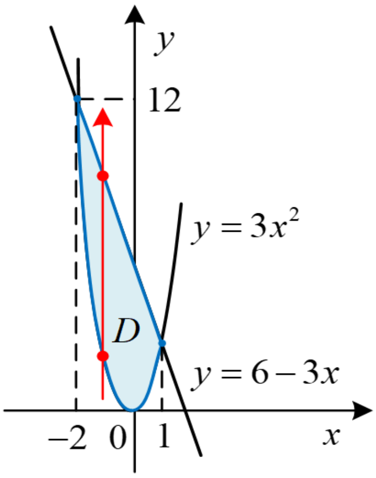


Рисунок 6.15

Приклад 6.6. Обчислити $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, де область інтегрування D: $y=3x^2$, $y=6-3x$ (рис. 6.15).

Розв'язання. Область інтегрування правильна у напрямі осі OY. Її права межа визначається двома аналітичними залежностями: $y=3x^2$, якщо $0\le y\le 3$, і $y=6-3x$, якщо $3\le y\le 12$. Тому в даному прикладі має сенс обрати наступний порядок інтегрування:

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy=\int\limits_{-2}^{1}dx\int\limits_{3x^2}^{6-3x}(x+y)dy=$$

$$=\int\limits_{-2}^{1}\left(\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_{3x^2}^{6-3x}\right)dx=\int\limits_{-2}^{1}\left(x(6-3x)+\frac{1}{2}(6-3x)^2-3x^3-\frac{9}{2}x^4\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-2}^{1}\left(6x-3x^2-3x^3-\frac{9}{2}x^4+\frac{9}{2}(2-x)^2\right)dx=$$

$$=\left(3x^2-x^3-\frac{3}{4}x^4-\frac{9}{10}x^5-\frac{3}{2}(2-x)^3\right)\Bigg|_{-2}^{1}=58,05.$$

Відповідь: $58,05$.

У **Прикладі 6.1** був оцінений інтеграл, значення якого можемо зараз обчислити.

Приклад 6.7. Обчислити $\iint\limits_D (x^2+y^2-3x+2y-4)dxdy$, де область D: $x+y\le 1$, $x,y\ge 0$ (рис. 6.2).

Розв'язання. За проведеними розрахунками в **Прикладі 6.1** отримано таку оцінку інтеграла: $-3\le\iint\limits_D f(x,y)dxdy\le-\frac{1}{2}$. Обчислимо цей інтеграл:

$$\iint\limits_D (x^2+y^2-3x+2y-4)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(x^2+y^2-3x+2y-4)dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left((x^2-3x-4)y+\frac{y^3}{3}+y^2\Bigg|_0^{1-x}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^2-3x-4-x^3+3x^2+4x+\frac{(1-x)^3}{3}+(1-x)^2\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(-x^3+4x^2+x-4+\frac{(1-x)^3}{3}+(1-x)^2\right)dx=$$

$$=-\frac{x^4}{4}+\frac{4}{3}x^3+\frac{x^2}{2}-4x-\frac{(1-x)^4}{12}-\frac{(1-x)^3}{3}\Bigg|_0^1=-2.$$

Відповідь: -2.

Приклад 6.8. Знайти середнє значення функції $z=x^2+y^2-3x+2y-4$ в області D: $x+y\le 1,\ x,y\ge 0$.

Розв'язання. Згідно ***властивості* 5** подвійного інтеграла середнє значення функції $f(x,y)$ в області D обчислюється за формулою

$$f_{\text{сер}}(D)=\frac{1}{S_D}\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Оскільки $S_D=\frac{1}{2}$, то $f_{\text{сер}}(D)=2\cdot(-2)=-4$.

Відповідь: -4.

Приклад 6.9. Знайти середнє значення функції $z=x^2-2y$ в області D: $y\le x+1,\ y\ge x^2-1$.

Розв'язання. Для обчислення середнього значення функції $z=f(x,y)$ в області D скористаємось формулою:

$$f_{\text{сер}}(D)=\frac{1}{S_D}\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

де S_D – площа області D, і $S_D=\iint\limits_D dxdy.$

Визначимо межі області D: $y=x+1,\ y=x^2-1$. На рисунку 6.16 зображена область D.

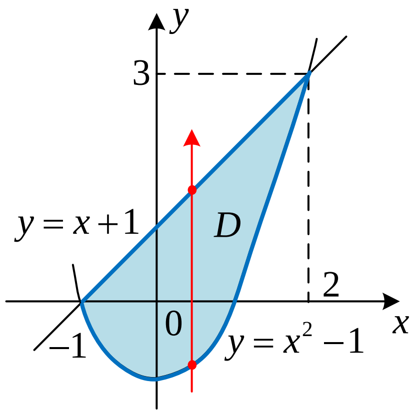


Рисунок 6.16

Очевидно, внутрішнє інтегрування слід проводити за змінною y. Для визначення меж інтегрування за змінною x треба знайти точки перетину ліній – меж області, тобто розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} y = x+1, \\ y = x^2 - 1. \end{cases}$

Ліві частини рівнянь системи однакові, значить, $x^2 - 1 = x + 1$. Звідки $x_1 = -1,\ x_2 = 2$. Тоді

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2-1}^{x+1} dy = \int_{-1}^{2} \left(y\Big|_{x^2-1}^{x+1} \right) dx = \int_{-1}^{2} \left(x - x^2 + 2 \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

Далі обчислюємо повторний інтеграл:

$$\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2-1}^{x+1} \left(x^2 - 2y \right) dy = \int_{-1}^{2} \left(x^2 y - y^2 \Big|_{x^2-1}^{x+1} \right) dx = \int_{-1}^{2} \left(x^2 \left(x + 2 - x^2 \right) - \left(x+1 \right)^2 + \left(x^2 - 1 \right)^2 \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(x^3 - \left(x+1 \right)^2 + 1 \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{\left(x+1 \right)^3}{3} + x \right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(4 - 9 + 2 \right) - \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = -3 + \frac{3}{4} = -\frac{9}{4}.$$

Отримаємо:

$$f_{\text{сер}}(D) = \frac{1}{S_D} \iint\limits_D f\left(x, y \right) dxdy = \frac{2}{9} \cdot \left(-\frac{9}{4} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $-\dfrac{1}{2}$.

Приклад 6.10. Знайти об’єм тіла, що обмежено поверхнями $x+y+z=6$, $y=0$, $z=0$, $3x+y=6$, $3x+2y=12$.

Розв’язання. Об’єм тіла шукаємо за формулою: $V=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$.

У даному прикладі $f(x,y)=6-x-y$, тому об’єм тіла (рис. 6.17а):

$$V=\iint\limits_D (6-x-y)\,dxdy.$$

В координатній площині XOY виділена область інтегрування D (рис. 6.17б).

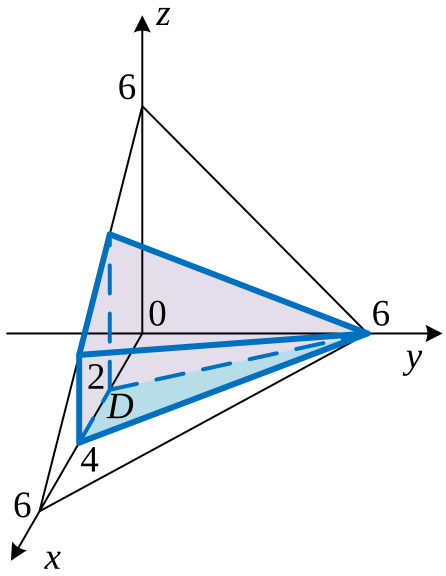


Рисунок 6.17а

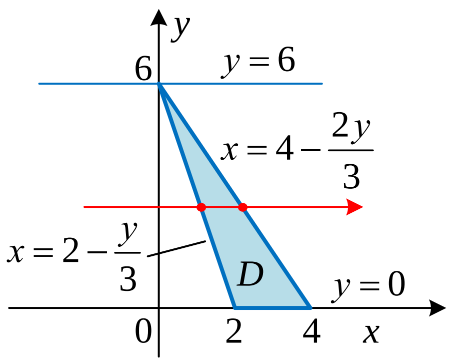


Рисунок 6.17б

Очевидно, внутрішнє інтегрування слід проводити за змінною x. Тоді

$$V=\iint\limits_D (6-x-y)\,dxdy=\int\limits_0^6 dy\int\limits_{2-\frac{y}{3}}^{4-\frac{2y}{3}}(6-x-y)\,dx.$$

Інтегрування починаємо з внутрішнього інтеграла:

$$V=\int\limits_0^6 dy\int\limits_{2-\frac{y}{3}}^{4-\frac{2y}{3}}(6-x-y)\,dx=\int\limits_0^6\left(\left.(6-y)x-\frac{x^2}{2}\right|_{2-\frac{y}{3}}^{4-\frac{2y}{3}}\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^6\left((6-y)\left(4-\frac{2y}{3}-2+\frac{y}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(4-\frac{2y}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\left(2-\frac{y}{3}\right)^2\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^6\left(12-4y+\frac{y^2}{3}-\frac{3}{2}\left(2-\frac{y}{3}\right)^2\right)dy=\left.\left(12y-2y^2+\frac{y^3}{9}+\frac{3}{2}\left(2-\frac{y}{3}\right)^3\right)\right|_0^6=12.$$

Відповідь: 12.

6.2. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Розглянемо дві площини з декартовими координатами x, y і u, v.

Нехай D і D' – обмежені замкнені області в площинах XOY і $UO'V$ відповідно (рис. 6.18).

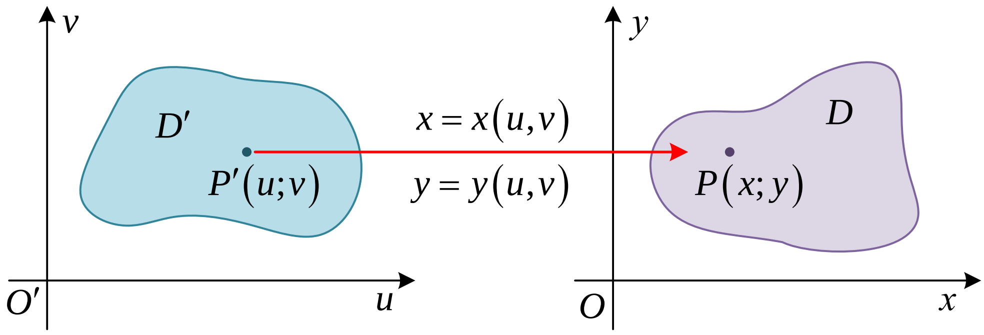


Рисунок 6.18

Заміна змінних у подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ відбувається з переходом від змінних x, y до нових змінних u, v за формулами:

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad (u,v) \in D'. \tag{6.8}$$

При цьому кожна точка $P(x;y) \in D$ відповідає деякій точці $P'(u;v) \in D'$, а кожна точка $P'(u;v) \in D'$ відображається в деяку точку $P(x;y) \in D$ (рис. 6.18). Область D називається *образом області* D', а область D' – *прообраз області* D при відображенні (6.8).

Нехай відображення (6.8) задовольняє наступним умовам:

1) відображення (6.8) є однозначним, тобто різним точкам $P'(u;v) \in D'$ відповідають різні точки $P(x;y) \in D$;

2) функції $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ мають в області D' частинні похідні першого порядку;

3) визначник $J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ у всіх точках області D'.

Визначник J називається *якобіаном відображення*.

Теорема 6.2. *Нехай* D *і* D' *– обмежені замкнені області, функція* $f(x,y)$ *є неперервною в області* D*, а відображення* (6.8) *задовольняє умовам* 1-3. *Тоді має місце наступна формула заміни змінних у подвійному інтегралі*:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|J(u,v)\right|dudv. \qquad (6.9)$$

Зауваження. Модуль якобіана $J(u,v)$ чисельно дорівнює локальному коефіцієнту зміни площі області інтегрування при переході з однієї системи координат в іншу.

6.2.1. *Подвійний інтеграл у полярних координатах*

Полярна система координат (ρ,φ) застосовується, коли вся межа області D або її частина є дугою кола, або підінтегральна функція залежить тільки від однієї з цих координат.

Розглянемо випадок, коли полюс полярної системи координат співпадає з початком декартової системи координат XOY.

Скористаємося формулами для переходу в полярні координати:

$$\boxed{x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi.} \qquad (6.10)$$

У цьому випадку підінтегральна функція прийме вид:

$$z=f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi).$$

Область інтегрування D': $\rho_1(\varphi)\le\rho\le\rho_2(\varphi),\ \alpha\le\varphi\le\beta$.

Застосуємо формулу заміни змінних у подвійному інтегралі (6.9) при переході у полярну систему координат. Обчислимо якобіан $J(\rho,\varphi)$:

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho.$$

Тому

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi, \tag{6.11}$$

тобто, диференціал площі $d\sigma$ в полярній системі координат має наступний вид:

$$d\sigma = \rho d\rho d\varphi.$$

Щоб обчислити подвійний інтеграл (6.11), як і раніше, перейдемо до повторного інтеграла:

$$\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho. \tag{6.12}$$

Приклад 6.11. Перейти до полярних координат в інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і звести його до повторного двома способами, якщо D: $x^2+y^2 \le R^2$.

Розв'язання. Область D – круг радіуса R з центром у початку координат. Перейдемо до відповідних полярних координат:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi \quad (0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \rho \le R).$$

Тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho,$$

або

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^R \rho d\rho \int\limits_0^{2\pi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\varphi.$$

До того ж, $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho = \int\limits_0^R \rho d\rho \int\limits_0^{2\pi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\varphi.$

Зауваження. Іноді при обчисленні інтегралів простіше взяти за полюс полярної системи координат не початок декартової прямокутної системи координат, а деяку точку $M_0(x_0;y_0)$. У цьому випадку перехід до полярної системи координат відбувається за формулами:

$$x = x_0 + \rho\cos\varphi,\ \ y = y_0 + \rho\sin\varphi. \tag{6.13}$$

Не важко перевірити, що значення якобіана при заміні змінних у подвійному інтегралі за формулами (6.13) не змінюється: $J(\rho,\varphi) = \rho$.

Вибір напряму інтегрування: внутрішнє інтегрування буде здійснюватися за змінною ρ, якщо межа області задана рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, і за змінною φ, якщо рівняння має вигляд $\varphi=\varphi(\rho)$.

Приклад 6.12. Обчислити $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, якщо область інтегрування D: $4\le x^2+y^2\le 9,\ y\ge -x,\ y\le\sqrt{3}x.$

Розв'язання. Область інтегрування D – частина кільця площини XOY, що обмежена прямими $y=-x$ і $y=\sqrt{3}x$ (рис. 6.19).

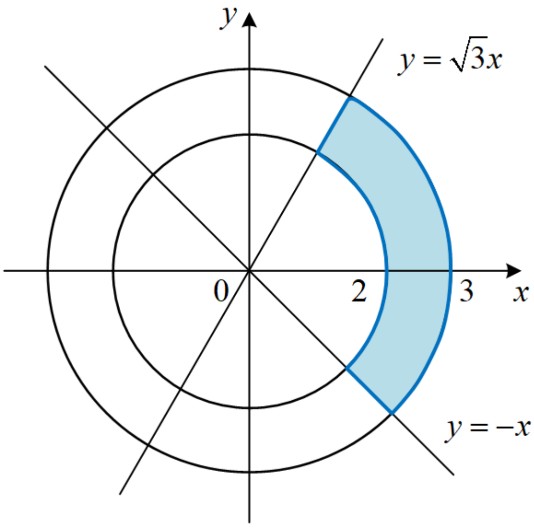


Рисунок 6.19

Незалежно від напряму інтегрування область інтегрування доведеться розбити на частини. Крім того, деякі межі області неявно задані рівняннями кіл. Щоб уникнути цих незручностей у випадках, коли межею області є коло або його частина, рекомендується проводити інтегрування в полярній системі координат. Скористаємось при цьому формулами (6.11) і (6.12):

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi,$$

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint\limits_{D'} \rho^2\,d\rho d\varphi,$$

оскільки в полярній системі координат $x^2+y^2=(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=\rho^2.$

В даному випадку при переході до полярної системи координат полюс полярної системи співпадає з початком координат, а полярна вісь – з віссю OX.

Рівняння меж області інтегрування: оскільки в полярних координатах $x^2 + y^2 = \rho^2$, рівняння кола $x^2 + y^2 = R^2$ буде мати вид $\rho = R$. Отже, область інтегрування знаходиться в кільці, що утворено колами $\rho = 2$ і $\rho = 3$.

При встановленні меж інтегрування для змінної ρ рівняння лінії входу в область інтегрування позначається як $\rho = \rho_H(\varphi)$, рівняння лінії виходу – як $\rho = \rho_B(\varphi)$. На рисунку 6.20 видно, що $\rho_H(\varphi) = 2$, а $\rho_B(\varphi) = 3$. Крім того, область інтегрування повністю розташована між променями $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$ і $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

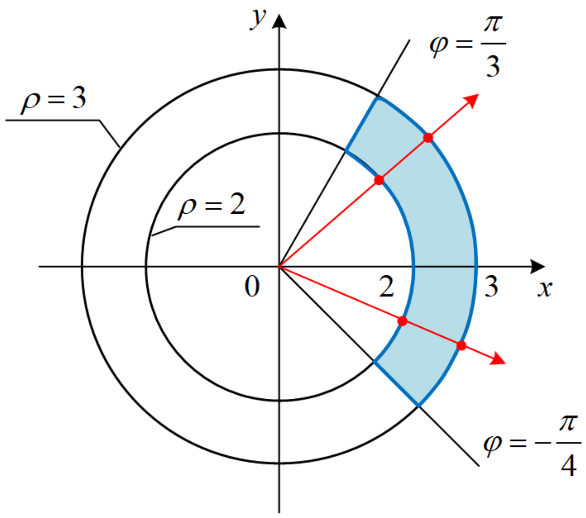


Рисунок 6.20

Таким чином,

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy = \iint\limits_{D'} \rho^2\, d\rho d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_2^3 \rho^2 d\rho.$$

Починаючи інтегрування з внутрішнього інтеграла, отримаємо:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_2^3 \rho^2 d\rho = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\rho^3}{3} \Bigg|_2^3 \right) d\varphi = \frac{1}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (27 - 8)\, d\varphi = \frac{19}{3} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{133\pi}{36}.$$

Відповідь: $\dfrac{133\pi}{36}$.

Приклад 6.13. Обчислити $\iint\limits_D (3x - 2y)\, dxdy$, якщо область інтегрування $D{:}\ x^2 + y^2 \le 2y,\ y \ge -x.$

Розв'язання. Область інтегрування обмежена колом $x^2 + y^2 = 2y$ і прямою $y = -x$ (рис. 6.21). У полярних координатах рівняння кола прийме вид: $\rho = 2\sin\varphi$; вся область інтегрування розташована між променями $\varphi = 0$ і $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ (рис. 6.22).

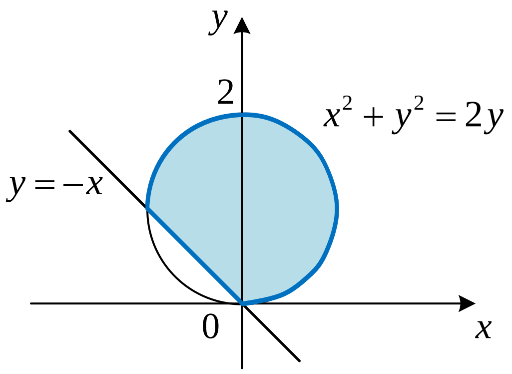


Рисунок 6.21

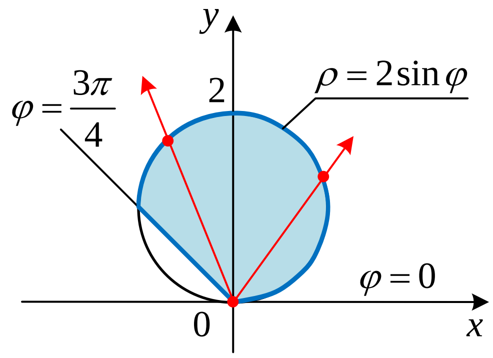


Рисунок 6.22

У полярних координатах інтеграл має вид:

$$\iint\limits_{D}(3x-2y)\,dxdy = \iint\limits_{D'}(3\rho\cos\varphi - 2\rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi = \iint\limits_{D'}(3\cos\varphi - 2\sin\varphi)\,\rho^2 d\rho\, d\varphi.$$

На рисунку 6.22 показано, як повинні визначатися межі інтегрування в повторному інтегралі.

Таким чином,

$$\iint\limits_{D'}(3\cos\varphi - 2\sin\varphi)\,\rho^2 d\rho\, d\varphi = \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{4}}(3\cos\varphi - 2\sin\varphi)\,d\varphi \int\limits_{0}^{2\sin\varphi}\rho^2 d\rho.$$

Інтегрування починаємо з внутрішнього інтеграла:

$$\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{4}}(3\cos\varphi - 2\sin\varphi)\,d\varphi \int\limits_{0}^{2\sin\varphi}\rho^2 d\rho = \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{4}}(3\cos\varphi - 2\sin\varphi)\left(\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_{0}^{2\sin\varphi}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{4}}(3\cos\varphi - 2\sin\varphi)(2\sin\varphi)^3 d\varphi = \frac{8}{3}\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{4}}\left(3\cos\varphi\sin^3\varphi - 2\sin^4\varphi\right)d\varphi.$$

Для подальших обчислень рекомендовано розбити інтеграл на два, в першому з яких зробити заміну змінної, а в другому скористатися формулою зниження степеню.

$$I=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\left(3\cos\varphi\sin^3\varphi-2\sin^4\varphi\right)d\varphi=8\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\cos\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi-\frac{16}{3}\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\sin^4\varphi\,d\varphi.$$

Для першого інтеграла

$$I_1=8\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\cos\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi=\left\|\begin{array}{c}t=\sin\varphi,\ dt=\cos\varphi\,d\varphi\\ t_H=0,\quad t_B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\|=8\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}t^3dt=2t^4\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Обчислимо другий інтеграл:

$$I_2=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\sin^4\varphi\,d\varphi=\left\|\sin^2\varphi=\frac{1}{2}(1-\cos2\varphi)\right\|=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{3\pi}{4}}(1-\cos2\varphi)^2\,d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\left(1-2\cos2\varphi+\frac{1}{2}(1+\cos4\varphi)\right)d\varphi=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{3}{2}-2\cos2\varphi+\frac{1}{2}\cos4\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\varphi-\sin2\varphi+\frac{1}{8}\sin4\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{3\pi}{2}+\frac{4}{3}.$$

Нарешті маємо:

$$I=I_1+I_2=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\left(3\cos\varphi\sin^3\varphi-2\sin^4\varphi\right)d\varphi=\frac{1}{2}-\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{4}{3}\right)=-\frac{3\pi}{2}-\frac{5}{6}.$$

Відповідь: $-\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{5}{6}$.

Приклад 6.14. Знайти площу області D: $x^2+y^2\le 2x,\ x^2+y^2\le 1$.

Розв'язання. Площу плаской фігури можна обчислити за допомогою подвійного інтеграла за формулою: $S_D=\iint\limits_D dxdy.$

Область інтегрування (рис. 6.23) обмежена колами $x^2+y^2=2x$ і $x^2+y^2=1$. У полярних координатах рівняння кіл приймуть вид: $\rho=2\cos\varphi$ і $\rho=1$. Вся область інтегрування розташована між променями $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$ і $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

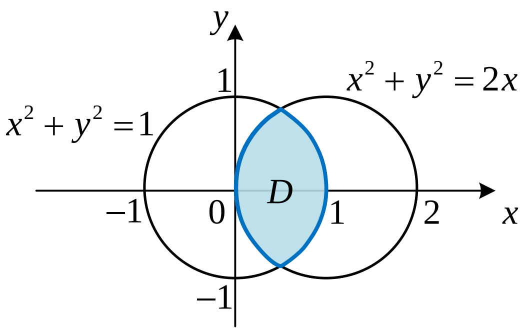


Рисунок 6.23

Переходимо до полярних координат: $S_D=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{D'}\rho d\rho d\varphi.$

Промені $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$ і $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, що виходять з полюса, перетинають обидва кола. Тому, щоб перейти до повторного інтеграла, необхідно визначити відповідні інтервали зміни змінної φ. Крім того, слід відзначити симетричність області інтегрування D (рис. 6.23). Очевидно, що достатньо обчислити площу області D_1 (рис. 6.24), тоді $S_D=2S_{D_1}$.

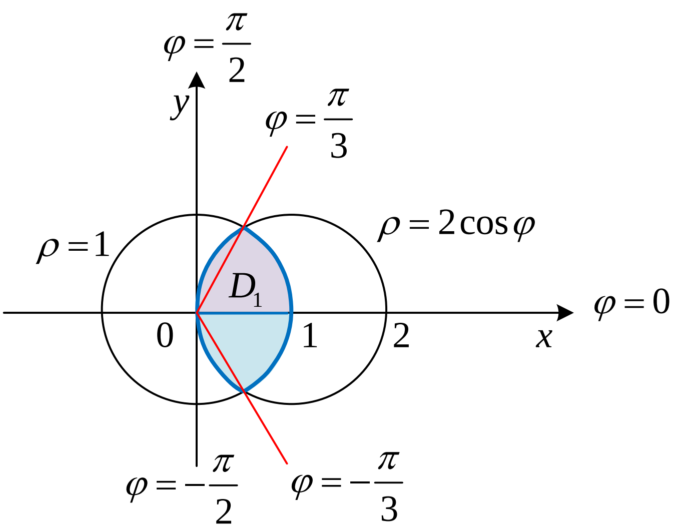


Рисунок 6.24

Знайдемо значення змінної φ, що відповідають точкам перетину кіл. Для цього розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases}\rho=2\cos\varphi,\\ \rho=1.\end{cases}$

$$2\cos\varphi=1,\ \cos\varphi=\frac{1}{2},\ \varphi_1=-\frac{\pi}{3},\ \varphi_2=\frac{\pi}{3}.$$

Для області D_1 при $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ промені, що виходять з полюса, перетинають коло, задане рівнянням $\rho = 1$, а при $\varphi \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ – коло, що задане рівнянням $\rho = 2\cos\varphi$ (рис. 6.24). Тоді

$$\frac{1}{2}S_D = \iint\limits_{D_1} dxdy = \iint\limits_{D_1'} \rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho d\rho.$$

Звідки отримуємо, що

$$\frac{1}{2}S_D = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^1 \right) d\varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{2\cos\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi + 2\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = \left\| \cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi) \right\| = \frac{\pi}{6} + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{6} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{2}\left(\sin\pi - \sin\frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Тоді площа області D: $S_D = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь: $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Приклад 6.15. Обчислити $\iint\limits_D xdxdy$, де область D: $x^2 + y^2 \le 4x - 2y + 4$.

Розв'язання. Область D обмежена лінією, що задається рівнянням $x^2 + y^2 = 4x - 2y + 4$, або $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$, тобто область D – круг радіуса $R = 3$ з центром у точці $M_0(2;-1)$.

Перейдемо до полярних координат з полюсом в точці $M_0(2;-1)$:

$$x = 2 + \rho\cos\varphi, \;\; y = -1 + \rho\sin\varphi \;\; (0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \rho \le 3).$$

Тоді

$$\iint\limits_D xdxdy = \iint\limits_{D'} (2 + \rho\cos\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 (2\rho + \rho^2\cos\varphi) d\rho =$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\rho^2+\frac{\rho^3}{3}\cos\varphi\Bigg|_0^3\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(9+\frac{27}{3}\cos\varphi\right)d\varphi=9\left(\varphi+\sin\varphi\big|_0^{2\pi}\right)=18\pi.$$

Відповідь: 18π.

Приклад 6.16. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею $z=4-x^2-y^2$ і площиною $z=0$ (рис. 6.25).

Розв'язання. Для обчислення об'єму скористаємося геометричним значенням подвійного інтеграла, а також симетрією тіла:

$$V=4\iint_D\left(4-x^2-y^2\right)dxdy,$$

де D – чверть круга $x^2+y^2\leq 4$ радіуса 2 з центром у початку координат.

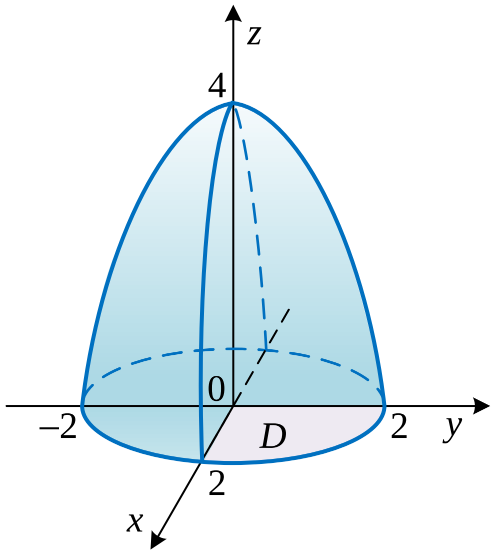


Рисунок 6.25

Перейдемо до полярних координат:

$$x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi\,.$$

Підінтегральна функція в полярних координатах буде мати вид:

$$z=4-x^2-y^2\ \ \Rightarrow\ z=4-\rho^2.$$

Далі маємо:

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^2\left(4-\rho^2\right)\cdot\rho d\rho=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^2\left(4-\rho^2\right)d\left(4-\rho^2\right)=$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(4-\rho^2\right)^2\Big|_0^2\right)d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}16\,d\varphi=8\pi.$$

Відповідь: 8π.

6.2.2. *Узагальнені полярні координати*

У тих випадках, коли межею області є еліпс або дуга еліпса, замість полярної системи координат варто використовувати так звану *узагальнену полярну систему координат*:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Обчислимо якобіан $J(\rho,\varphi)$:

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix}=ab\rho.$$

Отже, $d\sigma = dxdy = ab\rho d\varphi d\rho$. Після переходу до узагальнених полярних координат еліпс $D:\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$ розгортається в прямокутник (рис. 6.26):

$$D':\ 0\le\rho\le 1,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi.$$

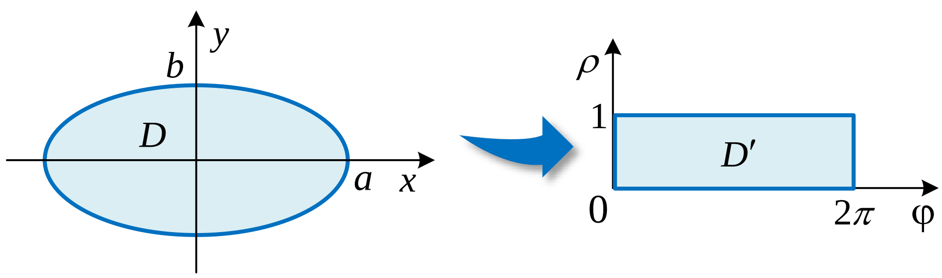


Рисунок 6.26

Приклад 6.17. Обчислити $\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$, де $D:\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 1.$

Розв'язання. Знайдемо півосі еліпса $D:\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1;\ \ a=2, b=3$. Для обчислення інтеграла скористаємося узагальненою полярною системою координат:

$$\begin{cases} x = 2\rho\cos\varphi, \\ y = 3\rho\sin\varphi, \\ dxdy = 6\rho d\rho d\varphi. \end{cases}$$

Тоді

$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \left(4\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi\right) 6\rho\, d\rho =$$

$$= 6\int_0^{2\pi} \left(4\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi\right) d\varphi \int_0^1 \rho^3\, d\rho = 6\int_0^{2\pi} \left(4\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi\right) d\varphi \cdot \left(\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^1\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \left(4\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi\right) d\varphi = \left\| \begin{matrix} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1, \\ \sin^2\varphi = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\varphi\right) \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \left(13 - 5\cos 2\varphi\right) d\varphi = \frac{3}{4} \cdot 13 \cdot 2\pi = \frac{39}{2}\pi .$$

Відповідь: $\frac{39}{2}\pi$.

6.3. Застосування подвійних інтегралів до задач механіки

6.3.1. *Маса матеріальної пластини*

Матеріальна пластина – це область D, на якій розподілена маса з заданою щільністю $\gamma(x, y)$.

Якщо поверхнева щільність – функція $\gamma(x, y)$ – неперервна в області D, то маса m матеріальної пластини обчислюється за формулою

$$\boxed{m_D = \iint_D \gamma(x, y)\, dxdy .} \qquad (6.14)$$

Приклад 6.18. Знайти масу пластини D: $4 \le x^2 + y^2 \le 9$ з поверхневою щільністю $\gamma(x, y) = x^2 y^2$.

Розв'язання. Якщо поверхнева щільність $\gamma(x,y)$ неперервна в області D, то маса m матеріальної пластини обчислюється за формулою

$$\iint_D \gamma(x,y)\,dxdy = m_D\,.$$

У нашому випадку маємо, що $m_D = \iint_D x^2y^2dxdy$. Область D – кільце, тому обчислення інтеграла проведемо в полярних координатах: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$

Зробимо заміну змінних за формулою (6.11):

$$m_D = \iint_D x^2y^2dxdy = \iint_{D'} \rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\rho d\rho d\varphi = \iint_{D'} \rho^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi\, d\rho d\varphi.$$

Перейдемо до повторного інтеграла за формулою (6.12):

$$m_D = \iint_{D'} \rho^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi\, d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi \int_2^3 \rho^5 d\rho =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi \cdot \left(\left.\frac{\rho^6}{6}\right|_2^3 \right) = \frac{1}{6}\left(3^6 - 2^6\right)\cdot\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi = \frac{665}{24}\pi.$$

Відповідь: $\dfrac{665}{24}\pi.$

6.3.2. *Статичні моменти і моменти інерції матеріальної пластини*

Статичний момент матеріальної пластини відносно осі OX:

$$\boxed{M_{OX} = \iint_D y\,\gamma(x,y)\,dxdy.}$$

За аналогією наведемо інші формули:

$$\boxed{M_{OY} = \iint_D x\,\gamma(x,y)\,dxdy,\ M_O = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\gamma(x,y)\,dxdy,}$$

де M_{OY} – статичний момент матеріальної пластини відносно осі OY, M_O – відносно початку координат.

$$I_{OY}=\iint\limits_D x^2\,\gamma(x,y)\,dxdy,\quad I_{OX}=\iint\limits_D y^2\,\gamma(x,y)\,dxdy,$$
$$I_O=\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y)\,dxdy,$$

де I_{OY}, I_{OX}, I_O – моменти інерції матеріальної пластини відносно осей OY, OX і початку координат відповідно.

6.3.3. *Координати центру ваги матеріальної пластини*

Координати центру ваги $(x_C; y_C)$ обчислюються за такими формулами:

$$x_C=\frac{\iint\limits_D x\gamma(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy},\quad y_C=\frac{\iint\limits_D y\gamma(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy}.$$

Приклад 6.19. Знайти моменти інерції I_{OX} і I_{OY} однорідної $\gamma(x,y)=\gamma_0$ матеріальної пластини D: $x=0,\ y=x,\ y=2-x$.

Розв'язання. Моменти інерції матеріальної пластини за умови $\gamma(x,y)=\gamma_0$ знайдемо за формулами

$$I_{OY}=\gamma_0\iint\limits_D x^2dxdy,\quad I_{OX}=\gamma_0\iint\limits_D y^2dxdy.$$

Область інтегрування – трикутник OBA, в точці $A(1;1)$ перетинаються прямі $y=x,\ y=2-x$ (рис. 6.27).

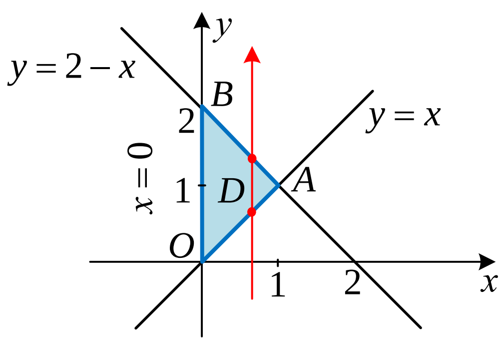


Рисунок 6.27

Для обчислення обираємо напрям інтегрування з внутрішнім інтегралом за змінною y. Тоді

$$I_{OY}=\gamma_0\iint\limits_D x^2dxdy=\gamma_0\int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_x^{2-x}dy=2\gamma_0\int\limits_0^1 x^2(1-x)dx=2\gamma_0\int\limits_0^1\left(x^2-x^3\right)dx=$$

$$=2\gamma_0\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1\right)=2\gamma_0\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{6}\gamma_0.$$

Аналогічно обчислюється момент інерції I_{OX}:

$$I_{OX}=\gamma_0\iint\limits_D y^2dxdy=\gamma_0\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2-x}y^2dy=\gamma_0\int\limits_0^1\left(\frac{y^3}{3}\Bigg|_x^{2-x}\right)dx=$$

$$=\frac{\gamma_0}{3}\int\limits_0^1\left((2-x)^3-x^3\right)dx=\frac{\gamma_0}{3}\left(-\frac{(2-x)^4}{4}-\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1\right)=\frac{\gamma_0}{3}\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+4\right)=\frac{7}{6}\gamma_0.$$

Відповідь: $I_{OY}=\frac{1}{6}\gamma_0;\ I_{OX}=\frac{7}{6}\gamma_0.$

Приклад 6.20. Знайти координати центру ваги однорідної $(\gamma=1)$ пласкої пластини D: $x^2+y^2\le-3x,\ y\ge\frac{x}{\sqrt{3}},\ y\le-\frac{x}{\sqrt{3}}.$

Розв'язання. Координати центру ваги пласкої пластини D з поверхневою щільністю $\gamma=\gamma(x,y)$ обчислюються за формулами:

$$x_C=\frac{\iint\limits_D x\gamma(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy},\quad y_C=\frac{\iint\limits_D y\gamma(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy}.$$

Область D обмежують коло $x^2+y^2=-3x$ і прямі $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}$ і $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$ (рис. 6.28).

Розрахунки будемо проводити в полярній системі координат.

В полярних координатах рівняння заданого кола виглядає наступним чином: $\rho=-3\cos\varphi$. Вся область інтегрування розташована між променями $\varphi_1=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}$ і $\varphi_2=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7\pi}{6}$ (рис. 6.29).

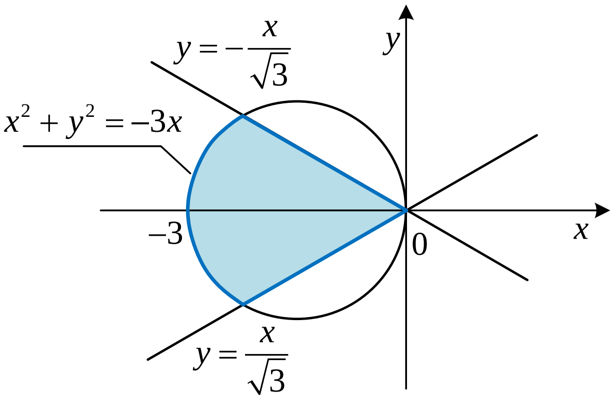


Рисунок 6.28

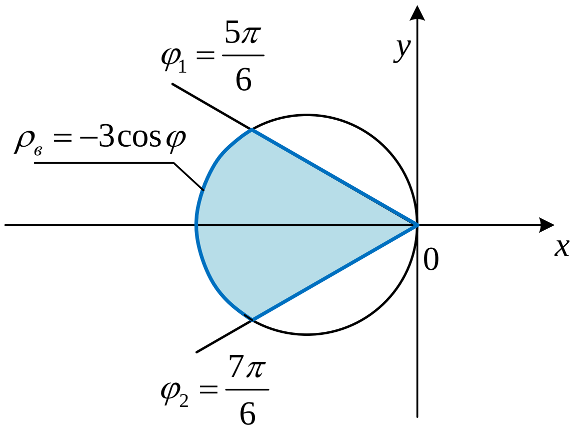


Рисунок 6.29

Спочатку обчислимо масу пластини, тобто почнемо з обчислення інтеграла $\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy$. Маємо:

$$m_D=\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{D'}\rho d\rho d\varphi.$$

Перейдемо до повторного інтеграла:

$$m_D=\int\limits_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}d\varphi\int\limits_0^{-3\cos\varphi}\rho d\rho=\frac{9}{2}\int\limits_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\cos^2\varphi d\varphi=\frac{9}{4}\int\limits_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{9}{4}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}=\frac{9}{4}\left(\frac{7\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{7\pi}{3}\right)-\frac{9}{4}\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{3}{8}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right).$$

Статичні моменти обчислюються аналогічно:

$$M_{OY}=\iint\limits_D x\gamma(x,y)dxdy \text{ і } M_{OX}=\iint\limits_D y\gamma(x,y)dxdy.$$

Обчислимо статичний момент M_{OY}:

$$M_{OY}=\iint\limits_D x\gamma(x,y)dxdy=\iint\limits_D xdxdy=\iint\limits_{D'}\rho^2\cos\varphi d\rho d\varphi=\int\limits_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^{-3\cos\varphi}\rho^2 d\rho=$$

$$=-9\int\limits_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\cos^4\varphi d\varphi=-\frac{9}{4}\int\limits_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}(1+\cos 2\varphi)^2 d\varphi=-\frac{9}{4}\int\limits_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\cos 4\varphi\right)d\varphi=$$

$$=-\frac{9}{4}\left(\frac{3}{2}\varphi+\sin 2\varphi+\frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}=-\frac{9}{4}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{7\pi}{6}+\sin\frac{7\pi}{3}+\frac{1}{8}\sin\frac{14\pi}{3}\right)+$$

$$+\frac{9}{4}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5\pi}{6}+\sin\frac{5\pi}{3}+\frac{1}{8}\sin\frac{10\pi}{3}\right)=-\frac{9}{32}\left(4\pi+9\sqrt{3}\right).$$

Отже, координата x_C центру ваги пластини

$$x_C=\frac{\iint\limits_D x\gamma(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy}=\frac{-\frac{9}{32}\left(4\pi+9\sqrt{3}\right)}{\frac{3}{8}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)}=-\frac{3\left(4\pi+9\sqrt{3}\right)}{4\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)}.$$

Так само обчислимо статичний момент M_{OX}:

$$M_{OX}=\iint\limits_D y\gamma(x,y)dxdy=\iint\limits_D ydxdy=\iint\limits_{D'}\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi=\int\limits_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{-3\cos\varphi}\rho^2 d\rho=$$

$$=-9\int\limits_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi=9\int\limits_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\cos^3\varphi d\cos\varphi=9\left(\frac{\cos^4\varphi}{4}\Bigg|_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\right)=0.$$

Отже, координата y_C центру ваги пластини $y_C=\dfrac{\iint\limits_D y\gamma(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy}=0.$

Відповідь: $x_C=-\dfrac{3\left(4\pi+9\sqrt{3}\right)}{4\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)};\ y_C=0.$

При обчисленні скористались тим, що

$$\sin\frac{7\pi}{3}=\sin\frac{14\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\frac{5\pi}{3}=\sin\frac{10\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Контрольні запитання

1. Що називається діаметром обмеженої множини точок? Чому дорівнює діаметр області: а) прямокутника зі сторонами a і b; б) області, обмеженої еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$?

2. Що називається подвійним інтегралом по заданій області?

3. Що таке циліндричне тіло? Як визначається його об'єм?

4. Які властивості має подвійний інтеграл?

5. В чому полягає властивість лінійності і адитивності подвійних інтегралів?

6. Сформулюйте теорему про середнє значення функції в області для подвійного інтеграла.

7. Сформулюйте теорему про оцінку подвійного інтеграла в області інтегрування.

8. За якими правилами відбувається перехід від подвійного інтеграла до повторного?

9. Як виконується заміна змінних у подвійному інтегралі?

10. Що таке криволінійні координати? Навести приклад.

11. Як виконується перехід до полярних координат в подвійному інтегралі?

12. Як виконується перехід до узагальнених полярних координат в подвійному інтегралі?

13. Як обчислюється площа плаской фігури за допомогою подвійного інтеграла?

14. Як обчислюється об'єм тіла за допомогою подвійного інтеграла?

15. Які механічні застосування подвійних інтегралів?

Завдання для самостійної роботи

В завданнях 1-2 змінити порядок інтегрування:

1. $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{2-x}^{x} f(x,y)dy.$ **2.** $\int\limits_1^4 dx \int\limits_{4-x}^{4x-x^2} f(x,y)dy.$

3. Знайти середнє значення функції $z = x^2 + y^2$ в області

$$D:\ x + y \le 2,\ \ x \ge 0,\ y \ge 0.$$

4. Обчислити площу області $D:\ y \le 4 - x^2,\ y \ge 4x - x^2,\ \ y \ge -4x - x^2.$

5. Обчислити об'єм тіла, що обмежено поверхнями $x + 2y = 4,\ x = 4 - y^2$ та $z = 0,\ \ z = x$.

6. Обчислити $\iint\limits_D (x - y)\,dxdy$, якщо область інтегрування D трикутник з вершинами $(1;1), (4;1), (4;4)$.

7. Обчислити $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2 + 4x\right)dxdy$, якщо область інтегрування

$$D:\ x^2 + y^2 \le 9,\ \ y \ge 0,\ \ \ x \ge 0.$$

8. Обчислити $\iint\limits_D \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}\,dxdy$, якщо область інтегрування

$$D:\ x^2 + y^2 \le 3y,\ \ y \ge x,\ \ \ x \ge 0.$$

9. Обчислити площу області:

а) $D:\ x^2 + y^2 \le 4x,\ \ y \le \dfrac{\sqrt{3}}{3}x,\ \ y \ge -x;$

б) $D:\ x^2 + y^2 \le 5x,\ \ x^2 + y^2 \ge 3x,\ \ y \le \sqrt{3}x,\ \ y \ge 0.$

10. Обчислити масу пластини D з поверхневою щільністю $\gamma(x, y)$:

$$D:\ x^2 + y^2 \le 4,\ \ y \le x,\ \ y \ge 0;\ \ \gamma(x, y) = x.$$

Відповіді

1. $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{3} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{y}^{3} f(x,y)dx.$ **2**. $\int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{4-y}^{2+\sqrt{4-y}} f(x,y)dx + \int\limits_{3}^{4} dy \int\limits_{2-\sqrt{4-y}}^{2+\sqrt{4-y}} f(x,y)dx.$

3. $\dfrac{4}{3}$. **4**. 4. **5**. $\dfrac{16}{5}$. **6**. $\dfrac{9}{2}$. **7**. $\dfrac{81}{8}\pi + 36.$ **8**. $\dfrac{9}{64}\pi.$

9. **а)** $\dfrac{5\pi}{3} + \sqrt{3} + 2$; **б)** $\dfrac{4\pi}{3} + \sqrt{3}.$ **10**. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}.$

7. Потрійні інтеграли

7.1. Основні означення

Побудова потрійного інтеграла відбувається за тією ж схемою, що і побудова подвійного інтеграла. Припустимо, в просторі $\mathbb{R}^3$ визначена зв'язна область Ω, яка є обмеженою і замкненою. Припустимо, що в цій області визначена функція $W = f(x, y, z)$. Розділимо область Ω на скінченне число елементарних областей V_1, $V_2, ..., V_n$. Позначимо об'єми цих областей через ΔV_1, $\Delta V_2, ..., \Delta V_n$. У кожному з елементарних об'ємів обираємо точку $M_k(x_k; y_k; z_k)$, $k = 1, 2, ..., n$. Обчислюємо значення функції $f(x, y, z)$ в обраних точках і складаємо суму $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$. Ця сума називається *інтегральною сумою* для функції $f(x, y, z)$ по області Ω. Очевидно, що інтегральна сума залежить як від способу поділу області Ω на елементарні області, так і від вибору точок $M_k(x_k; y_k; z_k)$.

Означення. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\max\limits_k \operatorname{diam} V_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k,$$

яка не залежить ні від способу поділу області Ω на елементарні області, ні від вибору точок $M_k(x_k; y_k; z_k)$ в цих областях, то ця границя називається *потрійним інтегралом* функції $f(x, y, z)$ по області Ω і позначається $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz$. У цьому випадку функція $f(x, y, z)$ називається *інтегрованою в* Ω.

Теорема 7.1. *Якщо функція $f(x, y, z)$ є неперервною в замкненій обмеженій області Ω, то вона є інтегрованою в цій області.*

Властивості потрійного інтеграла майже дослівно збігаються з властивостями подвійного інтеграла.

7.2. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах

Означення. Зв'язна, обмежена і замкнена область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ називається *правильною,* якщо виконуються наступні умови:

1. Будь-яка пряма, яка паралельна осі OZ, перетинає поверхню, що обмежує область Ω, не більше, ніж у двох точках.

2. Проєкція D області Ω, на площину XOY задовольняє умові: будь-яка пряма, яка паралельна осі OY, перетинає межу цієї області не більше, ніж у двох точках. Якщо ця умова не виконується для прямих, паралельних осі OY, то вона повинна виконуватися для прямих, паралельних осі OX.

3. Будь-яка частина області Ω, яка відрізана від неї площиною, паралельною будь-якій з координатних площин, також має властивості 1 і 2.

Нижче, на рисунках 7.1 і 7.2 показані приклади правильних і неправильних областей відповідно.

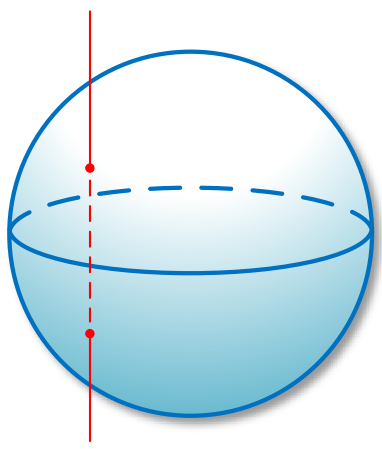


Рисунок 7.1

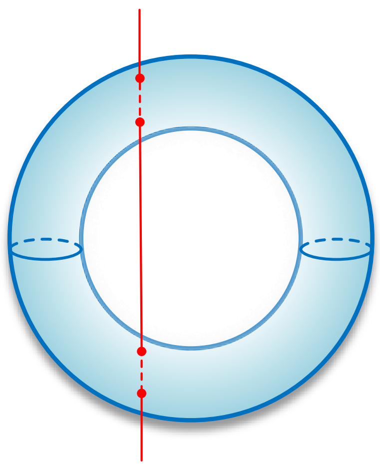


Рисунок 7.2

Припустимо, що область Ω обмежена знизу поверхнею $z = \Phi_1(x, y)$, зверху – поверхнею $z = \Phi_2(x, y)$, як показано на рисунку 7.3.

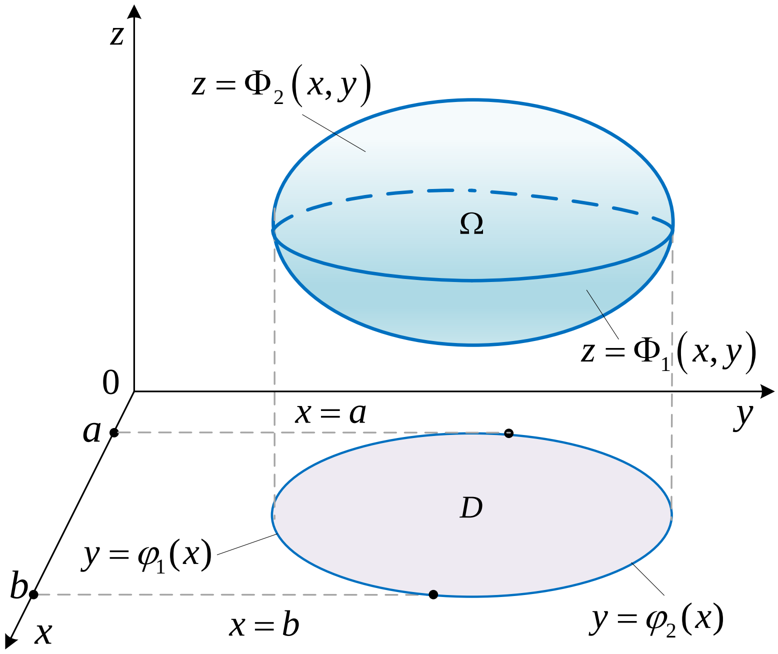


Рисунок 7.3

Нехай D – проєкція області Ω на площину XOY – обмежена прямими $x=a$ і $x=b$ $(a<b)$, кривими $y=\varphi_1(x)$ і $y=\varphi_2(x)$ (рис. 7.3). Тоді потрійний інтеграл може бути записаний як повторний наступним чином:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int\limits_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz. \qquad (7.1)$$

Обчислення інтеграла (7.1) починається з *внутрішнього інтеграла* $\int\limits_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x,y,z)dz=g(x,y)$, що є функцією змінних x і y. Потім, вважаючи змінну x постійною, обчислюється інтеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} g(x,y)dy=h(x)$. Значення потрійного інтеграла отримаємо інтегруванням функції $h(x)$:

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int\limits_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)}f(x,y,z)dz=\int\limits_a^b h(x)dx.$$

Приклад 7.1. В інтегралі $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ перейти до повторного, виконавши розстановку меж інтегрування, за умови, що область Ω: $x+z\le 7$, $x^2+y^2\le 9$, $z\ge 0$.

Розв'язання. Область інтегрування Ω, що обмежена площинами $x+z=7$, $z=0$ та циліндричною поверхнею $x^2+y^2=9$, зображена на рисунку 7.4.

Область інтегрування Ω є правильною (рис. 7.5).

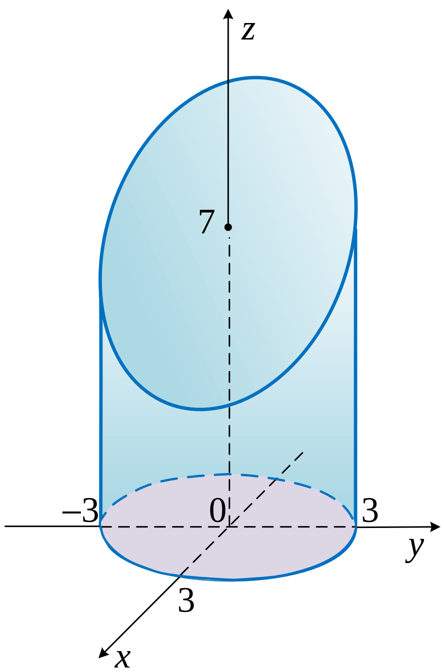


Рисунок 7.4

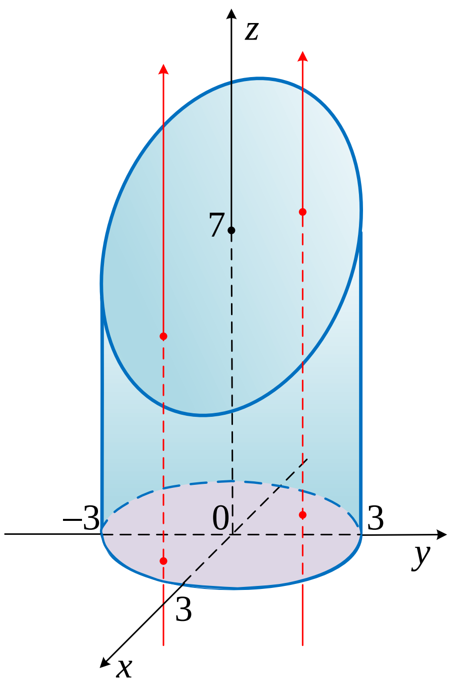


Рисунок 7.5

Рівнянням $x+z=7$ задана площина, що паралельна осі OY та перетинає осі OX і OZ при $x=7$ та $z=7$ відповідно. Рівняння $x^2+y^2=9$ задає у просторі циліндричну поверхню з твірною, що паралельна осі OZ, у якості напрямної – коло $x^2+y^2=9$. Умова $z\ge 0$ визначає частину простору $\mathbb{R}^3$ вище площини XOY, яка задається рівнянням $z=0$.

Внутрішнє інтегрування виконується за змінною z. Очевидно, $z_1=0$, $z_2=7-x$. Область інтегрування проєктується в площину XOY в круг $x^2+y^2\le 9$, який в свою чергу проєктується у відрізок $[-3,3]$ осі OX. При цьому $y_1(x)=-\sqrt{9-x^2}$, а $y_2(x)=\sqrt{9-x^2}$.

Таким чином, $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy \int\limits_{0}^{7-x} f(x,y,z)dz.$

Відповідь: $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy \int\limits_{0}^{7-x} f(x,y,z)dz.$

Зауваження. Зазвичай користуються таким видом повторного інтеграла, який вимагає менших витрат часу на його інтегрування.

Приклад 7.2. Обчислити $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\,dx\,dy\,dz$, якщо

$$\Omega:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1.$$

Розв'язання. Область інтегрування Ω – куб, одна вершина якого знаходиться у початку координат, три його суміжні грані належать координатним площинам (рис. 7.6).

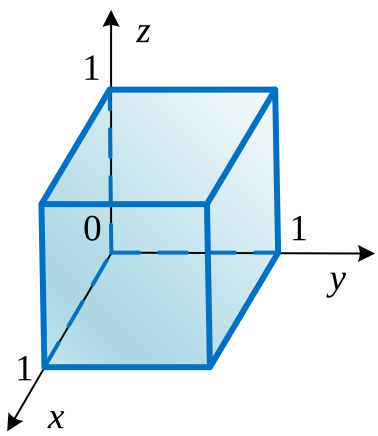


Рисунок 7.6

Перейдемо до повторного інтеграла:

$$I = \iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 (x+2y+3z)dz.$$

Інтегрування починаємо з внутрішнього інтеграла за змінною z:

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left(xz + 2yz + 3\cdot\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^1 \right) dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left(x + 2y + \frac{3}{2} \right) dy.$$

Далі:

$$I=\int_0^1\left(xy+y^2+\frac{3}{2}y\Big|_0^1\right)dx=\int_0^1\left(x+1+\frac{3}{2}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{5}{2}x\Big|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3.$$

Відповідь: 3.

Приклад 7.3. Обчислити $\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz,$ якщо

$$\Omega:\ x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ z\ge 0,\ \ x+y+z\le 1.$$

Розв'язання. Область інтегрування – піраміда, одна вершина якої у початку координат, а три її грані належать координатним площинам. Четверта грань задається рівнянням $z=1-x-y$ (рис. 7.7а).

Область інтегрування проєктується на площину XOY у прямокутний трикутник, що відсікається прямою $y=1-x$ від початку координат, при цьому $x\in[0,1]$ (рис. 7.7б).

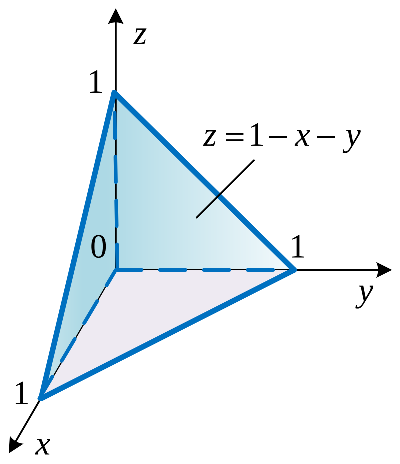


Рисунок 7.7а

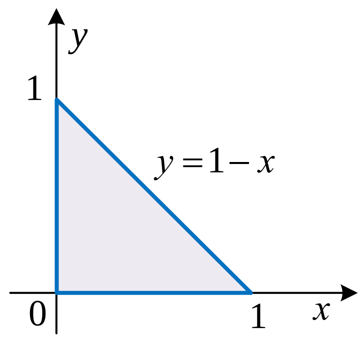


Рисунок 7.7б

Перейдемо до повторного інтеграла:

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}zdz=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(z^2\Big|_0^{1-x-y}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\,dy=-\frac{1}{6}\int_0^1\left((1-x-y)^3\Big|_0^{1-x}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1\left(0-(1-x)^3\right)dx=-\frac{(1-x)^4}{24}\Bigg|_0^1=\frac{1}{24}.$$

Відповідь: $\frac{1}{24}$.

Приклад 7.4. Обчислити $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z+1)^3\,dxdydz$, якщо область Ω обмежена площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$ (рис. 7.8).

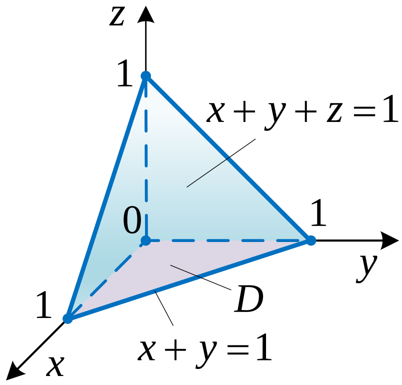


Рисунок 7.8

Розв'язання. Як видно з рисунка 7.8, координати x, y, z в області Ω змінюються в наступних межах: $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le 1-x-y$. Тому

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z+1)^3\,dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z+1)^3\,dz=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{4}(x+y+z+1)^4\Big|_0^{1-x-y}\right)dy=\frac{1}{4}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(16-(x+y+1)^4\right)dy=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(16y-\frac{1}{5}(x+y+1)^5\Big|_0^{1-x}\right)dx=\frac{1}{4}\int_0^1\left(16(1-x)-\frac{32}{5}+\frac{1}{5}(x+1)^5\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{48}{5}-16x+\frac{1}{5}(x+1)^5\right)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{48}{5}x-8x^2+\frac{1}{30}(x+1)^6\Big|_0^1\right)=\frac{37}{40}.$$

Відповідь: $\frac{37}{40}$.

Приклад 7.5. Обчислити $\iiint\limits_{\Omega}xy\,dx\,dy\,dz$, якщо область інтегрування $\Omega:\ y\ge x^2,\ z\ge 0,\ y+z\le 4.$

Розв'язання. Область інтегрування Ω обмежена знизу координатною площиною XOY, зверху – поверхнею $z=4-y$ (рис. 7.9а); проєктується в частину площини XOY, що обмежена параболою $y = x^2$ і прямою $y = 4$, при цьому $x \in [-2, 2]$ (рис. 7.9б).

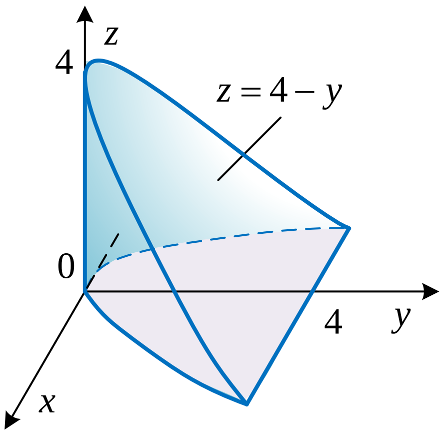


Рисунок 7.9а

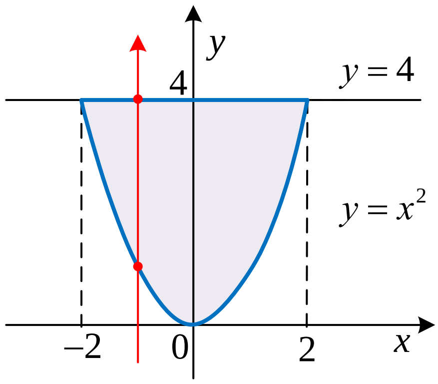


Рисунок 7.9б

Перейдемо до повторного інтеграла:

$$\iiint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy\,dz = \int_{-2}^{2} xdx \int_{x^2}^{4} ydy \int_{0}^{4-y} dz = \int_{-2}^{2} xdx \int_{x^2}^{4} y\left(z\Big|_0^{4-y}\right)dy =$$

$$= \int_{-2}^{2} xdx \int_{x^2}^{4} \left(4y - y^2\right)dy = \int_{-2}^{2} x\left(2y^2 - \frac{y^3}{3}\Bigg|_{x^2}^{4}\right)dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} x\left(\left(32 - \frac{64}{3}\right) - \left(2x^4 - \frac{x^6}{3}\right)\right)dx = \int_{-2}^{2}\left(\frac{32}{3}x - 2x^5 + \frac{x^7}{3}\right)dx = 0,$$

як інтеграл від непарної функції за симетричним інтервалом.

Відповідь: 0.

7.3. Заміна змінних у потрійному інтегралі

Припустимо, що в потрійному інтегралі $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ відбулась заміна змінних за формулами $x=\xi(u,v,w)$, $y=\eta(u,v,w)$, $z=\zeta(u,v,w)$, і функції $x=\xi(u,v,w)$, $y=\eta(u,v,w)$, $z=\zeta(u,v,w)$ здійснюють неперервне диференційоване відображення області Ω' простору $O'UVW$ в область Ω простору $OXYZ$. Нехай якобіан цього перетворення не дорівнює на нуль в області Ω':

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial u} & \dfrac{\partial\xi}{\partial v} & \dfrac{\partial\xi}{\partial w} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial u} & \dfrac{\partial\eta}{\partial v} & \dfrac{\partial\eta}{\partial w} \\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial u} & \dfrac{\partial\xi}{\partial v} & \dfrac{\partial\zeta}{\partial w} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Тоді має місце формула:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz =$$
$$=\iiint\limits_{\Omega'} f\left(\xi(u,v,w),\eta(u,v,w),\zeta(u,v,w)\right)\left|J(u,v,w)\right|du\,dv\,dw. \tag{7.2}$$

Змінні u,v,w можна розглядати як прямокутні координати точок області Ω' і, в той же час, як криволінійні *координати точок* області Ω. Найбільш поширеними криволінійними координатами є *циліндричні* і *сферичні* координати.

7.3.1. *Циліндрична система координат*

У *циліндричній системі координат точка* M *задається* координатами $(\rho;\varphi;z)$. Тут ρ – відстань від початку координат до точки M' – проєкції точки M на площину XOY, φ – кут між відрізком OM' і віссю OX. Циліндричні координати поєднують полярні координати на площині XOY з декартовою віссю OZ (рис. 7.10).

Формули, що зв'язують циліндричні координати з декартовими координатами, мають вид

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Якобіан у даному випадку $J(\rho,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$

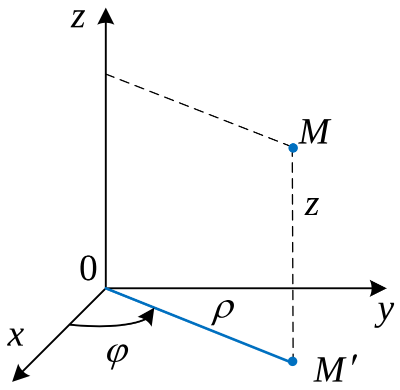


Рисунок 7.10

Тому в потрійному інтегралі *перехід від декартових координат* x, y, z *до циліндричних координат* ρ, φ, z здійснюється за формулою

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz. \tag{7.3}$$

Приклад 7.6. Обчислити $\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz,$ де область Ω обмежена циліндром $x^2 + y^2 = 9$, параболоїдом $z = x^2 + y^2$ і координатною площиною $z = 0$.

Розв'язання. Область інтегрування Ω обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = 9$ і $z = x^2 + y^2$ та проєктується на координатну площину $z = 0$ в круг $x^2 + y^2 \le 9$.

У цьому випадку рекомендується при обчисленні інтеграла переходити до циліндричної системи координат.

Перейдемо в потрійному інтегралі до циліндричних координат:

$$I = \iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega'} z\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$$

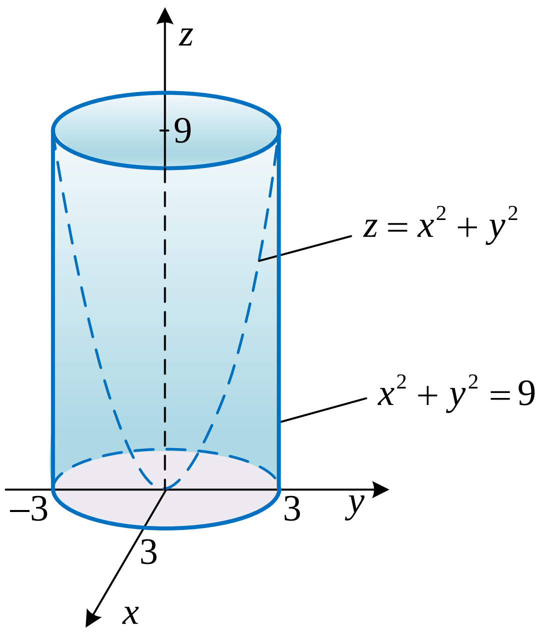


Рисунок 11а

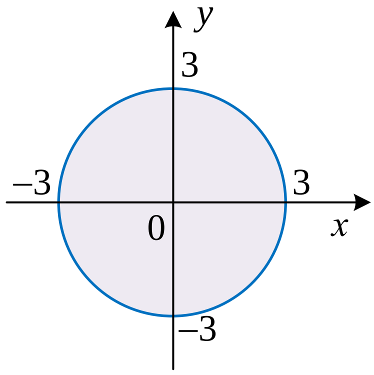


Рисунок 11б

Область Ω зверху обмежена поверхнею $z = x^2 + y^2$, знизу – площиною $z = 0$. В циліндричних координатах рівняння поверхні має вид: $z = \rho^2$. Межею проєкції Ω на координатну площину XOY є коло $x^2 + y^2 = 9$, або в циліндричних координатах $\rho = 3$, тобто $0 \le \rho \le 3$, а $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Перейдемо від потрійного інтеграла до повторного:

$$I = \iiint\limits_{\Omega'} z\rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \rho d\rho \int\limits_0^{\rho^2} z dz.$$

Інтегрування починаємо з внутрішнього інтеграла:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \rho d\rho \int\limits_0^{\rho^2} z dz = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \left(z^2 \Big|_0^{\rho^2} \right) \rho d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \rho^5 d\rho =$$

$$= \frac{1}{12}\int\limits_0^{2\pi} \left(\rho^6 \Big|_0^3 \right) d\varphi = \frac{1}{12} \cdot 3^6 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{243\pi}{2}.$$

Відповідь: $\dfrac{243\pi}{2}$.

Приклад 7.7. Переходячи до циліндричних координат, обчислити $\iiint\limits_{\Omega} ydxdydz$, де область Ω обмежена циліндричною поверхнею $y = \sqrt{2x - x^2}$, площиною $y=0$, та площинами $z=0$, $z=4-x$.

Розв'язання. Рівняння поверхні $y=\sqrt{2x-x^2}$ в циліндричних координатах має вид $\rho=2\cos\varphi$, де $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Отже, координати φ, ρ, z в даній області змінюються в межах: $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le 2\cos\varphi$, $0\le z\le 4-\rho\cos\varphi$ (рис. 7.12).

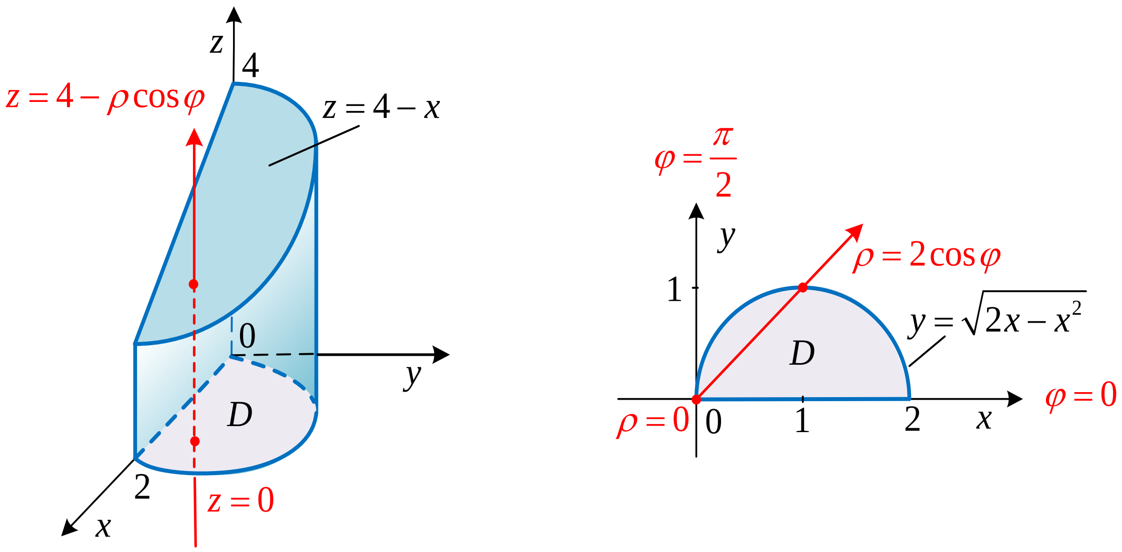


Рисунок 7.12

Далі, за формулою (7.3) отримаємо

$$\iiint\limits_{\Omega} y\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{\Omega'}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2 d\rho\int_0^{4-\rho\cos\varphi}dz=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\left(z\Big|_0^{4-\rho\cos\varphi}\right)\rho^2 d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\left(4\rho^2-\rho^3\cos\varphi\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4\rho^3}{3}-\frac{\rho^4}{4}\cos\varphi\Bigg|_0^{2\cos\varphi}\right)\sin\varphi\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{32}{3}\cos^3\varphi-4\cos^5\varphi\right)\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{32}{3}\cos^3\varphi-4\cos^5\varphi\right)d\cos\varphi=-\left(\frac{32}{12}\cos^4\varphi-\frac{4}{6}\cos^6\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=2.$$

Відповідь: 2.

Приклад 7.8. Обчислити $\iiint\limits_{\Omega} x^2 dx\,dy\,dz,$ де область Ω обмежена конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ і параболоїдом $z=2-\left(x^2+y^2\right)$.

Розв'язання. Область інтегрування Ω обмежена поверхнями $z=\sqrt{x^2+y^2}$ і $z=2-\left(x^2+y^2\right)$. З'ясуємо, при якому значенні координати z ці поверхні перетинаються:

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z=2-\left(x^2+y^2\right), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2}=2-\left(x^2+y^2\right).$$

Позначимо $\sqrt{x^2+y^2}=t\geq 0$, тоді $t^2+t-2=0$, $t_1=1$, $t_2=-2$. Тобто, вказані поверхні перетинаються при $z=1$ (рис. 7.13а), а лінія перетину проєктується на координатну площину XOY в коло $x^2+y^2=1$ (рис. 7.13б).

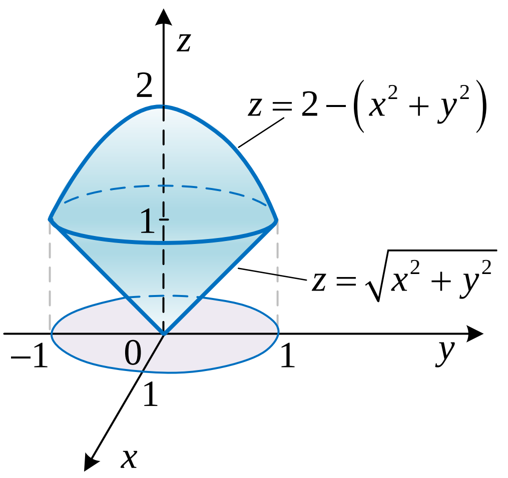


Рисунок 7.13а

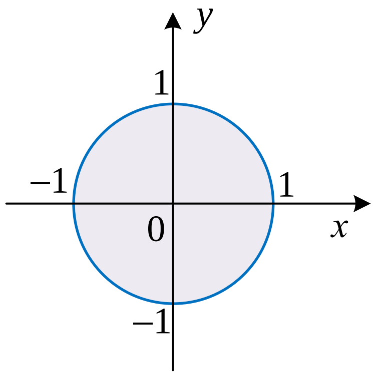


Рисунок 7.13б

У цьому випадку рекомендується обчислення інтеграла проводити в циліндричних координатах:

$$I=\iiint\limits_{\Omega} x^2 dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{\Omega'} \rho^2\cos^2\varphi\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=\iiint\limits_{\Omega'} \rho^3\cos^2\varphi\,d\rho\,d\varphi\,dz.$$

Перейдемо від потрійного інтеграла до повторного:

$$I=\iiint\limits_{\Omega'} \rho^3\cos^2\varphi\,d\rho\,d\varphi\,dz=\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\int\limits_0^1\rho^3 d\rho\int\limits_{\rho}^{2-\rho^2}dz.$$

Інтегрування почнемо з внутрішнього інтеграла:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^1\rho^3 d\rho\int\limits_{\rho}^{2-\rho^2}dz=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi\int\limits_0^1\rho^3\left(z\Big|_{\rho}^{2-\rho^2}\right)d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi\int_0^1\rho^3\left(2-\rho^2-\rho\right)d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi\int_0^1\left(2\rho^3-\rho^5-\rho^4\right)d\rho=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)\left(\frac{\rho^4}{2}-\frac{\rho^6}{6}-\frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^1\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\right)\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{15}\cdot\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{15}\left(2\pi-0-\frac{1}{2}(\sin 4\pi-\sin 0)\right)=\frac{1}{15}\cdot 2\pi=\frac{2\pi}{15}.$$

Відповідь: $\dfrac{2\pi}{15}$.

7.3.2. *Сферична система координат*

У *сферичній* системі координат точка M задається координатами $(r;\varphi;\theta)$. Геометричний смисл величин r,φ,θ зрозумілий з рисунку 7.14: r – це відстань від початку координат до точки M; θ – кут між відрізком OM і додатним напрямом осі OZ; φ – кут між відрізком OM' і віссю OX, де точка M' – проєкція точки M на площину XOY.

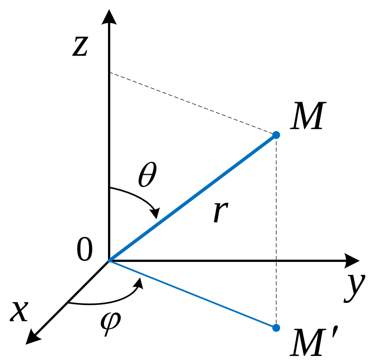


Рисунок 7.14

Сферичні координати пов'язані з декартовими наступними формулами:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\theta. \end{cases}$$

Якобіан цього перетворення

$$J(r,\varphi,\theta)=\begin{vmatrix}\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta\end{vmatrix}=-r^2\sin\theta.$$

Тому формула (7.2) в разі переходу в потрійному інтегралі до сферичних координат набуває виду

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{\Omega'} f\left(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta\right)r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta.$$

Застосування сферичних координат має сенс, коли межею області інтегрування є сфера або її частина.

Приклад 7.9. Обчислити $\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz,$ де область Ω обмежена поверхнею сфери $x^2+y^2+z^2=16$ за умови $z\ge 0$.

Розв'язання. Область інтегрування Ω обмежена поверхнею $x^2+y^2+z^2=16$ $(z\ge 0)$ і координатною площиною XOY (рис. 7.15).

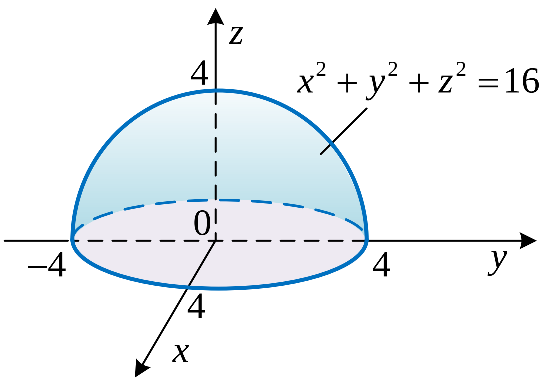


Рисунок 7.15

Рівняння сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$ у сферичних координатах: $r=R$, тому в області Ω': $0\le r\le 4$, $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

Перейдемо до сферичних координат в інтегралі:

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega'} r^3 \sin\theta\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int\limits_0^4 r^3 dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \left(\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^4 \right) d\theta = \frac{64}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) d\varphi = -16\int\limits_0^{2\pi} (\cos\pi - \cos 0)\,d\varphi = 64\pi.$$

Відповідь: 64π.

Приклад 7.10. Обчислити $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, де область Ω визначається нерівностями $4 \le x^2+y^2+z^2 \le 9$.

Розв'язання. Область Ω обмежена сферами $x^2+y^2+z^2=4$ і $x^2+y^2+z^2=9$ (рис. 7.16). Це дає можливість спростити обчислення інтеграла завдяки **переходу до сферичних координат**.

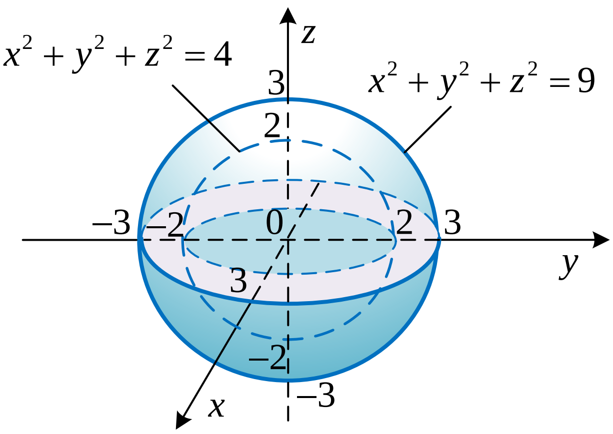


Рисунок 7.16

Рівняння сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$ у сферичних координатах: $r=R$, тому в області Ω': $2 \le r \le 3$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Зробимо заміну змінних й перейдемо до повторного інтеграла:

$$I = \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega'} r^2\sin^2\theta\, r^2 \sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta\,d\theta \int\limits_2^3 r^4 dr.$$

Інтегрування починаємо з внутрішнього інтеграла:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int\limits_2^3 r^4 dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta \left(\frac{r^5}{5}\Bigg|_2^3 \right) d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta \left(\frac{3^5-2^5}{5} \right) d\theta =$$

$$=\frac{243-32}{5}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta=\frac{211}{5}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta\sin\theta d\theta=$$

$$=-\frac{211}{5}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\theta\right)d\cos\theta=-\frac{211}{5}\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\bigg|_0^{\pi}\right)d\varphi=$$

$$=-\frac{211}{5}\cdot\left(\left(\cos\pi-\cos 0\right)-\frac{1}{3}\left(\cos^3\pi-\cos^3 0\right)\right)\cdot\left(\varphi\big|_0^{2\pi}\right)=$$

$$=-\frac{211}{5}\left(\left(-1-1\right)-\frac{1}{3}\left(\left(-1\right)^3-1^3\right)\right)\cdot 2\pi=-\frac{211}{5}\left(-2+\frac{2}{3}\right)\cdot 2\pi=\frac{211}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot 2\pi=\frac{1688}{15}\pi.$$

Відповідь: $\frac{1688}{15}\pi$.

Приклад 7.11. Переходячи до сферичних координат, обчислити $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,$ де область Ω: $x^2+y^2+z^2\le x$ (рис. 7.17).

Розв'язання. Рівняння $x^2+y^2+z^2=x$ в сферичних координатах має вид $r=\cos\varphi\sin\theta,$ де $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le\theta\le\pi$. Отже, координати r,φ,θ в даній області змінюються в межах $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le r\le\cos\varphi\sin\theta$.

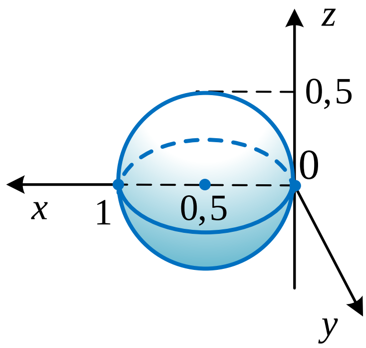


Рисунок 7.17

Користуючись симетрією області інтегрування і підінтегральної функції відносно координатних площин XOY і XOZ, можна зробити обчислення заданого інтеграла по тієї частині області Ω, де змінні x,y,z приймають невід'ємні значення, тобто там, де $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$. В цій частині області інтегрування координати r,φ,θ змінюються в межах $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ \ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ \ 0\le r\le\cos\varphi\sin\theta$ (рис. 7.18).

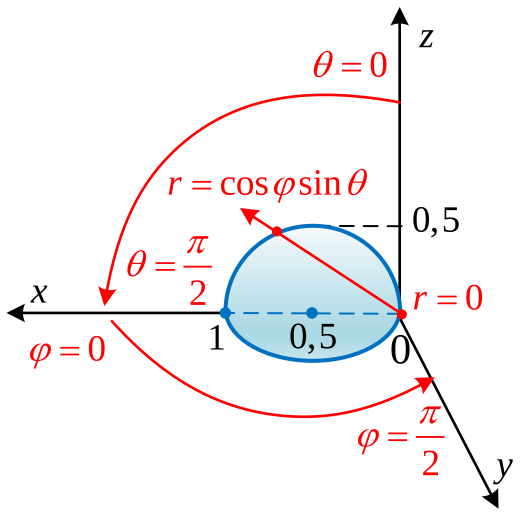


Рисунок 7.18

Тому

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{\Omega'}r^3\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{\cos\varphi\sin\theta}r^3dr=$$

$$=4\cdot\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\left(r^4\Big|_0^{\cos\varphi\sin\theta}\right)d\theta=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta d\theta=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\varphi)^2\,d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\theta\right)^2 d\cos\theta=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos2\varphi+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos4\varphi\right)d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta\right)d\cos\theta=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\left(\cos\theta-\frac{2}{3}\cos^3\theta+\frac{1}{5}\cos^5\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{\pi}{10}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{10}$.

При обчисленні інтеграла скористались наступним:

$$\sin\alpha d\alpha=-d\cos\alpha;\;\;\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha);$$

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha;\;\;\cos0=1;\;\;\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

7.4. Застосування потрійних інтегралів

7.4.1. *Об'єм тіла*

З геометричного значення подвійного інтеграла випливає, що об'єм циліндричного тіла, твірні якого паралельні осі OZ, яке обмежено зверху поверхнею $z = f(x, y)$ $(f(x, y) \geq 0)$, має основою область D площини XOY, обчислюється за формулою

$$V = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

Об'єм V_Ω області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ обчислюється за такою формулою:

$$V_\Omega = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz.$$

Приклад 7.12. Знайти об'єм частини кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, що міститься в циліндрі $x^2 + y^2 = 1$.

Розв'язання. Об'єм тіла, що займає область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, за допомогою потрійного інтеграла обчислюється за формулою:

$$V_\Omega = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz.$$

Оскільки однією з поверхонь, що обмежують тіло, є сфера, то логічно обчислення виконувати в сферичних координатах.

Об'єм тіла в сферичних координатах:

$$V = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega'} r^2 \sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta.$$

В сферичних координатах $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, тому рівняння сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ набуває виду $r^2 = R^2$ або $r = R$.

В даному випадку тіло, об'єм якого необхідно знайти, обмежено циліндром $x^2 + y^2 = 1$ і сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Циліндр і сфера перетинаються при $z = \pm 1$.

З рисунка 7.19 видно, що тіло симетрично відносно площини XOY, тому достатньо буде обчислити об'єм частини тіла, що розташована, наприклад, вище площини XOY, а одержаний результат подвоїти. Оскільки тіло проєктується в площину XOY в круг $x^2 + y^2 \leq 1$, то $\varphi \in [0,\ 2\pi]$. Для верхньої частини тіла кут $\theta \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, а для змінної r виникають деякі проблеми.

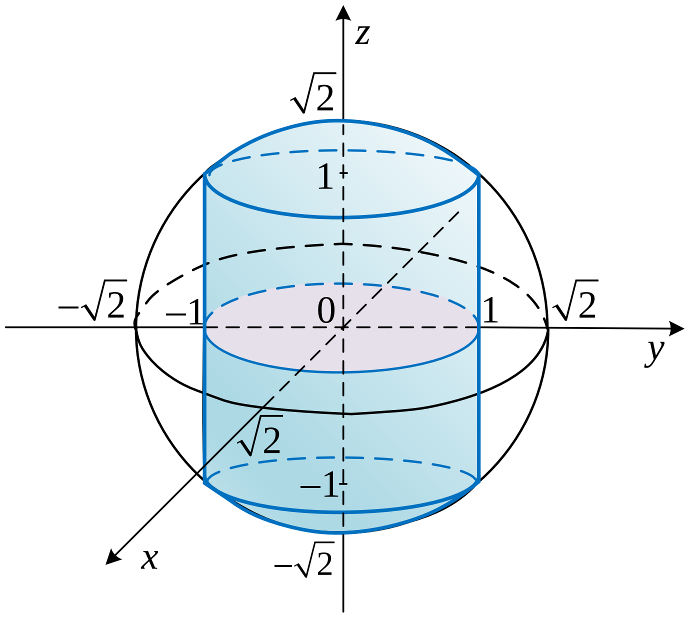


Рисунок 7.19

Справа в тому, що, запускаючи промені з початку координат (рис. 7.20), отримуємо: при $\theta \in \left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$ промені перетинають сферу, тому $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, а при $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ – $0 \leq r \leq \frac{1}{\sin\theta}$.

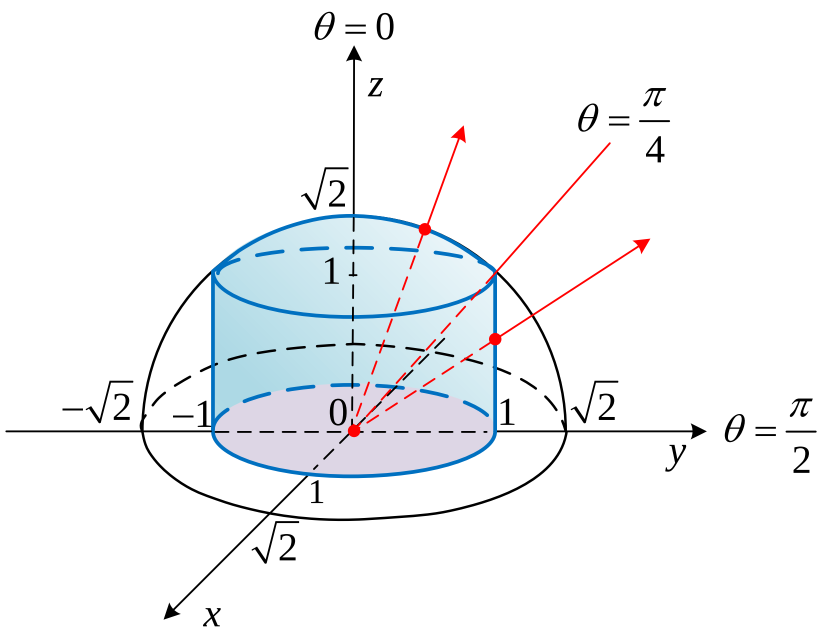


Рисунок 7.20

Річ у тому, що в цьому випадку промені перетинають циліндричну поверхню, а в сферичних координатах це має такий вид: $x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta$, звідки $r^2 \sin^2 \theta = 1$, $r = \dfrac{1}{\sin\theta}$.

Іншими словами,

$$V = \iiint\limits_{\Omega'} r^2 \sin\theta \, dr\, d\varphi \, d\theta = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr + 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} r^2 dr.$$

Тоді

$$V = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta \left(\frac{r^3}{3} \Bigg|_0^{\sqrt{2}} \right) d\theta + 4\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left(\frac{r^3}{3} \Bigg|_0^{\frac{1}{\sin\theta}} \right) d\theta =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta + \frac{4\pi}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \frac{1}{\sin^3\theta} d\theta =$$

$$= \frac{8\pi\sqrt{2}}{3} \left(-\cos\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) + \frac{4\pi}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin^2\theta} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{4\pi}{3} \left(-\mathrm{ctg}\,\theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= \frac{8\pi}{3}\left(\sqrt{2} - 1\right) + \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

Відповідь: $\dfrac{4\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$.

Зауваження. Обчислення в цьому прикладі можна було проводити і в циліндричних координатах:

$$V = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\sqrt{2-\rho^2}} dz = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \left(\sqrt{2-\rho^2} \right) d\rho = 4\pi \int_0^1 \rho \sqrt{2-\rho^2} d\rho =$$

$$= -2\pi \left(\frac{\left(2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^1 \right) = -\frac{4\pi}{3}\left(1 - 2^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{4\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

Приклад 7.13. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями

$$z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2\left(z \ge x^2 + y^2\right).$$

Розв’язання. В даному випадку тіло, об’єм якого треба знайти, обмежено параболоїдом $z = x^2 + y^2$ і сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Додаткове уточнення $\left(z \ge x^2 + y^2\right)$ вказує на те, що обирається та частина кулі $\left(x^2 + y^2 + z^2 \le 2\right)$, що знаходиться всередині параболоїда (рис. 7.21).

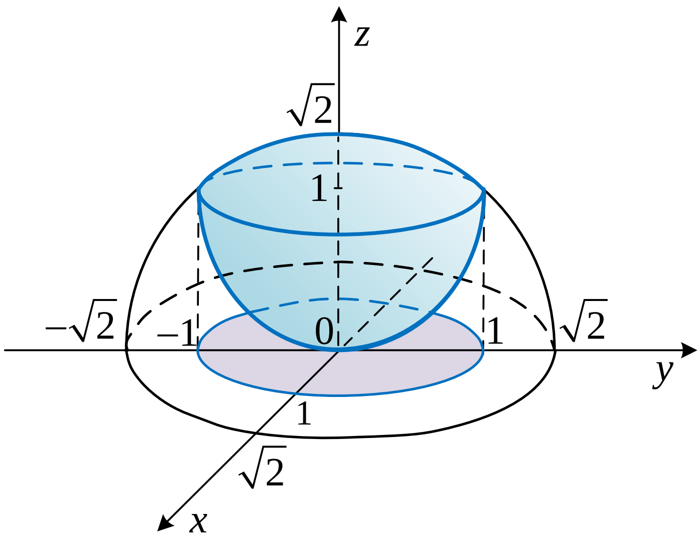


Рисунок 7.21

З рисунку 7.21 виходить, що $z_H = x^2 + y^2$, а $z_B = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$. Оскільки тіло проєктується в круг $x^2 + y^2 \le 1$, то $-\sqrt{1 - x^2} \le y \le \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \le x \le 1$.

Очевидно, $V = \iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz.$

Є можливість спростити зовнішній вид інтеграла та його обчислення, якщо провести обчислення в циліндричних координатах.

Проведемо обчислення в циліндричних координатах.

Оскільки в циліндричних координатах $x^2 + y^2 = \rho^2$, то $\rho^2 = 1$, $\rho = 1$. Крім того, $\varphi \in [0, 2\pi]$, тоді

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega'} \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} \rho\,d\rho \int\limits_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} dz = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} \rho\left(\sqrt{2-\rho^2} - \rho^2\right) d\rho =$$

$$=2\pi\int_0^1 \rho\sqrt{2-\rho^2}\,d\rho-2\pi\int_0^1 \rho^3 d\rho=2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^1\sqrt{2-\rho^2}\,d\left(2-\rho^2\right)-2\pi\left(\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=-\pi\left(\frac{\left(2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1\right)-\frac{\pi}{2}=-\frac{2\pi}{3}\left(1-2^{\frac{3}{2}}\right)-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}\left(8\sqrt{2}-7\right).$$

Відповідь: $\frac{\pi}{6}\left(8\sqrt{2}-7\right)$.

***Зауваження* 1.** Однією з поверхонь, що обмежують тіло, є сфера. Тому об'єм тіла можна було обчислити, скориставшись *сферичними координатами*.

***Зауваження* 2.** Подивимось, як обчислюється об'єм тіла в **Прикладі 7.13** в сферичних координатах.

Сфера і параболоїд перетинаються при $z=1$. Оскільки тіло проєктується в площину XOY в круг $x^2+y^2\le 1$, то $\varphi\in[0,\ 2\pi]$. Кут $\theta\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, при цьому, запускаючи промені з початку координат (рис. 7.22), одержуємо: при $\theta\in\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$ промені перетинають сферу, тому $0\le r\le\sqrt{2}$, а при $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ – $0\le r\le\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$, оскільки в даному випадку промені перетинають параболоїд, а в сферичних координатах $x^2+y^2=r^2\sin^2\theta$, звідки $r^2\sin^2\theta=r\cos\theta$, $r=\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$.

Іншими словами,

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2dr+\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}r^2dr=$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\left(\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{2}}\right)d\theta+2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\left(\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}\right)d\theta=$$

$$=\frac{2\pi}{3}\cdot 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta+\frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\frac{\cos^3\theta}{\sin^6\theta}d\theta=$$

$$=\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}\left(-\cos\theta\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}\right)+\frac{2\pi}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3\theta}{\sin^5\theta}d\theta=\left\|\begin{array}{c}\dfrac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta}=\mathrm{ctg}^3\,\theta\\ \dfrac{1}{\sin^2\theta}d\theta=-d\,\mathrm{ctg}\,\theta\end{array}\right\|=$$

$$=\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{2\pi}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{ctg}^3\theta\,d\mathrm{ctg}\,\theta=\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)-\frac{2\pi}{3}\left(\frac{\mathrm{ctg}^4\theta}{4}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$=\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\left(8\sqrt{2}-7\right).$$

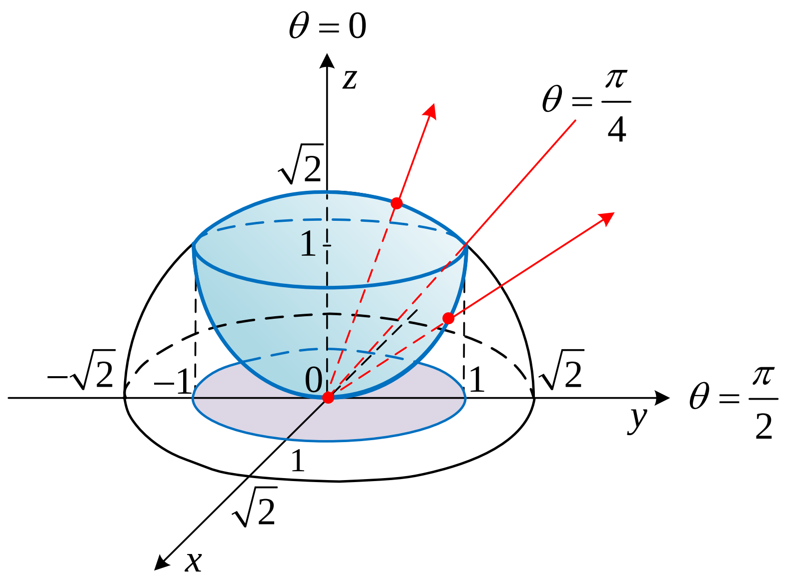


Рисунок 7.22

Сумнівна перевага в цих прикладах сферичної системи координат. Однак, слід зауважити, що рекомендацією в ***Зауваженні*** до **Прикладу 7.12** не варто нехтувати.

7.4.2. *Маса тіла*

Маса тіла, що має об'ємну щільність $\gamma=\gamma(x,y,z)$ і займає область Ω, обчислюється за формулою

$$m=\iiint\limits_{\Omega}\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Приклад 7.14. Знайти масу тіла, щільність якого $\gamma(x,y,z)=z$, що займає область Ω, обмежену конусом $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ і площиною $z=0$.

Розв'язання. Маса тіла обчислюється за формулою

$$m=\iiint\limits_{\Omega}\gamma(x,y,z)dx\,dy\,dz.$$

При цьому у даному випадку зручно перейти до циліндричних координат. Рівняння конуса в циліндричних координатах має вигляд $z=1-\rho$.

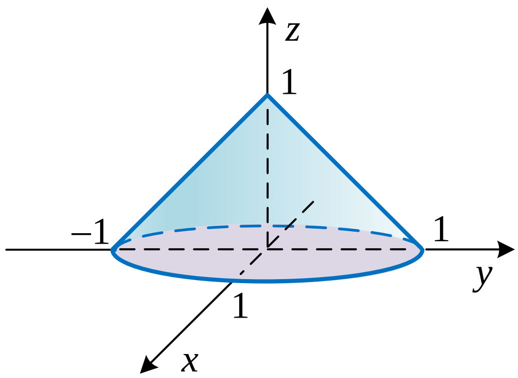


Рисунок 7.23

Як видно з рисунку 7.23, координати $\varphi,\ \rho,\ z$ в області Ω змінюються в межах $0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\rho\le 1,\ 0\le z\le 1-\rho.$

$$m=\iiint\limits_{\Omega}z\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho d\rho\int\limits_0^{1-\rho}zdz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\left(\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{1-\rho}\right)d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho(1-\rho)^2d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(\rho-2\rho^2+\rho^3\right)d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{2\rho^3}{3}+\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^1\right)d\varphi=\frac{1}{24}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\pi}{12}.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{12}$.

Приклад 7.15. Знайти масу тіла з щільністю $\gamma=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}$, що займає область Ω, обмежену поверхнями $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=4$ та $z=0.$

Розв'язання. Якщо $\gamma\left(x,y,z\right)$ – об'ємна щільність тіла, що є неперервною функцією, то маса m тіла обчислюється за формулою:

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \gamma(x,y,z)\,dxdydz.$$

На рисунку 7.24 зображено тіло, масу якого слід визначити. Зверху тіло обмежене частиною конічної поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, що міститься в циліндрі $x^2 + y^2 = 4$. Площина $z = 0$ обмежує тіло знизу. В координатній площині XOY на рис. 7.24 виділено область, в яку проєктується тіло. Це круг $x^2 + y^2 \le 4$.

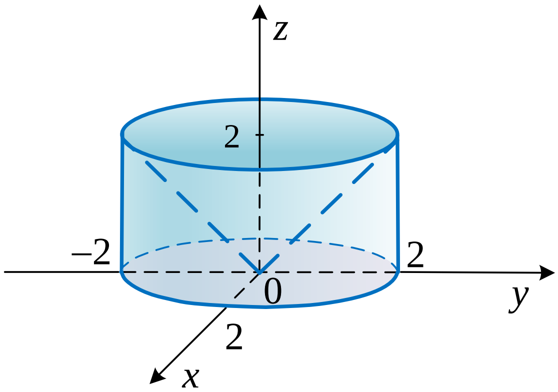


Рисунок 7.24

Оскільки $\gamma = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}$, то маса тіла

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} dxdydz.$$

Як видно з рисунку 7.24: $0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}$; $-\sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}$. Область інтегрування проєктується у відрізок $[-2, 2]$ осі OX.

Очевидно,

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} dxdydz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} dz.$$

Оскільки тіло проєктується в круг площини XOY, то є можливість спростити зовнішній вигляд інтеграла та його обчислення, якщо провести їх в циліндричних координатах.

Тоді цей інтеграл набуває такого виду:

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} \rho^4\, d\rho d\varphi dz.$$

Виконаємо розстановку меж інтегрування:

$$\iiint\limits_{\Omega'} \rho^4\, d\varphi d\rho dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho^4 d\rho \int\limits_0^{\rho} dz,$$

оскільки в циліндричних координатах $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Обчислення почнемо, як завжди, з внутрішнього інтеграла. Тоді

$$m = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho^4 d\rho \int\limits_0^{\rho} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho^5 d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left(\left. \frac{\rho^6}{6} \right|_0^2 \right) d\varphi = 2\pi \left(\frac{2^6}{6} \right) = \frac{64\pi}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{64\pi}{3}$.

7.4.3. *Статичні моменти*

Статичні моменти тіла відносно координатних площин, що має об'ємну щільність $\gamma = \gamma(x, y, z)$ і займає область Ω, обчислюються за такими формулами:

$$M_{YZ} = \iiint\limits_{\Omega} x\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad M_{ZX} = \iiint\limits_{\Omega} y\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$M_{XY} = \iiint\limits_{\Omega} z\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

7.4.4. *Координати центру ваги*

Якщо $C(x_C; y_C; z_C)$ – центр ваги тіла, то

$$x_C = \frac{M_{YZ}}{m}, \quad y_C = \frac{M_{ZX}}{m}, \quad z_C = \frac{M_{XY}}{m}.$$

7.4.5. *Моменти інерції*

Моменти інерції тіла відносно координатних площин:

$$I_{YZ} = \iiint\limits_{\Omega} x^2\, \gamma(x,y,z)\, dxdydz, \quad I_{ZX} = \iiint\limits_{\Omega} y^2\, \gamma(x,y,z)\, dxdydz,$$

$$I_{XY} = \iiint\limits_{\Omega} z^2\, \gamma(x,y,z)\, dx\,dy\,dz.$$

Моменти інерції тіла відносно осей координат:

$$I_{OX}=I_{ZX}+I_{XY}, \quad I_{OY}=I_{XY}+I_{YZ}, \quad I_{OZ}=I_{YZ}+I_{ZX}.$$

Момент інерції тіла відносно початку координат:

$$I_O=I_{YZ}+I_{ZX}+I_{XY}=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Приклад 7.16. Знайти момент інерції відносно початку координат однорідного тіла $(\gamma=1)$, що займає об'єм Ω і обмежене поверхнями $y+z=2,\ x=4,\ x,y,z\geq 0.$

Розв'язання. Момент інерції тіла з щільністю $\gamma=\gamma(x,y,z)$ відносно початку координат обчислюється за формулою:

$$I_O=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\gamma(x,y,z)dxdydz.$$

Оскільки $\gamma=1$, то $I_O=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz.$

Тіло обмежено координатними площинами $(x,y,z\geq 0)$, а також площинами $z=2-y$ і $x=4$. Проєкцією тіла в площину XOY є прямокутник, сторони якого задаються рівняннями $x=0,\ x=4,\ y=0,\ y=2$. Область інтегрування зображена на рисунку 7.25.

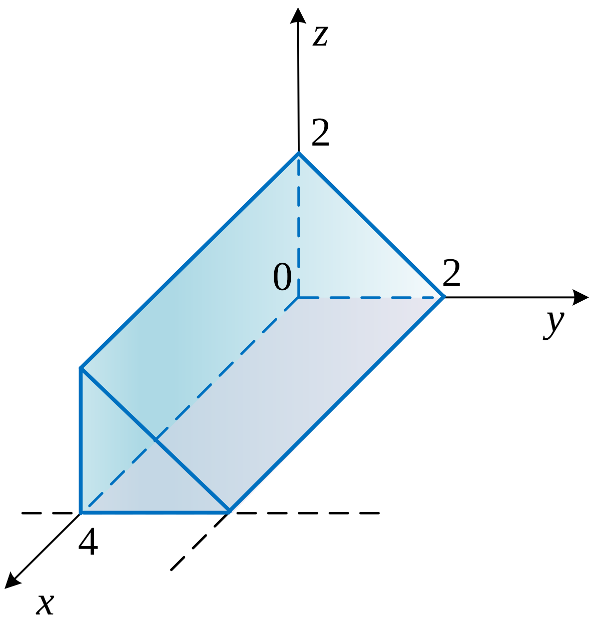


Рисунок 7.25

Тоді

$$I_O = \iiint_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz = \int_0^4 dx \int_0^2 dy \int_0^{2-y} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dz.$$

Починаємо обчислення з внутрішнього інтеграла, інтегруючи за змінною z:

$$I_O = \int_0^4 dx \int_0^2 \left(\left(x^2 + y^2\right) z + \frac{z^3}{3} \Bigg|_0^{2-y} \right) dy = \int_0^4 dx \int_0^2 \left(2x^2 + 2y^2 - x^2 y - y^3 + \frac{(2-y)^3}{3} \right) dy =$$

$$= \int_0^4 \left(2x^2 y + \frac{2y^3}{3} - x^2 \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} - \frac{(2-y)^4}{12} \Bigg|_0^2 \right) dx = \int_0^4 \left(2x^2 + \frac{8}{3} \right) dx = \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{8}{3} x \right) \Bigg|_0^4 = \frac{160}{3}.$$

Відповідь: $\frac{160}{3}$.

Контрольні запитання

1. Що називається потрійним інтегралом від заданої функції по визначеній області інтегрування?

2. Які властивості мають потрійні інтеграли?

3. В чому полягають властивості лінійності та адитивності потрійних інтегралів?

4. Сформулюйте теорему про середнє значення функції $f(x, y, z)$ в заданій області Ω.

5. За яким правилом відбувається перехід від потрійного інтеграла до повторного?

6. Сформулюйте теорему про заміну змінних у потрійному інтегралі.

7. Напишіть формули переходу в потрійному інтегралі від прямокутних до циліндричних координат. Як обчислюється якобіан переходу?

8. Напишіть формули переходу в потрійному інтегралі від прямокутних до сферичних координат. Як обчислюється якобіан переходу?

9. Як обчислюється об’єм тіла за допомогою потрійного інтеграла?

10. Які механічні застосування потрійних інтегралів?

Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

1. $\iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz$, $\Omega:\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y + z \le 2.$

2. $\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz$, $\Omega:\ x = \dfrac{1}{2},\ y \ge x,\ y \le 2x,\ z \ge 0,\ z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$

3. $\iiint\limits_{\Omega} (x + y - 5)\,dx\,dy\,dz,\ \ \Omega:\ x + y + z \le 3,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 1.$

Обчислити інтеграли **4-7** в циліндричній або сферичній системах координат:

4. $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$, $\Omega:\ x^2 + y^2 = 2z,\ \ z \le \dfrac{1}{2}.$

5. $\iiint\limits_{\Omega} (x + y)\,dx\,dy\,dz$, $\Omega:\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2},\ z \le 6 - x^2 - y^2,\ \ x \ge 0,\ y \ge 0.$

6. $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \ \Omega:\ z \ge \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

7. $\iiint\limits_{\Omega} (z + 3)\,dx\,dy\,dz,\ \Omega:\ z \le 1 + \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}y^2,\ \ z \ge \sqrt{x^2 + y^2}.$

8. Знайти координати центру ваги півкулі $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ z \ge 0,$ якщо її щільність $\gamma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

9. Знайти об’єм області $\Omega:\ y \ge -\sqrt{x},\ \ y \le 2x,\ \ x \le 2,\ \ z \ge 0,\ \ z \le 3.$

10. Знайти об’єм області $\Omega:\ z \le 2 + x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \le 4,\ \ z \ge 0.$

Відповіді

1. $\dfrac{2}{3}$. **2.** $\dfrac{7}{192}$. **3.** $-\dfrac{16}{3}$. **4.** $\dfrac{\pi}{12}$. **5.** $\dfrac{56}{5}$. **6.** $\dfrac{3\pi}{4}$. **7.** $\dfrac{8\pi}{3}$.

8. $x_C = 0,\ \ y_C = 0,\ \ z_C = \dfrac{2}{5}R.$ **9.** $12 + 4\sqrt{2}.$ **10.** $16\pi.$

8. *n*-кратні інтеграли

8.1. Поняття *n*-кратних інтегралів

Потреби сучасної науки не вичерпуються розглянутими видами інтегралів – визначених, подвійних, потрійних. З розвитком сучасних методів дослідження виникла потреба в застосуванні n-кратних інтегралів. Вони будуються аналогічно подвійним та потрійним інтегралам, і мають такі ж властивості. По аналогії з тим, як при визначенні цих інтегралів використовувались поняття довжини відрізку, площі плаской фігури або об’єму тіла у тривимірному просторі, при визначенні n-кратних інтегралів застосовується поняття об’єму n-вимірної області.

Як і у випадку подвійних і потрійних інтегралів справедливі наступні твердження:

1) функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, що неперервна в замкненій обмеженій області $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$, інтегрована в цій області;

2) функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, що обмежена в замкненій обмеженій області $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$ і неперервна всюди, крім скінченної множини точок області об’єму нуль, інтегрована в цій області.

Якщо $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$, то інтеграл

$$\int\int\underset{\Omega_n}{\dots}\int f(x_1, x_2, ..., x_n)\,dx_1 dx_2 ... dx_n$$

існує і дорівнює об’єму області Ω_n:

$$V(\Omega_n) = \int\int\underset{\Omega_n}{\dots}\int dx_1 dx_2 ... dx_n . \tag{8.1}$$

Будемо розглядати тіла, для яких об’єм існує, тобто тіла, які обмежені гладкими або кусково-гладкими поверхнями, наприклад, n-вимірна куля:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \le R^2 .$$

8.2. Приклади обчислення *n*-кратних інтегралів

Нехай в області Ω_n задана функція n змінних $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$. Відповідний n-кратний інтеграл буде мати вид: $\iint\limits_{\Omega_n}\ldots\int f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)dx_1 dx_2 ... dx_n$. У випадку неперервної підінтегральної функції він існує. Обчислення таких інтегралів виконується за тими же правилами, що і обчислення подвійних або потрійних інтегралів.

Приклад 8.1. Обчислити n-кратний інтеграл

$$\iint\limits_{\Omega_n}\ldots\int\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)dx_1 dx_2 ... dx_n, \quad \Omega_n : 0 \le x_j \le 1 \ \left(j = \overline{1, n}\right).$$

Розв'язання. Почнемо інтегрування з внутрішнього інтеграла за змінною x_n :

$$\iint\limits_{\Omega_n}\ldots\int\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)dx_1 dx_2 ... dx_n =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_{n-1}}\ldots\int dx_1 dx_2 ... dx_{n-1}\int\limits_0^1\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)dx_n =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_{n-1}}\ldots\int\left(\left(x_1^2 + x_2^2 + ...x_{n-1}^2\right)x_n + \left.\frac{x_n^3}{3}\right|_0^1\right)dx_1 dx_2 ... dx_{n-1} =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_{n-1}}\ldots\int\left(x_1^2 + x_2^2 + ...x_{n-1}^2 + \frac{1}{3}\right)dx_1 dx_2 ... dx_{n-1} =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_{n-2}}\ldots\int dx_1 dx_2 ... dx_{n-2}\int\limits_0^1\left(x_1^2 + x_2^2 + ...x_{n-1}^2 + \frac{1}{3}\right)dx_{n-1} =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_{n-2}}\ldots\int\left(\left(x_1^2 + x_2^2 + ...x_{n-2}^2\right)x_{n-1} + \frac{x_{n-1}^3}{3} + \left.\frac{x_{n-1}}{3}\right|_0^1\right)dx_1 dx_2 ... dx_{n-2} =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_{n-2}}\ldots\int dx_1 dx_2 ... dx_{n-3}\int\limits_0^1\left(x_1^2 + x_2^2 + ...x_{n-2}^2 + \frac{2}{3}\right)dx_{n-2} = ... = \frac{n}{3}.$$

Відповідь: $\frac{n}{3}$.

Розглянемо фігуру в n-вимірному просторі, яка називається *симплекс* або n-вимірний тетраедр (від лат. simplex – простий) – **геометрична фігура, що є n-вимірним узагальненням трикутника і тетраедра**.

Приклад 8.2. Обчислити об'єм 5-вимірного симплекса:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 1,\ 0 \le x_i \le 1 \ \left(i = \overline{1,5}\right).$$

Розв'язання. Побудуємо відповідний 5-вимірний інтеграл і почнемо інтегрування з внутрішнього інтеграла за змінною x_5:

$$V = \int\int\underset{\Omega_5}{\dots}\int dx_1 dx_2 \dots dx_5 = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \dots \int_0^{1-x_1-x_2-x_3-x_4} dx_5 =$$

$$= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \dots \int_0^{1-x_1-x_2-x_3} \left(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4\right) dx_4 =$$

$$= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} \left(\left(1 - x_1 - x_2 - x_3\right) x_4 - \frac{x_4^2}{2} \Bigg|_0^{1-x_1-x_2-x_3} \right) dx_3 =$$

$$= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} \left(\left(1 - x_1 - x_2 - x_3\right)^2 - \frac{\left(1 - x_1 - x_2 - x_3\right)^2}{2} \Bigg|_0^1 \right) dx_3 =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} \left(1 - x_1 - x_2 - x_3\right)^2 dx_3 =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} \frac{1}{3} \left(\left(1 - x_1 - x_2 - x_3\right)^3 \Big|_0^{1-x_1-x_2} \right) dx_2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} \left(1 - x_1 - x_2\right)^3 dx_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\left(1 - x_1 - x_2\right)^4 \Big|_0^{1-x_1} \right) dx_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \int_0^1 \left(1 - x_1\right)^4 dx_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \left(\left(1 - x_1\right)^5 \Big|_0^1 \right) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5!}.$$

Відповідь: $\frac{1}{5!}$.

Зауваження. Отриманий результат відповідає випадкам $n=2$ та $n=3$. Дійсно, при $n=2$ маємо площу рівнобедреного прямокутного трикутника з катетами a і b, довжини яких дорівнюють 1, тобто

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}=\frac{1}{2!}.$$

При $n=3$ маємо трикутну піраміду, бічні ребра якої належать осям координат, тобто, взаємно перпендикулярні, і дорівнюють 1, а вершина – в початку координат. В цьому випадку говоримо про об'єм піраміди. Очевидно,

$$V_{\text{піраміди}}=\frac{1}{3}\cdot S_{\text{осн}}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{3!}.$$

Приклад 8.3. Обчислити об'єм 5-вимірної кулі :

$$\Omega_5:\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\le R^2.$$

Розв'язання. Побудуємо відповідний 5-вимірний інтеграл:

$$V_5=\int\int\underset{\Omega_5}{\int}\int\int dx_1dx_2dx_3dx_4dx_5\,.$$

Зробимо заміну змінних: $x_1=R\lambda_1,\ x_2=R\lambda_2,\ x_3=R\lambda_3,\ x_4=R\lambda_4,\ x_5=R\lambda_5.$

Очевидно, якобіан переходу до нових координат в цьому випадку $|J|=R^5$.

Тоді маємо, що $V_5=\Lambda_5\cdot R^5$, де Λ_5 – об'єм 5-вимірної кулі радіусу 1. Відповідний інтеграл для Λ_5:

$$\Lambda_5=\int\int\underset{\Omega_5'}{\int}\int\int d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\lambda_3\,d\lambda_4\,d\lambda_5=\int_{-1}^{1}d\lambda_5\int\underset{\Omega_4'}{\iint}\int d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\lambda_3\,d\lambda_4, \tag{8.2}$$

де внутрішній інтеграл $\int\underset{\Omega_4'}{\iint}\int d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\lambda_3\,d\lambda_4$ є об'ємом 4-вимірної кулі

$$\lambda_1^{\,2}+\lambda_2^{\,2}+\lambda_3^{\,2}+\lambda_4^{\,2}\le 1-\lambda_5^{\,2}$$

радіуса $\sqrt{1-\lambda_5^2}$, і, очевидно, дорівнює $\Lambda_4\cdot\left(1-\lambda_5^{\,2}\right)^2$. Повертаючись до формули (8.2), отримаємо:

$$\Lambda_5=\int\limits_{-1}^{1}d\lambda_5\int\iiint\limits_{\Omega_4'}\int d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\lambda_3\,d\lambda_4=\int\limits_{-1}^{1}\Lambda_4\cdot\left(1-\lambda_5^{\,2}\right)^2d\lambda_5=2\Lambda_4\int\limits_0^1\left(1-\lambda_5^{\,2}\right)^2d\lambda_5. \quad (8.3)$$

Для подальших обчислень скористаємось ***інтегралами Ейлера***. Зробимо заміну в інтегралі (8.3):

$$\Lambda_5=2\Lambda_4\int\limits_0^1\left(1-\lambda_5^{\,2}\right)^2d\lambda_5=\left\|\,\lambda_5=\cos\theta\,\right\|=2\Lambda_4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta d\theta.$$

Оскільки $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$, то

$$\Lambda_n=2\Lambda_{n-1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta=2\Lambda_{n-1}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}=\Lambda_{n-1}\sqrt{\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

Скористаємось цією рекурентною формулою для знаходження Λ_5. Очевидно, $\Lambda_1=2$, тоді

$$\Lambda_2=2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)},\ \ \Lambda_3=2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)}\cdot\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}=2\pi\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)},$$

$$\Lambda_4=2\pi\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\cdot\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(3)}=2\pi\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)},$$

$$\Lambda_5=2\pi\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}\cdot\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}=2\pi^2\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}=2\pi^2\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\frac{15\sqrt{\pi}}{8}}=\frac{8\pi^2}{15},$$

а шуканий об’єм $V_5=\frac{8\pi^2}{15}\cdot R^5.$

Відповідь: $V_5=\frac{8\pi^2}{15}\cdot R^5.$

9*. Невласні кратні інтеграли

9.1. Основні означення

Означення. Кратні інтеграли у випадку, коли область інтегрування не є обмеженою або підінтегральна функція має розриви в області інтегрування, є *невласними кратними інтегралами*.

На відміну від одновимірного випадку для невласних інтегралів у просторі $\mathbb{R}^n$ збіжність невласних кратних інтегралів завжди є абсолютною. При обчисленні кратних невласних інтегралів можна користуватися формулою зведення кратного інтеграла до повторного за умови збіжності повторного, а також формулою заміни змінних.

Приклад 9.1. Дослідити на збіжність $\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$.

Розв'язання. Перейдемо до повторного інтеграла:

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} = \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty \frac{dy}{\left(1+x^2\right)+y^2} = \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} \Bigg|_0^\infty \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(\lim_{y\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} - \operatorname{arctg} 0 \right) \right) dx = \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\pi}{2} \underbrace{\ln\left| x + \sqrt{1+x^2} \right| \Big|_0^\infty}_{\to\infty} = \infty.$$

Відповідь: ∞, інтеграл розбіжний.

Приклад 9.2. Обчислити $\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{dxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$.

Розв'язання. При обчисленні інтеграла перейдемо до полярних координат. Маємо:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{dxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}=\int_0^{\infty}dx\int_0^{\infty}\frac{dy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\infty}\frac{\rho d\rho}{\left(1+\rho^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{d\left(1+\rho^2\right)}{\left(1+\rho^2\right)^2}=-\frac{\pi}{4}\cdot\left(1+\rho^2\right)^{-1}\Big|_0^{\infty}=-\frac{\pi}{4}\cdot(0-1)=\frac{\pi}{4}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4}$, інтеграл збіжний.

Приклад 9.3. Обчислити $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}xye^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$.

Розв'язання. Перейдемо до повторного інтеграла:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}xye^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\int_0^{\infty}xdx\int_0^{\infty}ye^{-\left(x^2+y^2\right)}dy=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}xdx\int_0^{\infty}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dy^2=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}x\left(-e^{-\left(x^2+y^2\right)}\Big|_0^{\infty}\right)dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}x\left(0-e^{-x^2}\right)dx=\frac{1}{4}\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx^2=-\frac{1}{4}e^{-x^2}\Big|_0^{\infty}=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $\frac{1}{4}$, інтеграл збіжний.

9.2. Деякі застосування невласних кратних інтегралів

За допомогою невласних подвійних інтегралів можна обчислити відомий *інтеграл Пуассона* $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Приклад 9.4. Обчислити інтеграл Пуассона $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$.

Розв'язання. Розглянемо невласний інтеграл $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$. При обчисленні перейдемо в ньому до полярних координат:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\infty}e^{-\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\infty}e^{-\rho^2}d\left(-\rho^2\right)=-\frac{\pi}{4}\left(e^{-\rho^2}\Big|_0^{\infty}\right)=-\frac{\pi}{4}(0-1)=\frac{\pi}{4}.$$

Оскільки $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx \int\limits_0^\infty e^{-y^2}dy = \left(\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2$, то інтеграл Пуассона

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Відповідь: $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Приклад 9.5. Знайти об'єм області (рис. 9.1), що обмежена поверхнею $z = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ і координатною площиною XOY.

Розв'язання. Об'єм області (рис. 9.1) знайдемо за формулою

$$V = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f\left(x,y\right)d\sigma.$$

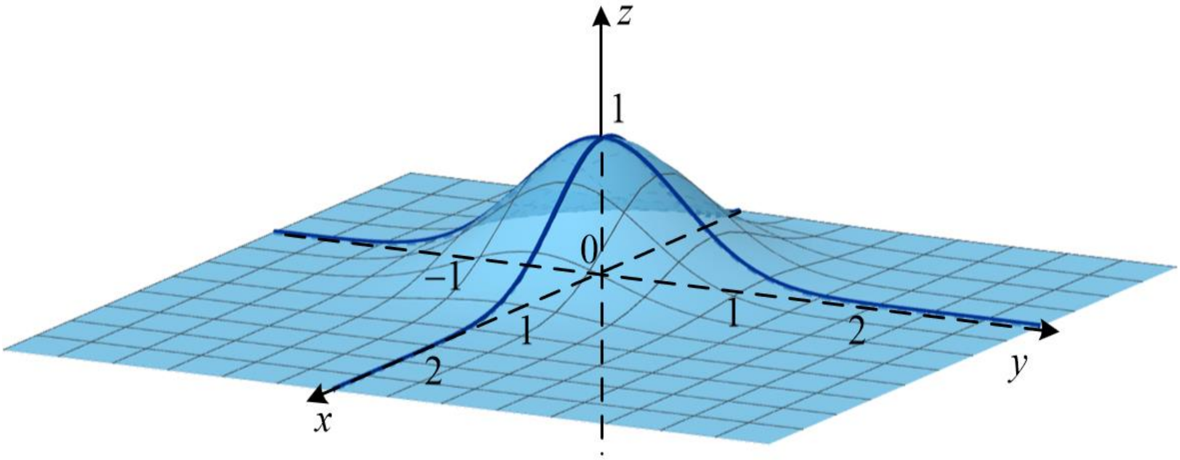


Рисунок 9.1

Знову перейдемо до полярних координат:

$$V = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}d\sigma = \left\| \begin{array}{c} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ d\sigma = \rho d\rho d\varphi \end{array} \right\| = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^\infty e^{-\rho^2}\rho d\rho =$$

$$= 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^\infty e^{-\rho^2}d\left(-\rho^2\right) = -\pi\left(e^{-\rho^2}\Big|_0^\infty\right) = -\pi\left(0-1\right) = \pi.$$

Відповідь: π.

Розділ 3. Криволінійні та поверхневі інтеграли

10. Криволінійні інтеграли

10.1. Криволінійні інтеграли першого роду

10.1.1. *Основні означення*

Означення. Нехай AB – дуга гладкої або кусково-гладкої кривої L; $f(x, y)$ – функція, яка визначена і неперервна на цій кривій.

Розіб'ємо дугу AB довільно на n частин точками $A_0 = A, A_1, A_2, ..., A_n = B$ (рис. 10.1).

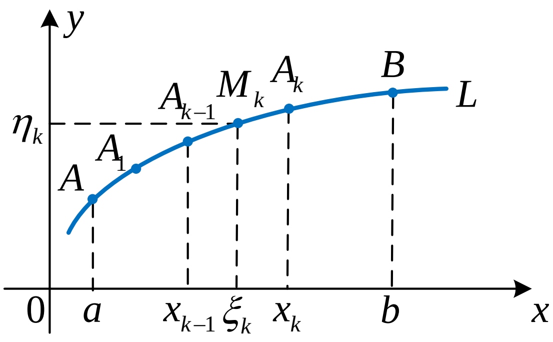


Рисунок 10.1

На кожній елементарній дузі $A_{k-1}A_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$ виберемо довільну точку $M_k(\xi_k; \eta_k)$. Позначимо довжину елементарної дуги через Δl_k і складемо суму:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta l_k . \tag{10.1}$$

Сума (10.1) називається *інтегральною сумою.*

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми (10.1) за умови $\max\limits_k \Delta l_k \to 0$, що не залежить від способу розбиття кривої на елементарні дуги і вибору точок в них, то вона називається *криволінійним інтегралом першого роду функції* $f(x, y)$ вздовж дуги AB кривої L і позначається як $\int\limits_{AB} f(x, y)dl$, тобто

$$\lim_{\max_k \Delta l_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta l_k = \int_{AB} f(x, y)\,dl . \qquad (10.2)$$

З означення криволінійного інтеграла першого роду випливає, що

$$\int_{AB} f(x, y)\,dl = \int_{BA} f(x, y)\,dl .$$

Аналогічно, вводиться поняття криволінійного інтеграла першого роду функції $f(x, y, z)$ вздовж дуги AB *просторової кривої* L:

$$\int_{AB} f(x, y, z)\,dl . \qquad (10.3)$$

Якщо AB – дуга гладкої або кусково-гладкої кривої L, що задана параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$; $f(x, y, z)$ – визначена й неперервна на цій кривій функція, то криволінійний інтеграл (10.3) обчислюється за формулою

$$\boxed{\int_{L} f(x, y, z)\,dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt.} \qquad (10.4)$$

Аналогічно для криволінійного інтеграла першого роду вздовж дуги AB плаской кривої L, що задана параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$; функція $f(x, y)$ – визначена і неперервна на цій кривій, то

$$\boxed{\int_{AB} f(x, y)\,dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt.} \qquad (10.5)$$

Якщо пласка крива L задана рівнянням $y = y(x), x \in [a, b]$, то

$$\boxed{\int_{AB} f(x, y)\,dl = \int_{a}^{b} f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx.} \qquad (10.6)$$

З формул (10.4) - (10.6) випливає, що криволінійні інтеграли першого роду мають властивості, що аналогічні властивостям визначених інтегралів.

10.1.2. *Властивості криволінійних інтегралів першого роду*

1. Лінійність. Якщо функції $f_1(x, y, z)$ й $f_2(x, y, z)$ неперервні в деякій області Ω, яка містить гладку або кусково-гладку криву L, α і β – довільні константи, то для дуги AB кривої L

$$\int_{AB} \left(\alpha f_1(x, y, z) + \beta f_2(x, y, z)\right) dl = \alpha \int_{AB} f_1(x, y, z) dl + \beta \int_{AB} f_2(x, y, z) dl.$$

2. Адитивність. Якщо дуга AB кривої L розбита на частини L_1 й L_2 таким чином, що $AB = L_1 \cup L_2$, то

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{L_1} f(x, y, z) dl + \int_{L_2} f(x, y, z) dl.$$

3. Інтегрування нерівностей. Якщо функції $f_1(x, y, z)$ й $f_2(x, y, z)$ неперервні на кривій L і $f_1(x, y, z) \ge f_2(x, y, z)$ на цій лінії, то для дуги AB кривої L

$$\int_{AB} f_1(x, y, z) dl \ge \int_{AB} f_2(x, y, z) dl.$$

4. Оцінка значення криволінійного інтеграла. Якщо на дузі AB кривої L $m \le f(x, y, z) \le M$, то

$$m \cdot l_{AB} \le \int_{AB} f(x, y, z) dl \le M \cdot l_{AB},$$

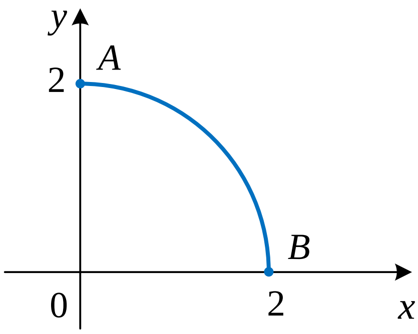
де l_{AB} – довжина дуги AB.

5. Теорема про середнє значення функції. Якщо l_{AB} – довжина дуги AB лінії L, то на дузі AB знайдеться принаймні одна така точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, в якій

$$\boxed{f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{l_{AB}} \int_{AB} f(x, y, z) dl.}$$

Приклад 10.1. Обчислити $\int_{AB} (2x - y) dl$, де AB – дуга кола $x^2 + y^2 = 4$, точки $A(0; 2)$, $B(2; 0)$.

Розв'язання. Лінія інтегрування може бути задана параметричними рівняннями $x(t)=2\cos t$, $y(t)=2\sin t$, і на дузі AB: $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ (див. рис.).



Для обчислення інтеграла скористаємось формулою (10.5):

$$\int\limits_{AB}(2x-y)\,dl=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos t-2\sin t)\cdot\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}\,dt=$$

$$=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos t-\sin t)dt=4(2\sin t+\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=4\left[\left(2\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)-(2\sin 0+\cos 0)\right]=4(2-1)=4.$$

Відповідь: 4.

Приклад 10.2. Обчислити $\displaystyle\int\limits_{AB}\frac{3y-2}{4x^2+1}dl$, де AB − відрізок прямої $y=2x+1$ між точками $A\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ й $B\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Розв'язання. Оскільки лінія інтегрування задана рівнянням $y=2x+1$, то для обчислення інтеграла скористаємось формулою (10.6):

$$\int\limits_{AB}\frac{3y-2}{4x^2+1}dl=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{6x+1}{4x^2+1}\cdot\sqrt{1+2^2}dx=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{6\sqrt{5}x}{4x^2+1}dx+\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{5}}{4x^2+1}dx=$$

$$=2\sqrt{5}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{4x^2+1}=2\sqrt{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2x\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right)=2\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}1-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}0\right)=\frac{\pi\sqrt{5}}{4},$$

оскільки інтеграл $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{6\sqrt{5}x}{4x^2+1}dx = 0$ як інтеграл від непарної функції за симетричним проміжком.

Відповідь: $\frac{\pi\sqrt{5}}{4}$.

Приклад 10.3. Обчислити $\int\limits_{AB} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}dl$, де AB – дуга лінії L:

$$x(t) = e^{-t}\cos t,\ y(t) = e^{-t}\sin t,\ z(t) = \sqrt{5}e^{-t},\ t_A = 0,\ t_B = 2\pi.$$

Розв'язання. Для обчислення інтеграла скористаємось формулою (10.4), попередньо спростивши вираз для dl:

$$dl = \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2 + \left[z'(t)\right]^2}dt =$$

$$= \sqrt{\left(-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t\right)^2 + \left(-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t\right)^2 + \left(-\sqrt{5}e^{-t}\right)^2}dt =$$

$$= e^{-t}\cdot\sqrt{2\sin^2 t + 2\cos^2 t + 5}\,dt = \sqrt{7}\,e^{-t}dt.$$

Тоді

$$\int\limits_{AB} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}dl = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sqrt{5}\cdot e^{-t}}{\sqrt{e^{-2t}\cos^2 t + e^{-2t}\sin^2 t}}\cdot\sqrt{7}\,e^{-t}dt = \sqrt{35}\int\limits_0^{2\pi} e^{-t}dt =$$

$$= -\sqrt{35}\,e^{-t}\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{35}\left(1 - e^{-2\pi}\right).$$

Відповідь: $\sqrt{35}\left(1 - e^{-2\pi}\right)$.

Приклад 10.4. Обчислити $\int\limits_{AB} \frac{x+y+z}{y^2+1}dl$, де AB – відрізок прямої, що проходить через точки $A(3;-1;4)$ й $B(4;0;2)$.

Розв'язання. Скористаємось канонічними рівняннями прямої, що проходить через дві точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Тоді

$$\frac{x-3}{4-3}=\frac{y+1}{0+1}=\frac{z-4}{2-4} \text{ або } \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-4}{-2}.$$

Для обчислення інтеграла за формулою (10.4) перейдемо до параметричних рівнянь прямої:

$$x(t)=t+3,\ y(t)=t-1,\ z(t)=-2t+4.$$

Очевидно, точці A відповідає значення параметру $t_A=0$, точці B: $t_B=1$, тобто $t\in[0,1]$. Тоді

$$\int\limits_{AB}\frac{x+y+z}{y^2+1}dl=\int\limits_0^1\frac{(t+3)+(t-1)+(-2t+4)}{(t-1)^2+1}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}dt=6\sqrt{6}\int\limits_0^1\frac{dt}{(t-1)^2+1}=$$

$$=6\sqrt{6}\left(\operatorname{arctg}(t-1)\Big|_0^1\right)=6\sqrt{6}\left(\operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}(-1)\right)=\frac{3\sqrt{6}}{2}\pi.$$

Відповідь: $\frac{3\sqrt{6}}{2}\pi$.

10.1.3. *Застосування криволінійних інтегралів першого роду*

1. ***Довжина дуги*** AB кривої L обчислюється за формулою:

$$l_{AB}=\int\limits_{AB}dl.$$

2. Нехай $\gamma(x,y,z)$ – лінійна щільність матеріальної кривої L, m_{AB} – ***маса її дуги*** AB, тоді

$$m_{AB}=\int\limits_{AB}\gamma(x,y,z)dl.$$

3. Нехай точка $C(x_C;y_C;z_C)$ – ***центр ваги*** дуги AB матеріальної кривої L, тоді

$$x_C = \frac{\int\limits_{AB} x\cdot\gamma(x,y,z)\,dl}{m_{AB}},\quad y_C = \frac{\int\limits_{AB} y\cdot\gamma(x,y,z)\,dl}{m_{AB}},\quad z_C = \frac{\int\limits_{AB} z\cdot\gamma(x,y,z)\,dl}{m_{AB}}.$$

Зауваження. Якщо маса розподіляється рівномірно уздовж кривої, то γ – стала величина.

Приклад 10.5. Знайти довжину гвинтової лінії, яка задана параметричними рівняннями: $x(t)=3\cos t$, $y(t)=3\sin t$, $z(t)=3t$, $t\in[0,2\pi]$.

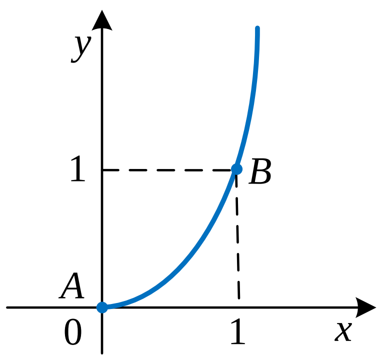
Розв'язання. Відповідний інтеграл обчислимо за формулою (10.4):

$$l_{AB}=\int\limits_{AB}dl=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(-3\sin t)^2+(3\cos t)^2+3^2}\,dt=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{9+9}\,dt=3\sqrt{2}\cdot 2\pi=6\sqrt{2}\pi.$$

Відповідь: $6\sqrt{2}\pi$.

Приклад 10.6. Знайти масу дуги AB кубічної параболи $y=x^3$ між точками A й B з абсцисами $x_A=0$, $x_B=1$, якщо лінійна щільність $\gamma(x,y)=y$.

Розв'язання.



В даному випадку $m_{AB}=\int\limits_{AB}\gamma(x,y)\,dl=\int\limits_{AB}y\,dl$.

За формулою (10.6) маємо:

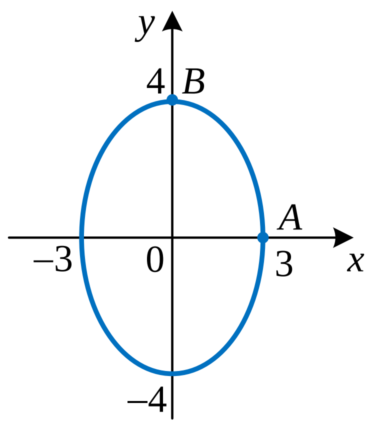
$$\int\limits_{AB} ydl = \int\limits_0^1 x^3 \cdot \sqrt{1+\left(3x^2\right)^2}dx = \int\limits_0^1 x^3 \cdot \sqrt{1+9x^4}dx = \frac{1}{36}\int\limits_0^1 \left(1+9x^4\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1+9x^4\right) =$$

$$= \frac{1}{36} \cdot \frac{\left(1+9x^4\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{54}\left[10^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{1}{54}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

Відповідь: $\frac{1}{54}\left(10\sqrt{10}-1\right)$.

Приклад 10.7. Знайти масу дуги AB еліпса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ між точками $A(3;0)$ й $B(0;4)$, якщо лінійна щільність $\gamma(x,y)=\sqrt{\left(\frac{3y}{4}\right)^2+\left(\frac{4x}{3}\right)^2}$.

Розв'язання.



Для знаходження маси дуги застосуємо формулу:

$$m_{AB} = \int\limits_{AB} \gamma(x,y)dl.$$

Відома параметрична форма завдання еліпса: $x(t)=3\cos t$, $y(t)=4\sin t$. Обчислимо довжину найменшої з двох дуг, на які поділяється задана замкнена крива точками $A(3;0)$ й $B(0;4)$, тоді $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Знайдемо диференціал дуги dl:

$$dl = \sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}dt = \sqrt{\left(-3\sin t\right)^2+\left(4\cos t\right)^2}dt = \sqrt{9\sin^2 t+16\cos^2 t}dt.$$

Щільність кривої при параметричному завданні еліпса:

$$\gamma(x, y) = \sqrt{\left(\frac{3y}{4}\right)^2 + \left(\frac{4x}{3}\right)^2} = \sqrt{9\sin^2 t + 16\cos^2 t}.$$

Тоді маса дуги AB еліпса

$$m_{AB} = \int\limits_{AB} \gamma(x, y)\,dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\sin^2 t + 16\cos^2 t} \cdot \sqrt{9\sin^2 t + 16\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(9\sin^2 t + 16\cos^2 t\right) dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(9 + 7\cos^2 t\right) dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(9 + \frac{7}{2}(1 + \cos 2t)\right) dt =$$

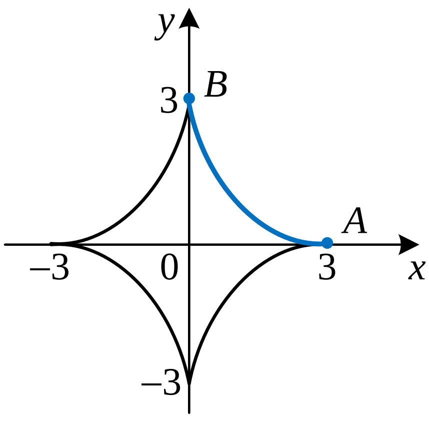
$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{25}{2} + \frac{7}{2}\cos 2t\right) dt = \left(\frac{25}{2}t + \frac{7}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{25\pi}{4},$$

тому що $\sin 0 = \sin \pi = 0$.

Відповідь: $m_{AB} = \dfrac{25\pi}{4}$.

Приклад 10.8. Знайти абсцису центру ваги дуги астроїди, яка задана параметричними рівняннями $x(t) = 3\cos^3 t$, $y(t) = 3\sin^3 t$, $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, якщо її лінійна щільність $\gamma(x, y) = 1$.

Розв'язання.



Для обчислення координати x_C центру ваги дуги лінії скористаємось формулою: $x_C = \dfrac{\int\limits_{AB} x \cdot \gamma(x, y)\,dl}{m_{AB}}$, де $m_{AB} = \int\limits_{AB} \gamma(x, y)\,dl$ – маса дуги AB.

Для маси дуги астроїди маємо:

$$m_{AB}=\int\limits_{AB}\gamma(x,y)\,dl=3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(-3\cos^2 t\cdot\sin t\right)^2+\left(3\sin^2 t\cdot\cos t\right)^2}\,dt=$$

$$=9\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos t\cdot\sin t\right|dt=9\left(\frac{\sin^2 t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{2},\text{ тому що }\cos t\cdot\sin t\ge 0\text{ при }t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Аналогічно,

$$\int\limits_{AB}x\cdot\gamma(x,y)\,dl=\int\limits_{AB}x\,dl=9\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\cdot\sqrt{\left(-3\cos^2 t\cdot\sin t\right)^2+\left(3\sin^2 t\cdot\cos t\right)^2}\,dt=$$

$$=27\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\cdot\left|\cos t\cdot\sin t\right|dt=27\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\cdot\sin t\,dt=-27\left(\frac{\cos^5 t}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{27}{5}.$$

Остаточно одержуємо

$$x_C=\frac{\int\limits_{AB}x\cdot\gamma(x,y)\,dl}{m_{AB}}=\frac{27\cdot 2}{5\cdot 9}=\frac{6}{5}.$$

Відповідь: $x_C=\dfrac{6}{5}$.

Приклад 10.9. Оцінити значення криволінійного інтеграла $\displaystyle\int\limits_{AB}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dl$ по дузі AB чверті кола $x^2+y^2=4$, де $A(2;0)$, $B(0;2)$.

Розв'язання. Для оцінки інтеграла скористаємось відповідною його властивістю: якщо на дузі AB кривої L $\;m\le f(x,y)\le M$, то

$$m\cdot l_{AB}\le\int\limits_{AB}f(x,y)\,dl\le M\cdot l_{AB},$$

де l_{AB} – довжина дуги AB.

За умовами, дуга AB – чверть кола радіуса $R=2$, тому $l_{AB}=\dfrac{2\pi R}{4}\Big|_{R=2}=\pi$.

Той же результат одержимо, якщо скористаємось застосуванням криволінійного інтеграла першого роду для обчислення довжини дуги кривої:

$$l_{AB} = \int\limits_{AB} dl \, .$$

Для цього скористаємось параметричним завданням кола радіуса $R = 2$: $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t$.

Якщо для дуги AB $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то $l_{AB} = \int\limits_{AB} dl = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2dt = \pi$ (див. **Приклад 10.1**).

Для знаходження найменшого (m) й найбільшого (M) значень функції $f(x, y)$ на дузі кола також скористаємось формулами параметричного завдання лінії інтегрування. У цьому випадку $f(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ прийме вигляд: $\overline{f}(t) = \frac{R\cos t + R\sin t}{R} = \cos t + \sin t$.

Дослідимо отриману функцію $\overline{f}(t) = \cos t + \sin t$ на найменше й найбільше значення за умови, що $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Її стаціонарні точки знайдемо з рівняння: $\left(\overline{f}(t)\right)' = 0$, тобто $(\cos t + \sin t)' = -\sin t + \cos t = 0$. На відрізку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ є лише одна точка, в якій $\left(\overline{f}(t)\right)' = 0$: $t = \frac{\pi}{4}$. Знайдемо значення функції $\overline{f}(t)$ в цій точці й на кінцях відрізка: $\overline{f}(0) = \overline{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ \overline{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$. Отже, $m = \overline{f}(0) = \overline{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ M = \overline{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

Остаточно маємо:

$$\pi \le \int\limits_{AB} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dl \le \pi\sqrt{2} \, .$$

Відповідь: $\pi \le \int\limits_{AB} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dl \le \pi\sqrt{2}$.

Приклад 10.10. Знайти середнє значення функції $f(x, y) = xy$ на дузі астроїди $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Розв'язання. Для знаходження середнього значення функції $f(x, y)$ на дузі лінії скористаємось відповідною властивістю криволінійного інтеграла: якщо l_{AB} – довжина дуги AB лінії L, то на дузі AB знайдеться принаймні одна така точка $P_0(x_0; y_0)$, в якій

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{l_{AB}} \int\limits_{AB} f(x, y)\, dl .$$

Диференціал дуги астроїди $dl = 3a\sin t\cos t\, dt$ за умови, що $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (див. **Приклад 10.8**).

Тоді $l_{AB} = \int\limits_{AB} dl = 3a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\, dt = 3a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, d(\sin t) = 3a\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}.$

Для середнього значення функції $f(x, y) = xy$ на дузі астроїди маємо:

$$f_{\text{сер}} = \frac{1}{l_{AB}} \int\limits_{AB} f(x, y)\, dl = \frac{2}{3a} \int\limits_{AB} xy dl = \frac{2}{3a} \cdot 3a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^4 t\, dt =$$

$$= 2a^2 \cdot \frac{1}{16} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 2t dt = \frac{a^2}{8} \cdot \frac{1}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)^2\, dt = \frac{a^2}{32} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\cos 4t + \cos^2 4t\right) dt =$$

$$= \frac{a^2}{32} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} - 2\cos 4t + \frac{1}{2}\cos 8t\right) dt = \frac{a^2}{32}\left(\frac{3}{2}t - \frac{2}{4}\sin 4t + \frac{1}{16}\sin 8t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi a^2}{128}.$$

Відповідь: $f_{\text{сер}} = \frac{3\pi a^2}{128}$.

10.2. Криволінійні інтеграли другого роду

10.2.1. *Основні означення*

Нехай на дузі AB орієнтованої кривої L визначена вектор-функція

$$\vec{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)\},$$

проєкції якої – функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ і $R(x,y,z)$ − неперервні на AB.

Інтеграл виду

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

називається *криволінійним інтегралом другого роду* або *криволінійним інтегралом по координатах від вектор-функції* $\vec{F}(x,y,z)$ *по дузі* AB орієнтованої кривої L.

З означення випливає, що при зміні напряму інтегрування криволінійний інтеграл другого роду змінює свій знак, тобто

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$
$$=-\int_{BA} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz.$$

Крім того,

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$
$$=\int_{AB} P(x,y,z)dx+\int_{AB} Q(x,y,z)dy+\int_{AB} R(x,y,z)dz.$$

Якщо AB − дуга плаской орієнтованої кривої L, то криволінійний інтеграл другого роду від вектор-функції $\vec{F}(x,y)=\{P(x,y);Q(x,y)\}$ має такий вигляд:

$$\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Визначений інтеграл є окремим випадком криволінійних інтегралів, в яких лінією інтегрування є відрізок осі координат.

Найпростіші властивості визначеного інтеграла легко переносяться на розглянуті криволінійні інтеграли.

10.2.2. *Фізичний смисл криволінійних інтегралів другого роду*

Розглянемо пласке стаціонарне, тобто незалежне від часу, силове поле в області D, що належить площині XOY. Силу $\vec{F}(x, y)$ задаємо її проєкціями на осі координат: $\vec{F}(x, y) = \{P(x, y); Q(x, y)\}$.

Під дією сили поля деяка матеріальна точка, що знаходиться в області D, рухається із положення A в положення B уздовж дуги AB (рис. 10.2).

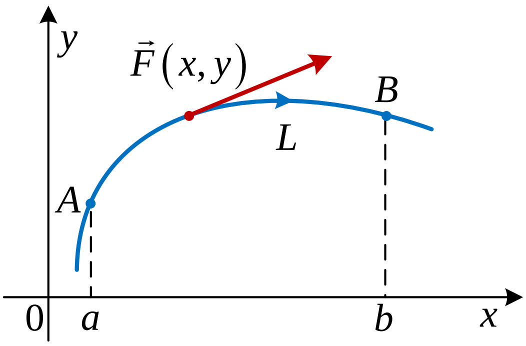


Рисунок 10.2

Робота W, яка здійснюється силою поля $\vec{F}(x, y)$ при цьому переміщенні, виражається криволінійним інтегралом:

$$W = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (10.7)$$

10.2.3. *Обчислення криволінійних інтегралів другого роду*

Обчислення криволінійних інтегралів другого роду зводиться до обчислення визначених інтегралів.

1. Якщо функції $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ неперервні на кривій L, що задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, і функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ неперервні разом зі своїми похідними x'_t, y'_t і z'_t, то

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ = \int\limits_{t_A}^{t_B} \Big(P\big[x(t), y(t), z(t)\big] \cdot x'_t + Q\big[x(t), y(t), z(t)\big] \cdot y'_t + \\ + R\big[x(t), y(t), z(t)\big] \cdot z'_t\Big)dt. \qquad (10.8)$$

2. Якщо функції $P(x, y)$ й $Q(x, y)$ неперервні на кривій L, яка задана рівнянням $y = y(x)$, і $y(x)$, $y'(x)$ – також неперервні, то

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{x_A}^{x_B} \Big(P\big(x, y(x)\big) + Q\big(x, y(x)\big) \cdot y'\Big)dx. \qquad (10.9)$$

Приклад 10.11. Знайти роботу сили $\vec{F}(x, y) = \{-x^2 - y^2; 4x\}$ при переміщенні матеріальної точки уздовж лінії $L: y = 2x^2$ із точки $A(0; 0)$ в точку $B(2; 8)$.

Розв'язання. Робота W, яка здійснюється силою $\vec{F}(x, y)$, виражається криволінійним інтегралом (10.7):

$$W = \int\limits_{AB} (-x^2 - y^2)dx + 4xdy.$$

Інтеграл обчислимо за формулою (10.9). На лінії $L: y = 2x^2$, $y' = 4x$, $x_A = 0$, $x_B = 2$. Отже,

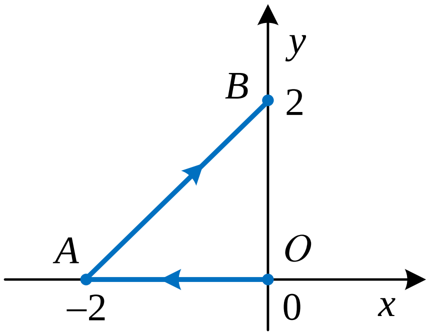
$$W = \int\limits_0^2 \Big(\big(-x^2 - (2x^2)^2\big) + 4x \cdot 4x\Big)dx = \int\limits_0^2 (15x^2 - 4x^4)dx =$$

$$=\left(15\cdot\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=5\cdot8-4\cdot\frac{32}{5}=\frac{72}{5}.$$

Відповідь: $W=\dfrac{72}{5}$.

Приклад 10.12. Обчислити $\int\limits_L (2x-y)dx+(3x+4y)dy$, де L – ламана *OAB*, точки $O(0;0)$, $A(-2;0)$, $B(0;2)$.

Розв'язання.



Оскільки $\int\limits_{OAB}=\int\limits_{OA}+\int\limits_{AB}$, то обчислення проведемо по кожній частині контуру окремо:

1) $$\int\limits_{OA}(2x-y)dx+(3x+4y)dy=\left\|\begin{matrix} OA:\ y=0,\ dy=0 \\ x_O=0,\ \ x_A=-2 \end{matrix}\right\|=\int\limits_0^{-2}2xdx=x^2\Big|_0^{-2}=4;$$

2) $$\int\limits_{AB}(2x-y)dx+(3x+4y)dy=\left\|\begin{matrix} AB:\ y=x+2,\ dy=dx \\ x_A=-2,\ \ x_B=0 \end{matrix}\right\|=$$

$$=\int\limits_{-2}^{0}\left[(2x-(x+2))+(3x+4(x+2))\right]dx=$$

$$=\int\limits_{-2}^{0}(8x+6)dx=(4x^2+6x)\Big|_{-2}^{0}=-16+12=-4.$$

Отже, $\int\limits_L(2x-y)dx+(3x+4y)dy=4-4=0$.

Відповідь: 0.

Приклад 10.13. Обчислити $\int\limits_{AB} xydx + 3x^2dy + yzdz$, де AB − дуга кола, що задане рівняннями $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $3y + 4x = 0$ від точки $A(3; -4; 0)$ до точки $B(0; 0; 5)$.

Розв'язання. Задамо дугу кола AB параметричними рівняннями. Нехай $x = t$, тоді $y = -\frac{4}{3}t$, і, оскільки $z \ge 0$ на дузі AB, то

$$z = \sqrt{25 - t^2 - \left(-\frac{4}{3}t\right)^2} = \frac{5}{3}\sqrt{9 - t^2}.$$

Обчислимо відповідні похідні: $x'_t = 1,\ y'_t = -\frac{4}{3},\ z'_t = \frac{5}{3} \cdot \frac{-t}{\sqrt{9 - t^2}}$, тоді за формулою (10.5) одержимо:

$$\int\limits_{AB} xydx + 3x^2dy + yzdz =$$

$$= \int\limits_3^0 \left[t \cdot \left(-\frac{4}{3}t\right) + 3t^2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{4}{3}t\right) \cdot \frac{5}{3}\sqrt{9 - t^2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{-t}{\sqrt{9 - t^2}} \right] dt =$$

$$= \int\limits_3^0 \left(-\frac{4}{3}t^2 - 4t^2 + \frac{100}{27}t^2\right) dt = -\frac{44}{27}\int\limits_3^0 t^2 dt = -\frac{44}{27} \cdot \left.\frac{t^3}{3}\right|_3^0 = \frac{44}{27} \cdot \frac{27}{3} = \frac{44}{3}.$$

Відповідь: $\frac{44}{3}$.

10.2.4. *Криволінійні інтеграли по замкненому контуру*

Особливістю замкненого контуру є те, що початкова й кінцева точки лінії інтегрування збігаються, що не задає напряму обходу контуру інтегрування L (рис. 10.3).

Якщо замкнений контур L лежить у площині, то *додатним напрямом обходу* простого (без самоперетинань) замкненого контуру L будемо називати той напрям, при якому частина D площини, яка обмежена контуром, виявляється ліворуч.

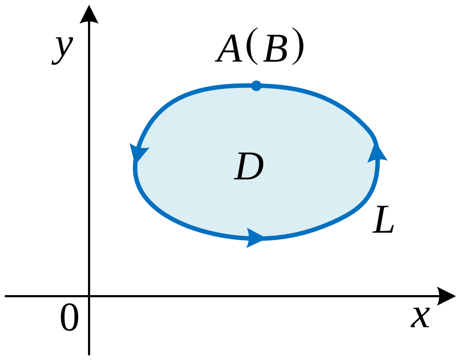


Рисунок 10.3

Позначення:

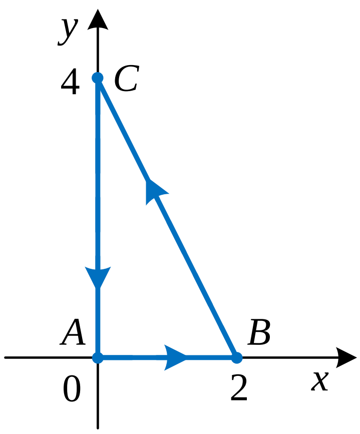
$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (10.10)$$

У випадку просторової замкненої кривої напрям обходу контуру вказується окремо.

Для обчислення інтегралів (10.10) можуть бути застосовані формули (10.8) і (10.9).

Приклад 10.14. Обчислити $\oint_L (x^3 - 3y)dx + (4x + y)dy$, де L – контур ΔABC з вершинами $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(0;4)$, який пробігається у додатному напрямі.

Розв'язання. Відповідно до означення покажемо на рисунку напрям обходу контуру.



Скористаємось тим, що $\int_{ABC} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}$. Кожний з інтегралів обчислимо за формулою (10.6).

1) AB: $y=0$, отже, $dy=0$, $x_A=0$, $x_B=2$:

$$\int_{AB}\left(x^3-3y\right)dx+\left(4x+y\right)dy=\int_0^2 x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2=4;$$

2) BC: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=1$ – рівняння прямої у відрізках, тобто $2x+y=4$ або $y=4-2x$. Оскільки $y'=-2$, $x_B=2$, $x_C=0$, то

$$\int_{BC}\left(x^3-3y\right)dx+\left(4x+y\right)dy=\int_2^0\left[\left(x^3-3\cdot(4-2x)\right)+\left(4x+(4-2x)\right)\cdot(-2)\right]dx=$$

$$=\int_2^0\left(x^3+2x-20\right)dx=\left.\left(\frac{x^4}{4}+x^2-20x\right)\right|_2^0=-(4+4-40)=32;$$

3) CA: $x=0$, отже, $dx=0$, $y_C=4$, $y_A=0$:

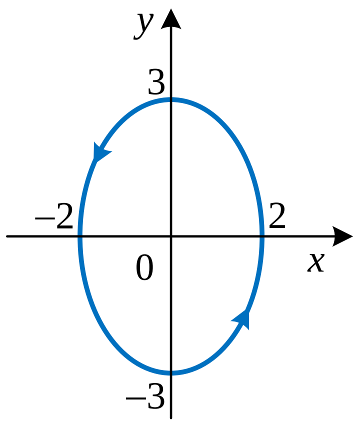
$$\int_{CA}\left(x^3-3y\right)dx+\left(4x+y\right)dy=\int_4^0 ydy=\left.\frac{y^2}{2}\right|_4^0=-8.$$

Таким чином, $\oint_L\left(x^3-3y\right)dx+\left(4x+y\right)dy=4+32-8=28$.

Відповідь: 28.

Приклад 10.15. Обчислити $\oint_L(x-y)dx+3ydy$, де L – еліпс $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, який пробігається у додатному напрямі.

Розв'язання.



Параметричні рівняння еліпса L: $x=2\cos t$, $y=3\sin t$, $0\le t\le 2\pi$.

Оскільки $x_t'=-2\sin t$, $y_t'=3\cos t$, то

$$\oint_L (x-y)dx+3ydy=\int_0^{2\pi}\left[(2\cos t-3\sin t)\cdot(-2\sin t)+3\cdot 3\sin t\cdot 3\cos t\right]dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(6\sin^2 t+23\sin t\cdot\cos t\right)dt=3\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)dt+23\int_0^{2\pi}\sin t\,d(\sin t)=$$

$$=\left(3t-\frac{3}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}+23\cdot\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=6\pi .$$

Відповідь: 6π .

10.2.5. *Формула Гріна*

Розглянемо однозв'язну замкнену область D, яка обмежена контуром L з обраним на ньому додатним напрямом обходу (рис. 10.4).

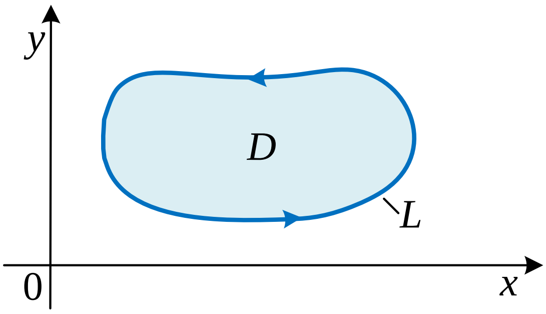


Рисунок 10.4

Теорема 10.1. Нехай функції $P(x,y), Q(x,y), \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в однозв'язній замкненій області D, що обмежена контуром L. Тоді

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \qquad (10.11)$$

Рівність (10.11) називається *формулою Гріна* й виражає зв'язок між криволінійними інтегралами другого роду по замкненому контуру L й подвійним інтегралом по області D, що цим контуром обмежена.

Приклад 10.16. Обчислити $\oint\limits_{L}(3x+2yx)dx+\left(4x^2+3y\right)dy$, де L − коло $x^2+y^2=R^2$, що пробігається у додатному напрямі, двома способами: 1) за означенням; 2) за формулою Гріна.

Розв'язання. 1) Для обчислення криволінійного інтеграла за формулою (10.9) задамо параметричні рівняння контуру інтегрування $L:\ x=R\cos t,\ \ y=R\sin t,\ \ 0\le t\le 2\pi$. Оскільки $x'_t=-R\sin t,\ \ y'_t=R\cos t$, то

$$\oint\limits_{L}(3x+2yx)dx+\left(4x^2+3y\right)dy=$$

$$=\int\limits_{0}^{2\pi}\left[(3R\cos t+2R\sin t\cdot R\cos t)\cdot(-R\sin t)+\left(4R^2\cos^2 t+3R\sin t\right)\cdot R\cos t\right]dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{2\pi}\left(-3R^2\cos t\cdot\sin t-2R^3\sin^2 t\cos t+4R^3\cos^3 t+3R^2\cos t\sin t\right)dt=$$

$$=-2R^3\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^2 t\,d(\sin t)+4R^3\int\limits_{0}^{2\pi}\left(1-\sin^2 t\right)d(\sin t)=$$

$$=\left.\left(-2R^3\cdot\frac{\sin^3 t}{3}+4R^3\left(\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right)\right)\right|_{0}^{2\pi}=0;$$

2) оскільки $P(x,y)=3x+2yx,\ Q(x,y)=4x^2+3y$, то $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=8x$.

Тоді за формулою Гріна (10.11) одержимо:

$$\oint\limits_{L}(3x+2yx)dx+\left(4x^2+3y\right)dy=\iint\limits_{D}(8x-2x)dxdy=6\iint\limits_{D}xdxdy=$$

$$=\left\|\begin{array}{c}\textit{область інтегрування } D \textit{ − коло, тому обчислення подвійного}\\ \textit{інтеграла виконаємо в полярній системі координат}:\\ x=\rho\cos\varphi,\ dxdy=\rho\,d\rho\,d\varphi,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le R\end{array}\right\|=$$

$$=6\iint\limits_{D'}\rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi=6\int\limits_{0}^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_{0}^{R}\rho^2 d\rho=0,\ \text{оскільки}\ \int\limits_{0}^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi=0.$$

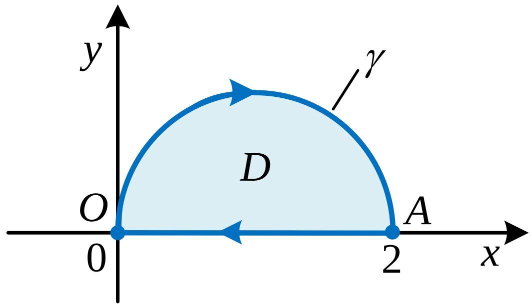
Відповідь: 0.

Зауваження. При визначенні в прикладі нижньої та верхньої меж інтегрування було прийнято до уваги те, що додатний обхід контуру L відповідав зростанню параметра t.

Приклад 10.17. Обчислити $\int\limits_L \left(y^2+x-y\right)dx+\left(2xy+x+y\right)dy$ уздовж кривої $L:\ x^2+y^2=2x,\ y\geq 0$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(2;0)$.

Розв'язання. Контур інтегрування L, за умовою, незамкнений, але пропонується обчислити інтеграл за допомогою формули Гріна, замкнувши контур L відрізком осі OX $(0\leq x\leq 2)$.

Позначимо цей замкнений контур через γ.



Оскільки $P(x,y)=y^2+x-y$, $Q(x,y)=2xy+x+y$, то $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2y-1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2y+1$. Обхід контуру γ проводиться у від'ємному напрямі, тому за формулою Гріна маємо:

$$\oint\limits_\gamma \left(y^2+x-y\right)dx+\left(2xy+x+y\right)dy=-\iint\limits_D \left((2y+1)-(2y-1)\right)dxdy=$$

$$=-\iint\limits_D 2\,dxdy=-2\iint\limits_D dxdy=-2S_D,$$

де S_D − площа області D, яка обмежена замкненим контуром γ. Область D− півкруг радіуса $R=1$. Отже, $S_D=\dfrac{1}{2}\pi R^2=\dfrac{\pi}{2}$, тобто

$$\oint\limits_\gamma \left(y^2+x-y\right)dx+\left(2xy+x+y\right)dy=-\pi .$$

Обчислимо значення заданого криволінійного інтеграла уздовж відрізка AO осі OX, де $O(0;0)$ і $A(2;0)$.

$$\int_{AO} \left(y^2 + x - y\right)dx + \left(2xy + x + y\right)dy = \left\| \begin{matrix} AO: y = 0, dy = 0, \\ x_A = 2, \quad x_O = 0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \int_2^0 x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_2^0 = -\frac{4}{2} = -2 .$$

Отже,

$$\int_L \left(y^2 + x - y\right)dx + \left(2xy + x + y\right)dy = \left\| \oint_\gamma - \int_{AO} \right\| = -\pi - (-2) = 2 - \pi .$$

Відповідь: $2-\pi$.

10.2.6. *Обчислення площі пласкої фігури за допомогою криволінійного інтеграла другого роду*

За формулою Гріна

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy .$$

Якщо функції $P(x, y)$ й $Q(x, y)$ такі, що $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 1$, то інтеграл праворуч в (10.11) дорівнює площі області D.

Має місце наступна *формула обчислення площі* S_D *області* D:

$$\boxed{S_D = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx .} \tag{10.12}$$

Приклад 10.18. Знайти площу еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Розв'язання. За формулою (10.12): $S_D = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx$.

Криволінійний інтеграл обчислимо, задавши лінію інтегрування параметричними рівняннями: $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$.

Оскільки $x'_t = -a\sin t,\ y'_t = b\cos t$, то:

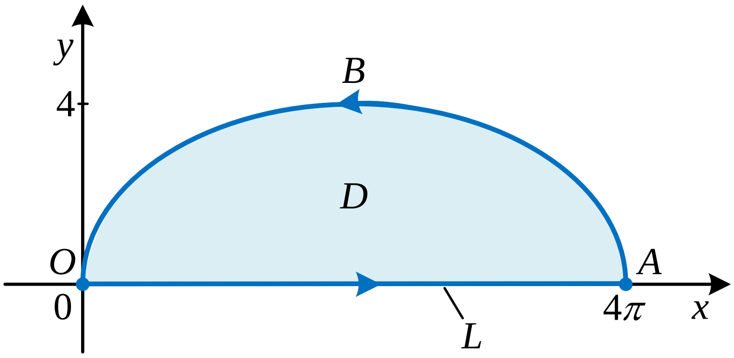
$$S_D = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a\cos t\cdot b\cos t - b\sin t\cdot(-a\sin t)\right)dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{ab}{2}\cdot 2\pi = \pi ab.$$

Відповідь: $S_{\text{еліпса}} = \pi ab$.

Приклад 10.19. Знайти площу фігури, яка обмежена однією аркою циклоїди й віссю OX: $x = 2(t - \sin t),\ y = 2(1 - \cos t),\ y = 0$.

Розв'язання.



За формулою (10.12): $S_D = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx$, при цьому обхід контуру L проводиться в додатному напрямі. Скористаємось тим, що $\oint_L = \int_{OA} + \int_{ABO}$. Кожний з інтегралів обчислимо за формулою (10.9).

Виберемо першу арку циклоїди, тобто $0 \le t \le 2\pi$. Тоді:

1) OA: $y = 0,\ y'(t) = 0,\ \ t_O = 0,\ t_A = 2\pi$:

$$\int_{OA} = \int_0^{2\pi}\left(2(t - \sin t)\cdot 0 - 0\cdot 2(1 - \cos t)\right)dt = 0;$$

2) ABO: $x = 2(t - \sin t), dx = 2(1 - \cos t)dt,\ y = 2(1 - \cos t), dy = 2\sin t dt,$

$t_A = 2\pi,\ t_O = 0$. Тоді:

$$\int_{ABO} = \int_{2\pi}^{0}\left(2(t - \sin t)\cdot 2\sin t - 2(1 - \cos t)\cdot 2(1 - \cos t)\right)dt =$$

$$=4\int_{2\pi}^{0}\left(t\sin t-\sin^2 t-1+2\cos t-\cos^2 t\right)dt=4\int_{2\pi}^{0}t\sin t\,dt+4\int_{2\pi}^{0}\left(2\cos t-2\right)dt=$$

$$=4t\left(-\cos t\right)\Big|_{2\pi}^{0}-4\int_{2\pi}^{0}\left(-\cos t\right)dt+4\left(2\sin t-2t\right)\Big|_{2\pi}^{0}=4\cdot 2\pi+4\cdot 4\pi=24\pi .$$

Отже, $S_D=\dfrac{1}{2}(0+24\pi)=12\pi$.

Відповідь: $S_D=12\pi$.

Зауваження. При обчисленні інтеграла 2) був застосований метод інтегрування частинами.

10.2.7. *Умова незалежності інтеграла від форми шляху інтегрування*

Нехай функції $P(x,y), Q(x,y), \dfrac{\partial P}{\partial y}$ й $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ визначені й неперервні в однозв'язній замкненій області D, що обмежена контуром L (рис. 10.5).

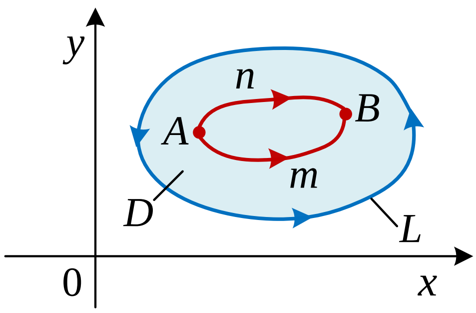


Рисунок 10.5

Тоді рівносильні наступні твердження:

1. $\oint\limits_{\gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, де γ – довільний замкнений контур, що належить області D.

2. Криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ не залежить від форми шляху інтегрування, що з'єднує точки A і B (рис. 10.5), тобто

$$\int\limits_{AmB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{AnB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

3. Підінтегральний вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом, тобто існує така функція $U(x,y)$, що $dU(x,y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Очевидно, що $P = \dfrac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial U}{\partial y}$, але тоді:

4. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. (10.13)

Виберемо в однозв'язній замкненій області D що обмежена контуром L, довільні точки A й B (рис. 10.5).

Тоді

$$\int\limits_{AB} dU(x,y) = \int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = U(B) - U(A), \tag{10.14}$$

тобто інтеграл не залежить від вибору форми шляху інтегрування, що з'єднує точки A й B, якщо AB лежить в області D.

Ця умова є необхідною й достатньою умовою незалежності криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування AB, який належить області D.

Аналогічно, якщо для функцій $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, які є неперервними разом зі своїми частинними похідними в деякій замкненій однозв'язній області V, виконуються умови:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \tag{10.15}$$

то вираз $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ є повним диференціалом в області V.

У цьому випадку криволінійний інтеграл

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

не залежить від форми шляху інтегрування, якщо крива AB належить області V.

10.2.8. *Знаходження функції за її повним диференціалом*

Нехай відомо, що повний диференціал функції $U(x, y)$

$$dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Функцію $U(x, y)$ можна знайти, інтегруючи dU по довільній лінії, яка належить області D, що з'єднує деяку фіксовану точку $M_0(x_0; y_0)$ й точку $M(x; y)$:

$$U(x, y) = \int\limits_{M_0M} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C.$$

У якості лінії, що з'єднує точки M_0 й M, зручніше вибрати ламану лінію M_0NM з ланками, що паралельні осям координат (рис. 10.6).

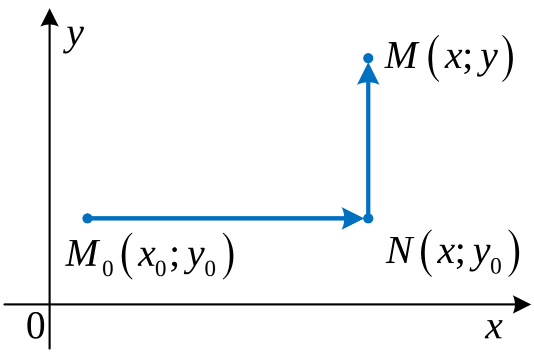


Рисунок 10.6

Розіб'ємо лінію M_0NM на частини M_0N й NM. Тоді

$$\int\limits_{M_0NM} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int\limits_{M_0N} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int\limits_{NM} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Відрізок M_0N належить прямій $y = y_0$, значить, $dy = 0$. У цьому випадку

$$\int\limits_{M_0N} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx.$$

Аналогічно, інтегруючи уздовж відрізка NM, одержимо:

$$\int\limits_{NM} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)dy.$$

Таким чином, остаточно маємо:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C. \qquad (10.16)$$

Зауваження. Якщо точка $O(0;0)$ належить області D, то в якості фіксованої точки $M_0(x_0;y_0)$ зручніше обрати початок координат. У цьому випадку формула (10.16) прийме вид:

$$U(x,y)=\int_{0}^{x}P(x,0)dx+\int_{0}^{y}Q(x,y)dy+C. \qquad (10.17)$$

У випадку, коли повним диференціалом деякої функції $U(x,y,z)$ є вираз

$$dU=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz, \text{ то}$$

$$U(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz+C. \qquad (10.18)$$

Приклад 10.20. Обчислити

$$\int_{(-1;2)}^{(2;5)}\left(y^3+2xy^2\right)dx+\left(3xy^2+2x^2y\right)dy,$$

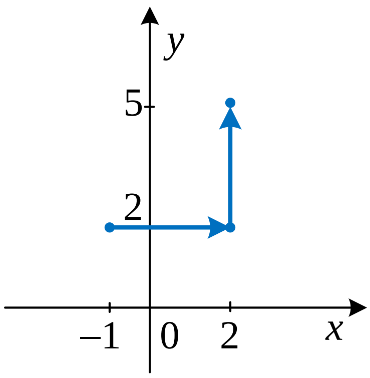
попередньо переконавшись, що інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування.

Розв'язання. Необхідною й достатньою умовою незалежності інтеграла від форми шляху інтегрування є умова (10.13).

Оскільки $P(x,y)=y^3+2xy^2$, $Q(x,y)=3xy^2+2x^2y$, то $\dfrac{\partial P}{\partial y}=3y^2+4xy$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=3y^2+4xy$, тобто $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. Отже, підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$.

Оскільки вид функції $U(x, y)$ невідомий, то скористатись для обчислення інтеграла формулою (10.14) немає можливості.

Виберемо в якості лінії інтегрування ламану з ланками, що паралельні осям координат, яка з'єднує точки $(-1;2)$ й $(2;5)$.



У цьому випадку:

$$\int_{(-1;2)}^{(2;5)} \left(y^3+2xy^2\right)dx+\left(3xy^2+2x^2y\right)dy=\int_{-1}^{2}\left(2^3+2x\cdot 2^2\right)dx+\int_{2}^{5}\left(3\cdot 2y^2+2\cdot 2^2y\right)dy=$$

$$=\int_{-1}^{2}(8+8x)\,dx+\int_{2}^{5}\left(6y^2+8y\right)dy=\left(8x+4x^2\right)\Big|_{-1}^{2}+\left(2y^3+4y^2\right)\Big|_{2}^{5}=354.$$

Відповідь: 354.

Зауваження. Безумовно, щоб скористатись формулою (10.14), варто було б знайти функцію $U(x, y)$ за формулами (10.16) або (10.17).

Якщо виникне таке бажання, то автори пропонують скористатись формулою (10.16), узявши в якості точки $M_0(x_0; y_0)$ точку $A(-1; 2)$ – початок шляху інтегрування. Потім в отриману функцію підставити координати точки $B(2; 5)$ – кінцевої точки шляху інтегрування.

$$U(x,y)=\int_{(-1;2)}^{(x;y)} \left(y^3+2xy^2\right)dx+\left(3xy^2+2x^2y\right)dy=\int_{-1}^{x}(8+8x)\,dx+\int_{2}^{y}\left(6y^2+8y\right)dy=$$

$$=\left(8x+4x^2\right)\Big|_{-1}^{x}+\left(2y^3+4y^2\right)\Big|_{2}^{y}=\left(8x+4x^2\right)-(-8+4)+\left(2y^3+4y^2\right)-(16+16)=$$

$$=8x+4x^2+2y^3+4y^2-28.$$

Остаточно маємо:

$$\int_{(-1;2)}^{(2;5)} \left(y^3+2xy^2\right)dx+\left(3xy^2+2x^2y\right)dy=U(2;5)=8\cdot 2+4\cdot 2^2+2\cdot 5^3+4\cdot 5^2-28=$$

$$=16+16+250+100-28=354.$$

Відповідь: 354.

Приклад 10.21. Перевірити, чи є вираз

$$\left(2xy+z^2\right)dx+\left(x^2+2yz\right)dy+\left(y^2+2xz\right)dz$$

повним диференціалом деякої функції. Якщо так, то знайти цю функцію.

Розв'язання. Перевіримо умови (10.15). Оскільки $P(x, y, z)=2xy+z^2$, $Q(x, y, z)=x^2+2yz$, $R(x, y, z)=y^2+2xz$, то $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x$, $\dfrac{\partial R}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial z}=2y$, $\dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x}=2z$, тобто даний в умові вираз є повним диференціалом деякої функції $U(x, y, z)$, тобто

$$dU=\left(2xy+z^2\right)dx+\left(x^2+2yz\right)dy+\left(y^2+2xz\right)dz.$$

Отже,

$$U(x, y, z)=\int_0^x 0dx+\int_0^y x^2dy+\int_0^z\left(y^2+2xz\right)dz=x^2y+y^2z+xz^2+C.$$

Відповідь: $U(x, y, z)=x^2y+y^2z+xz^2+C$.

Зауваження. Правильність обчислень при необхідності можна перевірити. Оскільки вираз $\left(2xy+z^2\right)dx+\left(x^2+2yz\right)dy+\left(y^2+2xz\right)dz$ є повним диференціалом функції $U(x, y, z)$, то $P=\dfrac{\partial U}{\partial x}$, $Q=\dfrac{\partial U}{\partial y}$, $R=\dfrac{\partial U}{\partial z}$.

Контрольні запитання

1. Дайте означення криволінійного інтеграла першого роду.

2. Які властивості мають криволінійні інтеграли першого роду?

3. Як обчислюються криволінійні інтеграли першого роду у випадку плаской кривої, що задана а) параметрично; б) в декартових координатах?

4. Як обчислюються криволінійні інтеграли першого роду у випадку кривої у просторі?

5. Які фізичні і механічні застосування криволінійних інтегралів першого роду?

6. Дайте означення криволінійного інтеграла другого роду.

7. Які властивості мають криволінійні інтеграли другого роду?

8. Як обчислюються криволінійні інтеграли другого роду у випадку плаской кривої, що задана а) параметрично; б) в декартових координатах?

9. Як обчислюються криволінійні інтеграли другого роду у випадку кривої у просторі?

10. Як впливає напрям інтегрування на величину криволінійного інтеграла другого роду?

11. Як визначається додатний напрям у випадку замкненого контуру інтегрування?

12. За яких умов значення криволінійного інтеграла другого роду не залежить від лінії інтегрування?

13. Як визначається криволінійний інтеграл другого роду по лінії у просторі?

14. Сформулюйте теорему про незалежність криволінійного інтеграла другого роду від лінії інтегрування у просторі.

15. Формула Гріна.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти масу однорідного ($\gamma=1$) стрижня AB, якщо $A(2;1)$, $B(5;4)$.

2. Обчислити $\int\limits_L \frac{y}{x}dl$, $L:\ y=3x,\ 1\le x\le 2$.

3. Обчислити $\int\limits_L xdl$, $L:\ x=2\cos t,\ \ y=2\sin t,\ \ 0\le t\le \frac{\pi}{2}$.

4. Обчислити $\int\limits_L \frac{dl}{x+y}$, $L:\ x=3y,\ \frac{1}{3}\le y\le 1$.

5. Обчислити $\int\limits_L xydl$, L: контур $\triangle ABC$ з вершинами $A(1;0)$, $B(0;0)$, $C(0;1)$.

6. Обчислити $\int\limits_L \frac{dl}{x+y+1}$, $L:\ y=x-1,\ 1\le x\le 3$.

7. Обчислити $\int\limits_L x^2ydl$, $L:\ \ x^2+y^2=a^2,\ y\ge 0$.

8. Обчислити $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, $L:\ x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ z=e^t,\ 0\le t\le 1$.

9. Знайти масу дуги лінії $L:\ \ y=\ln x,\ \ 1\le x\le e,\ \ \gamma(x,y)=\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}$.

10. Знайти координату y_C центру ваги дуги лінії $y=x^2$, $0\le x\le\sqrt{2}$, якщо її лінійна щільність $\gamma(x,y)=x$.

11. Обчислити $\int\limits_L ydx+xdy$, $L:\ y=2x$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;2)$.

12. Обчислити $\int\limits_L zdx+xdy-ydz$, $L:\ x=2t+1,\ y=3t-1,\ z=0,\ 0\le t\le 1$.

13. Знайти роботу сили $\vec{F}=\{-y;x\}$ при переміщенні матеріальної точки уздовж лінії $L:\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{3}$.

14. Обчислити за формулою Гріна $\oint\limits_L (3x+2y)dx+(4x-y)dx$, L: контур трикутника, що обмежений лініями $x=0,\ y=0,\ x+y=3$.

15. Обчислити за формулою Гріна $\oint\limits_L (2x+y)dy-dx$, $L:\ x^2+y^2=9$.

16. Обчислити криволінійний інтеграл уздовж дуги AB лінії L:

$$\int\limits_{AB} dx + dy + \sqrt{x^2 + y^2}\,dz,\ \ L:\ x = t\cos t,\ \ y = t\sin t,\ \ z = t,$$

точки $A(0;0;0)$, $B\left(0;\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

17. Знайти роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки уздовж дуги AB лінії L: $\vec{F} = 2y^2\vec{i} + xy\vec{j}$, де $L: y = \sin x$, точки $A(0;0)$, $B(\pi;0)$.

18. Обчислити $\oint\limits_{L}\left(6x^2 - y\right)dx + \left(3x + 4y^2\right)dy,\ L:\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, двома способами: 1) за означенням; 2) за формулою Гріна.

19. Перевірити, чи є вказаний вираз dU повним диференціалом деякої функції U, якщо – так, то знайти цю функцію:

$$dU = \left(3x^2y + y^3 - 6xy^2\right)dx + \left(x^3 + 3xy^2 - 6x^2y\right)dy.$$

20. Обчислити криволінійний інтеграл, попередньо переконавшись, що він не залежить від форми шляху інтегрування:

$$\int\limits_{(3;2;1)}^{(2;4;0)} y^2z^3dx + 2xyz^3dy + 3xy^2z^2dz.$$

Відповіді

1. $3\sqrt{2}$. **2**. $3\sqrt{10}$. **3**. 4. **4**. $\dfrac{\sqrt{10}}{4}\ln 3$. **5**. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. **6**. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln 3$. **7**. $\dfrac{2}{3}a^4$. **8**. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - e^{-1}\right)$. **9**. $\dfrac{1}{2}$. **10**. $\dfrac{149}{130}$. **11**. 2. **12**. 6. **13**. $\dfrac{\pi}{3}$. **14**. 9. **15**. 18π. **16**. $\dfrac{\pi}{8}(\pi + 4)$. **17**. $\dfrac{3\pi}{4}$. **18**. 32π. **19**. $U = x^3y + y^3x - 3x^2y^2 + C$. **20**. -12.

11. Поверхневі інтеграли

11.1. Поверхневі інтеграли першого роду

11.1.1. *Основні означення*

Нехай в області $V \subset \mathbb{R}^3$ задана гладка поверхня σ, що обмежена гладким контуром L. На поверхні σ визначена й неперервна функція $f(M) = f(x, y, z)$. Розіб'ємо поверхню σ довільним чином на n елементарних площинок $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, площі яких $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$. Позначимо через $d_k = d(\sigma_k)$ − діаметр елементарної площинки σ_k. На кожній елементарній площинці виберемо довільно точку $M_k(x_k; y_k; z_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ (рис. 11.1).

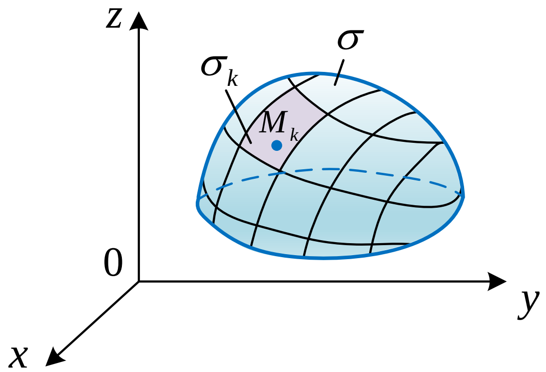


Рисунок 11.1

Обчислимо в цих точках значення функції $f(M_k) = f(x_k, y_k, z_k)$ й складемо суму:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k) \cdot \Delta\sigma_k .$$

Якщо існує скінченна границя S_n за умови $\max\limits_k d(\sigma_k) \to 0$, то вона називається *поверхневим інтегралом першого роду від функції* $f(M) = f(x, y, z)$ *по поверхні* σ й позначається:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma ,$$

таким чином,

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\max\limits_{k} d(\sigma_k) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta\sigma_k . \qquad (11.1)$$

Для будь-якої неперервної функції $f(x, y, z)$, що визначена на гладкій поверхні σ, існує поверхневий інтеграл першого роду.

11.1.2. *Властивості поверхневих інтегралів першого роду*

1. Лінійність. Якщо функції $f_1(x, y, z)$ й $f_2(x, y, z)$ неперервні в області $V \subset \mathbb{R}^3$, що містить гладку поверхню σ; α, β – довільні константи, то

$$\iint\limits_{\sigma} (\alpha f_1(x, y, z) + \beta f_2(x, y, z)) d\sigma = \alpha \iint\limits_{\sigma} f_1(x, y, z) d\sigma + \beta \iint\limits_{\sigma} f_2(x, y, z) d\sigma .$$

2. Адитивність. Якщо гладка поверхня σ розбита на частини σ_1 й σ_2, що не мають спільних внутрішніх точок, таким чином, що $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, то

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} f(x, y, z) d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} f(x, y, z) d\sigma .$$

3. Інтегрування нерівностей. Якщо функції $f_1(x, y, z)$ й $f_2(x, y, z)$ неперервні на поверхні σ й $f_1(x, y, z) \geq f_2(x, y, z)$ на цій поверхні, то

$$\iint\limits_{\sigma} f_1(x, y, z) d\sigma \geq \iint\limits_{\sigma} f_2(x, y, z) d\sigma .$$

4. Оцінка поверхневого інтеграла. Якщо на поверхні σ $m \leq f(x, y, z) \leq M$, то

$$m \cdot S_\sigma \leq \iint\limits_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma \leq M \cdot S_\sigma ,$$

де S_σ – площа поверхні σ.

5. Теорема про середнє значення функції. Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в області $V \subset \mathbb{R}^3$, що містить гладку поверхню σ, то на поверхні σ знайдеться принаймні одна така точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, у якій

$$f\left(x_0, y_0, z_0\right) = \frac{1}{S_\sigma} \iint_\sigma f\left(x, y, z\right) d\sigma .$$

Права частина цієї рівності називається *середнім значенням функції* $f\left(x, y, z\right)$ *на поверхні* σ.

11.1.3. *Обчислення поверхневих інтегралів першого роду*

Нехай $f\left(x, y, z\right)$ – неперервна функція, визначена на гладкій поверхні σ, яка задана рівнянням $z = z\left(x, y\right)$, $\left(x, y\right) \in \sigma_{xy}$, де σ_{xy} – замкнена обмежена область – проєкція поверхні σ на площину XOY (рис. 11.2).

Тоді

$$\iint_\sigma f\left(x, y, z\right) d\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} f\left[\left(x, y, z\left(x, y\right)\right)\right] \cdot \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\, dxdy . \qquad (11.2)$$

За формулою (11.2) обчислення поверхневого інтеграла по поверхні σ зводиться до обчислення подвійного інтеграла по проєкції σ_{xy} поверхні σ на площину XOY.

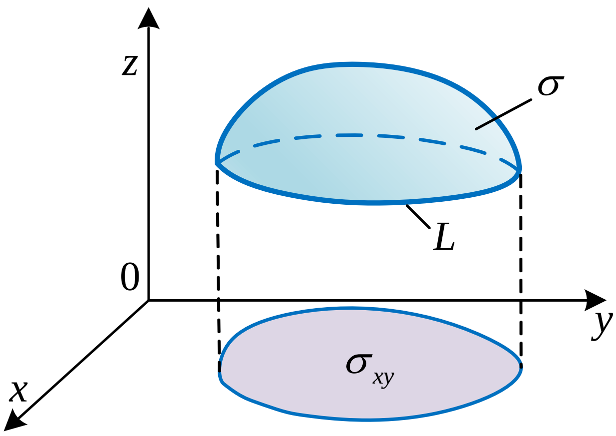


Рисунок 11.2

Якщо поверхня σ задана рівнянням $x = x\left(y, z\right)$ або $y = y\left(z, x\right)$, то обчислення поверхневого інтеграла (11.1) проводиться відповідно за формулами:

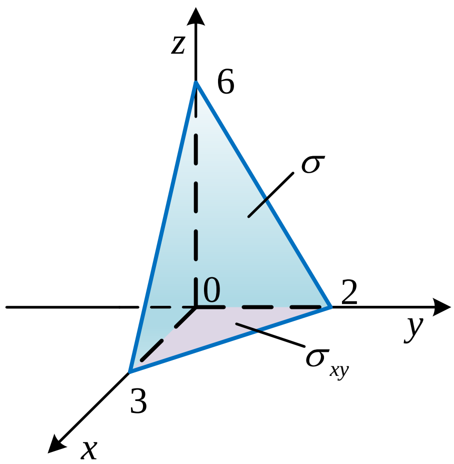
$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{\sigma_{yz}} f\left[\left(x(y,z),y,z\right)\right]\cdot\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2+\left(x'_z\right)^2}\,dydz\,, \tag{11.3}$$

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{\sigma_{zx}} f\left[\left(x,y(z,x),z\right)\right]\cdot\sqrt{1+\left(y'_z\right)^2+\left(y'_x\right)^2}\,dzdx\,. \tag{11.4}$$

Зауваження. Поверхневі інтеграли першого роду можуть бути визначені й для замкнених поверхонь. У цьому випадку, при зведенні поверхневого інтеграла до подвійного інтеграла слід скористатись властивістю адитивності поверхневих інтегралів і зобразити поверхневий інтеграл по поверхні σ у вигляді суми інтегралів по кожній із частин цієї поверхні.

Приклад 11.1. Обчислити $\iint_{\sigma}(x+y-z)d\sigma$, де σ – частина площини $2x+3y+z-6=0$, яка розташована в першому октанті.

Розв'язання.



Напишемо рівняння поверхні σ у вигляді: $z=6-2x-3y$. Оскільки $z'_x=-2,\ z'_y=-3$, то $\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$. Тоді за формулою (11.2) одержуємо:

$$\iint\limits_{\sigma}(x+y-z)\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma_{xy}}\big(x+y-(6-2x-3y)\big)\cdot\sqrt{14}\,dx\,dy=$$

$$=\sqrt{14}\iint\limits_{\sigma_{xy}}(3x+4y-6)\,dx\,dy=\sqrt{14}\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{2-\frac{2}{3}x}(3x+4y-6)\,dy=$$

$$=\sqrt{14}\int\limits_0^3\left(3xy+2y^2-6y\Big|_0^{2-\frac{2}{3}x}\right)dx=\sqrt{14}\int\limits_0^3\left(3x\left(2-\frac{2}{3}x\right)+2\left(2-\frac{2}{3}x\right)^2-6\left(2-\frac{2}{3}x\right)\right)dx=$$

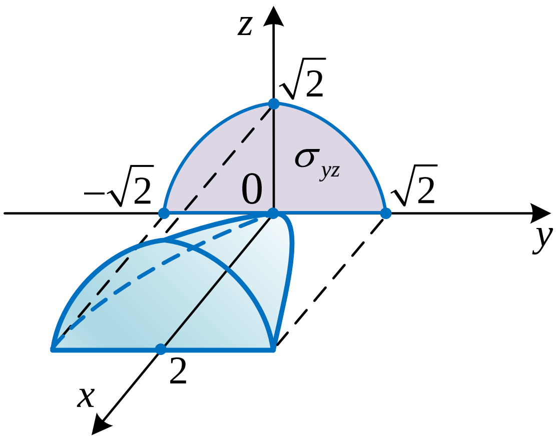
$$=\sqrt{14}\int\limits_0^3\left(-\frac{10}{9}x^2+\frac{14}{3}x-4\right)dx=\sqrt{14}\left(-\frac{10}{27}x^3+\frac{7}{3}x^2-4x\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=\sqrt{14}(21-10-12)=-\sqrt{14}\,.$$

Відповідь: $-\sqrt{14}$.

Приклад 11.2. Обчислити $\iint\limits_{\sigma}(5x-y^2-z^2)\,d\sigma$, де σ – частина поверхні параболоїда $x=y^2+z^2$, $z\ge 0$, яка обмежена площиною $x=2$.

Розв'язання.



Оскільки поверхня інтегрування задана рівнянням $x=y^2+z^2$, то для обчислення інтеграла скористаємось формулою (11.3).

Маємо $x'_y=2y$, $x'_z=2z$, тоді $d\sigma=\sqrt{1+4y^2+4z^2}\,dy\,dz$ й

$$\iint\limits_{\sigma}(5x-y^2-z^2)\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma_{yz}}\left(5\left(y^2+z^2\right)-y^2-z^2\right)\cdot\sqrt{1+4\left(y^2+z^2\right)}\,dy\,dz=$$

$$=\iint\limits_{\sigma_{yz}}4\left(y^2+z^2\right)\cdot\sqrt{1+4\left(y^2+z^2\right)}\,dy\,dz\,.$$

Область σ_{yz} – півкруг $y^2+z^2\le 2,\ z\ge 0$, тому при обчисленні подвійного інтеграла перейдемо до полярних координат:

$$\iint_{\sigma}\left(5x-y^2-z^2\right)d\sigma=\iint_{\sigma_{yz}}4\left(y^2+z^2\right)\cdot\sqrt{1+4\left(y^2+z^2\right)}\,dy\,dz=$$

$$=\iint_{(\sigma_{yz})'}4\rho^2\sqrt{1+4\rho^2}\;\rho\,d\rho\,d\varphi=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}4\rho^2\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho d\rho=$$

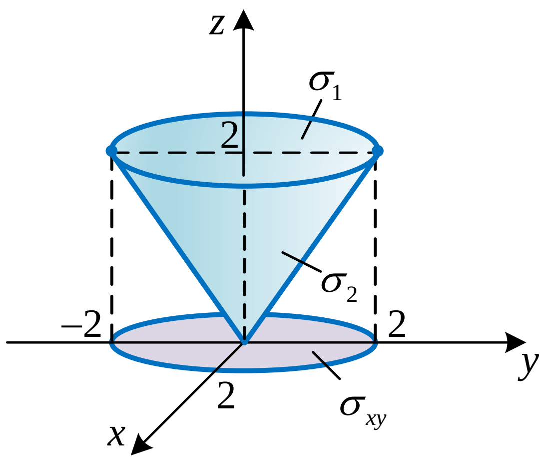
$$=\left\|\begin{array}{c}\textit{заміна}:\ t=1+4\rho^2\\ 4\rho^2=t-1,\,dt=8\rho\,d\rho\\ t_H=1,\,t_B=9\end{array}\right\|=\frac{\pi}{8}\int_1^9(t-1)\sqrt{t}\,dt=\frac{\pi}{8}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^9=$$

$$=\frac{\pi}{8}\left[\left(\frac{2}{5}\cdot 3^5-\frac{2}{3}\cdot 3^3\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right)\right]=\frac{\pi}{4}\left(\frac{242}{5}-\frac{26}{3}\right)=\frac{149}{15}\pi\,.$$

Відповідь: $\dfrac{149}{15}\pi$.

Приклад 11.3. Обчислити $\iint_{\sigma}x^2\,d\sigma$, де σ – замкнена поверхня, що обмежує конус $z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=2.$

Розв'язання.



σ – замкнена поверхня, тому для обчислення інтеграла розіб'ємо σ на частини σ_1 й σ_2 – основа й бічна поверхня конуса. Тоді

$$\oiint_{\sigma}x^2\,d\sigma=\iint_{\sigma_1}x^2\,d\sigma+\iint_{\sigma_2}x^2\,d\sigma\,.$$

Область σ_{xy} – круг (див. рис.), тому при обчисленні відповідних подвійних інтегралів перейдемо до полярних координат:

1) $\sigma_1: z = 2,\ d\sigma = dx\,dy$, отже,

$$\iint_{\sigma_1} x^2\,d\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} x^2\,dx\,dy = \iint_{(\sigma_{xy})'} \rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^2\rho^3\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)\left(\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \frac{2^4}{8}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 4\pi;$$

2) $\sigma_2:\ z = \sqrt{x^2+y^2},\ z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ і

$$d\sigma = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \sqrt{2}\,dx\,dy,$$ отже,

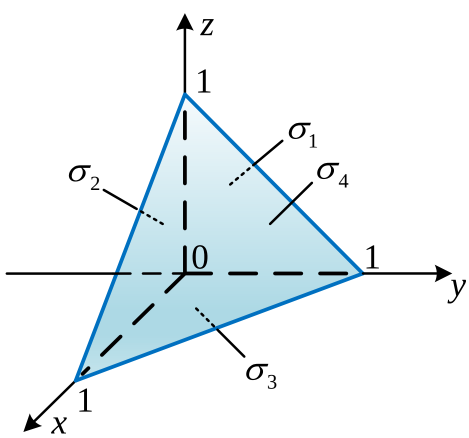
$$\iint_{\sigma_2} x^2\,d\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} x^2\cdot\sqrt{2}\,dx\,dy = \sqrt{2}\iint_{\sigma_{xy}} x^2\,dx\,dy = 4\sqrt{2}\pi.$$

Таким чином, $\displaystyle\iint_{\sigma} x^2\,d\sigma = 4\pi + \sqrt{2}\cdot 4\pi = 4\pi\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Відповідь: $4\pi\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Приклад 11.4. Обчислити $\displaystyle\iint_{\sigma}\frac{d\sigma}{(1+x+y)^2}$, де σ – площа поверхні тетраедра, заданого нерівностями $x+y+z \le 1,\ x, y, z \ge 0$.

Розв'язання. σ – замкнена поверхня, тому для обчислення інтеграла розіб'ємо σ на чотири частини: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ і σ_4 – грані тетраедра (див. рис.).



Тоді $\iint\limits_{\sigma}=\iint\limits_{\sigma_1}+\iint\limits_{\sigma_2}+\iint\limits_{\sigma_3}+\iint\limits_{\sigma_4}$. Обчислимо кожний із цих інтегралів:

1) Нехай $\sigma_1: x=0, d\sigma=dydz$, тоді

$$\iint\limits_{\sigma_1}\frac{d\sigma}{(1+x+y)^2}=\iint\limits_{\sigma_1}\frac{dydz}{(1+y)^2}=\int\limits_0^1\frac{dy}{(1+y)^2}\int\limits_0^{1-y}dz=\int\limits_0^1\frac{(1-y)dy}{(1+y)^2}=$$

$$=-\int\limits_0^1\frac{dy}{(1+y)}+2\int\limits_0^1\frac{dy}{(1+y)^2}=1-\ln 2;$$

2) нехай $\sigma_2: y=0, d\sigma=dzdx$, тоді

$$\iint\limits_{\sigma_2}\frac{d\sigma}{(1+x+y)^2}=\iint\limits_{\sigma_2}\frac{dzdy}{(1+x)^2}=\int\limits_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}\int\limits_0^{1-x}dz=\int\limits_0^1\frac{(1-x)dx}{(1+x)^2}=$$

$$=-\int\limits_0^1\frac{dx}{(1+x)}+2\int\limits_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}=1-\ln 2;$$

3) нехай $\sigma_3: z=0, d\sigma=dxdy$, тоді

$$\iint\limits_{\sigma_3}\frac{d\sigma}{(1+x+y)^2}=\iint\limits_{\sigma_3}\frac{dxdy}{(1+x+y)^2}=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}=$$

$$=\int\limits_0^1\left(-\frac{1}{(1+x+y)}\bigg|_0^{1-x}\right)dx=\int\limits_0^1\frac{dx}{(1+x)}-\int\limits_0^1\frac{dx}{2}=\ln 2-\frac{1}{2};$$

4) нехай $\sigma_4: z=1-x-y, d\sigma=\sqrt{3}dxdy$, тоді

$$\iint\limits_{\sigma_4}\frac{d\sigma}{(1+x+y)^2}=\sqrt{3}\iint\limits_{(\sigma_4)_{xy}}\frac{dxdy}{(1+x+y)^2}=\sqrt{3}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}=$$

$$=\sqrt{3}\int\limits_0^1\left(-\frac{1}{(1+x+y)}\bigg|_0^{1-x}\right)dx=\sqrt{3}\left(\int\limits_0^1\frac{dx}{(1+x)}-\int\limits_0^1\frac{dx}{2}\right)=\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right).$$

Остаточно маємо:

$$\iint\limits_{\sigma}\frac{d\sigma}{(1+x+y)^2}=2(1-\ln 2)+\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}-\ln 2+\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right).$$

Відповідь: $\frac{3}{2}-\ln 2+\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$.

11.1.4. *Деякі застосування поверхневих інтегралів першого роду*

1. ***Площа поверхні*** σ:

$$S_\sigma = \iint\limits_\sigma d\sigma. \tag{11.5}$$

2. ***Маса матеріальної поверхні.*** Якщо $\gamma = \gamma(x, y, z)$ – поверхнева щільність розподілу маси на поверхні σ, то її маса m

$$m_\sigma = \iint\limits_\sigma \gamma(x, y, z)\, d\sigma \tag{11.6}$$

3. Нехай точка $C(x_C; y_C; z_C)$ – ***центр ваги*** матеріальної поверхні σ, тоді:

$$x_C = \frac{M_{YZ}}{m} = \frac{\iint\limits_\sigma x\gamma(x, y, z)\, d\sigma}{\iint\limits_\sigma \gamma(x, y, z)\, d\sigma},\quad y_C = \frac{M_{ZX}}{m} = \frac{\iint\limits_\sigma y\gamma(x, y, z)\, d\sigma}{\iint\limits_\sigma \gamma(x, y, z)\, d\sigma},$$
$$z_C = \frac{M_{XY}}{m} = \frac{\iint\limits_\sigma z\gamma(x, y, z)\, d\sigma}{\iint\limits_\sigma \gamma(x, y, z)\, d\sigma}, \tag{11.7}$$

де M_{YZ}, M_{ZX}, M_{XY} – статичні моменти матеріальної поверхні σ відносно відповідних координатних площин.

4. ***Моменти інерції*** матеріальної поверхні σ відносно координатних осей обчислюються за формулами:

$$I_{OX} = \iint\limits_\sigma (y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)\, d\sigma,\quad I_{OY} = \iint\limits_\sigma (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z)\, d\sigma,$$
$$I_{OZ} = \iint\limits_\sigma (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)\, d\sigma, \tag{11.8}$$

де I_{OX}, I_{OY}, I_{OZ} – моменти інерції відносно координатних осей OX, OY, OZ відповідно.

Зауваження. Якщо поверхня σ однорідна, то $\gamma = \text{const}$.

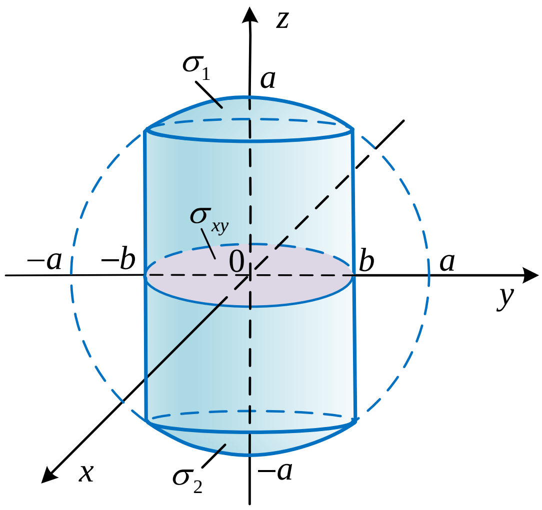
5. ***Сила тяжіння*** $\vec{F} = (F_x; F_y; F_z)$ матеріальної точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ маси m_0 матеріальною поверхнею σ:

$$F_x = Gm_0 \iint_\sigma \frac{x - x_0}{r^3} \gamma(x, y, z) d\sigma, \qquad F_y = Gm_0 \iint_\sigma \frac{y - y_0}{r^3} \gamma(x, y, z) d\sigma,$$
$$F_z = Gm_0 \iint_\sigma \frac{z - z_0}{r^3} \gamma(x, y, z) d\sigma, \tag{11.9}$$

де G – гравітаційна постійна, $\vec{r} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, $r = |\vec{r}|$.

Приклад 11.5. Обчислити площу частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, яка розташована усередині циліндра $x^2 + y^2 = b^2$ $(0 < b < a)$.

Розв'язання.



Циліндр вирізає на поверхні сфери дві частини: σ_1 і σ_2, симетричні відносно координатної площини XOY.

Площу поверхні σ обчислимо за формулою (11.5):

$$S = \iint_\sigma d\sigma = \iint_{\sigma_1} d\sigma + \iint_{\sigma_2} d\sigma = 2\iint_{\sigma_1} d\sigma.$$

Оскільки $\sigma_1:\quad z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, то $z'_x=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $z'_y=\dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, тому $d\sigma=\dfrac{adx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$. Отже,

$$S=2a\iint\limits_{\sigma_{xy}}\frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\ .$$

Оскільки σ_{xy} − круг $x^2+y^2\le b^2$, то обчислення проведемо в полярних координатах:

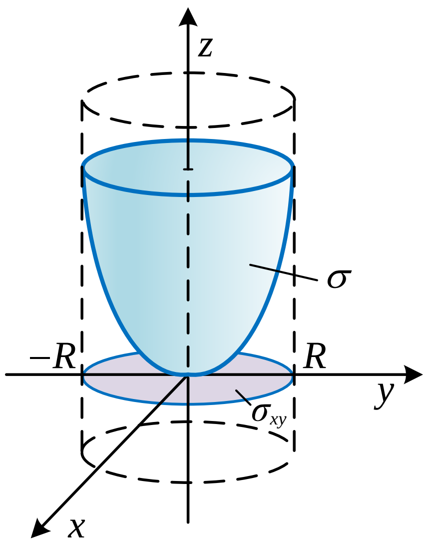
$$S=2a\iint\limits_{\sigma_{xy}}\frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=2a\iint\limits_{(\sigma_{xy})'}\frac{\rho d\rho\,d\varphi}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=-a\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^b\frac{d\left(a^2-\rho^2\right)}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=$$

$$=-4\pi a\sqrt{a^2-\rho^2}\Big|_0^b=4\pi a\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right).$$

Відповідь: $4\pi a\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)$.

Приклад 11.6. Обчислити площу частини поверхні параболоїда $2z=x^2+y^2$, яка розташована усередині циліндра $x^2+y^2=R^2$.

Розв'язання.



Площа поверхні σ обчислюється за формулою (11.5): $S=\iint\limits_{\sigma}d\sigma$. Оскільки $\sigma:\ 2z=x^2+y^2$, то $z'_x=x$, $z'_y=y$, тоді $d\sigma=\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$.

Отже,

$$S = \iint\limits_{\sigma_{xy}} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy\,.$$

Переходячи до полярних координат, одержимо:

$$S = \iint\limits_{(\sigma_{xy})'} \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho\sqrt{1+\rho^2}\, d\rho =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}\int\limits_0^R \left(1+\rho^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1+\rho^2\right) = \frac{2\pi}{3}\left(1+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^R = \frac{2\pi}{3}\left(\left(1+R^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

Відповідь: $\dfrac{2\pi}{3}\left(\left(1+R^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$.

Приклад 11.7. Обчислити площу поверхні тіла, яке обмежено конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ і площиною $2z = c - x$.

Розв'язання. Поверхня σ – замкнена, тому для обчислення площі розіб'ємо σ на частини: σ_1 і σ_2. Тоді $S = \iint\limits_{\sigma} d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} d\sigma$. Обчислимо кожний із цих інтегралів:

1) нехай $\sigma_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2},\, d\sigma = \sqrt{2}dxdy$ (див. **Приклад 11.3**), тоді

$$\iint\limits_{\sigma_1} d\sigma = \sqrt{2} \iint\limits_{(\sigma_1)_{xy}} dxdy\,,$$

де $(\sigma_1)_{xy}$ – проєкція σ_1 на площину XOY. Таким чином, задача звелась до обчислення площі $(\sigma_1)_{xy}$. Визначимо, який вид має ця проєкція.

Для цього складемо рівняння лінії перетину заданих поверхонь:

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 : \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 2z = c - x. \end{cases}$$

Звідси $2z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = c - x$ або $4\left(x^2 + y^2\right) = (c - x)^2$. Після перетворень одержимо: $3x^2 + 4y^2 + 2cx - c^2 = 0$ або $3\left(x + \dfrac{c}{3}\right)^2 + 4y^2 = \dfrac{4c^2}{3}$.

Отримане рівняння задає еліпс із центром у точці $C\left(-\frac{c}{3};0\right)$. Його канонічне рівняння $\frac{\left(x+\frac{c}{3}\right)^2}{\frac{4c^2}{9}}+\frac{y^2}{\frac{c^2}{3}}=1$, з якого легко визначаються його півосі: $a=\frac{2c}{3}$, $b=\frac{c}{\sqrt{3}}$.

Відомо, що площа еліпса обчислюється за формулою $S=\pi ab$. Таким чином,

$$S_1=\iint_{\sigma_1} d\sigma=\sqrt{2}\iint_{(\sigma_1)_{xy}} dxdy=\sqrt{2}\pi\cdot\frac{2c^2}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\pi c^2;$$

2) нехай $\sigma_2:\ 2z=c-x$, тоді $z'_x=-\frac{1}{2}$, $z'_y=0$, а

$$d\sigma=\sqrt{1+\frac{1}{4}}\,dx\,dy=\frac{\sqrt{5}}{2}dx\,dy.$$

Отже,

$$S_2=\iint_{\sigma_2} d\sigma=\iint_{(\sigma_2)_{xy}}\frac{\sqrt{5}}{2}dx\,dy=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\pi\cdot\frac{2c^2}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\pi c^2.$$

Остаточно,

$$S=\iint_{\sigma} d\sigma=\iint_{\sigma_1} d\sigma+\iint_{\sigma_2} d\sigma=\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\pi c^2+\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\pi c^2=\frac{\pi c^2}{3\sqrt{3}}\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}\right).$$

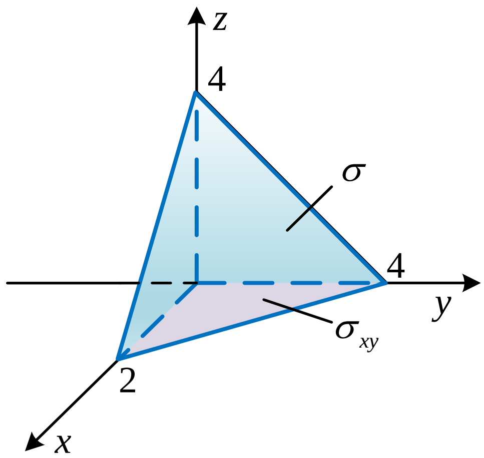
Відповідь: $\frac{\pi c^2}{3\sqrt{3}}\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$.

Приклад 11.8. Знайти координати центру ваги однорідної $(\gamma=1)$ матеріальної пластини $\sigma:\quad 2x+y+z-4=0,\ x,y,z\ge 0$.

Розв'язання.

Скористаємось формулами (11.7). Масу пластини знайдемо за формулою (11.6):

$$m=\iint_{\sigma}\gamma(x,y,z)\,d\sigma=\iint_{\sigma} d\sigma.$$



Оскільки $\sigma : z = 4 - 2x - y$, то $z'_x = -2,\ z'_y = -1$ й $d\sigma = \sqrt{6}\,dx\,dy$. Отже,

$$m = \sqrt{6}\iint\limits_{\sigma_{xy}} dx\,dy = \sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 = 4\sqrt{6}.$$

Знайдемо статичні моменти пластини:

$$M_{YZ} = \iint\limits_{\sigma} x\gamma\,d\sigma = \sqrt{6}\iint\limits_{\sigma_{xy}} x\,dx\,dy = \sqrt{6}\int_0^2 x\,dx\int_0^{4-2x} dy = \sqrt{6}\int_0^2 \left(4x - 2x^2\right)dx =$$

$$= \sqrt{6}\left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8\sqrt{6}}{3},$$

таким чином, $x_C = \dfrac{M_{YZ}}{m} = \dfrac{2}{3}$;

$$M_{ZX} = \iint\limits_{\sigma} y\gamma\,d\sigma = \sqrt{6}\iint\limits_{\sigma_{xy}} y\,dx\,dy = \sqrt{6}\int_0^2 dx\int_0^{4-2x} y\,dy = \frac{\sqrt{6}}{2}\int_0^2 (4-2x)^2\,dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{12}\cdot(4-2x)^3\Big|_0^2 = \frac{16\sqrt{6}}{3},$$

отже, $y_C = \dfrac{M_{ZX}}{m} = \dfrac{4}{3}$;

$$M_{XY} = \iint\limits_{\sigma} z\gamma\,d\sigma = \sqrt{6}\iint\limits_{\sigma_{xy}} (4 - 2x - y)\,dx\,dy = \sqrt{6}\int_0^2 dx\int_0^{4-2x}(4 - 2x - y)\,dy =$$

$$= \sqrt{6}\int_0^2\left(4y - 2xy - \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{4-2x}\right)dx = \sqrt{6}\int_0^2\left(2x^2 - 8x + 8\right)dx =$$

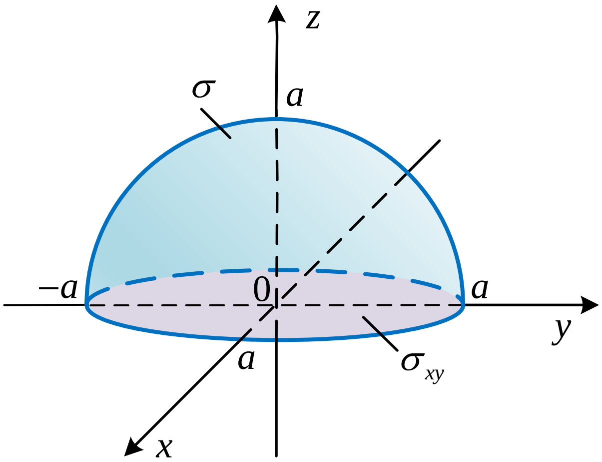
$$= 2\sqrt{6}\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\Bigg|_0^2 = 2\sqrt{6}\left(\frac{8}{3} - 8 + 8\right) = \frac{16\sqrt{6}}{3},$$

тобто, $z_C = \dfrac{M_{XY}}{m} = \dfrac{4}{3}$.

Відповідь: $C\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{4}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$.

Приклад 11.9. Обчислити момент інерції відносно осі OZ однорідної $(\gamma = 1)$ сферичної оболонки $\sigma:\ \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \ge 0$.

Розв'язання.



Скористаємось формулами (11.8):

$$I_{OZ} = \iint_{\sigma} \left(x^2 + y^2\right) \gamma(x, y, z)\, d\sigma.$$

Оскільки $\sigma:\ \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \ge 0$, то $d\sigma = \dfrac{a dx\, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ (див. **Приклад 11.5**). Отже,

$$I_{OZ} = \iint_{\sigma} \left(x^2 + y^2\right) \gamma(x, y, z)\, d\sigma = \left\| \gamma(x, y, z) = 1 \right\| = a \iint_{\sigma_{xy}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy.$$

Переходячи до полярних координат, одержимо

$$I_{OZ} = a \iint_{\sigma_{xy}} \frac{\rho^3}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}\, d\rho d\varphi = 2\pi a \int_0^a \frac{\rho^3}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}\, d\rho \ .$$

Інтеграл обчислимо за допомогою тригонометричної підстановки:

$$\int_0^a \frac{\rho^3}{\sqrt{a^2-\rho^2}}d\rho = \left\| \begin{matrix} \rho = a\cos t, d\rho = -a\sin t\, dt \\ t_H = \frac{\pi}{2}, \quad t_B = 0 \end{matrix} \right\| = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(a\cos t)^3}{a\sin t} a\sin t dt =$$

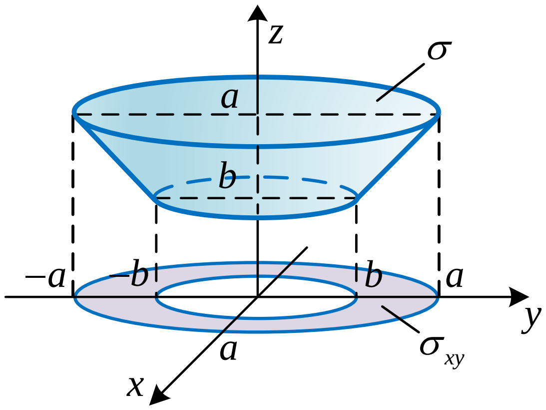
$$= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 t\right) d\sin t = a^3 \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a^3}{3},$$

отже, $I_{OZ} = \frac{4}{3}\pi a^4$.

Відповідь: $I_{OZ} = \frac{4}{3}\pi a^4$.

Приклад 11.10. Визначити, з якою силою матеріальна однорідна $(\gamma = 1)$ поверхня σ: $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le b \le z \le a$ притягує матеріальну точку $O(0;0;0)$ маси m_0.

Розв'язання.



Скористаємось формулами (11.9):

$$F_x = Gm_0 \iint_\sigma \frac{x-x_0}{r^3}\gamma(x,y,z)d\sigma, \quad F_y = Gm_0 \iint_\sigma \frac{y-y_0}{r^3}\gamma(x,y,z)d\sigma,$$

$$F_z = Gm_0 \iint_\sigma \frac{z-z_0}{r^3}\gamma(x,y,z)d\sigma.$$

Оскільки $\vec{r} = (x;y;z)$, то $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Якщо поверхня інтегрування конус $z = \sqrt{x^2+y^2}$, то $d\sigma = \sqrt{2}dxdy$, тоді

$$F_x = G\gamma m_0 \iint\limits_{\sigma} \frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} d\sigma = \| \gamma = 1 \| = \sqrt{2} G m_0 \iint\limits_{\sigma_{xy}} \frac{x}{\left(2\left(x^2+y^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}} dxdy.$$

Оскільки σ_{xy} – кільце, то інтегрування проведемо в полярних координатах:

$$F_x = \sqrt{2} G m_0 \iint\limits_{\sigma_{xy}} \frac{\rho^2 \cos\varphi}{\left(2\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}} d\rho d\varphi = \frac{1}{2} G m_0 \iint\limits_{\left(\sigma_{xy}\right)'} \frac{\cos\varphi}{\rho} d\rho d\varphi =$$

$$= \frac{m_0}{2} G \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int\limits_b^a \frac{d\rho}{\rho} = 0.$$

Аналогічно одержимо, що $F_y = G m_0 \iint\limits_{\sigma} \frac{y}{r^3} d\sigma = 0$. Далі,

$$F_z = G m_0 \iint\limits_{\sigma} \frac{z}{r^3} d\sigma = \sqrt{2} G m_0 \iint\limits_{\sigma_{xy}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\left(2\left(x^2+y^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}} dxdy = \frac{m_0}{2} G \iint\limits_{\sigma_{xy}} \frac{dxdy}{x^2+y^2}.$$

Переходимо до полярних координат:

$$F_z = \frac{m_0}{2} G \iint\limits_{\sigma_{xy}} \frac{dxdy}{x^2+y^2} = \frac{m_0}{2} G \iint\limits_{\left(\sigma_{xy}\right)'} \frac{d\rho d\varphi}{\rho} = \frac{m_0}{2} G \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_b^a \frac{d\rho}{\rho} = \pi m_0 G \ln\frac{a}{b}.$$

Відповідь: $\vec{F} = \left(0; 0; \pi m_0 G \ln\frac{a}{b}\right)$.

11.2. Поверхневі інтеграли другого роду

11.2.1. *Поняття орієнтованої поверхні*

Нехай σ – гладка поверхня, що обмежена контуром L. Виберемо на σ точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, побудуємо у цій точці нормаль $\vec{n}$ до поверхні. Зафіксуємо один із двох можливих напрямів нормалі. Виберемо на поверхні σ довільний замкнений контур γ, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ й не має спільних точок із контуром L (рис. 11.3).

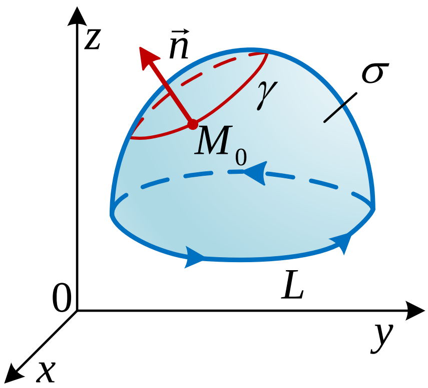


Рисунок 11.3

Якщо при переміщенні точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ уздовж контуру γ точка повернеться у початкове положення з тим же напрямом нормалі $\vec{n}$, то поверхня σ називається *двосторонньою*. Якщо при цьому напрям нормалі зміниться (на протилежний), то така поверхня називається *односторонньою*.

Будь-яка гладка поверхня, що задана рівнянням $z = f(x, y)$, двостороння. Якщо в кожній точці поверхні обрати напрям нормалі $\vec{n}$ таким чином, щоб вона утворювала гострий кут з віссю OZ (додатний напрям), одержимо *верхню* (*додатну*) *сторону поверхні*, а при протилежному напрямі нормалі $\vec{n}$ (тупий кут з віссю OZ) – її *нижню* (*від'ємну*) *сторону*.

Двосторонні поверхні називають також *орієнтованими*, а вибір напряму нормалі (сторони поверхні) – *орієнтацією поверхні*. Однобічні поверхні є неорієнтованими.

З поняттям сторони поверхні σ пов'язане поняття *орієнтації контуру* L, який її обмежує.

Нехай σ − орієнтована поверхня, тобто з обраною стороною. Напрям обходу контуру L називається *додатним* (відповідним орієнтації поверхні), якщо при обраному напрямі нормалі при обході контуру проти годинникової стрілки поверхня σ залишається ліворуч (рис. 11.3). Обхід у протилежному напрямі називається *від'ємним*.

Будь-яка замкнена поверхня без самоперетинань – двостороння. Розрізняють *внутрішню* й *зовнішню сторони замкненої поверхні*.

11.2.2. *Поверхневі інтеграли другого роду*

Нехай в області $V \subset \mathbb{R}^3$ задана гладка поверхня σ й вектор-функція $\vec{a} = \{P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)\}$, де P, Q й R − неперервні в області V функції. Припустимо, що в кожній точці $M(x;y;z)$ поверхні σ визначається додатний напрям нормалі одиничним вектором $\vec{n}^\circ(M)$, а його напрямні косинуси є неперервними функціями координат точок поверхні.

Розіб'ємо поверхню σ довільним чином на n елементарних площинок $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n$ із площами $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,...,\Delta\sigma_n$. Позначимо через d_k діаметр елементарної площинки σ_k. На кожній елементарній площинці σ_k виберемо довільну точку $M_k(x_k;y_k;z_k)$ (рис. 11.4), визначимо в ній нормаль $\vec{n}^\circ(M_k) = \vec{n}_k^\circ$, обчислимо значення вектор-функції $\vec{a}(M_k) = \{P(M_k);Q(M_k);R(M_k)\} = \vec{a}_k$ й складемо суму:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\vec{a}_k \cdot \vec{n}_k^\circ) \cdot \Delta\sigma_k .$$

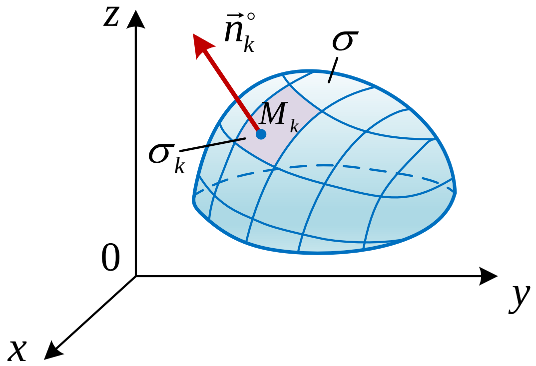


Рисунок 11.4

Якщо існує скінченна границя суми S_n за умови $\max d_k \to 0$, то вона називається *поверхневим інтегралом другого роду* й позначається

$$\iint_{\sigma} \left(\vec{a} \cdot \vec{n}^{\circ}\right) d\sigma . \tag{11.10}$$

У випадку замкненої поверхні σ інтеграл (11.10) має вигляд:

$$\oiint_{\sigma} \left(\vec{a} \cdot \vec{n}^{\circ}\right) d\sigma .$$

Фактично, інтеграл (11.10) – як поверхневий інтеграл першого роду – є поверхневим інтегралом другого роду від вектор-функції $\vec{a}$ по обраній стороні поверхні σ.

Якщо поверхня σ задана рівнянням $z = z(x, y)$, де $z(x, y)$ – неперервна разом зі своїми частинними похідними функція в області V, то на верхній (додатній) стороні поверхні *одиничний вектор нормалі* $\vec{n}^{\circ}(M)$ визначається за формулою:

$$\boxed{\vec{n}^{\circ}(M) = \frac{-z'_x(M)\vec{i} - z'_y(M)\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(z'_x(M)\right)^2 + \left(z'_y(M)\right)^2}},} \tag{11.11}$$

а на нижній (від'ємній) стороні:

$$\boxed{\vec{n}^{\circ}(M) = \frac{z'_x(M)\vec{i} + z'_y(M)\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(z'_x(M)\right)^2 + \left(z'_y(M)\right)^2}}.} \tag{11.12}$$

Оскільки $\vec{n}^{\circ} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$, то: $\vec{a} \cdot \vec{n}^{\circ} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$.

Якщо кути α, β, γ – гострі, то $\cos\alpha\, d\sigma = dy\,dz$, $\cos\beta\, d\sigma = dz\,dx$, $\cos\gamma\, d\sigma = dx\,dy$, а інтеграл (11.10) тоді можна записати у вигляді:

$$\boxed{\iint_{\sigma} \left(\vec{a} \cdot \vec{n}^{\circ}\right) d\sigma = \iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy .} \tag{11.13}$$

Інтеграл у правій частині (11.13) називається *поверхневим інтегралом другого роду в координатній формі*. Рівність (11.13) визначає зв'язок між поверхневими інтегралами першого й другого роду.

З означення поверхневого інтеграла другого роду випливає, що при зміні напряму нормалі на протилежний знак інтеграла (11.10) також змінюється на протилежний:

$$\iint_{\sigma^+} \left(\vec{a} \cdot \vec{n}^\circ\right) d\sigma = -\iint_{\sigma^-} \left(\vec{a} \cdot \vec{n}^\circ\right) d\sigma,$$

де σ^+ й σ^- – відповідно додатна й від'ємна сторони поверхні σ.

Фізичний зміст поверхневих інтегралів другого роду

Якщо вектор-функція $\vec{a}(M)$ визначає в кожній точці $M \in V$ швидкість течії рідини, то поверхневий інтеграл (11.10) обчислює *потік* або *кількість рідини*, що протікає через обрану сторону поверхні σ за одиницю часу. Якщо σ – замкнена поверхня, то інтеграл (11.10) – різниця між кількістю рідини, що втікає в область, обмежену поверхнею σ, і кількістю рідини, що витікає з неї.

11.2.3. *Обчислення поверхневих інтегралів другого роду*

Обчислювати поверхневі інтеграли другого роду можна двома способами:

1) зведенням його до поверхневого інтеграла першого роду за формулою (11.13);

2) безпосереднє обчислення, яке також зводиться до обчислення подвійного інтеграла по пласкій області. При цьому поверхневий інтеграл другого роду в координатній формі розбивають на три інтеграли з подальшим обчисленням кожного з них.

Теорема 11.1. *Нехай в області $V \subset \mathbb{R}^3$ задана гладка поверхня σ рівнянням $z = z(x, y)$ і функція $R(x, y, z)$, яка неперервна в цій області. Тоді для верхньої (додатної) сторони поверхні σ*

$$\iint_{\sigma^+} R(x, y, z)\,dxdy = \iint_{\sigma_{xy}} R\left[x, y, z(x, y)\right] dxdy, \qquad (11.14)$$

де σ_{xy} – проєкція поверхні σ на координатну площину XOY.

Аналогічно обчислюються інші два інтеграли. Якщо поверхня σ задана рівнянням $x = x(y,z)$, то

$$\iint_{\sigma} P(x,y,z)\,dy\,dz = \pm\iint_{\sigma_{yz}} P\left[x(y,z),y,z\right]dy\,dz\,. \tag{11.15}$$

Якщо поверхня σ задана рівнянням $y = y(x,z)$, то

$$\iint_{\sigma} Q(x,y,z)\,dz\,dx = \pm\iint_{\sigma_{zx}} Q\left[x,y(x,z),z\right]dz\,dx\,. \tag{11.16}$$

Знак в (11.15) і (11.16) вибирається залежно від того, по якій стороні поверхні σ проводиться інтегрування.

***Зауваження* 1.** Якщо поверхня σ замкнена, то при обчисленні інтеграла її слід розбити на частини, що задаються рівняннями $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$ або $z = z(x,y)$, та інтегрування проводити по кожній з них з урахуванням обраної сторони поверхні σ.

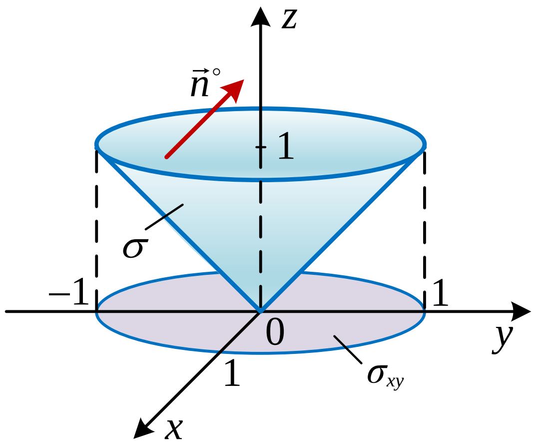
***Зауваження* 2.** Поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)dxdy$, узятий по частині циліндричної поверхні з твірними, що паралельні осі OZ, дорівнює нулю. В аналогічних випадках дорівнюють нулю й поверхневі інтеграли $\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz$ (твірна циліндричної поверхні паралельна осі OX) і $\iint\limits_{\sigma} Q(x,y,z)dzdx$ (твірна циліндричної поверхні паралельна осі OY).

***Зауваження* 3.** Якщо поверхня інтегрування лежить у площині, що перпендикулярна осі OZ, тобто задається рівнянням $z = \text{const}$, то поверхневі інтеграли $\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz$ й $\iint\limits_{\sigma} Q(x,y,z)dzdx$ відповідно до формул (11.15) і (11.16) дорівнюють нулю, тому що дорівнюють нулю площі проєкцій σ_{yz} і σ_{zx} поверхні σ на відповідні координатні площини.

Аналогічно, дорівнюють нулю поверхневі інтеграли $\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz$ й $\iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)dxdy$, якщо поверхня σ задається рівнянням $y = \text{const}$, і дорівнюють нулю поверхневі інтеграли $\iint\limits_{\sigma} Q(x,y,z)dzdx$ й $\iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)dxdy$, якщо поверхня σ задається рівнянням $x = \text{const}$.

Приклад 11.11. Обчислити $\iint\limits_{\sigma} z\,dxdy$, де σ − додатна сторона частини поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ за умови $0 \le z \le 1$.

Розв'язання. З умови випливає, що інтегрування проводиться по верхній стороні поверхні.



Користуючись рівнянням поверхні σ, перетворимо заданий інтеграл у подвійний за формулою (11.14).

З рівняння поверхні σ: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тоді

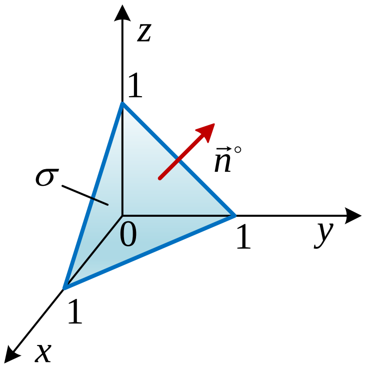
$$\iint\limits_{\sigma^+} zdxdy = \iint\limits_{\sigma_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy = \iint\limits_{(\sigma_{xy})'} \rho^2 d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 d\rho = 2\pi \cdot \left(\left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^1 \right) = \frac{2\pi}{3},$$

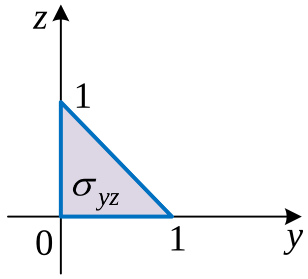
де σ_{xy} − проєкція σ в площину XOY − круг $x^2 + y^2 \le 1$. Тому подальші обчислення були проведені в полярних координатах.

Відповідь: $\dfrac{2\pi}{3}$.

Приклад 11.12. Обчислити $\iint\limits_{\sigma} xy^2 dydz$, де σ − додатна сторона частини площини $x+y+z=1$, що розташована в першому октанті.

Розв'язання. З умови випливає, що інтегрування проводиться по верхній стороні площини.





Користуючись рівнянням поверхні σ, перетворимо заданий інтеграл у подвійний за формулою (11.15).

З рівняння поверхні σ: $x=1-y-z$. Тоді

$$\iint\limits_{\sigma^+} xy^2 dydz = \iint\limits_{\sigma_{yz}} (1-y-z)\, y^2 dy\, dz = \int\limits_0^1 y^2 dy \int\limits_0^{1-y} (1-y-z)\, dz =$$

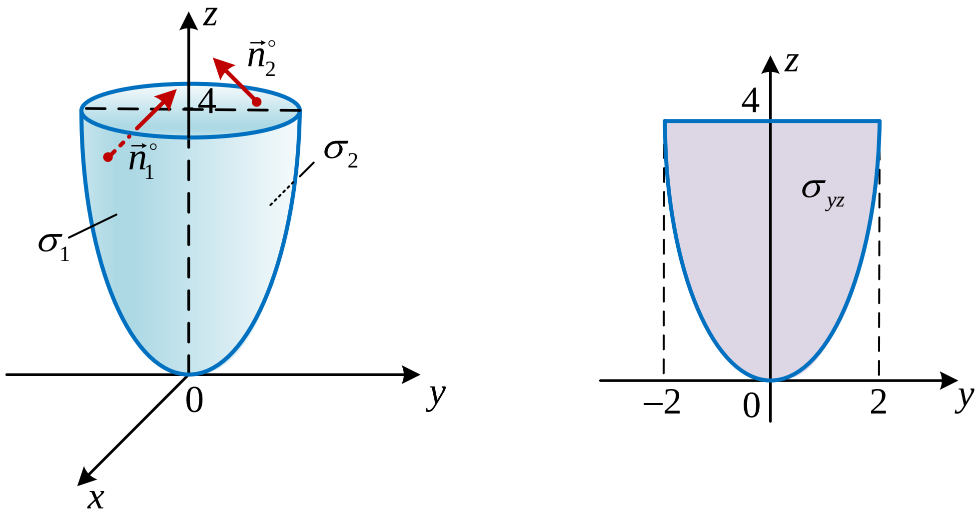
$$= \int\limits_0^1 y^2 \left(z - yz - \frac{z^2}{2} \Bigg|_0^{1-y} \right) dy = \int\limits_0^1 y^2 \left(1-y-y(1-y) - \frac{(1-y)^2}{2} \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{y^4}{2} - y^3 + \frac{y^2}{2} \right) dy = \left(\frac{y^5}{10} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{6} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{60}.$$

Відповідь: $\frac{1}{60}$.

Приклад 11.13. Обчислити $\iint\limits_{\sigma} xdydz$, де σ − додатна сторона частини поверхні $z=x^2+y^2$ за умови $0 \le z \le 4$.

Розв'язання. З умови випливає, що інтегрування проводиться по верхній стороні поверхні. Користуючись рівнянням поверхні σ, перетворимо заданий інтеграл у подвійний за формулою (11.15).



З рівняння поверхні $\sigma:\ x=\pm\sqrt{z-y^2}$. У випадку, коли $\sigma_1:\ x=\sqrt{z-y^2}$, заданий напрям нормалі до обраної сторони цієї частини поверхні утворює тупий кут з додатним напрямом осі OX, відповідний подвійний інтеграл буде зі знаком мінус.

Якщо обрана та частина параболоїда, для якої $\sigma_2:\ x=-\sqrt{z-y^2}$, то відповідний подвійний інтеграл також буде зі знаком мінус, оскільки задана нормаль для обраної сторони поверхні утворює гострий кут з додатним напрямом осі OX.

Оскільки проєкції поверхонь σ_1 і σ_2 в площину YOZ співпадають, то

$$\iint_{\sigma^+} x\,dydz = -\iint_{(\sigma_{yz})_1}\sqrt{z-y^2}\,dydz - \iint_{(\sigma_{yz})_2}\sqrt{z-y^2}\,dydz = -2\iint_{\sigma_{yz}}\sqrt{z-y^2}\,dydz =$$

$$= -2\int_{-2}^{2} dy\int_{y^2}^{4}\sqrt{z-y^2}\,dz = -\frac{4}{3}\int_{-2}^{2}\left(\left(z-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{y^2}^{4}\right)dy = -\frac{4}{3}\int_{-2}^{2}\left(4-y^2\right)^{\frac{3}{2}}dy =$$

$$= -\frac{8}{3}\int_{0}^{2}\left(4-y^2\right)^{\frac{3}{2}}dy = \left\| \begin{array}{c} y=2\sin t, \\ dy=2\cos t\,dt \end{array} \right\| = -\frac{8}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos t\right)^3 2\cos t dt = -\frac{128}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt =$$

$$= -\frac{32}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)^2 dt = -\frac{32}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 4t\right)dt =$$

$$= -\frac{32}{3}\left(\frac{3}{2}t+\sin 2t+\frac{1}{8}\sin 4t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = -16t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = -8\pi.$$

Відповідь: -8π.

11.2.4. *Зв'язок між інтегралами різних видів*

З однією з таких формул – формулою Гріна – ми вже познайомились в темі 10. Формула Гріна дозволяє обчислення криволінійного інтеграла по замкненому контуру звести до обчислення подвійного інтеграла по області, що обмежена цим замкненим контуром. Аналогічна формула має місце й для поверхневих інтегралів, а саме

Формула Стокса

Теорема 11.2. *Нехай в області* $V \subset \mathbb{R}^3$ *задана орієнтована гладка поверхня* σ, *обмежена додатно орієнтованим гладким контуром* L. *Функції* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ *й* $R(x,y,z)$ *неперервні в області* V *разом зі своїми частинними похідними. Тоді*

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_\sigma \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right) d\sigma,$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *– напрямні косинуси нормалі* $\vec{n}$ *до поверхні* σ,

L *– межа поверхні* σ (рис. 11.5).

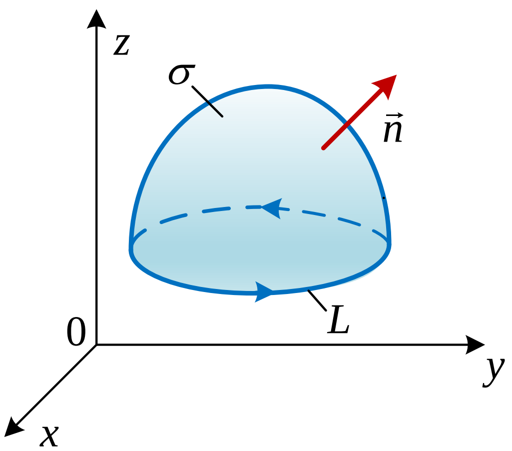


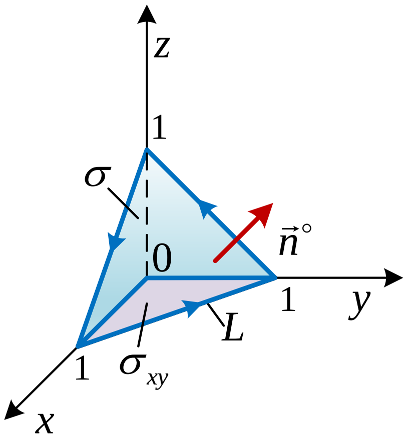
Рисунок 11.5

Приклад 11.14. Обчислити криволінійний інтеграл за формулою Стокса:

$$\oint\limits_L y^2dx + z^2dy + x^2dz,$$

де L − контур, утворений перетинанням площини $\sigma: x + y + z = 1$ з координатними площинами $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ (інтегрування по замкненому контуру L проводиться у напрямі за годинниковою стрілкою, якщо спостерігати з початку координат).

Розв'язання.



Для обчислення криволінійного інтеграла за формулою Стокса визначимо вектор нормалі до площини й одиничний вектор нормалі.

Оскільки обрана додатна сторона поверхні σ ($\cos\gamma > 0$), то нормаль $\vec{n} = \{1;1;1\}$, а одиничний вектор нормалі $\vec{n}^\circ = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

Тепер знайдемо необхідні для формули Стокса частинні похідні від функцій $P(x,y,z) = y^2$, $Q(x,y,z) = z^2$ й $R(x,y,z) = x^2$:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2y.$$

За формулою Стокса маємо:

$$\oint\limits_L y^2dx + z^2dy + x^2dz = \frac{-2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\sigma}(x+y+z)\,d\sigma = \frac{-2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\sigma_{xy}}\sqrt{3}dxdy = -2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = -1.$$

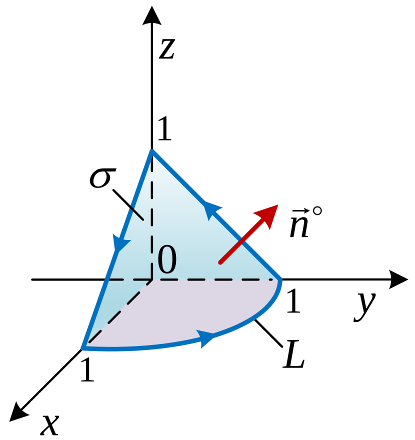
Відповідь: -1.

Приклад 11.15. Обчислити криволінійний інтеграл за формулою Стокса:

$$\oint_L (2xy - z)dx + (x^2 - 2z)dy - 2xdz,$$

де L – контур, утворений перетинанням поверхні конуса $(z-1)^2 = x^2 + y^2$ з координатними площинами $x \ge 0,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le 1$ (інтегрування по замкненому контуру L проводиться у напрямі за годинниковою стрілкою, якщо спостерігати з початку координат).

Розв'язання.



Для обчислення криволінійного інтеграла за формулою Стокса визначимо вектор нормалі до поверхні й одиничний вектор нормалі.

Оскільки обрана додатна сторона поверхні σ ($\cos\gamma > 0$), то нормаль до поверхні $\vec{n} = \left\{-z'_x; -z'_y; 1\right\}$, а одиничний вектор нормалі

$$\vec{n}^\circ = \left\{ \frac{-z'_x}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}; \frac{-z'_y}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}; \frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} \right\}.$$

Оскільки $z'_x = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = \dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, то $\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} = \sqrt{2}$, і

$\vec{n}^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; 1 \right)$, тобто

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тепер знайдемо необхідні для формули Стокса частинні похідні від функцій $P(x,y,z)=2xy-z$, $\quad Q(x,y,z)=x^2-2z$ й $R(x,y,z)=-2x$:

$$\frac{\partial R}{\partial y}=0,\ \frac{\partial Q}{\partial z}=-2,\ \frac{\partial P}{\partial z}=-1,\ \frac{\partial R}{\partial x}=-2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial P}{\partial y}=2x.$$

За формулою Стокса маємо:

$$\oint_L (2xy-z)dx+(x^2-2z)dy-2xdz=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_\sigma \frac{2x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma=\iint_{\sigma_{xy}}\frac{2x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy.$$

Подальші обчислення проведемо в полярних координатах:

$$\iint_{\sigma_{xy}}\frac{2x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_{(\sigma_{xy})'}\frac{\rho(2\cos\varphi+\sin\varphi)}{\rho}\rho d\rho d\varphi=\iint_{(\sigma_{xy})'}(2\cos\varphi+\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi\int_0^1\rho d\rho=\left(\left.(2\sin\varphi-\cos\varphi)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(\left.\frac{1}{2}\rho^2\right|_0^1\right)=\frac{3}{2}.$$

Відповідь: $\frac{3}{2}$.

Тепер розглянемо зв'язок між інтегралом по замкненій поверхні й потрійним інтегралом по області, обмеженої цією поверхнею.

Формула Остроградського-Гаусса

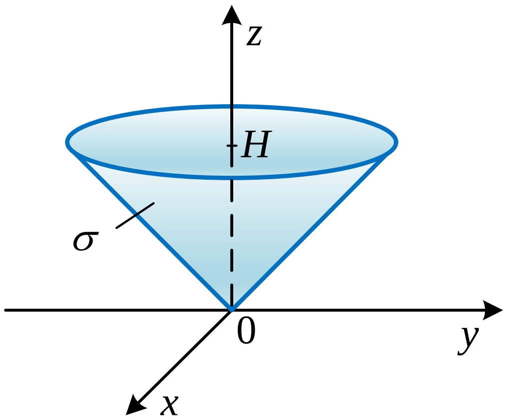
Теорема 11.3. *Нехай у замкненій області $V\subset\mathbb{R}^3$, що обмежена поверхнею σ, функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ й $R(x,y,z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними. Тоді для додатно орієнтованої поверхні σ (нормаль зовнішня) має місце формула*:

$$\oiint_{\sigma^+}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\sigma=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz\,.$$

Приклад 11.16. Обчислити поверхневий інтеграл по зовнішній стороні замкненої поверхні σ за формулою Остроградського-Гаусса:

$$\oiint\limits_{\sigma^+} xdydz + ydzdx + zdxdy, \quad \sigma: \quad z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = H.$$

Розв'язання.



Знайдемо необхідні для формули Остроградського-Гаусса частинні похідні від функцій $P(x,y,z) = x$, $Q(x,y,z) = y$ й $R(x,y,z) = z$: $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial R}{\partial z} = 1$.

Тоді

$$\oiint\limits_{\sigma^+} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz =$$

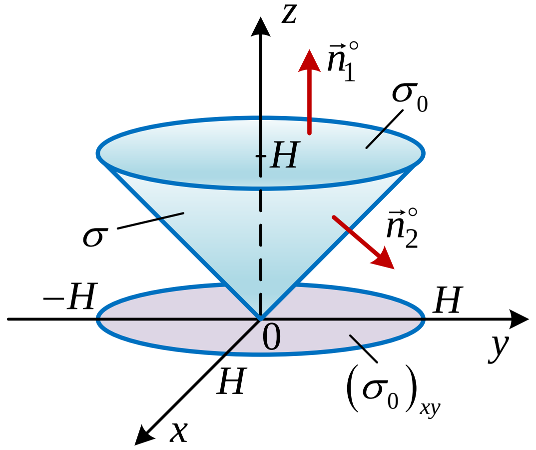
$$= 3\iiint\limits_{V} dxdydz = 3V_{\text{конуса}} = 3 \cdot \frac{1}{3}\pi H^2 \cdot H = \pi H^3.$$

Відповідь: πH^3.

Приклад 11.17. Обчислити поверхневий інтеграл по нижній частині поверхні σ:

$$\iint\limits_{\sigma} (y - z)dydz + (z - x)dzdx + (x - y)dxdy, \quad \sigma: \quad z = \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 \le z \le H.$$

Розв'язання. Скористаємось для обчислення цього поверхневого інтеграла формулою Остроградського-Гаусса. Для цього доповнимо поверхню інтегрування σ до замкненої $\bar{\sigma}$ частиною площини $z = H$ (σ_0), що міститься усередині конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, і виберемо додатну (зовнішню) сторону цієї замкненої поверхні.



Тоді

$$\iint\limits_{\sigma}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy=$$

$$=\oiint\limits_{\bar{\sigma}^+}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy-$$

$$-\iint\limits_{\sigma_0}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy.$$

Знайдемо необхідні для формули Остроградського-Гаусса частинні похідні від функцій $P(x,y,z)=y-z,\ Q(x,y,z)=z-x$ й $R(x,y,z)=x-y$:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

Тоді за формулою Остроградського-Гаусса

$$\oiint\limits_{\bar{\sigma}^+}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy=0.$$

Поверхня σ_0 задається рівнянням $z=H$ і проєктується в площину XOY в круг $x^2+y^2\le H^2$. Тому

$$\iint\limits_{\sigma_0}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{(\sigma_0)_{xy}}(x-y)dxdy=\iint\limits_{(\sigma_0)'_{xy}}(\cos\varphi-\sin\varphi)\rho^2 d\rho\, d\varphi=0,$$

оскільки $\int\limits_0^{2\pi}(\cos\varphi-\sin\varphi)d\varphi=0.$ Остаточно одержуємо, що

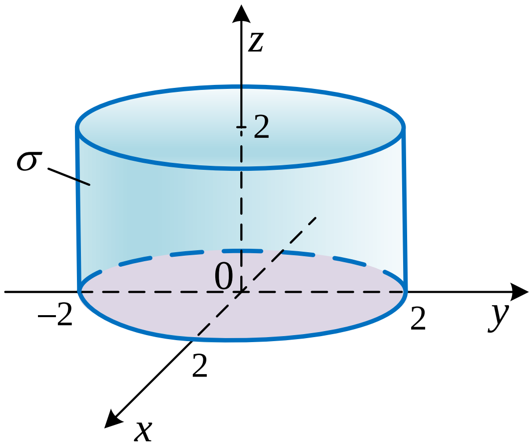
$$\iint\limits_{\sigma}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy=0.$$

Відповідь: 0.

Приклад 11.18. Обчислити поверхневий інтеграл по зовнішній стороні замкненої поверхні σ за формулою Остроградського-Гаусса:

$$\oiint\limits_{\sigma^+} 3xy^2dydz + 3yx^2dzdx + z^3dxdy, \quad \sigma: \quad x^2 + y^2 = 4, \; z = 0, \quad z = 2.$$

Розв'язання.



Знайдемо необхідні для формули Остроградського-Гаусса частинні похідні від функцій $P(x,y,z) = 3xy^2$, $Q(x,y,z) = 3yx^2$ й $R(x,y,z) = z^3$:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3y^2, \frac{\partial Q}{\partial y} = 3x^2, \frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2.$$

Обчислення проведемо у циліндричній системі координат:

$$\oiint\limits_{\sigma^+} 3xy^2dydz + 3yx^2dzdx + z^3dxdy = 3\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dxdydz =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_0^2 \left(\rho^2 + z^2\right)dz = 6\pi \int_0^2 \rho \left(\rho^2 z + \frac{z^3}{3}\Bigg|_0^2\right) d\rho = 6\pi \int_0^2 \left(2\rho^3 + \frac{8}{3}\rho\right) d\rho =$$

$$= 6\pi \left(\frac{\rho^4}{2} + \frac{4}{3}\rho^2\right)\Bigg|_0^2 = 6\pi \left(8 + \frac{16}{3}\right) = 80\pi.$$

Відповідь: 80π.

Приклад 11.19. Обчислити поверхневий інтеграл за формулою Остроградського-Гаусса по зовнішній стороні замкненої поверхні σ:

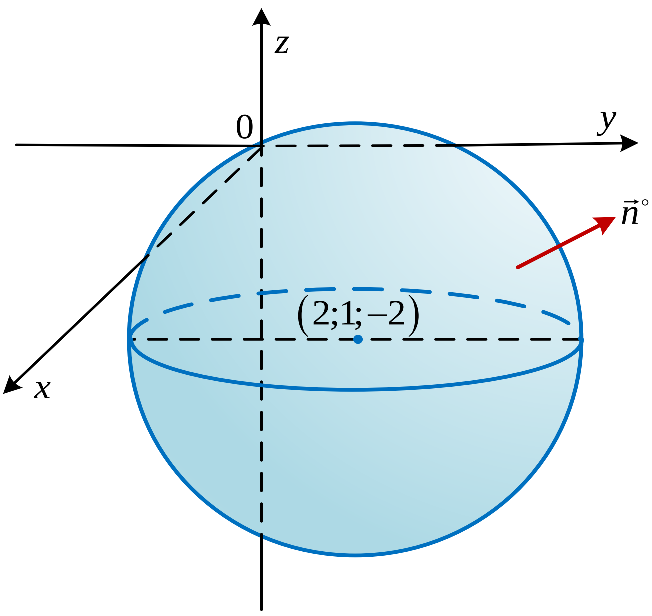
$$\oiint\limits_{\sigma^+} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy, \quad \sigma: \; (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9.$$

Розв'язання. Знайдемо необхідні для формули Остроградського-Гаусса частинні похідні від функцій $P(x,y,z)=x^2$, $Q(x,y,z)=y^2$ й $R(x,y,z)=z^2$:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial Q}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial R}{\partial z}=2z.$$

$$\oiint_{\sigma^+} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=2\iiint_V (x+y+z)dxdydz,$$

де V − куля $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2\le 9$.



Обчислення проведемо у сферичних координатах:

$$\iiint_V (x+y+z)dxdydz=\left\|\begin{array}{c} x-2=r\cos\varphi\sin\theta, \\ y-1=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z+2=r\cos\theta,\ |J|=r^2\sin\theta \end{array}\right\|=$$

$$=\iiint_{V'}\big(r(\cos\varphi\sin\theta+\sin\varphi\sin\theta+\cos\theta)+1\big)r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta.$$

Скористаємось властивістю лінійності інтегралів для зображення отриманого потрійного інтеграла у вигляді суми таких інтегралів:

$$I_1=\iiint_{V'} r^3\sin^2\theta(\cos\varphi+\sin\varphi)dr\, d\varphi\, d\theta,$$

$$I_2 = \iiint\limits_{V'} r^3 \sin\theta \cos\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta \,, \quad I_3 = \iiint\limits_{V'} r^2 \sin\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta .$$

Обчислимо перший з них:

$$I_1 = \iiint\limits_{V'} r^3 \sin^2\theta (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi \, d\theta \, dr = \int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta \int\limits_0^3 r^3 dr = 0,$$

оскільки $\int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi = 0.$

Далі,

$$I_2 = \iiint\limits_{V'} r^3 \sin\theta \cos\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d \sin\theta \int\limits_0^3 r^3 dr =$$

$$= 2\pi \cdot \left(\left. \frac{\sin^2\theta}{2} \right|_0^{\pi} \right) \cdot \left(\frac{3^4}{4} \right) = 0 \,,$$

оскільки $\sin 0 = \sin\pi = 0.$

Нарешті,

$$I_3 = \iiint\limits_{V'} r^2 \sin\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^3 r^2 dr = 2\pi \cdot \left(-\cos\theta \Big|_0^{\pi} \right) \cdot \left(\frac{3^3}{3} \right) = 36\pi .$$

Остаточно маємо, що

$$\oiint\limits_{\sigma^+} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = 2\iiint\limits_V (x + y + z) dxdydz = 72\pi \,.$$

Відповідь: 72π .

Контрольні запитання

1. Що називається інтегралом по поверхні?

2. Як визначається орієнтація поверхні у просторі?

3. Які поверхні називаються двосторонніми, односторонніми? Наведіть приклади.

4. Наведіть формулу обчислення поверхневого інтеграла першого роду за допомогою подвійного інтеграла у випадку явного завдання поверхні.

5. Які фізичні та механічні застосування поверхневих інтегралів першого роду?

6. Що називається поверхневим інтегралом другого роду?

7. Чи існує зв'язок між інтегралами по поверхні першого і другого роду?

8. Що означає обчислити інтеграл по визначеній стороні поверхні?

9. Як обчислити поверхневий інтеграл другого роду за допомогою подвійного інтеграла?

10. Наведіть формули обчислення поверхневих інтегралів другого роду.

11. В чому полягає фізичний зміст поверхневого інтеграла другого роду?

12. Як вводиться поняття додатного напряму обходу контуру, що погоджене з орієнтацією поверхні, яка обмежена цим контуром?

13. В чому полягає формула Стокса і за яких умов вона вірна?

14. Дослідження криволінійних інтегралів другого роду у просторі за допомогою формули Стокса.

15. В чому полягає формула Остроградського-Гаусса і за яких умов вона вірна?

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити $\iint\limits_{\sigma} z d\sigma$, σ: частина площини $z=3$, яка обмежена площинами $x=0, x=2, y=0, y=1$.

2. Обчислити площу частини поверхні σ: $x+y+z=1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

3. Знайти масу частини поверхні σ: $z=4$ із заданою поверхневою щільністю $\gamma(x,y,z)=z-2$, яка вирізана параболоїдом $z=x^2+y^2$.

4. Обчислити площу частини поверхні σ: $x+z=5$, $0\le x\le 5$, $0\le y\le 3$.

5. Знайти координату x_C центру ваги частини однорідної $(\gamma=1)$ поверхні σ: $x+y+z=3,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1.$

6. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} z d\sigma$ по частині поверхні σ: $z=x^2+y^2$ за умови $0\le z\le 1$.

7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma}\left(z^2+y^2\right)d\sigma$ по частині поверхні σ: $x+z=0$, що знаходиться усередині циліндра $x^2+y^2=R^2$.

8. Обчислити $\oiint\limits_{\sigma}(2x-y)dydz+(z+3y)dzdx+(x-z)dxdy$ за формулою Остроградського-Гаусса, де σ – зовнішня сторона поверхні піраміди, що обмежена площинами $x+y+z=2, x=0, y=0, z=0$.

9. Обчислити $\oiint\limits_{\sigma}(x+2y-3z)dydz+\left(e^y+2z\right)dxdy$ за формулою Остроградського-Гаусса, де σ – зовнішня сторона поверхні циліндра $x^2+y^2=1$, що обмежений площинами $z=1$ й $z=3$.

10. Обчислити $\oiint\limits_{\sigma}(3y+2z-1)dzdx-\left(e^{2x}-4y+z\right)dxdy$ за формулою Остроградського-Гаусса, де σ – зовнішня сторона поверхні паралелепіпеда, що обмежений площинами $x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=3,\ z=0, z=4$.

11. Обчислити за формулою Стокса $\oint\limits_{L} xdx+ydy+zdz$, L: контур $\triangle ABC$ з вершинами $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, за умови, що обхід контуру інтегрування відбувається за годинниковою стрілкою, якщо спостерігати з початку координат.

12. Обчислити за формулою Стокса:

$$\oint_L (2y+\sin x)dx + (\cos y + z)dy + \left(3x+z^3\right)dz,\ L:\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=3, \end{cases}$$

за умови, що обхід контуру інтегрування відбувається за годинниковою стрілкою, якщо спостерігати з початку координат.

13. Обчислити $\iint_\sigma yzdydz + xzdxdz + xydxdy$, де σ − зовнішня сторона частини циліндричної поверхні $x^2+y^2=a^2$ при $0 \le z \le h$.

14. Обчислити за формулою Стокса: $\int_L ydx + zdy + xdz$, де L − коло $x^2+y^2+z^2=4,\quad x+y+z=0$, яке пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитись із точки $A(2;0;0)$.

15. Користуючись формулою Остроградського-Гаусса, обчислити поверхневий інтеграл $\oiint_\sigma x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$, де σ − зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Відповіді

1. 6. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** 8π. **4.** $15\sqrt{2}$. **5.** $\frac{1}{2}$. **6.** $\frac{\pi}{60}\left(25\sqrt{5}+1\right)$. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi R^4$. **8.** $\frac{16}{3}$.

9. 6π. **10.** 48. **11.** 0. **12.** -8π. **13.** 0. **14.** $-4\pi\sqrt{3}$. **15.** $\frac{12\pi a^5}{5}$.

Список джерел інформації

1. Геворкян Ю.Л. Функції багатьох змінних. Диференціальні рівняння / Ю.Л. Геворкян, О.Л. Григор'єв, Н.О. Чікіна. – Харків : ХДПУ, 1998. – 132 с.

2. Вища математика в прикладах і задачах / Під ред. Л.В. Курпи. – Харків : НТУ «ХПІ», 2009. – Т. 1. – 532 с.

Режим доступу: http://repository.kpi.kharkov.ua/bitstream/KhPI-Press/4617/1/Kurpa_Vyshcha_matem_T.1_Gl.1-4_2009.pdf.

3. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч. Ч. 1 / Н.О. Чікіна, І.В. Антонова, Л.О. Балака та ін. ; за ред. Н.О. Чікіної. – Харків : Підручник НТУ «ХПІ», 2012. – 224 с.

Режим доступу: http://repository.kpi.kharkov.ua/bitstream/KhPI-Press/17443/1/Chikina_Zbirnyk_rozrakhunkovo_Ch_1_2012.pdf.

4. Збірник розрахунково графічних завдань з вищої математики у 2 ч. Ч. 2. /за ред. Чікіної Н.О. – Харків : Підручник НТУ «ХПІ», 2013. 216 с.

Режим доступу: https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/17448.

5. Подвійні та потрійні інтеграли: навч. посібник /Першина Ю.І., Пріщенко О.П., Черемська Н.В., Черногор Т.Т. – Харків : Видавництво «Друкарня Мадрид», 2022. – 106 с.

Режим доступу: https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/58325.

6. Радченко О.М. Математичний аналіз. Частина друга: Ряди та інтеграли з параметром. Функції декількох змінних. – Київ : Видав-во ТВІМС, 2000. – 234 с.

Режим доступу: https://k.twirpx.link/file/402500/.

Додаткові інформаційні відеоресурси

1. Частинні похідні функцій декількох змінних: https://youtu.be/8MIesQxbiHI?si=__bUiDEzI-YgOqnT.

2. Градієнт і частинні похідні: https://youtu.be/GkB4vW16QHI.

3. Градієнт та похідна у напрямі: https://youtu.be/a7YU9YQLaWs?si=QhncYs7_ywz3sx5r.

4. Обчислення подвійних інтегралів: https://youtu.be/gifQWtTWqEY?si=QF1k-gu0IkMsNO7q.

5. Подвійний інтеграл у полярних координатах: https://youtu.be/GHBMiscPE-g?si=7mlniIDyx4nna3_l.

6. Застосування подвійних інтегралів: https://youtu.be/Dcw6ViJeK8w?si=Q2FhnBa7JK7iZbty.

7. Поверхні у просторі: https://youtu.be/-xk5s2bT4bk?si=tbgJmXwlU5QDAW8u.

8. Системи координат у просторі: прямокутна, циліндрична, сферична: https://youtu.be/9yKS3oBdIVs?si=JOg-zQCXZgFmuOSs.

9. Потрійний інтеграл в декартових координатах: https://youtu.be/qXnoYfQEXls?si=TYr_wJ5kKcUwNWX-.

10. Застосування потрійних інтегралів: https://youtu.be/NWxsnHaD1kY?si=N82DdWZveKfFeWYf.

Зміст

Навчальне видання

ЧІКІНА Наталія Олександрівна
АНТОНОВА Ірина Володимирівна

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ. ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Навчальний посібник
для студентів технічних спеціальностей
усіх форм навчання

Відповідальна за випуск проф. Першина Ю. І.

Роботу до видання рекомендував проф. Геворкян Ю. Л.

В авторській редакції

План 2026 р., поз. 26

Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 9,1

Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.

Електронне видання