МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О. Ю. Заковоротний, Т. О. Орлова, Д. В. Гриньов

ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ІНТЕЛЕКТ

Навчальний посібник

Затверджено
редакційно-видавничою
радою НТУ «ХПІ»,
протокол №1 від 15.02.2024 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2024

УДК 004.89
З-19

Рецензенти:

В. Д. Ковальов, д-р техн. наук, проф., Лауреат премії Кабінету Міністрів України, ректор Донбаської державної машинобудівної академії;

А. А. Коваленко, д-р техн. наук, проф., завідувач кафедри електронних обчислювальних машин, Харківський національний університет радіоелектроніки.

Рекомендовано Вченою радою Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» як навчальний посібник для студентів зі спеціальностей: 123 «Комп'ютерна інженерія» та 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
(протокол № 3 від 29.03.2024 р.)

Заковоротний О. Ю.

З-19 Обчислювальний інтелект : навчальний посібник /О. Ю. Заковоротний, Т. О. Орлова, Д. В. Гриньов. – Харків : НТУ «ХПІ», 2024. – 264 с.

ISBN 978-617-05-0466-1

Розглянуто фундаментальні аспекти нечіткої логіки, систем нечіткого виводу та генетичних алгоритмів. Детально аналізуються як теоретичні, так і практичні аспекти сучасних нечітких систем, а також генетичні алгоритми, від їх математичного підґрунтя та принципів функціонування до практичних методів їх використання для оптимізації та розв'язання завдань у галузі штучного інтелекту. Посібник ілюструє теоретичний матеріал великою кількістю прикладів, що допомагає краще зрозуміти та застосовувати наведений матеріал.

Призначено для студентів денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 123 «Комп'ютерна інженерія» та 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

Іл. 137. Табл. 16. Бібліог. 22 назв.

УДК 004.89

ISBN 978-617-05-0466-1

© Заковоротний О. Ю., Орлова Т. О., Гриньов Д. В., 2024
© НТУ «ХПІ», 2024

РОЗДІЛ 1

ВСТУП ДО НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ «М'ЯКИХ ОБЧИСЛЕНЬ»

1.1. Історичний розвиток «м'яких обчислень», «обчислювального інтелекту» та «нечіткої логіки»

Автор теорії нечітких множин відомий азербайджанський, а потім й американський учений-математик Лютфі Аскар Заде.

У реальному житті часто трапляються випадки, коли просто необхідно враховувати неясність і неточність інформації про явища й процеси навколишнього світу. Теорія Заде – це цікава й багатообіцяюча спроба дати хоча б схематичний опис розв'язання подібних проблем. Цю теорію побудовано на базі теорії множин, хоч і в зовсім несподіваній інтерпретації деяких із цих множин (нечітких підмножин). Заде протиставляє двозначній і навіть багатозначній логіці логіку з нечіткою істинністю, нечіткими зв'язками й нечіткими висновками. На його думку, саме така нечітка логіка, ще не досить вивчена, відіграє основну роль у здатності людського мислення вибирати з широкого інформаційного потоку лише ті відомості, які мають хоча б посереднє відношення до розв'язуваної задачі. Особливо це стосується здатності людини вибирати корисну інформацію з повідомлень, котрі сформульовані природною мовою. У зв'язку з таким поглядом на природну мову Заде вводить поняття «лінгвістична змінна». Значеннями лінгвістичної змінної є вирази природної чи штучної мови. Так, наприклад, якщо «високий», «дуже високий», «невисокий» тощо – це суть значення слова «висота», то «висота» вважається лінгвістичною змінною, оскільки її значення змінюється у досить широкому діапазоні.

Нечіткі обчислення є основою нового наукового напряму, названого «м'які обчислення» або «обчислювальний інтелект», який сформувався в останні 30 років, і включає також нейро-нечіткі обчислення, еволюційні і генетичні алгоритми та інші.

Поняття «м'які обчислення» було введене засновником нечіткої логіки Л. Заде на семінарі в 1994 році, як об'єднання обчислювальних методологій, які колективно забезпечують основи для розуміння, конструювання і розвитку інтелектуальних систем, зокрема, систем інтелектуального аналізу даних. Основоположна відмінність м'яких обчислень від традиційних жорстких обчислень – це пристосованість до роботи з неточними, невизначеними або частково істинними даними, що виражається в «допустимому ставленні до неточності, невизначеності і часткової істинності для досягнення зручності маніпулювання, робастності, низькій вартості рішення і кращої згоди з реальністю».

М'які обчислення не гарантують, що знайдене рішення буде оптимальним або буде досягнутий глобальний екстремум за прийнятний час. Проте вони можуть застосовуватися для пошуку допустимого рішення задачі за «достатньо короткий час». В рамках м'яких обчислень кожна з методологій має відмінності у використанні. Зокрема, нечітка логіка працює з неточністю, зернистою (гранульованою) структурою інформації, наближеними міркуваннями і обчисленнями із словами. Слід відмітити, що поняття нечіткості цілком узгоджується з нашими інтуїтивними уявленнями про навколишній світ. Велика частина понять, які ми використовуємо, за своєю природою нечіткі і розмиті і спроба загнати їх в рамки загальної логіки приводить до неприпустимих змін або спотворення цих понять.

Незважаючи на зовнішню простоту і природність базових понять нечітких обчислень, знадобилося більше п'яти років, щоб побудувати і довести комплекс постулатів і теорем, які роблять логіку логікою, а алгебру - алгеброю. Паралельно з розробкою теоретичних основ нової науки опрацьовувалися різні можливості її

практичного застосування. І в 1973 р. – вдалося показати, що нечіткі обчислення можуть бути покладені в основу нового покоління інтелектуальних систем управління. Практично відразу після виходу в світ фундаментальних робіт по нечітким обчисленням одна невелика фірма з Данії застосувала викладені в них принципи для удосконалення системи управління складним виробничим процесом. Результат перевершив всі очікування – через чотири роки прибутки від впровадження нової системи обчислювалися сотнями тисяч доларів.

Цілком природно, що військові зацікавились таким перспективним інструментом - і на початку 80-х років в Японії, а потім і в США, в були розгорнені комплексні роботи по використанню нечітких обчислень в різних оборонних проектах. Одним з найбільш вражаючих результатів стало створення мікропроцесора на основі нечіткої логіки (*fuzzy-chip*), здатного автоматично вирішувати відому «задачу про собаку, що наздоганяє кота». Зрозуміло, в ролі кота виступала міжконтинентальна ракета супротивника, а в ролі собаки – мобільна зенітна ракета, дуже легка для установки на її борту громіздкої традиційної системи управління. Між іншим, згодом ті ж методи нечіткої логіки дозволили вирішити і обернену задачу – розробити маневри для ефективного відходу від антиракет. Перший успіх окрилив військових і нечіткі обчислення упевнено зайняли своє місце серед стратегічно важливих наукових напрямків. Виникла парадоксальна ситуація – офіційно не визнана американською академічною наукою нечітка логіка в той же час увійшла до переліку передових технологій, заборонених до вивезення із США комітетом з контролю над експортом.

Проте основні результати використання нечітких обчислень в прикладних задачах були отримані не військовими, а промисловцями, і не в США, а в Японії. До 1990 року з'явилося близько 40 патентів, що відносяться до нечітких обчислень (з них 30 японських). Сорок вісім японських компаній утворили спільну лабораторію *LIFE* (*Laboratory for International Fuzzy Engineering*). Японський уряд фінансував 5-річну програму по «нечіткій логіці», що включало у себе 19 проектів:

від систем оцінки глобального забруднення атмосфери і передбачення землетрусів до АСУ заводських цехів і складів. В результаті з'явилися ряд нових мікрочіпів, заснованих на «нечітких обчисленнях». Японські вчені довели практичне втілення нечітких обчислень до досконалості. Нечіткі обчислення стали основою автоматики прокатних станів, інтелектуальних складів і «безлюдних виробництв».

Проте, мабуть, більш вражаючим виглядає використання нечітких обчислень в дешевих виробах масового ринку - пилососах, відеокамерах, мікрохвильових печах і тому подібне. Піонером у застосуванні нечіткої логіки в побутових виробах виступила фірма *Matsuhita*. У лютому 2001 р. вона анонсувала першу «інтелектуальну» пральну машину, в системі управління якої поєднувалися нечітка логіка і нейронна мережа. Автоматично визначаючи нечіткі вхідні параметри (об'єм і якість білизни, рівень забрудненості, тип порошку і так далі), пральна машина безпомилково вибирала оптимальний режим прання з 3800 можливих. А через пару років використання нечіткої логіки в японській побутовій техніці стало масовим.

Паралельно з використанням нечітких обчислень в системах управління робилися зусилля по створенню на їх основі нового покоління експертних систем. В цей час М. Земанковою (*Zemankova*) було закладено основу теорії нечітких баз даних, а нечітку експертну систему Фудзи-банка, що приносить до 700000 доларів на місяць на короткостроковій біржовій грі, створила Сизуко Ясунобу (*Chizuko Yasunobu*). При цьому така експертна система, що управляє діями «електронного трейдера» *Fuji Bank*, складається всього з 200 правил. Нечіткі експертні системи, окрім своєї основної переваги - кращою адаптацією до умов реального світу, володіють ще двома перевагами в порівнянні з традиційними. По-перше, вони вільні від «циклічних блокувань» при побудові висновків. По-друге, різні бази нечітких правил можна з легкістю об'єднувати, що рідко вдається в звичайних експертних системах. Існують багато експертних систем (переважно з області промислової діагностики і медицини), які засновані на концепції нечітких обчислень.

Заслуговує на увагу досвід використання нечітких обчислень у фінансовій сфері. Для вирішення складних задач прогнозування різних фінансових індикаторів банкіри і фінансисти використовують дорогі комплексні системи, до складу яких входять і нечіткі обчислення. Початок цьому процесу поклала японська фінансова корпорація *Yamaichi Securuties*. Задавшись метою автоматизувати гру на ринку коштовних паперів, ця компанія залучила до роботи близько 30 фахівців з штучного інтелекту. У першу версію системи, завершену на початку 1990 р., увійшли 600 нечітких правил – втілення досвіду десяти провідних брокерів корпорації. Перш ніж зважитися на використання нової системи в реальних умовах, її протестували на трирічній вибірці фінансових даних (1987 – 1989 рр.). Система з блиском витримала випробування. Особливий подив екзаменаторів викликало те, що за тиждень до настання біржового краху (знаменитого «Чорного понеділка» на токійській біржі в 1988 р.) система розпродала весь пакет акцій, що звело б збиток компанії практично до нуля. Чи треба говорити, що після цього питання про доцільність використання нечіткої логіки у фінансовій сфері вже не піднімалося.

Природно, що успіх фінансистів не міг не зачепити промислові корпорації США. Вони занепокоїлися втратою стратегічної ініціативи і явними успіхами японців. «Нечітка логіка» привернула їх пильну увагу. Такі корпорації як «*Motorola*», «*General Electric*», «*Otis Elevator*», «*Pacific Gas* & *Electric*», «*Ford*» та інші почали інвестувати у програми подальших розробок в цьому напрямі. Це не забарилося позначитися на результатах. Отримавши солідну фінансову підтримку, вчені змогли швидко реалізувати свої розробки для широкого круга додатків. Таким чином, інструмент нечітких обчислень вийшов на масовий ринок.

Можна навести і інші приклади вживання нечітких обчислень в бізнесі. Вдалий досвід Ганса Циммермана (*Hans Zimmermann*) по використанню експертної системи з нечіткими правилами для аналізу інвестиційної активності місті Аахене (Германія) привів до створення комерційного пакету *ASK* для оцінки кредитних і інвестиційних ризиків. А система управління складськими запасами, описана як

приклад в пакеті *CubiCalc*, настільки проста, що може бути з легкістю використана мало підготовленим оптовим торговцем.

Основними «споживачами» нечітких обчислень на ринку України є банкіри і фінансисти, а також фахівці в області політичного і економічного аналізу. Вони використовують нечіткі обчислення для створення моделей різних економічних, політичних, біржових ситуацій. Таким чином, лише чітке розуміння основних аспектів розвитку і вживання нечітких методів може забезпечити швидке вирішення багатьох наукових задач, а також всіляких проблем в різних областях ділової діяльності людини.

Умовно розвиток даної науки можна розділити на три етапи:

- перший (1965 р. – початок 70-х рр.) – етап формування основних теоретичних постулатів;
- другий (1973 р. – початок 90-х рр.) – етап практичних розробок в різних сферах життя, заснованих на нечіткій логіці; народження нового наукового напряму в рамках нечіткої логіки «*Fuzzy Economics*»;
- третій (1995 р. - наш час) – етап масового використання продукції, в основі роботи якої лежить нечітка логіка.

Проте таке ділення достатньо умовно, оскільки теоретичні дослідження в цій галузі знань не припиняються і досі, з кожним роком розширюючи сферу застосування даного математичного апарату.

Першим вагомим кроком у напрямі моделювання неоднозначних тверджень виявилася теорія нечітких, або м’яких множин (*Fuzzy Sets*). Батьком нечітких множин став американський професор Каліфорнійського університету в Берклі директор Ініціативи Берклі по м'яких обчисленнях (*Berkeley Initiative in Soft Computing, BISC*) Лотфрі Аскер Заде (*Lotfi Asker Zadeh*), академік Американської Інженерної Академії і почесний доктор півтора десятків університетів в різних країнах.

У наш час наступним досягненням теорії нечітких множин є введення так званих нечітких чисел – нечітких підмножин спеціалізованого вигляду, відповідних висловам типу «значення змінної, що приблизно дорівнює *a*». Як приклад можна використовувати так зване трикутне нечітке число, де виділяються три точки: мінімально можливе, найбільш очікуване і максимально можливе значення чинника. Трикутні числа – це найчастіше використовуваний на практиці тип нечітких чисел, причому частіше як прогнозні значення параметра.

Черговим історичним кроком в даній науці є введення набору операцій над нечіткими числами, які зводяться до операцій алгебри із звичайними числами при завданні певного інтервалу достовірності (рівня приналежності), що отримали згодом назву м'які обчислення. Фундаментальні дослідження в цій області зроблені Д. Дюбуа (*D. Dubois*) і Х. Прадом (*H. Prade*). Паралельно з розробкою теоретичних основ нової науки, Лотфі А. Заде опрацьовував різні можливості її практичного застосування. У 1973 році ці зусилля увінчалися успіхом – йому вдалося показати, що нечітка логіка може бути покладена в основу нового покоління інтелектуальних систем управління. Саме тому цю дату логічно вважати за початок другого етапу в розвитку даної науки. Пройшли ще декілька років і теоретична алгебра Заде, завдячуючи Ібрагиму Мамдані (*Ebrahim Mamdani*) з лондонського коледжу королеви Марії (*Queen Mary College*), запрацювала «в залізі». Саме Мамдані в 1975 р. спроектував перший контролер, що функціонує на основі алгебри Заде, і керує паровою турбіною (варто відмітити, що принципи його побудови алгоритмики стали канонічними і увічнені загальноприйнятою серед фахівців назвою *Mamdani-type controller*).

Розробка теорії нечітких множин забезпечило основу для розвитку закладеною Заде в 1970 – 1973 рр. нечіткої логіки (*Fuzzy Logic*) – гнучкого підходу до аналізу міркувань і моделювання складних гуманістичних систем, поведінка яких описується швидше лінгвістичними, ніж числовими змінними. У вузькому сенсі нечітка логіка – це логічна система, що розширює багатозначну логіку до

безперервної, але список основних операцій відрізняється за змістом від основних операцій систем багатозначних логік. Практичний потенціал теорії нечітких множин і нечіткої логіки, їх здатність моделювати гнучкі і неточні обмеження, частковий прояв властивостей, плавний перехід з однієї ситуації в іншу привернули в решті-решт в цю область цілу армію вчених-практиків. Сьогодні теорія нечітких множин і нечітка логіка отримали справді всесвітнє визнання.

За тридцять років свого розвитку (перші два етапи в приведеній вище класифікації), нечітка логіка зазнала ряд істотних змін і доповнень. Перш за все, завдяки зусиллям Б. Коско (*Bart Kosko*), був досліджений взаємозв'язок нечіткої логіки і теорії нейронних мереж і доведена основоположна *FAT*-теорема (*Fuzzy Approximation Theorem*), що підтвердила повноту нечіткої логіки. Була розроблена нечітка алгебра – незвичайна наука, що дозволяє використовувати при обчисленнях як точні, так і приблизні значення змінних. І нарешті, поширення набули винайдені Б. Коско так звані нечіткі когнітивні моделі (*Fuzzy Cognitive Maps*), на яких базуються більшість сучасних систем динамічного моделювання в області фінансів, політики і бізнесу.

Починаючи з 80-х років, методи теорії нечітких множин починають застосовуватися і в економіці. Слід згадати роботи Дж. Баклі «Вирішення нечітких рівнянь в економіці і фінансах» і «Нечітка математика у фінансах», Г. Бояджієва і М. Бояджієва «Нечітка логіка в бізнесі, фінансах і менеджменті», Лафуенте «Фінансовий аналіз в умовах невизначеності», Г. Циммермана «Теорія нечіткої логіки і її застосування» та інші. У 90-х роках почали з'являтися програмні рішення і інформаційні технології, які були здатні вирішувати економічні задачі із застосуванням нечітко – множинних і споріднених ним описів. Так, під керівництвом Ц. Зопоунідіса в Технічному університеті на острові Кріт була розроблена експертна система для детального фінансового аналізу корпорацій. Трохи раніше в Германії групою під керівництвом Г. Циммермана була розроблена система стратегічного планування, в якій реалізується позиціонування бізнесу

корпорації на основі нечітких описів конкурентоспроможності і привабливості бізнесу.

Деяка кількість робіт присвячена макроекономічному аналізу фондового ринку на основі нечітких уявлень, наприклад, робота К. Пірей «Нечітко – множинний аналіз інвестиційної діяльності взаємних фондів»; Р. Тріппі «Штучний інтелект у фінансовій і інвестиційній діяльності». На особливу увагу заслуговує макроекономічне дослідження, присвячене вимірюванню рівня тіньової економіки в Новій Зеландії, виконане Р. Драєсеке і Д. Глісом в 1999 р. Використовуючи статистичні дані з 1963 р. по 1994 р., вчені спробували оцінити динаміку величини тіньової економіки в Новій Зеландії за вказаний інтервал часу. Досить швидко економічні додатки теорії нечітких множин утворили самостійний науковий напрям. Була створена міжнародна асоціація *SIGEF* (*International Association for Fuzzy Set Management & Economy*) штаб квартирою в Барселоні, яка регулярно апробовує нові результати в області нечітко - множинних економічних досліджень, проводячи щорічні конференції і випускаючи журнал «*Fuzzy Economic Review*».

Представлена теорія дозволяє виявити наступні переваги *fuzzy*-систем в порівнянні з іншими:

- можливість оперувати нечіткими вхідними даними: наприклад, значеннями, що безперервно змінюються в часі (динамічні задачі), значеннями, які неможливо задати однозначно (результати статистичних опитів, рекламні компанії і так далі);
- можливість нечіткої формалізації критеріїв оцінки і порівняння: оперування критеріями «більшість», «можливо», «переважно» і т.д.;
- можливість проведення якісних оцінок як вхідних даних, так і вихідних результатів: маємо можливість оперувати не лише значеннями даних, але і їх мірою достовірності і її розподілом;
- можливість проведення швидкого моделювання складних динамічних систем і їх порівняльного аналізу із заданою мірою точності: тобто оперуючи

принципами поведінки системи, описаними *fuzzy*-методами, ми по-перше, не витрачаєте багато часу на з'ясування точних значень змінних і складання рівнянь, що їх описують, а по-друге, можна оцінити різні варіанти вихідних значень.

1.2. Основні визначення та властивості «м'яких обчислень»

1.2.1. Класи невизначеності

Розрізняють три основних аспекти неповноти інформації або даних:

1. Неточність;
2. Невизначеність;
3. Нечіткість.

Неточні дані - це дані, що задаються в інтервальній формі $D \pm E$, тобто у інтервалі $[D - E, D + E]$.

В теорії штучного інтелекту та математичної логіки термін невизначеність розуміється як неповнота інформації або даних та використовується для позначення ступеня істинності того чи іншого твердження. Але в теорії «м'яких обчислень» **невизначеність** ми розуміємо як невідоме значення істинності висловлювання.

Нечіткі (розпливчасті) категорії виникають там, де уявлення людини про процеси та явища виражаються за допомогою недостатньо певних якісних оцінок. В основі підходи до вивчення цих категорій лежить поняття лінгвістичної змінної, тобто, такої змінної, яка виражається не числом, а словом на природній для людини мові. Формальне ж **нечіткі (розпливчасті)** поняття описується за допомогою нечітких множин і функції приналежності різних елементів до цих нечіткої множини.

При цьому виділяють два основних рівня, до яких можуть належати нечіткі (розпливчасті) категорії:

Перший рівень – це описові, змістовні чи функціональні ознаки об'єкта, що описуються (формалізуються) суб'єктивними оцінками.

До 1-го рівня належать такі три класи нечітких (розпливчастих) категорій:

- **кваліфікатори** – категорії, що характеризують ознаку об'єкта. Вони поділяються на описові, змістовні та функціональні (Наприклад: низький, важкий, потужний, гарячий на інші);
- **модифікатори** – категорії, що уточнюють значення кваліфікаторів (Наприклад: дуже, майже, сильно та інші);
- **квантифікатори** – категорії, що описують кількість об'єктів або повторюваність дій (Наприклад: для всіх, хоча б один, часто, більшість і т.д.).

До другого рівня належать нечіткі (розпливчасті) відношення між категоріями – так звані «системи шкал». Їх існує чотири:

- **експліцитна система шкал**. Експліцитна це шкала, яку формують й застосовують у явному вигляді при вирішенні визначеного завдання. В такій шкалі зрозуміло що вимірювати і чим вимірювати (приклад: засоби вимірювання відстані (лінійка, метр, сантиметри, дециметри, кілометри), вагу (віги, кілограми, тони), швидкості (спідометр, км/год) тощо);
- **неекспліцитна шкала при експліцитному завданні.** В такому випадку зрозуміло, що вимірювати але не зрозуміла шкала вимірювань (приклад: оцінки які роблять сомельє під час дегустації, тобто купаж вина або створення збірного чаю (Англійський чай – це сукупність 5-ти різних сортів чаю) або сорту кофе, який формується з молотих зерен різного обсмажування).
- **експліцитна шкала при неекспліцитному (невизначеному) завданні.** В такому випадку зрозуміла шкала вимірювань але не зрозуміло що саме вимірюється (прикладом **є графологія**, що описує зв'язок між почерком та особистістю людини (при цьому різні характеристики почерку вона використовує для того, щоб дізнатись про певні індивідуальні якості людини), або **фізіогноміка -** метод визначення типу особистості людини, її душевних якостей та стану здоров'я за допомоги аналізу зовнішніх рис обличчя та його виразу).

- **імпліцитна система шкал.** Імпліцитна це шкала, на яку орієнтуються і яку не формують у явному вигляді при вирішенні невизначеного завдання (прикладом такого завдання є розпізнавання знайомого на вулиці або задачі розпізнавання образів).

Таким чином, неповнота інформації – це складна та неоднозначна категорія, для сприйняття якої з'являються нові теорії та методи обробки інформації, актуальної на сьогодні для обчислювальної техніки.

1.2.2. Теорія неточних (грубих) множин

Теорія грубих множин була створена польським математиком та фахівцем з інформатики Здиславом Павлаком на початку 80-х років минулого століття як новий математичний інструмент для роботи з невизначеностями та неточностями. Цей підхід має велике значення для систем штучного інтелекту, особливо в областях машинного навчання, набуття знань, системного аналізу, пошуку знань в базах даних, експертних систем, в системах прийняття рішень тощо. Суть грубих множин заснована на припущенні, що кожне твердження асоціюється з якоюсь інформацією, даними або знаннями (Наприклад, якщо об'єкти – це пацієнти, які страждають на певну хворобу, то симптоми цієї хвороби - це форма інформації про пацієнтів). Об'єкти, що характеризуються одними й тими самими даними, є однаковими з погляду наявної про них інформації. Нерозрізненні відношення, отримані таким шляхом, є математичним базисом теорії грубих множин. Як наслідок, невизначене поняття не може бути охарактеризовано в термінах інформації про об'єкти. Тому в запропонованому підході в теорії грубих множин кожне невизначене поняття замінюється парою визначених понять, які получили назву **нижньої та верхньої апроксимації** (рис. 1.1).

Нижня апроксимація складається з об'єктів, які точно відповідають поняттю, тобто нижня апроксимація множини X (рис. 1.1, елементи 1) включає в себе елементи, які дійсно належать множині X. **Верхня апроксимація** складається з об'єктів, які, можливо, відповідають поняттю, тобто верхня апроксимація

множини *X* (рис. 1.1, елементи 1 та 2) включає в себе елементи, які належать та можливо належать множині *X*. **Безліч, задане нижньою та верхньою апроксимаціями, і називається грубою множиною.** Очевидно, що різниця між верхньою та нижньою апроксимаціями становить границю області невизначеного поняття (рис. 1.1, елементи 2).

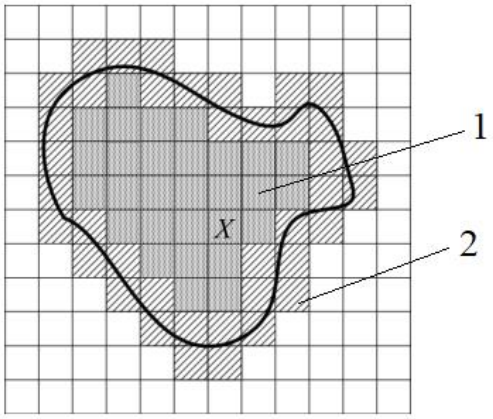


Рис. 1.1. Апроксимація множини.

Теорію неточних (грубих) множин не слід плутати з теорією нечітких множин. Головна ідея теорії неточних (грубих) множин полягає в тому, що кожна множина має верхнє та нижнє наближення, які складаються з класів еквівалентних описів, а основне положення теорії нечітких множин – у тому, що належність нечіткій множині може мати градації, наприклад з деякою ймовірністю, на відміну від класичної теорії множин. Теорія неточних (грубих) множин може бути використана для організації аналізу великих об'ємів неточних даних, що відрізняються суперечливістю, неповнотою або невизначеністю. Наприклад, теорія дозволяє спростити вихідний масив необроблених даних, побудувавши його більш просту модель або створивши неточну базу даних. Крім того, принципи неточних (грубих) множин можна використовувати для побудови масштабованих аналітичних систем, виділяючи частини даних, які необхідно обробити для виконання *SQL*-запиту. Неточні (грубі) множини також використовують при роботі з таблицями даних, таблицями прийняття рішень тощо.

Таким чином використовуючи неточні (грубі) множини, можна спростити деякі задачі обробки даних, зокрема, вилучати, тільки ті дані, що дійсно необхідні.

1.2.3. Імовірність, неточність, нечіткість та їх відмінності

Для поводження з неточними величинами зазвичай застосовується апарат теорії ймовірностей, тобто приймається припущення, що неточність незалежно від її природи може бути ототожнена з випадковістю. Таке припущення є спірним, тому необхідно розрізняти випадковість та нечіткість, причому останнє (тобто нечіткість) є основним джерелом неточності.

Відмінність між випадковістю та нечіткістю визначають наступним чином. **Випадковість** пов'язана з невизначеністю щодо приналежності або неналежності деякого об'єкта до деякої множини. Поняття ж **нечіткості** відноситься до класів, у яких можливі різні градації ступеня належності, проміжні між повною приналежністю та неналежністю об'єктів до цього класу. Нечітка множина є клас об'єктів, у якому немає різкої границі між його об'єктами та елементами його оточення.

В теорії ймовірності вивчають події чи об'єкти, невизначеність характеристик яких пов'язана з їх випадковою зміною (недетермінізмом). Теорія нечітких множин вивчає детерміновані об'єкти, але з характеристиками, які мають невизначену частину. В теорії грубих множин досліджують невизначеність у класифікації об'єктів чи їх властивостей.

Для теорії ймовірностей характерно подання даних у вигляді закону розподілу випадкової величини, для теорії нечітких множин - подання у вигляді функції приналежності, для теорії грубих множин – представлення об'єктів у вигляді пари множин, що включають елементи, які повністю відповідають і, можливо, відповідають деякому поняттю.

Імовірнісний підхід пов'язаний з великою кількістю однорідних об'єктів, кількість яких для суворого дослідження має бути досить великою. Нечіткий підхід застосовується до будь-якої кількості об'єктів. Теорія грубих множин також може

бути застосована до будь-якої кількості об'єктів, але, на практиці, використовується для великих обсягів даних.

При ймовірнісному підході людський чинник проявляється у двох аспектах. По-перше, існують розбіжності у трактуванні результатів одержаних розподілів. По-друге, практично неможливо виключити суб'єктивізм отриманих від експертів даних. В теорії нечітких множин з початку передбачається, що функція приналежності може бути задана суб'єктивно. При цьому, розглядаються об'єкти, які зазвичай не мають великих обсягів даних, придатних для статистичного аналізу. В теорії грубих множин людський чинник проявляється у суб'єктивному розподілі об'єктів (чи його властивостей) на дві множини (верхню та нижню апроксимацію).

Єдина схожість між теорією нечітких множин і теорією ймовірності - факт, що як функція приналежності до нечіткої множини, так і ймовірність набувають значення з множини [0, 1].

Таким чином, задачі, пов'язані з існуванням відповідного розподілу ймовірностей, отриманого на великому статистичному матеріалі, повинні вирішуватись ймовірнісними методами. Для класів задач, які описуються якісними оцінками краще застосовувати теорію нечітких множин. Теорія грубих множин найбільше пристосована для пошуку, класифікації та аналізу знань.

Контрольні запитання:

1. Які видатні вчені внесли вагомий вклад у розвиток нечіткої логіки?
2. Які технологічні застосування нечіткої логіки виникли у XX столітті?
3. Які обмеження існують у застосуванні нечіткої логіки?
4. Які напрями дослідження в галузі нечіткої логіки розвиваються в сучасному світі?
5. Які перспективи майбутнього розвитку нечіткої логіки?
6. Що таке м'які обчислення і в чому полягає їхня сутність?

7. Які основні принципи лежать в основі м'яких обчислень?

8. Які властивості мають неточні (грубі) множини?

9. Поясніть в чому відмінність понять імовірність, неточність, невизначеність та нечіткість?

10. Поясніть в чому відмінність різних «систем шкал» та наведіть приклади нечітких (розпливчастих) категорій, які до них належать?

РОЗДІЛ 2

МЕТОДИ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЗНАНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ НЕЧІТКИХ МНОЖИН ТИПУ 1

2.1. Основні характеристики, поняття та визначення теорії нечітких множин

Перед формулюванням визначення нечіткої множини потрібно задати область міркувань. **Область міркувань** – це базова множина (універсальна множина) на якій йде визначення нечіткої множини. Вона позначається $X \equiv E$, при цьому $X \equiv E$ – чітка множина.

Нечіткою множиною A в деякому (непорожньому) просторі $X \neq 0$, що позначається як $A \subseteq X$, називається множина пар:

$$A = \{(x, \mu_A(x));\ x \in X\}, \tag{2.1}$$

де $\mu_A: X \to [0,1]$ – функція приналежності нечіткої множини A.

Ця функція приписує кожному елементу $x \in X$ ступінь його приналежності до нечіткої множини A, при цьому можна виділити три випадки:

1) $\mu_A(x) = 1$ означає повну приналежність елемента x до нечіткої множині A, тобто $x \in A$;

2) $\mu_A(x) = 0$ означає відсутність приналежності елемента x до нечіткої множині A, тобто $x \notin A$;

3) $0 < \mu_A(x) < 1$ означає часткову приналежність елемента x до нечіткої множині A.

2.1.1. Символьний опис нечітких множин

Якщо X – простір із кінцевою кількістю елементів, тобто $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, то нечітка множина $A \subseteq X$ записується у вигляді:

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \cdots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}. \quad (2.2)$$

Слід зазначити, що елементами $x_i \in X$ можуть бути як цифри, так й люди, предмети чи інші об'єкти. Запис (2.2) має символьний характер. Знак «—» не означає поділу, а означає приписування конкретним елементам базової множини $x_1, \dots, x_n$ ступенів приналежності $\mu_A(x_1), \dots, \mu_A(x_n)$. Іншими словами, запис

$$\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}, i = 1, \dots, n.$$

означає пару

$$(x_i, \mu_A(x_i)), i = 1, \dots, n.$$

Так само знак «+» не означає операцію додавання, а інтерпретується як множинне підсумовування елементів $(x_i, \mu_A(x_i)), i = 1, \dots, n$. Слід зазначити, що так можна записувати і чіткі множини. Наприклад, безліч шкільних оцінок можна символічно уявити як D = l + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12, що рівнозначно запису D = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

Якщо X – простір з нескінченною кількістю елементів, то нечітка множина $A \subseteq X$ символьно записується у вигляді:

$$A = \int_X \frac{\mu_A(x)}{x}.$$

Приклад 2.1.

Припустимо, що $X = N$ – множині натуральних чисел. Визначимо поняття множини натуральних чисел – «близьких числу 7». Це можна зробити визначенням наступної нечіткої множини $A \subseteq X$:

$$A = \frac{0,2}{4} + \frac{0,5}{5} + \frac{0,8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0,8}{8} + \frac{0,5}{9} + \frac{0,2}{10}.$$

Приклад 2.2.

Якщо $X = R$, де R - множина дійсних чисел, то множину дійсних чисел - «близьких числу 7», можна визначити функцією приналежності виду:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+(x-7)^2}.$$

Тому нечітка безліч дійсних чисел, «близьких числу 7», описується виразом:

$$A = \int_X \frac{[1+(x-7)^2]^{-1}}{x}.$$

На рис. 2.1. представлена функція приналежності нечіткої множини *A* дійсних чисел «близьких числу 7».

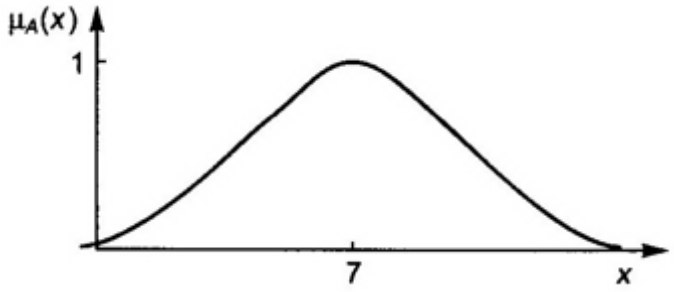


Рис. 2.1. Функція приналежності нечіткої множини «близьких числу 7».

Примітка.

Нечіткі множини натуральних чи дійсних чисел, «близьких числу 7», можна записати різними способами. Наприклад, функцію приналежності можна замінити виразом

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{|x-7|}{3}}, \text{якщо } 4 \le x \le 10; \\ 0, \quad \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

У такому випадку функція приналежності нечіткої множини *A* дійсних чисел «близьких числу 7» має вигляд, який наведено на рис. 2.2.

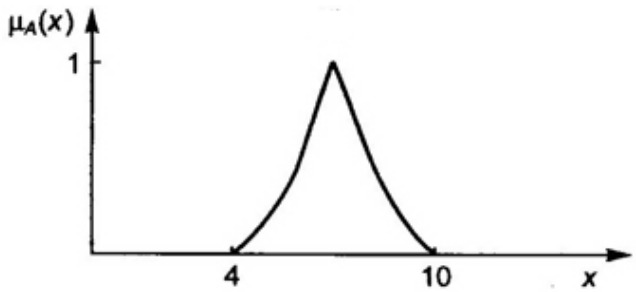


Рис. 2.2. Функція нечіткої множини «близьких числу 7».

Приклад 2.3.

Формалізуємо неточне визначення «придатна температура для купання у морі». Задамо область міркувань у вигляді множини X = [15°, ..., 25°]. Відпочиваючий №1, найкраще почувається при температурі 21°, визначив би собі нечітку безліч:

$$A = \frac{0,1}{16} + \frac{0,3}{17} + \frac{0,5}{18} + \frac{0,8}{19} + \frac{0,95}{20} + \frac{1}{21} + \frac{0,9}{22} + \frac{0,8}{23} + \frac{0,75}{24} + \frac{0,7}{25}.$$

Відпочиваючий №2, який віддає перевагу температурі 20°, запропонував би інше визначення цієї множини:

$$\text{B} = \frac{0,1}{15} + \frac{0,2}{16} + \frac{0,4}{17} + \frac{0,7}{18} + \frac{0,9}{19} + \frac{1}{20} + \frac{0,9}{21} + \frac{0,85}{22} + \frac{0,8}{23} + \frac{0,75}{24} + \frac{0,7}{25}.$$

За допомогою нечітких множин A і B ми формалізували неточне визначення поняття «придатна температура для купання в морі».

2.1.2. Основні характеристики нечітких множин

Введемо наступні позначення M = [0, 1] та A – нечітка множина з елементами з універсальної множини X, та множиною приналежності M.

Безліч елементів простору X, для яких $\mu_A(x) > 0$, називається **носієм нечіткої множини** A і позначається як supp A (від англ. *support*). Формальний його запис має вигляд $\text{supp}\, A = \{x \in X; \mu_A(x) > 0\}$.

Висота нечіткої множини A позначається $h(A)$ і визначається як $h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$, де sup – (*suprenum*) верхня грань.

Приклад 2.4.

Якщо X = {1, 2, 3, 4, 5},

$$A = \frac{0,2}{1} + \frac{0,4}{2} + \frac{0,7}{4}$$

тоді $supp\ A = \{1, 2, 4\}$.

Якщо X = {1, 2, 3, 4},

$$A = \frac{0,3}{2} + \frac{0,8}{3} + \frac{0,5}{4}$$

Тоді $h(A) = 0,8$.

Нечітка множина A називається **пустою**, якщо $\forall x \in X \ \mu_A(x) = 0$.

Нечітка множина A називається **нормальною**, якщо її висота дорівнює одиниці ($h(A) = 1$), тобто верхня грань її функції приналежності дорівнює 1

$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1.$$

При $\sup_{x \in X} \mu_A(x) < 1$, нечітка множина називається **субнормальною**.

Непусту субнормальну множину можна нормалізувати за формулою:

$$\mu_A(x) = \frac{\mu_A(x)}{\sup_{x \in X} \mu_A(x)} = \frac{\mu_A(x)}{h(A)}.$$

Результат нормалізації показано на рис. 2.3.

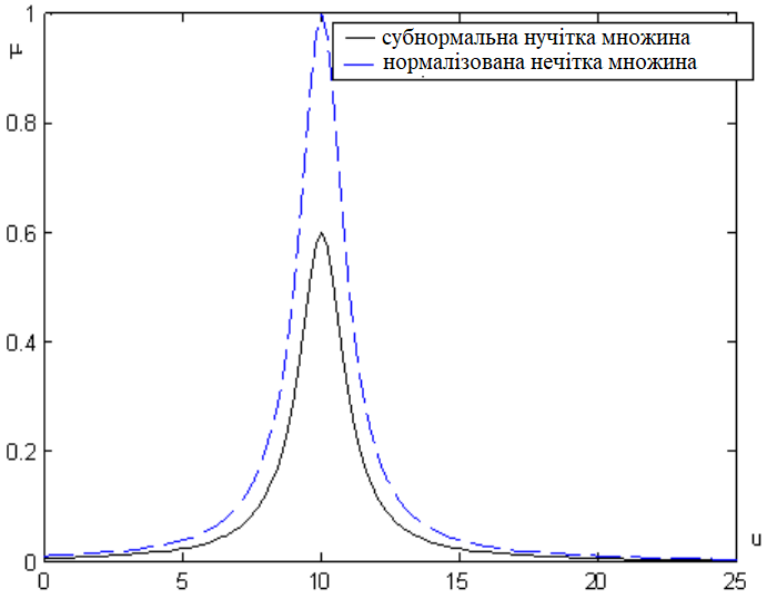


Рис. 2.3. Графіки субнормальної та нормалізованої множини.

Приклад 2.5.

Нечітка множина $A = \frac{0,1}{2} + \frac{0,5}{4} + \frac{0,3}{6}$ після нормалізації має наступний вигляд $A_{xn} = \frac{0,2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0,6}{6}$.

Нечітка множина **унімодальна**, якщо $\mu_A(x) = 1$ тільки на одному x з X.

Елементи $x \in X$ для яких $\mu_A(x) = 0,5$ називаються **точками переходу множини** A.

Приклад 2.6.

Нехай $X = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$, $M = [0, 1]$. Нечітку множину $A \equiv$ «Декілька» можна визначити наступним чином: $A = 0{,}5/3+0{,}8/4+1/5+1/6+0{,}8/7+0{,}5/8$. Характеристики: нечіткої множини A: **неунімодальна**; **носій** supp $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; **висота** $h(A) = 1$; **точки переходу** – $\{3, 8\}$.

Нечітка множина A **міститься (є частиною або включається) у нечіткій множині** B, що записується як $A \subset B$, тоді і тільки тоді, коли $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ для кожного $x \in X$. Приклад включення нечіткої множини A у нечіткій множині B ілюструється на рис. 2.4.

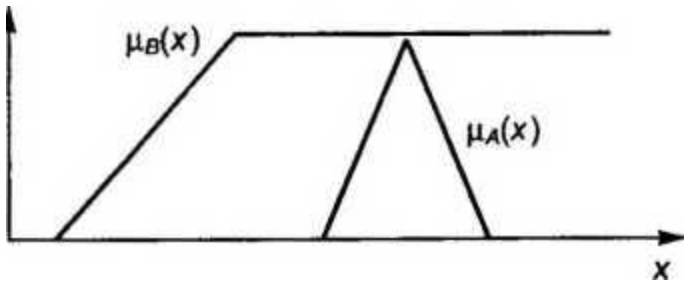


Рис. 2.4. Включення нечіткої множини A у B.

Нечітка множина A **дорівнює нечіткій множині** B, що записується як $A = B$, тоді і тільки тоді, коли $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ для кожного $x \in X$.

Наведене визначення не можна вважати «еластичним», оскільки воно не враховує випадок, коли значення функцій приналежності $\mu_A(x)$ і $\mu_B(x)$ майже рівні між собою. У такій ситуації можна запровадити поняття ступеня рівності нечітких множин A та B, наприклад, у вигляді

$$E = (A = B) = 1 - \max_{x \in T} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|,$$

$$T = \{x \in X : \mu_A(x) \neq \mu_B(x)\}.$$

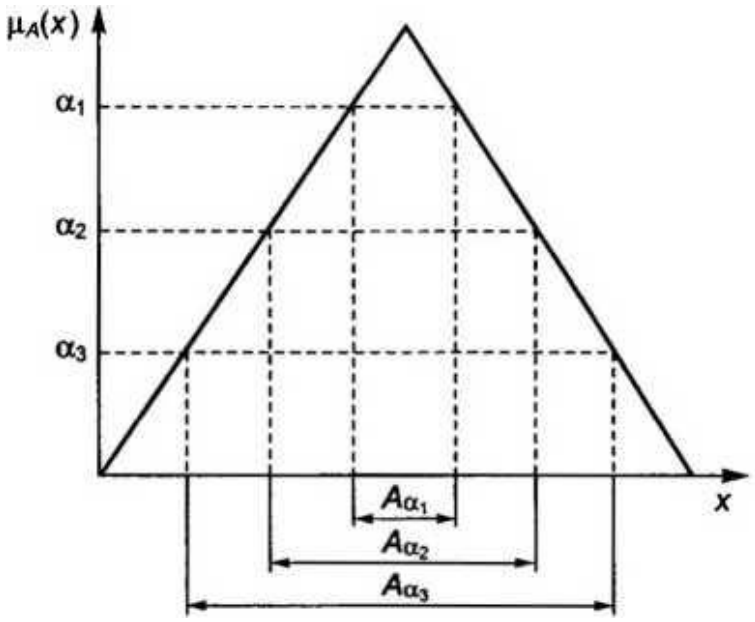
α-перетином нечіткої множини $A \subseteq X$, що позначається як $A\alpha$, називається чітка множина:

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}, \forall_{\alpha \in [0,1]},$$

тобто множина, що визначається характеристичною функцією

$$\chi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1, \text{для } \mu_A(x) \geq \alpha, \\ 0, \text{для } \mu_A(x) < \alpha. \end{cases}$$

Визначення α-перетину нечіткої множини проілюстровано на рис. 2.5.



Легко помітити істинність імплікації

$$\alpha_2 < \alpha_1 \Rightarrow A_{\alpha_1} \subset A_{\alpha_2}.$$

Рис. 2.5. Визначення α-перетину нечіткої множини.

Приклад 2.7. Пошук α-перетину нечіткої множини

Розглянемо нечітку множину $A \subseteq X$

$$A = \frac{0{,}1}{2} + \frac{0{,}3}{4} + \frac{0{,}7}{5} + \frac{0{,}8}{8} + \frac{1}{10},$$

причому X = {1, ..., 10}. Відповідно до визначення конкретні α-перетини визначаються у вигляді

$$A_0 = X = \{1, \dots, 10\};$$
$$A_{0.1} = \{2, 4, 5, 8, 10\};$$
$$A_{0.3} = \{4, 5, 8, 10\};$$
$$A_{0.7} = \{5, 8, 10\};$$
$$A_{0.8} = \{8, 10\};$$
$$A_1 = \{10\}.$$

Нечітка безліч $A \subseteq \boldsymbol{R}$ **є випуклою** тоді і тільки тоді, коли для довільних

$$x_1, x_2 \in \boldsymbol{R} \text{ та } \lambda \in [0,1]$$

виконується умова $\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$.

На рис. 2.6. представлений приклад випуклої нечіткої множини.

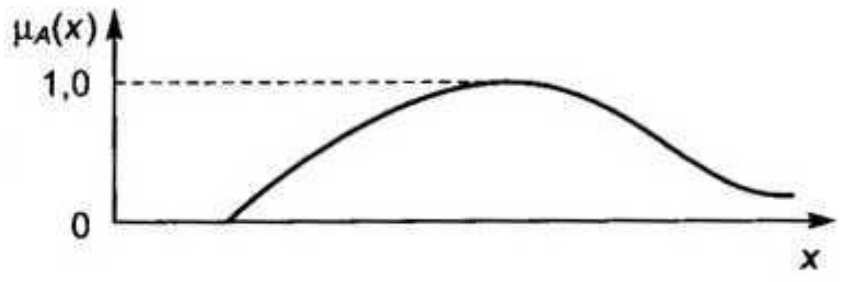


Рис. 2.6. Випукла нечітка множина.

Нечітка множина $A \subseteq \boldsymbol{R}$ **є увігнутою** тоді і тільки тоді, коли для довільних

$$x_1, x_2 \in \boldsymbol{R} \text{ та } \lambda \in [0,1]$$

виконується умова $\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] < \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$.

Увігнута нечітка множина ілюструється на наступному рис. 2.7.

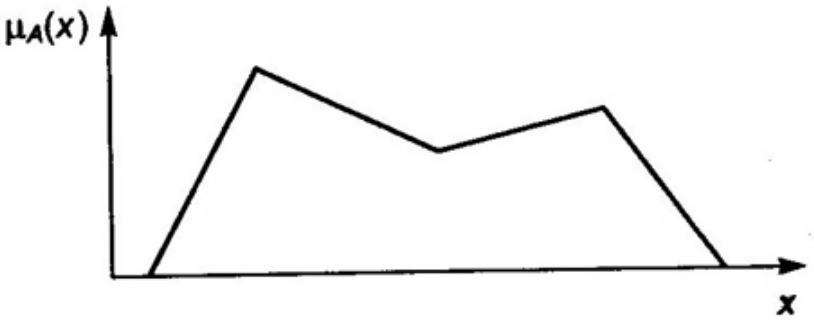


Рис. 2.7. Увігнута нечітка множина.

Приклад 2.8.

Нехай M = {Запорожець, Жигулі, Мерседес, Феррарі, …} — безліч марок автомобілів, а $X = [0, \infty)$ — універсальна множина «Вартість», тоді на X ми можемо визначити наступні три типи нечітких множин A, які наведені на рис. 2.8.

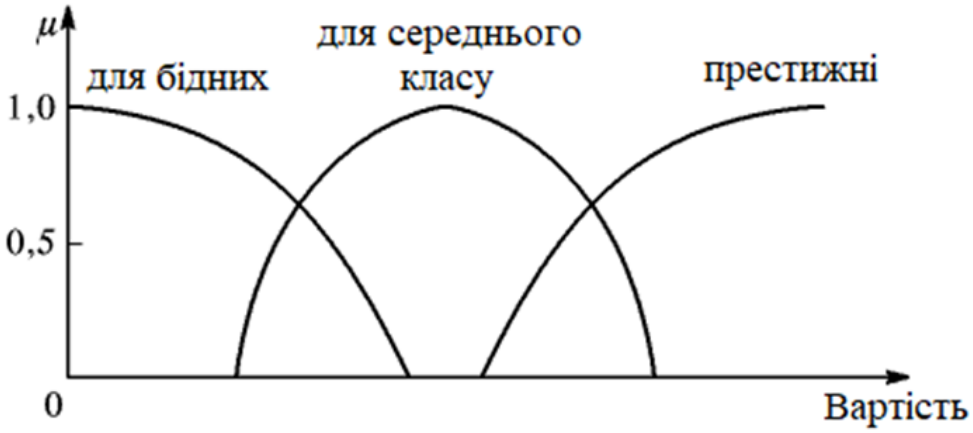


Рис. 2.8. Функції приналежності нечітких множин.

Маючи ці функції приналежності та знаючи вартості автомобілів з X в даний момент часу, ми тим самим визначимо на M нечіткі множини з тими самими назвами. Так, наприклад, нечітка множина A_1 = «Для бідних», задана на множині M = {Запорожець, Жигулі, Мерседес, Феррарі, …}, виглядає так, як показано на наступному рис. 2.9.

Рис. 2.9. Зовнішній вигляд нечіткої множини A_1.

Аналогічним чином можливо визначити такі нечіткі множини, як «Швидкісні», «Середньої швидкості», «Тихохідні».

Приклад 2.9.

Нехай X – множина цілих чисел: X = {-8, -5, -3, 0, 1, 2, 4, 6, 9}. Тоді нечітку підмножину чисел «за абсолютною величиною близьких до нуля» можна визначити, наприклад, так:

$$A = \{0/–8 + 0{,}5/–5 + 0{,}6/–3 + 1/0 + 0{,}9/1 + 0{,}8/2 + 0{,}6/4 + 0{,}3/6 + 0/9\}.$$

2.1.3. Методи побудови функцій приналежності нечітких множин

У наведених вище прикладах використаний **прямий методи**, коли експерт або просто задає для кожного $x \in X$ значення $\mu_A(x)$ або визначає функцію приналежності. Як правило, прямі методи завдання функції приналежності використовуються для понять, що можливо виміряти, таких як: швидкість, час, відстань, тиск, температура, вага і т.д., або коли виділяються полярні значення.

У багатьох задачах при характеристиці об'єкта можна виділити набір ознак і для кожної з них визначити полярні значення, відповідні значенням функції приналежності, 0 або 1.

Наприклад, у задачі розпізнавання обличчя можна виділити наступні шкали наведені у табл. 2.1.

Табл. 2.1 – Шкала ознак.

	Ознака	**0**	**1**
x_1	висота чола	низький	високий
x_2	профіль носа	кирпатий	горбатий
x_3	довжина носа	короткий	довгий
x_4	розріз очей	вузькі	широкі
x_5	колір очей	світлі	темні
x_6	форма підборіддя	гострий	квадратний
x_7	товщина губ	тонкі	товсті
x_8	колір обличчя	темний	світлий
x_9	обрис обличчя	овальне	квадратне

Для конкретного обличчя A експерт, виходячи з наведеної шкали, задає $\mu_A(x) \in [0, 1]$, формуючи векторну функцію приналежності $\{\mu_A(x_1), \ldots, \mu_A(x_9)\}$.

При прямих методах використовуються також групові прямі методи, коли, наприклад, групі експертів пред'являють конкретне обличчя і кожен повинен дати одну з двох відповідей: «ця людина лиса» або «ця людина не лиса», тоді кількість ствердних відповідей, поділена на загальну кількість експертів, дає значення $\mu_{лисий}$ (даного обличчя).

Непрямі методи визначення значень функції приналежності використовуються у випадках, коли немає елементарних властивостей, що можливо виміряти, та через які визначається цікава для нас нечітка безліч. Як правило, це **методи попарних порівнянь**. Якби значення функцій приналежності були нам відомі, наприклад, $\mu_A(x_i) = \omega_i$, $i = 1, 2, ..., n$, то попарні порівняння можна уявити матрицею відношення $A = \{a_{ij}\}$, де $a_{ij} = \omega_i / \omega_j$ (операція поділу).

На практиці експерт сам формує матрицю A, при цьому передбачається, що діагональні елементи рівні 1, а для елементів симетричних щодо діагоналі $a_{ij} = 1/ a_{ij,}$ тобто, якщо один елемент оцінюється у α раз сильніше, ніж інший, то цей останній повинен бути в $1/\alpha$ раз сильніше, ніж перший. У загальному випадку завдання зводиться до пошуку вектору $\boldsymbol{w}$, що задовольняє рівнянню виду $\boldsymbol{Aw} = \lambda \max$, де $\lambda \max$ — найбільше власне значення матриці $\boldsymbol{A}$. Оскільки матриця $\boldsymbol{A}$ позитивна по побудові, тоді розв'язання цього завдання є і воно є позитивним.

2.2. Класи функцій приналежності

Існує вісім стандартних класів функцій приналежності. Розглянемо ці класи з графічною інтерпретацією функцій приналежності які до них входять.

1. Функція приналежності класу сінглтон (рис. 2.10) визначається наступною формулою:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{при } x = \bar{x}, \\ 0, \text{при } x \neq \bar{x}. \end{cases}$$

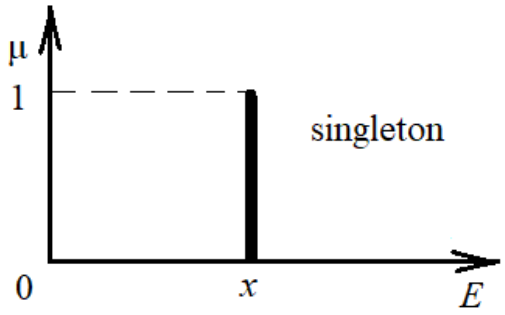


Рис. 2.10. Зовнішній вигляд функції приналежності класу сінглтон.

Сінглтон (*singleton*) – специфічна функція приналежності, оскільки вона приймає значення, що дорівнює 1 тільки в єдиній точці простору рішень, яка повністю належить нечіткій множині. У інших точках ця функція приймає значення 0. Така функція приналежності характеризує одноелементну нечітку множину. Єдиним елементом, що повністю належить нечіткому множині A, є точка x. Функція приналежності типу «сінглтон» використовується, головним чином, для реалізації операції фузифікації, що застосовується в системах нечіткого виводу.

2. Клас гаусівських функцій приналежності (рис. 2.11) визначається наступним виразом:

$$\mu_A(x) = \exp\left(-\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right),$$

в якій x є центром, σ (сігма) визначає ширину гаусівської кривої.

Ця функція приналежності зустрічається найчастіше.

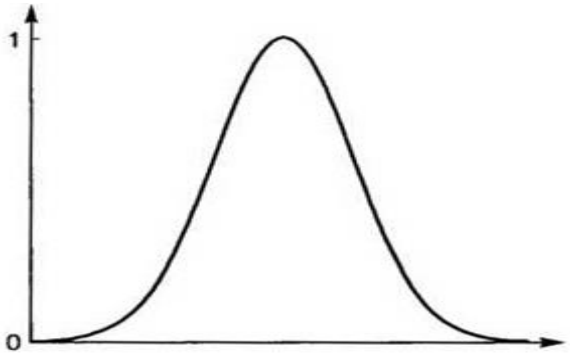


Рис. 2.11. Зовнішній вигляд гаусівських функцій приналежності.

3. Клас функцій приналежності дзвоноподібного типу (рис. 2.12) задається наступним виразом:

$$\mu_A(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x - c}{a}\right|^{2b}},$$

де *a, b, c* – відповідно ширина, нахил, центр функції.

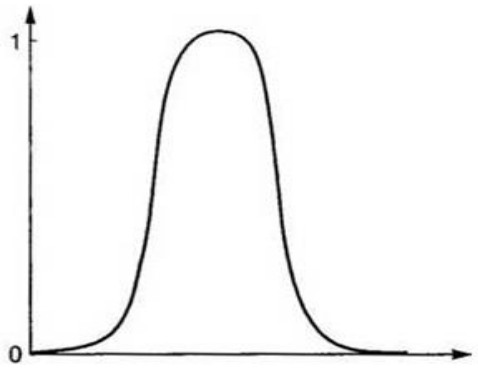


Рис. 2.12. Зовнішній вигляд функцій приналежності дзвоноподібного типу.

4. Функція приналежності класу *s* (рис. 2.13) визначається наступним чином:

$$\mu(x) = s(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le a, \\ 2\left(\frac{x - a}{c - a}\right)^2, \text{при } a < x \le b, \\ 1 - 2\left(\frac{x - c}{c - a}\right)^2, \text{при } b < x \le c, \\ 1, \text{при } x > c, \end{cases}$$

де $b = (a + c)/2/$

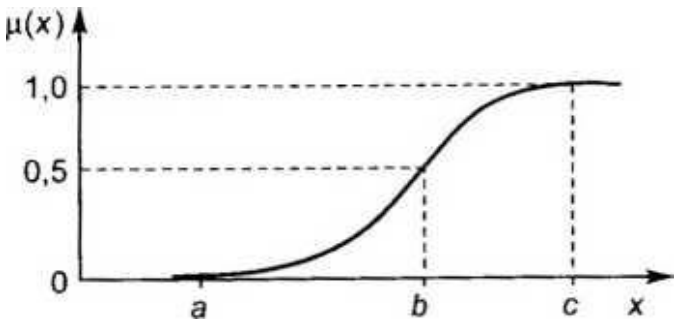


Рис. 2.13. Зовнішній вигляд функцій приналежності класу *s*.

Функції приналежності, що відносяться до цього класу, мають графічне відображення, яке нагадує букву «*s*», причому її форма залежить від підбору параметрів *a*, *b* та *c*. У точці $x = b = (a + c)/2$ функція приналежності класу *s* набуває значення, що дорівнює 0,5.

5. Функція приналежності класу π (рис. 2.14), визначається через функцію власності класу *s*:

$$\mu(x) = \pi(x; b, c) = \begin{cases} s(x; c-b, \dfrac{c-b}{2}, c), \text{при } x \le c, \\ 1 - s\left(x; c, \dfrac{c+b}{2}, c+b\right), \text{при } x > c. \end{cases}$$

Функція приналежності класу π набуває нульових значень для $x \ge c + b$ та $x \le c - b$. У точках $x = (c \pm b)/2$ її значення дорівнює 0,5.

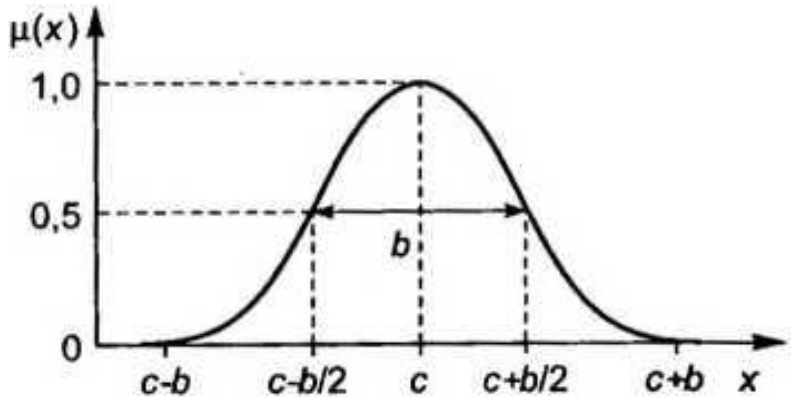


Рис. 2.14. Зовнішній вигляд функцій приналежності класу π.

6. Функції приналежності класу γ (гамма) (рис. 2.15) задаються наступним виразом:

$$\mu(x) = \gamma(x; a, b) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{при } a < x \le b, \\ 1, \text{при } x > b. \end{cases}$$

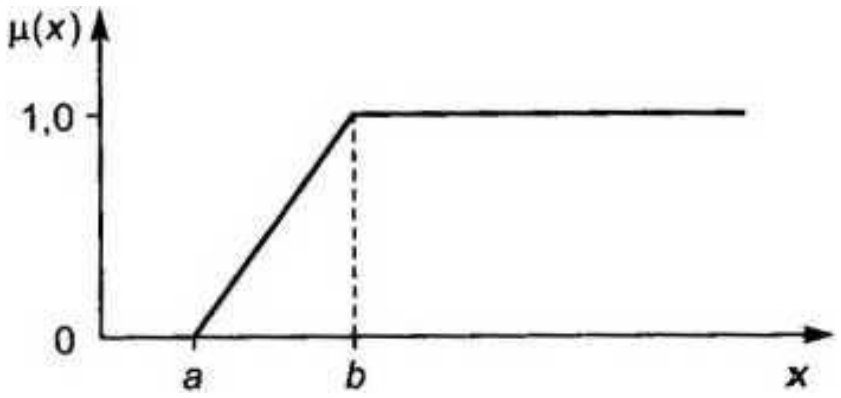


Рис. 2.15. Зовнішній вигляд функцій приналежності класу γ.

7. Функція приналежності класу *t* (рис. 2.16) визначається наступним виразом:

$$\mu(x) = t(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{при } a < x \le b, \\ \dfrac{c-x}{c-b}, \text{при } b < x \le c, \\ 0, \text{при } x > c. \end{cases}$$

Для певних задач функції класу t можуть бути альтернативою функціям класу π.

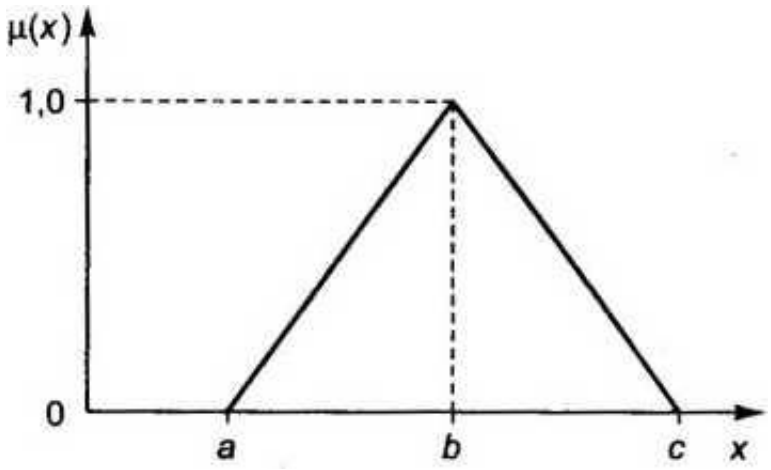


Рис. 2.16. Зовнішній вигляд функцій приналежності класу *t*.

8. Функція приналежності класу *L* (рис. 2.17) визначається наступним виразом:

$$\mu(x) = L(x; a, b) = \begin{cases} 1, \text{при } x \le a, \\ \dfrac{b-x}{b-a}, \text{при } a < x \le b, \\ 0, \text{при } x > b. \end{cases}$$

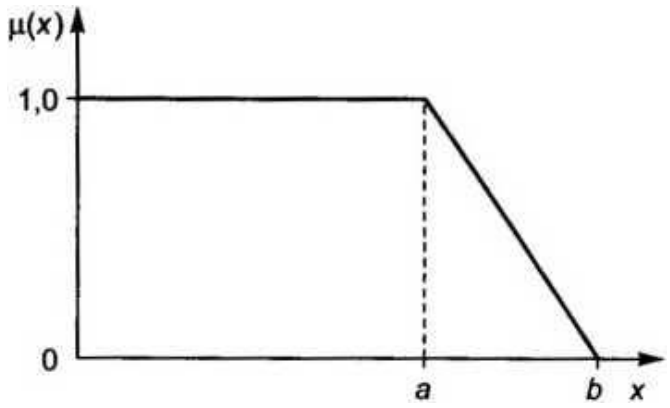


Рис. 2.17. Зовнішній вигляд функцій приналежності класу *L*.

Приклад 2.10. Застосування різних класів функцій належності.

Розглянемо три неточні формулювання:

1. *A* = "Мала швидкість автомобіля";
2. *B* = "Середня швидкість автомобіля";
3. *C* = "Велика швидкість автомобіля".

Як область міркувань x приймемо діапазон $[0, x_{max}]$, де x_{max} – максимальна швидкість. На рис. 2.18 представлені нечіткі множини *A*, *B* і *C*, що відповідають наведеним висловлюванням.

Звернімо увагу, що функція приналежності множини *A* має тип *L*, множини *B* – тип *t*, а множини *C* – тип γ. У фіксованій точці $x = 40$ км/год функція належності нечіткої множини «мала швидкість автомобіля» набуває значення 0,5, тобто $A(40) = 0{,}5$. Таке ж значення приймає функція приналежності нечіткої множини «середня швидкість автомобіля», тобто. $B(40) = 0{,}5$, тоді як $C(40) = 0$.

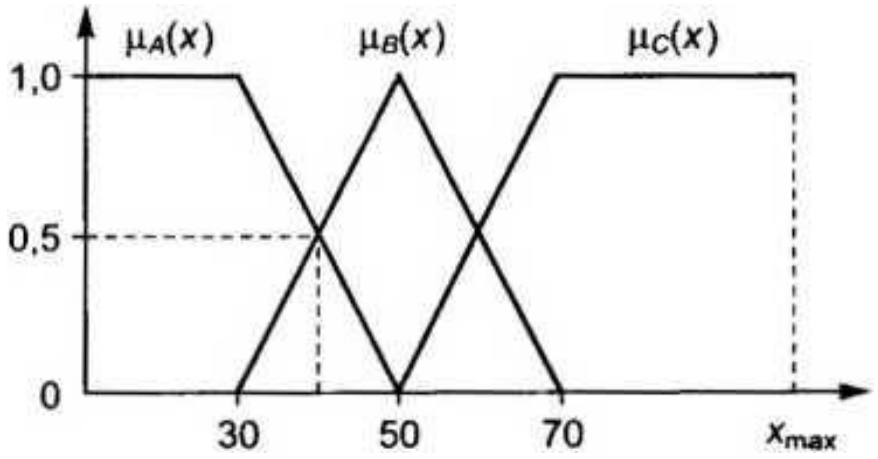


Рис. 2.18. Функції приналежності нечітких множин *A*, *B* і *C*.

Приклад 2.11.

На рис. 2.19 показано функцію приналежності нечіткої множини «великі гроші». Це функція класу *s*, причому X = [0, 100000 грн.], A = 1000 грн., C = 10000 грн. Отже, суми, що перевищують 10000 грн., можна вважати «великими», оскільки значення функції приналежності при цьому дорівнюватиме одиниці. Суми, менші ніж 1000 грн., не відносяться до «великих», оскільки відповідні їм значення функції приналежності дорівнюють 0. Звичайно, таке визначення нечіткої множини «великі гроші» має суб'єктивний характер. Кожен може мати власне уявлення про неоднозначне поняття «великі гроші». Це уявлення буде відбиватися іншими значеннями параметрів A та C функції класу *s*.

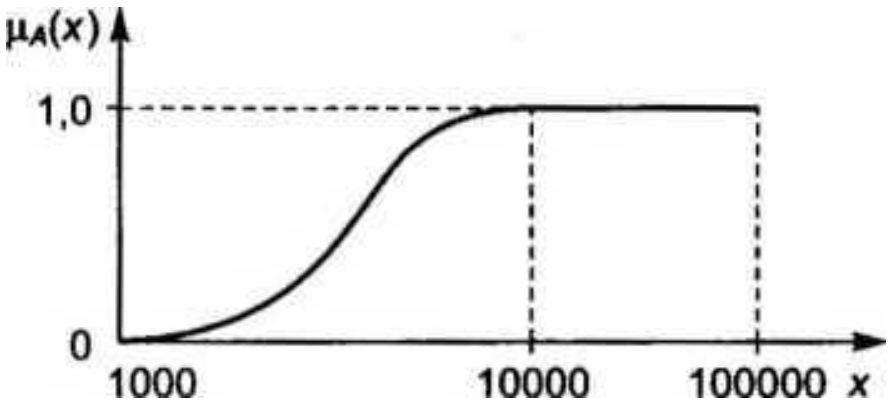


Рис. 2.19. Функція приналежності нечіткої множини «великі гроші».

2.3. Багатовимірні функції приналежності

Раніше було надано приклади стандартних функцій приналежності для нечітких множин, визначених у просторі дійсних чисел, тобто $X \in \boldsymbol{R}$. Якщо

$$X \subset \boldsymbol{R^n}, x = [x_1, \dots, x_n]^T, n > 1,$$

тоді можна виділити два випадки. Перший спостерігається, якщо ми припускаємо **незалежність змінних** x_i, i = 1, ..., n. У цьому випадку багатовимірна функція приналежності формується згідно з визначенням декартового добутку нечітких множин з використанням стандартних функцій приналежності однієї змінної. Якщо ж **змінні** x_i **взаємозалежні**, то застосовуються багатовимірні функції приналежності. Розглянемо три основних приклади таких функцій.

1. Двовимірна функція приналежності класу П (рис. 2.20) визначається наступним чином:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 - 2\left(\dfrac{\|x - \bar{x}\|}{\alpha}\right)^2, \text{при } \|x - \bar{x}\| \le \dfrac{1}{2}\alpha, \\ 2\left(1 - \dfrac{\|x - \bar{x}\|}{\alpha}\right)^2, \text{при } \dfrac{1}{2}\alpha < \|x - \bar{x}\| \le \alpha, \\ 0, \text{при } \|x - \bar{x}\| > \alpha. \end{cases}$$

де x – центр функції приналежності; α - параметр, що визначає її розкидання ($\alpha > 0$).

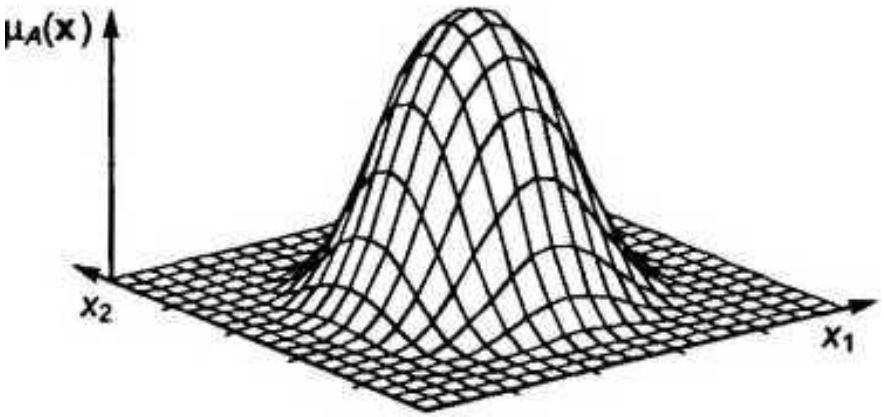


Рис. 2.20. Зовнішній вигляд функцій приналежності класу П.

2. Радіальна функція приналежності (рис. 2.21) має наступний вигляд:

$$\mu(x) = e^{\frac{\|x-\bar{x}\|^2}{2\sigma^2}},$$

де x – центр функції приналежності, а значення параметра σ (сігма) впливає на форму функції.

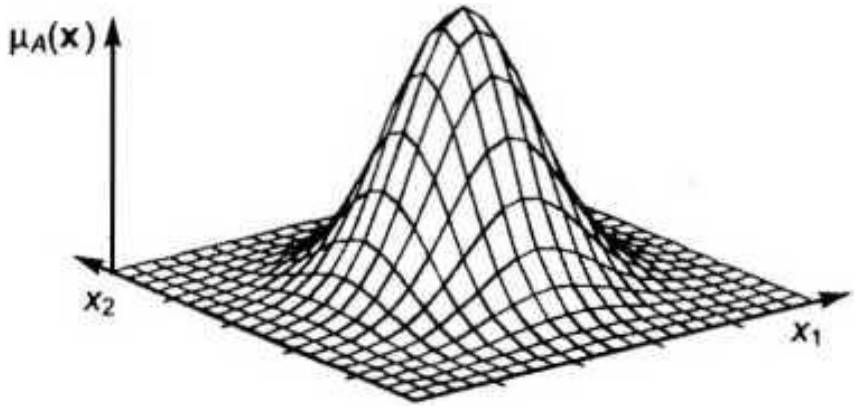


Рис. 2.21. Зовнішній вигляд радіальної функції приналежності.

3. Еліпсоїдальна функція приналежності (рис. 2.22) визначається виразом:

$$\mu(x) = \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^T \boldsymbol{Q}^{-1}(x-\bar{x})}{\alpha}\right),$$

де x – центр функції приналежності; α - параметр, що визначає розкидання функції ($\alpha > 0$); $\boldsymbol{Q}$ – так звана матриця коваріації, при модифікації якої можна змінювати форму самої функції.

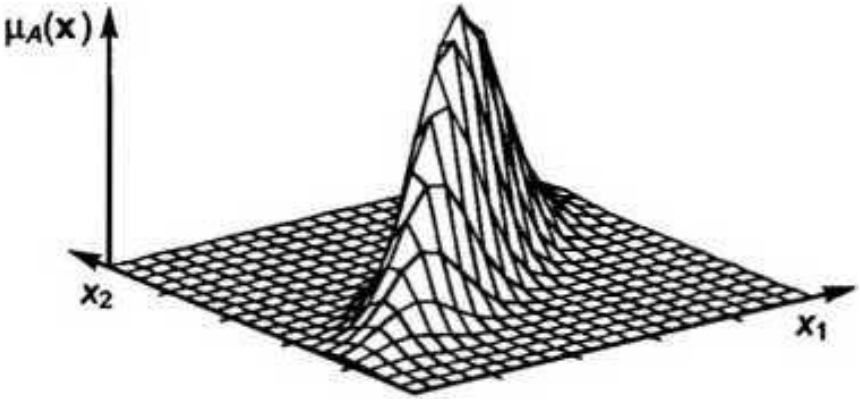


Рис. 2.22. Зовнішній вигляд еліпсоїдальної функції приналежності.

Контрольні запитання:

1. Дайте визначення нечіткої множини та поясніть, які існують форми її опису?
2. Дайте визначення базової множини та поясніть, які існують ступені приналежності її елементів до нечіткої множини?
3. Поясніть, що є носієм нечіткої множини та перелічите, які основні характеристики притаманні нечітким множинам?
4. Поясніть чим відрізняється нормальна та субнормальна нечітка множина та як можливо нормалізувати нечітку множину?
5. Поясніть чим відрізняється унімодальна і неунімодальна нечітка множина та наведіть приклади нечітких категорій, які можуть бути описані нечіткими множинами з такими характеристиками?
6. Поясніть чим відрізняється випукла та увігнута нечітка множина та наведіть приклади нечітких категорій, які можуть бути описані нечіткими множинами з такими характеристиками?
7. Дайте визначення α-перетину нечіткої множини та наведіть приклади нечітких категорій, які можуть бути описані різними α-перетинами?
8. Які методи та підходи використовуються при побудові функцій приналежності нечітких множин?
9. Які існують класи функцій приналежності та наведіть приклади нечітких категорій, які можуть бути описані даними класами?
10. Які існують класи багатовимірних функцій приналежності та поясніть особливості їх застосування?

РОЗДІЛ 3

ОПЕРАЦІЇ З НЕЧІТКИМИ МНОЖИНАМИ ТИПУ 1

3.1. Логічні операції з нечіткими множинами

3.1.1. Включення

Нехай A і B – нечіткі множини, які задані на універсальній множині X. Говорять, що A міститься у B, якщо $\forall x \in X, \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.

Позначення: $A \subset B$.

Іноді застосовують термін **домінування**, тобто у випадку, коли $A \subset B$ кажуть, що B домінує над A (рис. 3.1).

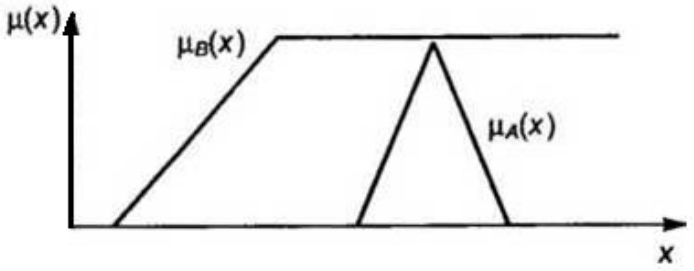


Рис. 3.1. Приклад функцій приналежності нечітких множини коли $A \subset B$.

В літературі зустрічається також поняття **ступеня включення** нечітких множин. Ступінь включення нечіткої множини A в нечітку множину B на попередньому рисунку дорівнює 1 (повне включення). Нечіткі множини, представлені на рис. 3.2., не задовольняють залежності $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, отже, включення у сенсі класичного визначення відсутнє. Однак нечітка множина A міститься в нечіткій множині B у певному ступені:

$$I(A \subset B) = \min_{x \in T} \mu_B(x),$$

де $T = \{x \in X; \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \mu_A(x) > 0\}$.

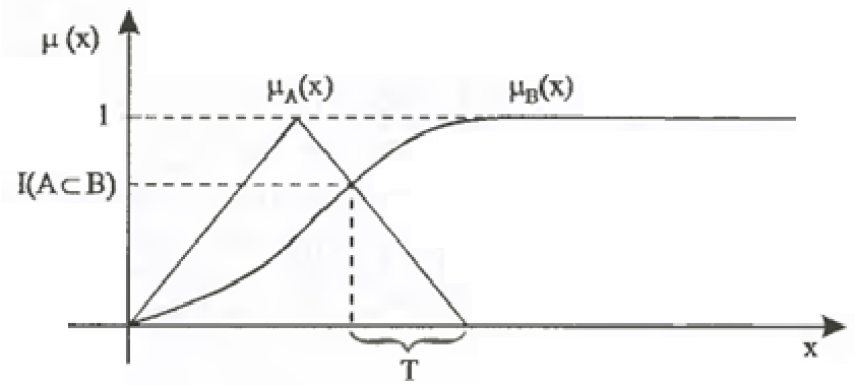


Рис. 3.2. Приклад функцій приналежності нечітких множин з певним ступенем включення.

3.1.2. Рівність

Нечіткі множини *A* і *B* рівні (рис. 3.3), якщо $\forall x \in X, \mu_A(x) = \mu_B(x)$.

Позначення: *A* = *B*.

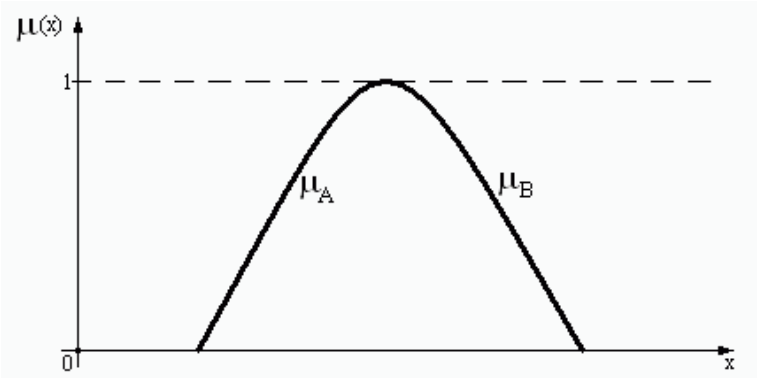


Рис. 3.3. Приклад функцій приналежності нечітких множини коли *A* = *B*.

Наведене визначення, не можна вважати «еластичним», оскільки воно не враховує випадок, коли значення функцій приналежності $\mu_A(x)$ і $\mu_B(x)$ **майже рівні між собою**. У такій ситуації можна запровадити поняття ступеня рівності нечітких множин *A* і *B*, наприклад, у вигляді:

$$E(A = B) = 1 - \max_{x \in T} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|,$$

де $T = \{x \in X; \mu_A(x) \neq \mu_B(x)\}$.

3.1.3. Перетин

Перетин A і B – це нечітка підмножина, що міститься одночасно і в A і в B (рис. 3.4) та має наступну функцію приналежності:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right).$$

Позначення: $A \cap B$.

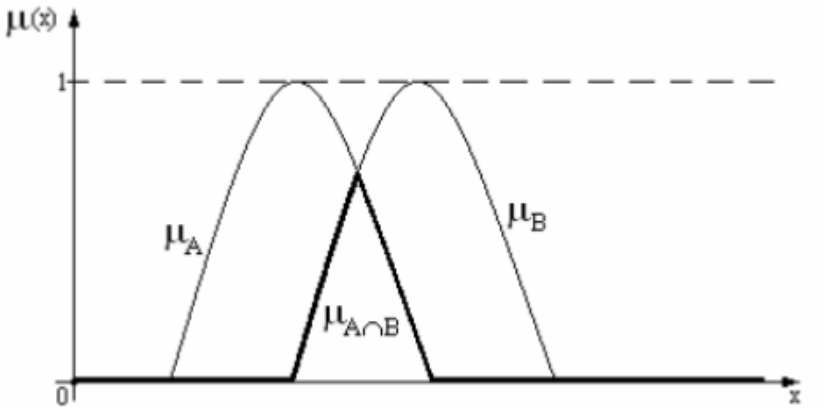


Рис. 3.4. Функція приналежності перетину нечітких множини.

Перетин нечітких множин A_1, …, A_n визначається наступною функцією приналежності:

$$\mu_{A_i}(x) = \min\left[\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \ldots, \mu_{A_n}(x)\right].$$

для кожного $x \in X$

У літературі крім визначення поняття логічної операції «перетин» нечітких множин також зустрічається визначення поняття «**алгебраїчний добуток**» цих множин. Алгебраїчний добуток нечітких множин A і B – це нечітка множина $C = A \bullet B$, визначене як

$$C = \mu_{A\cdot B}(x) = \{(x, \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)) | x \in X\}.$$

Графічна інтерпретація цієї операції представлена на наступному рис. 3.5.

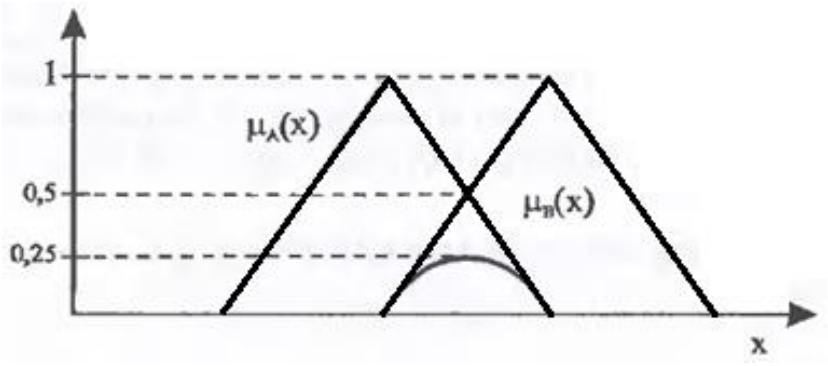


Рис. 3.5. Функція приналежності алгебраїчного добутку нечітких множини.

3.1.4. Об'єднання

Об'єднання нечітких множин A і B – це нечітка множина, що включає в себе одночасно і A і B (рис. 3.6) та має наступну функцію приналежності:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right).$$

для кожного $x \in X$

Позначення: $A \cup B$.

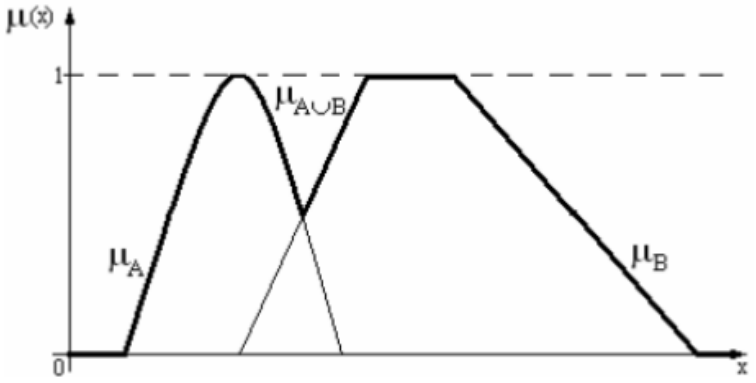


Рис. 3.6. Функція приналежності об'єднання нечітких множини.

Об'єднання нечітких множин A_1, …, A_n визначається наступною функцією приналежності:

$$\mu_{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n}(x) = \max\left[\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \ldots, \mu_{A_n}(x)\right].$$

для кожного $x \in X$.

Слід пам'ятати, що властивість випуклості нечітких множин зберігається для їх перетину, а властивість увігнутості – для їх об'єднання, тобто:

1) якщо A і B – випуклі нечіткі множини, то $A \cap B$ – випукла множина;

2) якщо A і B – увігнуті нечіткі множини, то $A \cup B$ – увігнута множина.

Приклад 3.1.

Нехай A і B – нечіткі множини, які задані на універсальній множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$:

$$A = \frac{0,9}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0,6}{6};\ \ B = \frac{0,7}{3} + \frac{1}{5} + \frac{0,4}{6}.$$

Перетин нечітких множин A і B:

$$A \cap B = \frac{0,7}{3} + \frac{0,4}{6}.$$

Алгебраїчний добуток нечітких множин A і B:

$$A \cdot B = \frac{0,63}{3} + \frac{0,24}{6}.$$

Об'єднання нечітких множин A і B:

$$A \cup B = \frac{0,9}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0,6}{6}.$$

3.1.5. Декомпозиція

У літературі відома так звана **теорема про декомпозицію**. Вона дозволяє представити довільну нечітку множину A у вигляді об’єднання нечітких множин, що генеруються α-розрізами нечіткої множини A.

Теорема 3.1

Будь-яка нечітка множина $A \subset X$ можна представити у вигляді

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha,$$

де αA_α означає нечітку множину, елементам якої приписані наступні ступені належності:

$$\mu_{\alpha A_\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha, \text{для } x \in A_\alpha, \\ 0, \text{для } x \notin A_\alpha. \end{cases}$$

Приклад 3.2.

Проведемо декомпозицію нечіткої множини:

$$A = \frac{0{,}1}{2} + \frac{0{,}3}{4} + \frac{0{,}7}{5} + \frac{0{,}8}{8} + \frac{1}{10}.$$

У відповідності з виразом отримаємо:

$$A = \left(\frac{0{,}1}{2} + \frac{0{,}1}{4} + \frac{0{,}1}{5} + \frac{0{,}1}{8} + \frac{0{,}1}{10}\right) \cup \left(\frac{0{,}3}{4} + \frac{0{,}3}{5} + \frac{0{,}3}{8} + \frac{0{,}3}{10}\right) \cup \left(\frac{0{,}7}{5} + \frac{0{,}7}{8} + \frac{0{,}7}{10}\right) \cup$$
$$\cup \left(\frac{0{,}8}{8} + \frac{0{,}8}{10}\right) \cup \left(\frac{1}{10}\right) = \frac{0{,}1}{2} + \frac{0{,}3}{4} + \frac{0{,}7}{5} + \frac{0{,}8}{8} + \frac{1}{10}.$$

У літературі наведені також і альтернативні визначення перетину та об'єднанню нечітких множин *A* і *B*. При цьому операцію перетину нечітких множин можливо визначити за допомогою так званої *T*-норми, в той час як операція об’єднання використовує так звану *S*-кнорму. Тобто замість формул:

$$\begin{cases} \mu_{A\cap B}(x) = \min\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right), \\ \mu_{A\cup B}(x) = \max\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right), \end{cases}$$

у деяких літературних джерелах використовуються наприклад такі альтернативні визначення:

$$\begin{cases} \mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \\ \mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_{A\cap B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}, \\ \mu_{A\cup B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}. \end{cases}$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x), \text{при } \mu_B(x) = 1, \\ \mu_B(x), \text{при } \mu_A(x) = 1, \\ 0, \text{при } \mu_A(x), \mu_B(x) < 1. \end{cases}$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x), \text{при } \mu_B(x) = 0, \\ \mu_B(x), \text{при } \mu_A(x) = 0, \\ 1, \text{при } \mu_A(x), \mu_B(x) > 0. \end{cases}$$

3.1.6. Доповнення

Нехай A і B – нечіткі множини, задані на E. A і B доповнюють одна одну, або множина A є доповненням нечіткої множини B, якщо

$$\forall x \in X, \mu_A(x) = 1 - \mu_B(x).$$

Позначення: $B = \overline{A}, A = \bar{B}$. Очевидно, що $\bar{\bar{A}} = A$.

Графічна інтерпретація операції доповнення представлена на рис. 3.7.

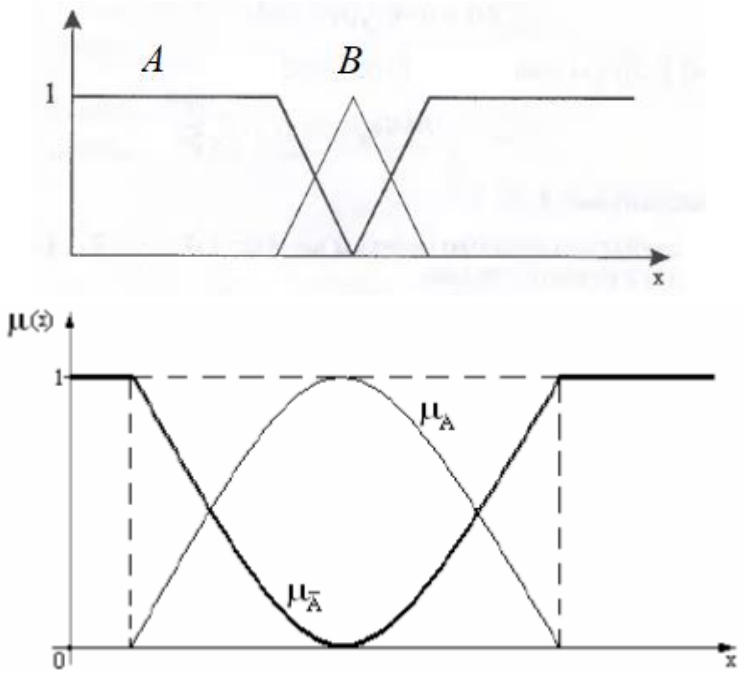


Рис. 3.7. Функції приналежності доповнення нечітких множини.

Приклад 3.3.

Нехай існує нечітка множина A:

$$A = \frac{0,3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0,7}{5} + \frac{0,9}{6}.$$

що визначена на елементах базової множини X:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Тоді доповнення нечіткої множини $\overline{A}$ буде виглядати наступним чином:

$$\bar{A} = \frac{1}{1} + \frac{0,7}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0,3}{5} + \frac{0,1}{6}.$$

Перетин та об'єднання нечіткої множини A з її доповненням $\overline{A}$ буде виглядати наступним чином:

$$A \cap \bar{A} = \frac{0,3}{2} + \frac{0,3}{5} + \frac{0,1}{6} \neq \varnothing.$$

$$A \cup \bar{A} = \frac{1}{1} + \frac{0,7}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0,7}{5} + \frac{0,9}{6} \neq X.$$

З прикладу видно, що функція приналежності перетину нечітких множин A і $\overline{A}$ відповідає нерівності:

$$\mu_{A\cap\bar{A}}(x) = \min\left(\mu_A(x), \mu_{\bar{A}}(x)\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Аналогічно, у випадку об'єднання нечітких множин A і $\overline{A}$ ми отримуємо:

$$\mu_{A\cup\bar{A}}(x) = \max\left(\mu_A(x), \mu_{\bar{A}}(x)\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Цей факт ілюструється також рис. 3.8.

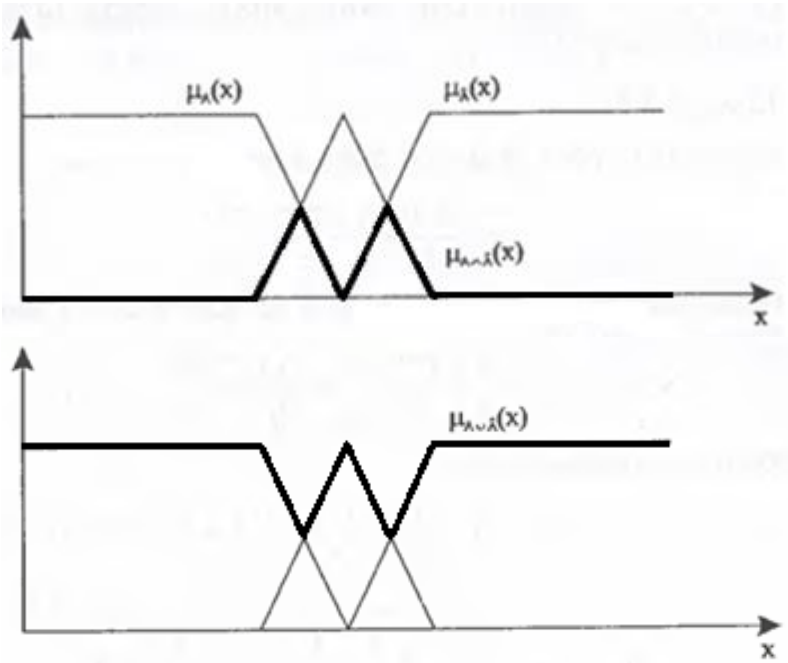


Рис. 3.8. Функції приналежності перетину та об'єднання нечітких множин A і $\overline{A}$.

На відміну від чітких множин (з якими працюють у дискретній математиці), для нечітких множин у загальному випадку $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$, $A \cup \bar{A} \neq X$.

3.1.7. Різниця

Нехай A і B – нечіткі множини, задані на X. Різниця двох нечітких множин $A - B$ (рис. 3.9) може бути обрахована наступним чином: $A - B = A \cap \bar{B}$.

Функція приналежності різниці двох нечітких множин $\mu_{A-B}(x)$ виглядає наступним чином: $\mu_{A-B}(x) = \mu_{A\cap\bar{B}}(x) = \min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x))$.

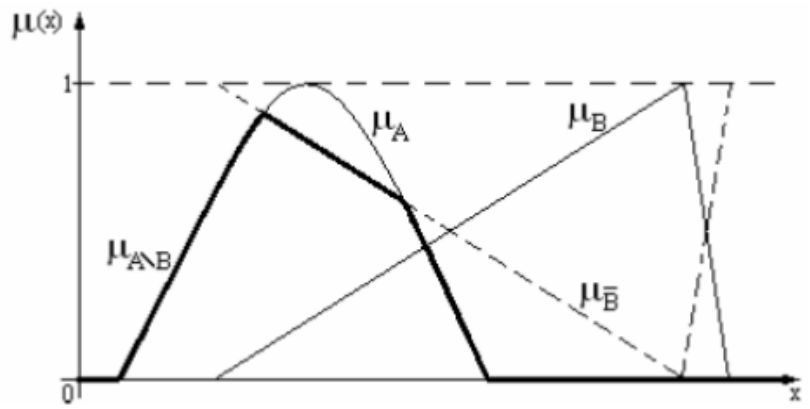


Рис. 3.9. Функції приналежності різниці нечітких множин.

3.1.8. Диз'юнктивна сума

Нехай A і B – нечіткі множини, задані на X. Диз'юнктивна сума двох нечітких множин $A \oplus B$ (рис. 3.10) може бути обрахована наступним чином:

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B).$$

Функція приналежності диз'юнктивної суми двох нечітких множин $\mu_{A\oplus B}(x)$ виглядає наступним чином:

$$\mu_{A\oplus B}(x) = \max\big(\min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)); \min(1 - \mu_A(x), \mu_B(x))\big).$$

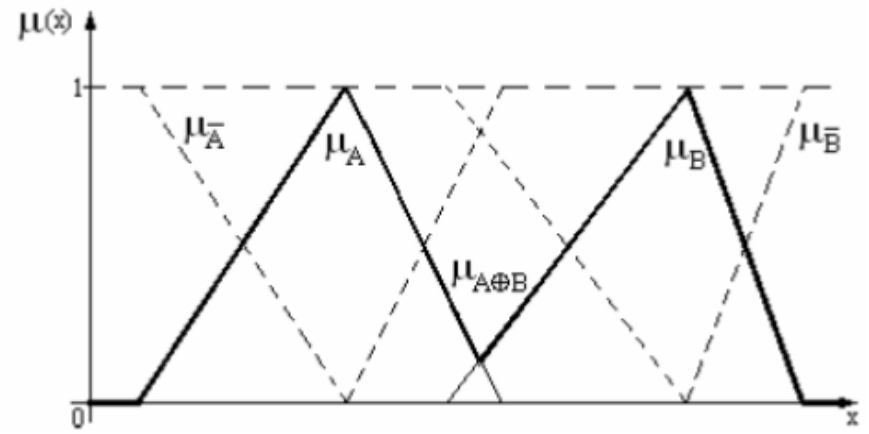


Рис. 3.10. Функції приналежності диз'юнктивної суми двох нечітких множин.

Приклад 3.4.

$A = 0{,}4 / x_1 + 0{,}2 / x_2 + 0 / x_3 + 1 / x_4$,

$B = 0{,}7 / x_1 + 0{,}9 / x_2 + 0{,}1 / x_3 + 1 / x_4$,

$C = 0{,}1 / x_1 + 0{,}1 / x_2 + 0{,}2 / x_3 + 0{,}9 / x_4$.

1) $A \subset B$, тобто A міститься в B або B домінує над A, тому що $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$

Нечітку множину C не можливо порівняти ні з A, ні з B, тобто пари множин $\{A, C\}$ і $\{B, C\}$ – пари недомінуючих нечітких множин.

2) $A \neq B \neq C$.

3) $\overline{A} = 0{,}6 / x_1 + 0{,}8 / x_2 + 1 / x_3 + 0 / x_4$,

$\overline{B} = 0{,}3 / x_1 + 0{,}1 / x_2 + 0{,}9 / x_3 + 0 / x_4$,

$\overline{C} = 0{,}9 / x_1 + 0{,}9 / x_2 + 0{,}8 / x_3 + 0{,}1 / x_4$,

4) $A \cap B = 0{,}4 / x_1 + 0{,}2 / x_2 + 0 / x_3 + 1 / x_4$,

де елементи нечіткої множини $A \cap B$ визначаються як:

$\mu_{A \cap B}(x_1) = \min(\mu_A(x_1); \mu_B(x_1)) = \min(0{,}4; 0{,}7) = 0{,}4;$

$\mu_{A \cap B}(x_2) = \min(\mu_A(x_2); \mu_B(x_2)) = \min(0{,}2; 0{,}9) = 0{,}2;$

$\mu_{A \cap B}(x_3) = \min(\mu_A x_3); \mu_B(x_3)) = \min(0; 0{,}1) = 0;$

$\mu_{A \cap B}(x_4) = \min(\mu_A(x_4); \mu_B(x_4)) = \min(1; 1) = 1.$

Аналогічно визначаються нечіткі множини $B \cap C$ та $A \cap C$

$B \cap C = 0{,}1 / x_1 + 0{,}1 / x_2 + 0{,}1 / x_3 + 0{,}9 / x_4$,

$A \cap C = 0{,}1 / x_1 + 0{,}1 / x_2 + 0{,}2 / x_3 + 0{,}9 / x_4$.

5) $A \cup B = 0{,}7 / x_1 + 0{,}9 / x_2 + 0{,}1 / x_3 + 1 / x_4$,

де елементи нечіткої множини $A \cup B$ визначаються як:

$\mu_{A \cup B}(x_1) = \max(\mu_A(x_1); \mu_B(x_1)) = \max(0{,}4; 0{,}7) = 0{,}7;$

$\mu_{A \cup B}(x_2) = \max(\mu_A(x_2); \mu_B(x_2)) = \max(0{,}2; 0{,}9) = 0{,}9;$

$\mu_{A \cup B}(x_3) = \max(\mu_A(x_3); \mu_B(x_3)) = \max(0; 0{,}1) = 0{,}1;$

$\mu_{A \cup B}(x_4) = \max(\mu_A(x_4); \mu_B(x_4)) = \max(1; 1) = 1.$

Аналогічно визначаються нечіткі множини $B \cup C$ та $A \cup C$

$$B \cup C = 0{,}7 / x_1 + 0{,}9 / x_2 + 0{,}2 / x_3 + 1 / x_4,$$

$$A \cup C = 0{,}4 / x_1 + 0{,}2 / x_2 + 0{,}2 / x_3 + 1 / x_4.$$

6) $A - B = A \cap \overline{B} = 0{,}3 / x_1 + 0{,}1 / x_2 + 0 / x_3 + 0 / x_4,$

де елементи нечіткої множини $A - B$ визначаються як:

$$\mu_{A-B}(x_1) = \min(\mu_A(x_1); \overline{\mu_B(x_1)}) = \min(0{,}4; 0{,}3) = 0{,}3;$$

$$\mu_{A-B}(x_2) = \min(\mu_A(x_2); \overline{\mu_B(x_2)}) = \min(0{,}2; 0{,}1) = 0{,}1;$$

$$\mu_{A-B}(x_3) = \min(\mu_A(x_3); \overline{\mu_B(x_3)}) = \min(0; 0{,}9) = 0;$$

$$\mu_{A-B}(x_4) = \min(\mu_A(x_4); \overline{\mu_B(x_4)}) = \min(1; 0) = 0.$$

Аналогічним чином визначається нечітка множина $B - A$:

$$\text{B} - \text{A} = B \cap \overline{A} = 0{,}6 / x_1 + 0{,}8 / x_2 + 0{,}1 / x_3 + 0 / x_4.$$

7) $\text{A} \oplus \text{B} = 0{,}6 / x_1 + 0{,}8 / x_2 + 0{,}1 / x_3 + 0 / x_4$

де елементи нечіткої множини $A \oplus B$ визначаються як:

$$\mu_{\text{A} \oplus \text{B}}(x_1) = \max(\min(\mu_A(x_1); 1 - \mu_B(x_1)); \min(1 - \mu_A(x_1); \mu_B(x_1))) =$$

$$= \max(\min(0{,}4; 1 - 0{,}7); \min(1 - 0{,}4; 0{,}7)) = \max(\min(0{,}4; 0{,}3); \min(0{,}6; 0{,}7)) =$$

$$= \max(0{,}3; 0{,}6) = 0{,}6;$$

$$\mu_{\text{A} \oplus \text{B}}(x_2) = \max(\min(\mu_A(x_2); 1 - \mu_B(x_2)); \min(1 - \mu_A(x_2); \mu_B(x_2))) =$$

$$= \max(\min(0{,}2; 1 - 0{,}9); \min(1 - 0{,}2; 0{,}9)) = \max(\min(0{,}2; 0{,}1); \min(0{,}8; 0{,}9)) =$$

$$= \max(0{,}1; 0{,}8) = 0{,}8;$$

$$\mu_{\text{A} \oplus \text{B}}(x_3) = \max(\min(\mu_A(x_3); 1 - \mu_B(x_3)); \min(1 - \mu_A(x_3); \mu_B(x_3))) =$$

$$= \max(\min(0; 1 - 0{,}1); \min(1 - 0; 0{,}1)) = \max(\min(0; 0{,}9); \min(1; 0{,}1)) =$$

$$\max(0; 0{,}1) = 0{,}1;$$

$$\mu_{\text{A} \oplus \text{B}}(x_4) = \max(\min(\mu_A(x_4); 1 - \mu_B(x_4)); \min(1 - \mu_A(x_4); \mu_B(x_4))) =$$

$$= \max(\min(1; 1 - 1); \min(1 - 1; 1)) = \max(\min(1; 0); \min(0; 1)) = \max(0; 0) = 0.$$

Візуальне зображення логічних операцій над нечіткими множинами можна побудувати наступним чином (рис. 3.11).

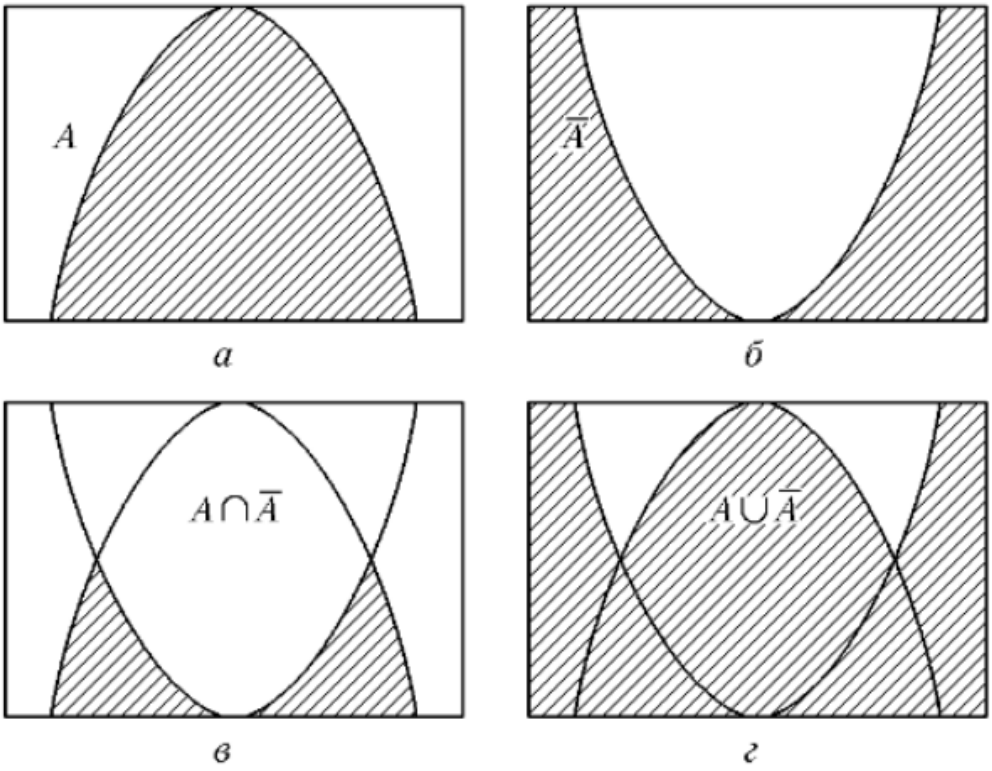


Рис. 3.11. Логічних операцій над нечіткими множинами.

3.1.9. Властивості операцій об'єднання та перетину

Нехай A, B, C – нечіткі множини, тоді для операцій об'єднання та перетину виконуються наступні властивості:

1. Комутативність:

$$\begin{cases} A \cap B = B \cap A, \\ A \cup B = B \cup A. \end{cases}$$

2. Асоціативність:

$$\begin{cases} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C). \end{cases}$$

3. Ідемпотентність:

$$\begin{cases} A \cap A = A, \\ A \cup A = A. \end{cases}$$

4. Дистрибутивність:

$$\begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{cases}$$

5. Загальні властивості:

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$
$$A \cup \emptyset = A.$$
$$A \cap X = A.$$
$$A \cup X = X.$$

де X – універсальна (базова) множина; $\varnothing$ – пуста множина, для якої

$$\forall x \in X, \mu_{\emptyset}(x) = 0.$$

6. Теорема де Морган:

$$\begin{cases} \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}. \end{cases}$$

3.2. Арифметичні операції з нечіткими множинами

3.2.1. Алгебраїчний добуток

Алгебраїчний добуток нечітких множин A і B, які визначені на елементах базової множини X, позначається $A \cdot B$ та визначається наступним чином:

$$\forall x \in X, \mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x).$$

3.2.2. Алгебраїчна сума

Алгебраїчна сума нечітких множин A і B, які визначені на елементах базової множини E, позначається $A + B$ і визначається наступним чином:

$$\forall x \in X, \mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x).$$

Для операцій алгебраїчного добутку та суми $\{\cdot, +\}$ виконуються наступні властивості:

1. Комутативність:

$$\begin{cases} A \cdot B = B \cdot A, \\ A + B = B + A. \end{cases}$$

2. Асоціативність:

$$\begin{cases} (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), \\ (A + B) + C = A + (B + C). \end{cases}$$

3. Загальні властивості:

$$A \cdot \emptyset = \emptyset.$$
$$A + \emptyset = A.$$
$$A \cdot X = A.$$
$$A + X = X.$$

4. Теорема де Морган:

$$\begin{cases} \overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}, \\ \overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}. \end{cases}$$

Проте для операцій алгебраїчного добутку та суми $\{\cdot, +\}$ не виконуються такі властивості:

1. Ідемпотентність:

$$\begin{cases} A \cdot A = A, \\ A + A = A. \end{cases}$$

2. Дистрибутивність:

$$\begin{cases} A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C), \\ A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C). \end{cases}$$

3. Загальні властивості:

$$A \cdot \bar{A} = \emptyset.$$
$$A + \bar{A} = X.$$

При спільному використанні операцій $\{\cup, \cap, +, \cdot\}$ для нечітких множин виконуються наступні властивості:

$$\begin{cases} A \cdot (B \cup C) = (A \cdot B) \cup (A \cdot C), \\ A \cdot (B \cap C) = (A \cdot B) \cap (A \cdot C). \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + (B \cup C) = (A + B) \cup (A + C), \\ A + (B \cap C) = (A + B) \cap (A + C). \end{cases}$$

3.2.3. Зведення у ступінь

На основі операції алгебраїчного добутку визначається операція зведення у ступінь α нечіткої множини A, де α позитивне число (α > 0). Нечітка множина A^{α} визначається функцією приналежності:

$$\mu_A^{\alpha} = \mu_A^{\alpha}(x).$$

Особливими випадками операції зведення у ступінь є операції концентрації та розтягування нечітких множин:

- Операція концентрації (ущільнення):

$$CON(A) = A^2,$$

$$\mu_{CON(A)}(x) = (\mu_A(x))^2.$$

- Операція розтягування:

$$DIL(A) = A^{0.5},$$

$$\mu_{DIL(A)}(x) = (\mu_A(x))^{0.5}.$$

Графічна інтерпретація операції концентрації та розтягування нечітких множин представлена на рис. 3.12.

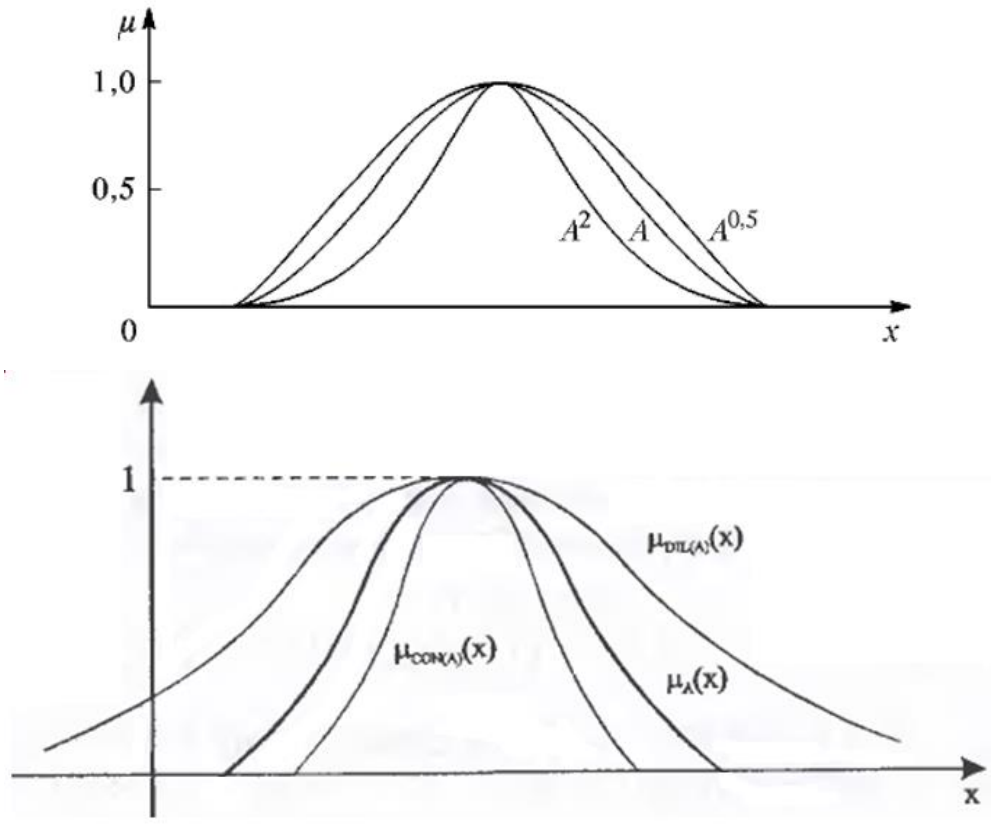


Рис. 3.12. Графічна інтерпретація операції концентрації та розтягування нечітких множин.

Приклад 3.5.

Нехай існує нечітка множина A:

$$A = \frac{0{,}4}{2} + \frac{0{,}7}{3} + \frac{1}{4}.$$

що визначена на елементах базової множини $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

Тоді операції концентрації та розтягування нечіткої множини A будуть виглядати наступним чином:

$$CON(A) = \frac{0{,}16}{2} + \frac{0{,}49}{3} + \frac{1}{4};$$

$$DIL(A) = \frac{0{,}63}{2} + \frac{0{,}84}{3} + \frac{1}{4}.$$

3.2.4. Множення на число

Якщо α – позитивне число (α > 0), таке що $\alpha \max_{x \in A} \mu_A(x) \leq 1$, тоді нечітка множина α$A$ має функцію приналежності:

$$\mu_{\alpha A}(x) = \alpha \cdot \mu_A(x).$$

3.2.5. Випукла комбінація нечітких множин

Нехай A_1, A_2, …, A_n – нечіткі множини визначені на універсальній множені X, а ω_1, ω_2, …, ω_n – позитивні числа сума яких дорівнює 1.

Випуклою комбінацією нечітких множин A_1, A_2, …, A_n називають нечітку множену A із функцією приналежності:

$$\forall x \in X, \mu_A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varpi_1 \cdot \mu_{A_1}(x) + \dots + \varpi_n \cdot \mu_{A_n}(x).$$

3.2.6. Декартовий (прямий) добуток нечітких множин

Нехай A_1, A_2, …, A_n – нечіткі множини визначені на універсальних множинах E_1, E_2, …, E_n відповідно.

Декартовий (прямий) добуток нечітких множин $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ є нечіткою підмножиною $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ з функцією приналежності:

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{A_n}(x_n) =$$

$$= \min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n)).$$

Приклад 3.6.

Нехай існують нечіткі множини A і B:

$$A = \frac{0{,}5}{2} + \frac{0{,}9}{4};\ B = \frac{0{,}3}{2} + \frac{0{,}7}{4} + \frac{0{,}1}{6}.$$

що визначені на елементах базових множин відповідно X та Y:

$$X = \{2, 4\}, Y = \{2, 4, 6\}.$$

Тоді декартовий (прямий) добуток нечітких множин $A \times B$ буде виглядати наступним чином:

$$\mu_{A\times B}(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)).$$

$$A \times B = \frac{0{,}3}{(2,2)} + \frac{0{,}5}{(2,4)} + \frac{0{,}1}{(2,6)} + \frac{0{,}3}{(4,2)} + \frac{0{,}7}{(4,4)} + \frac{0{,}1}{(4,6)}.$$

3.3. Оператор збільшення нечіткості

Оператор збільшення нечіткості використовується для перетворення чітких множин у нечіткі і збільшення нечіткості нечітких множин.

Нехай A – нечітка множина, X – універсальна множина і для усіх $\forall x \in X$ визначені нечіткі множини $K(x)$. Сукупність усіх $K(x)$ називається **ядром оператора збільшення нечіткості Ф** (фі)**.** Результатом дії оператора **Ф** на нечітку множину A є нечітка множина виду

$$\mathbf{\Phi}(A, K) = \bigcup_{x\in X} \mu_A(x) \cdot K(x),$$

де $\mu_A(x)K(x)$ — добуток числа на нечітку множину.

Приклад 3.7.

Нехай існує нечітка множина A = 0,8 / 1 + 0,6 / 2 + 0,2 / 3 + 0 / 4 , що визначена на елементах базової множини X = {1; 2 ; 3 ; 4}, та задані нечіткі множини $K(x)$:

$$K(1) = 1 / 1 + 0{,}4 / 2 ,$$

$$K(2) = 1 / 2 + 0{,}4 / 3 + 0{,}4 / 4 ,$$

$$K(3) = 1 / 3 + 0{,}5 / 4 ,$$

$$K(4) = 1 / 4 .$$

Оператор збільшення нечіткості у такому разі обчислюється наступним чином:

$$\Phi(A, K) = \mu_{A_1} \cdot K(1) \cup \mu_{A_2} \cdot K(2) \cup \mu_{A_3} \cdot K(3) \cup \mu_{A_4} \cdot K(4) =$$

$$= 0{,}8 \cdot (1 / 1 + 0{,}4 / 2) \cup 0{,}6 \cdot (1 / 2 + 0{,}4 / 3 + 0{,}4 / 4) \cup 0{,}2 \cdot (1 / 3 + 0{,}5 / 4) \cup 0 \cdot (1 / 4) =$$

$$= (0{,}8 / 1 + 0,\ 32 / 2) \cup (0{,}6 / 2 + 0,\ 24 / 3 + 0,\ 24 / 4) \cup (0{,}2 / 3 + 0{,}1 / 4) \cup (0 / 4) =$$

$$= (0{,}8 / 1 + 0,\ 32 / 2 + 0 / 3 + 0 / 4) \cup (0 / 1 + 0{,}6 / 2 + 0,\ 24 / 3 + 0,\ 24 / 4) \cup$$

$$\cup (0 / 1 + 0 / 2 + 0{,}2 / 3 + 0{,}1 / 4) \cup (0 / 1 + 0 / 2 + 0 / 3 + 0 / 4) =$$

$$= \max(0{,}8;\ 0;\ 0;\ 0 / 1) + \max(0,\ 32;\ 0{,}6;\ 0;\ 0 / 2) + \max(0;\ 0{,}24;\ 0{,}2;\ 0 / 3) +$$

$$+ \max(0;\ 0{,}24;\ 0{,}1;\ 0 / 4) = 0{,}8 / 1 + 0{,}6 / 2 + 0,\ 24 / 3 + 0,\ 24 / 4.$$

Контрольні запитання:

1. Які існують логічні операції з нечіткими множинами та наведіть приклади їх застосування?
2. Перелічите існуючі властивості логічних операцій з нечіткими множинами та наведіть властивості операцій об’єднання та перетину?
3. Які існують арифметичні операції з нечіткими множинами та наведіть приклади їх застосування?
4. Поясніть чим відрізняється алгебраїчний добуток і сума нечітких множин та наведіть приклади нечітких категорій, які можуть бути отримані в результаті застосування даних арифметичних операцій до нечітких множин?
5. Перелічите існуючі властивості арифметичних операцій з нечіткими множинами та наведіть властивості, які притаманні й не притаманні операціям алгебраїчного добутку і суми?

6. Наведіть властивості, які притаманні при спільному використанні операцій об’єднання, перетину, алгебраїчного добутку і суми?

7. Поясніть чим відрізняється операція ущільнення та розтягування нечітких множин та наведіть приклади нечітких категорій, які можуть бути отримані в результаті застосування даних операцій до нечітких множин?

8. Поясніть чим відрізняється випукла комбінація та декартовий добуток нечітких множин та наведіть приклади нечітких категорій, які можуть бути отримані в результаті застосування даних операцій до нечітких множин?

9. Що таке оператор збільшення нечіткості та як він використовується в нечіткій логіці?

10. Дайте визначення ядра оператора збільшення нечіткості та наведіть приклади нечітких категорій, які можуть бути отримані в результаті застосування оператора збільшення нечіткості.

РОЗДІЛ 4

ПРИНЦИП УЗАГАЛЬНЕННЯ ДЛЯ НЕЧІТКИХ МНОЖИН. НЕЧІТКІ ЧИСЛА ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ. ЛІНГВІСТИЧНІ ЗМІННІ

4.1. Принцип узагальнення для нечітких множин

Принцип узагальнення дозволяє перенести (узагальнити) різні математичні операції з чітких множин на нечіткі множини. Розглянемо деяке чітке відображення *f* простору *X* у простір *Y*:

$$f: X \to Y.$$

Нехай *A* буде заданою нечіткою множиною, яка визначена у просторі *X*, тобто $A \subset X$. Якщо нечітка множина *A* має вигляд:

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \cdots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}$$

і **відображення *f* є взаємно однозначним**, то принцип узагальнення полягає в тому, що генерована цим відображенням і визначена в просторі *Y* нечітка множина має вигляд:

$$B = f(A) = \frac{\mu_A(x_1)}{f(x_1)} + \frac{\mu_A(x_2)}{f(x_2)} + \cdots + \frac{\mu_A(x_n)}{f(x_n)}.$$

Приклад 4.1.

Припустимо, що

$$A = \frac{0{,}1}{3} + \frac{0{,}4}{2} + \frac{0{,}7}{5}$$

та відображення $f(x) = 2x + 1$. Відповідно до принципу узагальнення отримуємо

$$B = f(A) = \frac{0{,}1}{7} + \frac{0{,}4}{5} + \frac{0{,}7}{11}$$

Розглянемо тепер ситуацію, у якій більш ніж один елемент множини X відображається у один й той самий елемент $y \in Y$ (тобто **відображення f не є взаємно однозначним**). У такій ситуації ступінь приналежності елемента y до нечіткої множини B = $f(A)$ дорівнює максимальному ступеню приналежності серед тих елементів множини X, які відображаються в той самий елемент y. Для ілюстрації реалізації принципу розширення розглянемо наступний приклад.

Приклад 4.2.

Якщо нечітка множина A має наступний вигляд

$$A = \frac{0,3}{-2} + \frac{0,5}{3} + \frac{0,7}{2}$$

та відображення $f(x) = x^2$, тоді нечітка множина B, що генерується відображенням f, дорівнює:

$$B = f(A) = \frac{0,5}{9} + \frac{0,7}{4},$$

оскільки max {0,3; 0,7} = 0,7.

Позначимо $f^{-1}(y)$ множину тих елементів $x \in X$, які відображаються в елемент $y \in Y$ перетворенням f. Якщо $f^{-1}(y)$ являє собою порожню множину, тобто $f^{-1}(y) = \varnothing$, то ступінь приналежності елемента y до нечіткої множини B дорівнює нулю.

Наведені міркування і приклади, що ілюструють їх, дозволяють сформулювати наступні визначення:

Принцип узагальнення №1

Якщо існує деяке чітке відображення виду $f : X \to Y$ і задано нечітку множину $A \subset X$, то принцип розширення полягає в тому, що згенерована цим відображенням нечітка множина B має вигляд

$$B = f(A) = \{(y, \mu_B(y)) | y = f(x), x \in X\},$$

де

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup \mu_A(x), \text{при } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, \text{при } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Принцип узагальнення №1 охоплює простір X як з кінцевою кількістю елементів, так і з нескінченною кількістю елементів. У другому випадку згенерована відображенням f нечітка множина B виглядає наступним чином:

$$B = f(A) = \int \frac{\mu_A(x)}{f(x)}.$$

Принцип узагальнення №2

Нехай X представляє собою декартовий добуток чітких множин $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Якщо існує деяке чітке відображення $f : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to Y$, а також деякі нечіткі множини $A_1 \subseteq X_1, A_2 \subseteq X_2, \dots, A_n \subseteq X_n$, то принцип узагальнення стверджує, що згенерована відображенням f нечітка множина B має вигляд

$$B = f(A_1, \dots, A_n) = \{(y, \mu_B(y)) | y = f(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in X\},$$

при цьому

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup \min\{\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)\}, \text{при } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, \text{при } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Приклад 4.3.

Припустимо, що X – це декартовий добуток множин $X_1 = X_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Нехай A_1 - це нечітка множина чисел, «близьких числу 2»:

$$A_1 = \frac{0{,}7}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0{,}8}{3},$$

тоді як A_2 - це нечітка множина чисел, «близьких числу 4»:

$$A_2 = \frac{0{,}8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0{,}9}{5}.$$

Якщо

$$y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2,$$

то згенерована відображенням f нечітка множина $B = f(A_1, A_2)$ буде нечіткою множиною чисел «близьких числу 8», при цьому $B \subset Y = \{1, 2, \dots, 36\}$.

Згідно принципу узагальнення №1 отримаємо:

$$B = f(A_1, A_2) = \sum_{i,j=1}^{3} [\min(\mu_{A_1}(x_1^i), \mu_{A_2}(x_2^j))] / x_1^i x_2^j =$$

$$= \frac{\min(0{,}7; 0{,}8)}{3} + \frac{\min(0{,}7; 1)}{4} + \frac{\min(0{,}7; 0{,}9)}{5} + \frac{\min(1; 0{,}8)}{6} + \frac{\min(1; 1)}{8} +$$

$$+ \frac{\min(0{,}8; 0{,}8)}{9} + \frac{\min(1; 0{,}9)}{10} + \frac{\min(0{,}8; 1)}{12} + \frac{\min(0{,}8; 0{,}9)}{15} =$$

$$= \frac{0{,}7}{3} + \frac{0{,}7}{4} + \frac{0{,}7}{5} + \frac{0{,}8}{6} + \frac{1}{8} + \frac{0{,}8}{9} + \frac{0{,}9}{10} + \frac{0{,}8}{12} + \frac{0{,}8}{15}.$$

Наступний приклад ілюструє випадок, коли елемент $y = f(x_1(i), x_2(j))$ приймає одне й те саме значення при різних значеннях елементів $x_1(i)$ та $x_2(j)$.

Приклад 4.4.

Припустимо, що X – декартовий добуток множин $X_1 = X_2 = \{1,2,3,4\}$. Визначимо таку нечітку множину A_1 чисел, «близьких числу 2»:

$$A_1 = \frac{0{,}7}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0{,}8}{3},$$

а також нечітку множину чисел A_2, «близьких числу 3»:

$$A_2 = \frac{0{,}8}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0{,}6}{4}.$$

У цьому випадку згенерована відображенням f:

$$y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2,$$

нечітка множина $B = f(A_1, A_2)$ буде нечіткою множеною чисел «близьких числу 6», при цьому $B \subset Y = \{1, 2, \ldots, 16\}$.

Згідно принципу узагальнення №2 отримаємо:

$$B = f(A_1, A_2) = \frac{\min(0{,}7; 0{,}8)}{2} + \frac{\min(0{,}7; 1)}{3} +$$

$$+ \frac{\max[\min(0{,}7; 0{,}6); \min(1; 0{,}8)]}{4} + \frac{[\min(1; 1); \min(0{,}8; 0{,}8)]}{6} +$$

$$+ \frac{\min(1; 0{,}6)}{8} + \frac{\min(0{,}8; 1)}{9} + \frac{\min(0{,}8; 0{,}6)}{12} =$$

$$= \frac{0{,}7}{2} + \frac{0{,}7}{3} + \frac{0{,}8}{4} + \frac{1}{6} + \frac{0{,}6}{8} + \frac{0{,}8}{9} + \frac{0{,}6}{12}.$$

4.2. Нечіткі числа

4.2.1. Визначення нечітких чисел

У теорії нечітких множин виділяються нечіткі множини, які визначаються на осі дійсних чисел. Такі нечіткі множини називають «нечіткими числами». Прикладом такої множини є множина чисел «близьких числу 7», що визначена на множині дійсних чисел ***R***. Функція приналежності такої множини є нормальною, випуклою та безперервною й може бути графічно представлена так, як це зроблено на рис. 4.1.

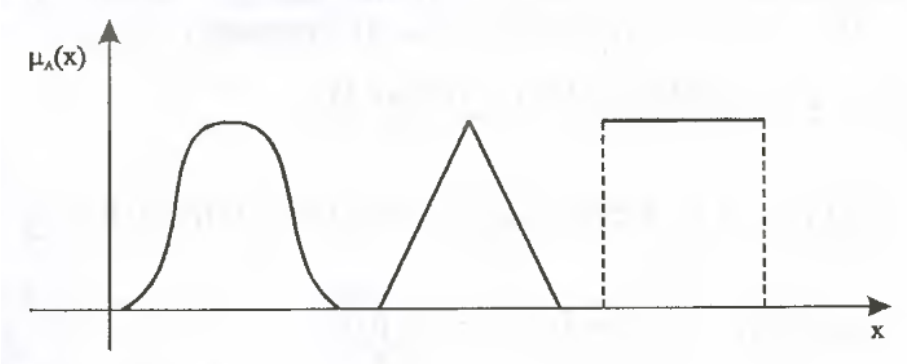


Рис. 4.1. Функції приналежності нечітких чисел.

Нечітким числом називається нечітка множина A, визначена на безлічі дійсних чисел $A \subset R$, функція приналежності якої

$$\mu_A(x) \in [0, 1]$$

де x – дійсне число, тобто $x \in R$.

В теорії нечітких систем розрізняються позитивні і негативні нечіткі числа.

Нечітке число $A \subset \mathrm{R}$ **позитивно**, якщо $\mu_A(x) = 0$ для всіх $x < 0$.

Нечітке число $\mathrm{A} \subset \mathrm{R}$ **негативне,** якщо $\mu_A(x) = 0$ для всіх $x > 0$.

На рис. 4.2 представлений приклад функції приналежності позитивного та негативного нечітких чисел, а також такого нечіткого числа, яке не є ні позитивним, ні негативним.

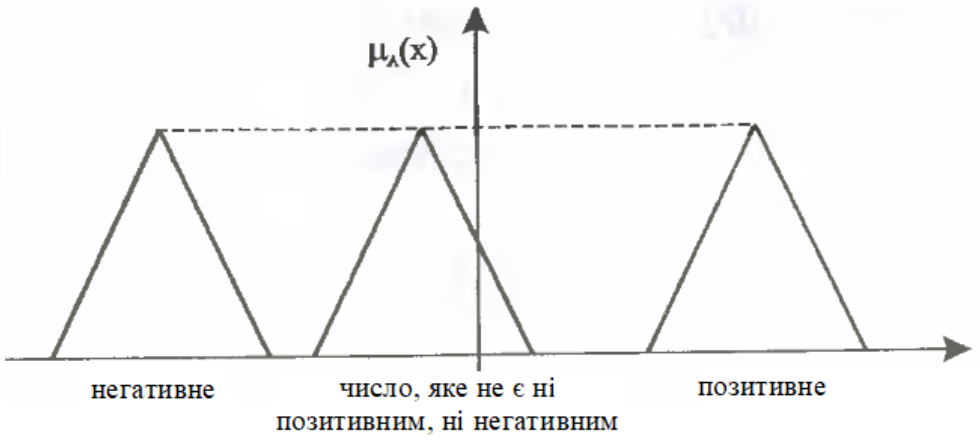


Рис. 4.2. Функції приналежності позитивного та негативного нечітких чисел.

Нечітка множина A називається **нечітким нулем**, якщо її функція приналежності $\mu_A = \sup(\mu_A(x)) = 0$.

Ядром нечіткого числа *A* – є чітка підмножина універсальної множини дійсних чисел R, елементи якої мають ступені приналежності до нечіткого числа A, що дорівнюють одиниці (рис. 4.3). Ядро субнормальної нечіткої множини – порожнє.

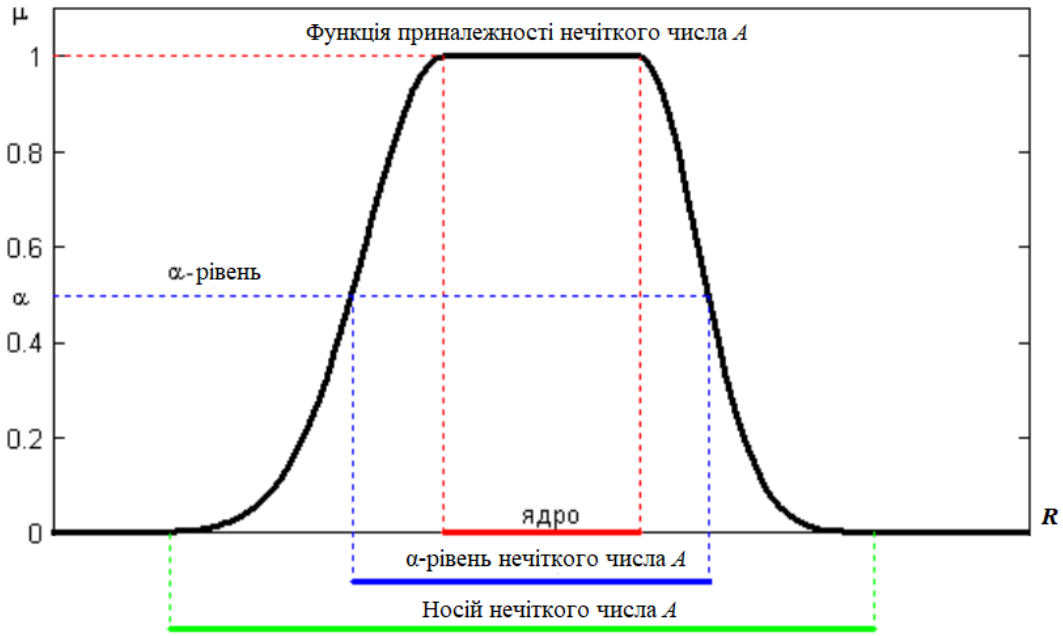


Рис. 4.3. Підмножини універсальної множини, які характеризують нечітке число.

Множиною α-рівня нечіткого числа *A* – є чітка підмножина універсальної множини дійсних чисел *R*, яка визначається за формулою:

$$A_\alpha = \{x, \mu_A(x) \geq \alpha\}, \text{для } \alpha \in [0,1].$$

Множина суворого рівня нечіткого числа *A* визначається як

$$A_\alpha = \{x, \mu_A(x) > \alpha\}.$$

Носієм нечіткого числа *A* є безліч елементів, для яких $\mu_A(x) > 0$.

4.2.2. Операції над нечіткими числами

4.2.2.1. Бінарні арифметичні операції над нечіткими числами

Бінарні арифметичні операції над нечіткими числами визначаються через відповідні операції для чітких чисел з використанням принципу узагальнення для двох нечітких чисел A_1, $A_2 \subset$ R наступним чином.

Нехай *A* і *B* – нечіткі числа, та $\tilde{*}$ – нечітка операція, що відповідає довільній алгебраїчної операції над звичайними числами. Тоді можна записати

$$C = A\tilde{*}B - \mu_C(z) = \bigvee_{Z=X*Y} \left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right).$$

де $\vee$ – використовується для позначення операції max, а $\wedge$ – використовується для позначення операції min.

Звідси можливо сформулювати такі бінарні арифметичні операції, як підсумовування, віднімання, добуток, поділ, а також операції пошуку максимуму та мінімуму:

$$C = A\tilde{+}B - \mu_C(z) = \bigvee_{Z=X+Y} \left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right),$$

$$C = A\tilde{-}B - \mu_C(z) = \bigvee_{Z=X-Y} \left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right),$$

$$C = A\tilde{\cdot}B - \mu_C(z) = \bigvee_{Z=X\cdot Y} \left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right),$$

$$C = A\tilde{\div}B - \mu_C(z) = \bigvee_{Z=X\div Y} \left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right),$$

$$C = \tilde{\max}(A,\ B) -\ \mu_C(z) = \bigvee_{Z=\max(X,Y)} \left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right),$$

$$C = \tilde{\min}(A,\ B) -\ \mu_C(z) = \bigvee_{Z=\min(X,Y)} \left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right).$$

Приклад 4.5.

Виконаємо операції підсумовування та добутку над двома нечіткими числами A_1 та A_2:

$$A_1 = \frac{0{,}7}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0{,}6}{4},$$

$$A_2 = \frac{0{,}8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0{,}5}{6}.$$

У відповідності до вищезазначених виразів отримаємо значення суми двох нечітких чисел $A_1 + A_2$:

$$A_1 + A_2 = \frac{\min(0{,}7;\ 0{,}8)}{5} + \frac{\max[\min(0{,}7;\ 1)\ ;\ \min(1;\ 0{,}8)]}{6} +$$

$$+ \frac{\max[\min(1;\ 1);\ \min(0{,}6;\ 0{,}8)]}{7} + \frac{\max[\min(0{,}7;\ 0{,}5)\ ;\ \min(0{,}6;\ 1)]}{8} +$$

$$+ \frac{\min(1;\ 0{,}5)}{9} + \frac{\min(0{,}6;\ 0{,}5)}{10} = \frac{0{,}7}{5} + \frac{0{,}8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0{,}6}{8} + \frac{0{,}5}{9} + \frac{0{,}5}{10}.$$

У відповідності до вищезазначених виразів отримаємо значення добутку двох нечітких чисел $A_1 \cdot A_2$:

$$A_1 \cdot A_2 = \frac{\min(0{,}7;\ 0{,}8)}{6} + \frac{\min(0{,}7;\ 1)}{8} + \frac{\min(1;\ 0{,}8)}{9} +$$

$$+ \frac{\max[\min(0{,}7;\ 0{,}5)\ ,\ \min(1;\ 1);\ \min(0{,}6;\ 0{,}8)]}{12} + \frac{\min(0{,}6;\ 1)}{16} +$$

$$+ \frac{\min(1;\ 0{,}5)}{18} + \frac{\min(0{,}6;\ 0{,}5)}{24} = \frac{0{,}7}{6} + \frac{0{,}7}{8} + \frac{0{,}8}{9} + \frac{1}{12} + \frac{0{,}6}{16} + \frac{0{,}5}{18} + \frac{0{,}5}{24}.$$

Проте результатом арифметичних операцій над нечіткими числами не завжди виявляється нечітке число. Наприклад, якщо в результаті арифметичної операції над нечіткими числами виходить нечітка множина, що не є нечітким числом, оскільки вона не відповідає умові випуклості. Ця проблема усувається тоді, коли

арифметичні операції виконуються над нечіткими числами, що мають безперервні функції приналежності.

4.2.2.2. Унарні арифметичні операції над нечіткими числами

Операція зміни знаку.

В результаті операції $f(x) = -x$ одержуємо нечітке число, протилежне нечіткому числу $A \subset R$. Це число позначається $-A \subset$ R, а його функція приналежності дорівнює $\mu_{-A}(x) = \mu_A(-x)$.

Нечіткі числа A та $-A$ симетричні щодо осі x.

Операція обернення.

В результаті операції $f(x) = x^{-1}$, x $\neq 0$, отримуємо нечітке число, зворотне нечіткому числу $A \subset R$. Це число позначається $A^{-1} \subset R$, а його функція приналежності дорівнює $\mu_{A^{-1}}(x) = \mu_A(x^{-1})$.

Передбачається, що нечітке число A є позитивним або негативним. Якщо A таким не є, то нечітка множина $B = f(A) = A^{-1}$ не випукла і, відповідно, не може вважатися нечітким числом.

Операція масштабування.

В результаті операції $f(x) = \lambda x$, (ламда) $\lambda \neq 0$, отримуємо нечітке число, масштабоване щодо нечіткого числа $A \subset R$. Це число позначається $\lambda A \subset R$, а його функція приналежності дорівнює $\mu_{\lambda A}(x) = \mu_A(x\lambda^{-1})$.

Операція експонування.

В результаті операції $f(x) = e^x$, $x > 0$, отримуємо ступінь нечіткого числа $A \subset R$. Це число позначається $e^A \subset R$, а його функція приналежності дорівнює:

$$\mu_{e^A}(x) = \begin{cases} \mu_A(\log x), \text{для } x > 0, \\ 0, \text{для } x < 0, \end{cases}$$

тому e^A – позитивне нечітке число.

Операція отримання абсолютного значення.

Абсолютне значення нечіткого числа $A \subset R$ позначається як $|A| \subset R$ і визначається як

$$\mu_{|A|}(x) = \begin{cases} \max(\mu_A(x), \mu_A(-x)), \text{для } x \geq 0, \\ 0, \text{для } x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, що $|A|$ – позитивне нечітке число.

Приклад 4.6.

Якщо

$$A = \frac{0,7}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0,6}{5},$$

тоді нечітка множина – A має вигляд

$$-A = \frac{0,6}{-5} + \frac{1}{-2} + \frac{0,7}{-1},$$

тоді як нечітка множина A^{-1} записується у наступному вигляді

$$A^{-1} = \frac{0,6}{0,2} + \frac{1}{0,5} + \frac{0,7}{1}.$$

Тому, що 0,2 = 1/5; 0,5 = 1/2; 1 = 1/1.

Використовуючи даний приклад легко перевірити, що

$$A + (-A) \neq \frac{1}{0}; \quad A \cdot A^{-1} \neq \frac{1}{1}.$$

З цієї причини для нечітких систем характерна відсутність нечітких чисел, протилежних або зворотних щодо операцій підсумовування та множення. Цей факт, зокрема, унеможливлює застосування методу виключення для вирішення рівнянь, в яких присутні нечіткі числа.

Арифметичні операції над нечіткими числами вимагають проведення достатньо складних обчислень. Тому була запропонована деяка окрема форма подання нечітких чисел за допомогою двох параметрів (*L*-*R*), що значно спрощує нечітку арифметику.

4.2.3. Нечіткі числа (L-R)-типу

Нечіткі числа (*L*-*R*)-типу – це різновид нечітких чисел спеціального виду, що задаються за певними правилами з метою зниження обсягу обчислень при операціях над ними.

Функції приналежності нечітких чисел (*L*-*R*)-типу задаються за допомогою незростаючих на множині позитивних дійсних чисел функцій дійсної змінної $L(x)$ та $R(x)$, що задовольняють наступним властивостям:

$$L(-x) = L(x), R(-x) = R(x);$$

$$L(0) = R(0).$$

В якості прикладів $L(x)$ і $R(x)$ функцій можливо привести:

$$L(x) = R(x) = e^{-|x|^p}, p > 0.$$

$$L(x) = R(x) = \frac{1}{1 + |x|^p}, p > 0.$$

$$L(x) = R(x) = \max(0, 1 - |x|^p), p > 0.$$

Очевидно, що до класу (*L*-*R*)-функцій належать функції, графіки яких мають наведений на рис. 4.4 вигляд:

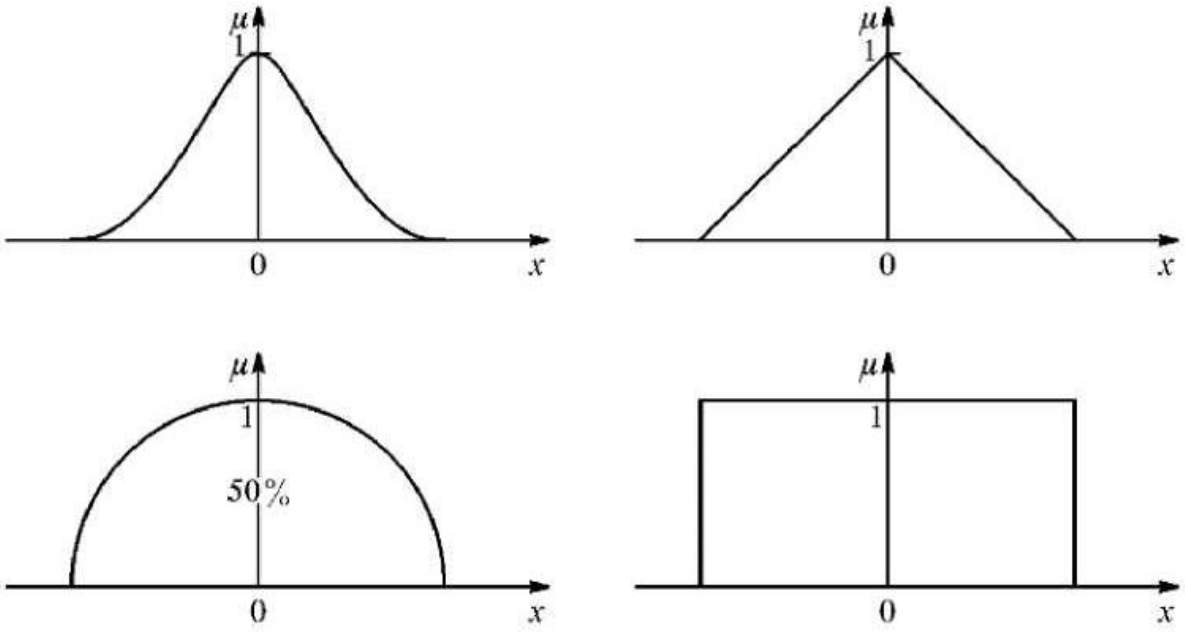


Рис. 4.4. Функції приналежності нечітких чисел (L-R)-типу.

Унімодальним нечітким числом A з модою a (тобто ($\mu_A(a) = 1$) за допомогою $L(y)$ та $R(y)$ задається наступним чином:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right), \text{при } x \le a, \\ R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right), \text{при } x > a. \end{cases}$$

де a – мода нечіткого числа; $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — лівий та правий коефіцієнти нечіткості.

Таким чином, при заданих $L(y)$ та $R(y)$ нечітке унімодальне число задається трійкою параметрів $A = (a, \alpha, \beta)$.

Толерантне нечітке число задається, відповідно, четвіркою параметрів $A = (a_1, a_2, \alpha, \beta)$, де a_1, a_2 – межі толерантності. У проміжку $[a_1, a_2]$ значення функції приналежності дорівнює 1.

Приклади графіків функцій приналежності нечітких чисел (L-R)-типу наведено на рис. 4.5.

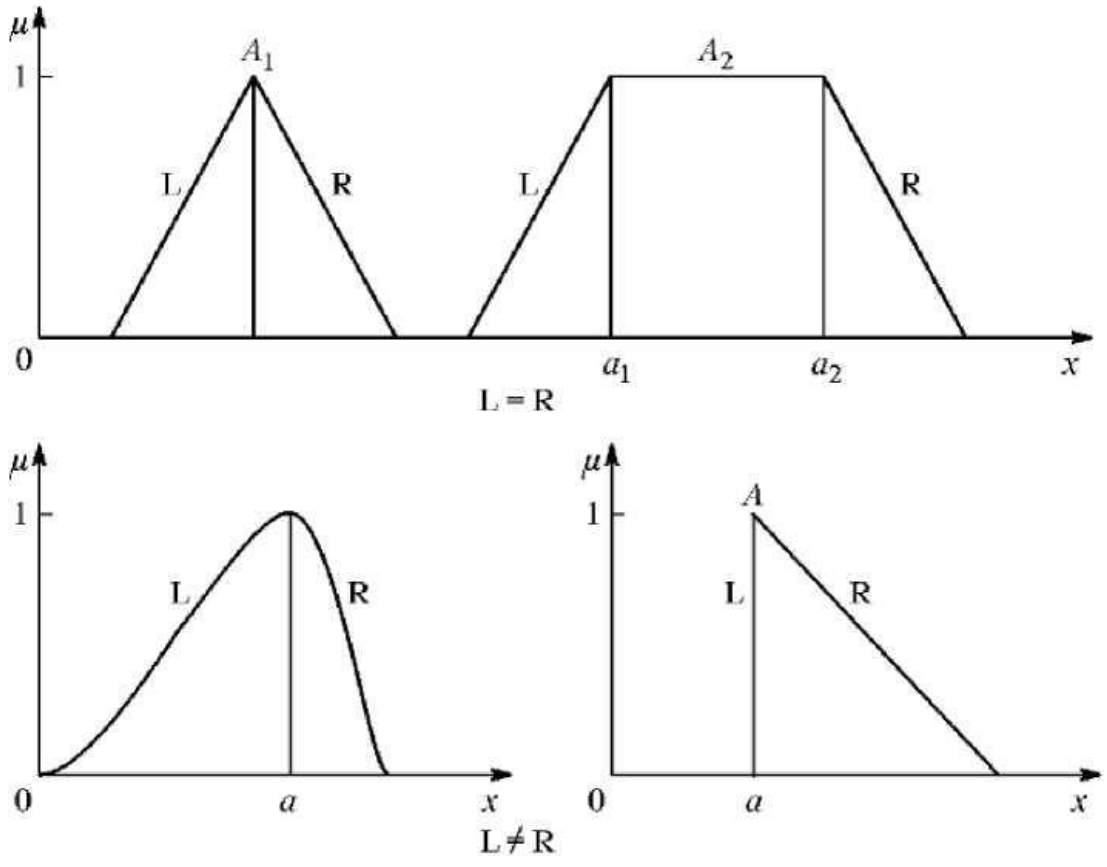


Рис. 4.5. Графіків функцій приналежності нечітких чисел (L-R)-типу.

Приклад 4.7.

Розглянемо неточне твердження «ціна велосипеда у цьому магазині становить від 3 до 6 тисяч гривень». Адекватною формалізацією цього твердження може вважатися нечіткий інтервал A виду

$$A = (3, 6, \alpha, \beta)_{LR}$$

На рис. 4.6 представлений зразковий графік функції приналежності толерантного нечіткого інтервалу

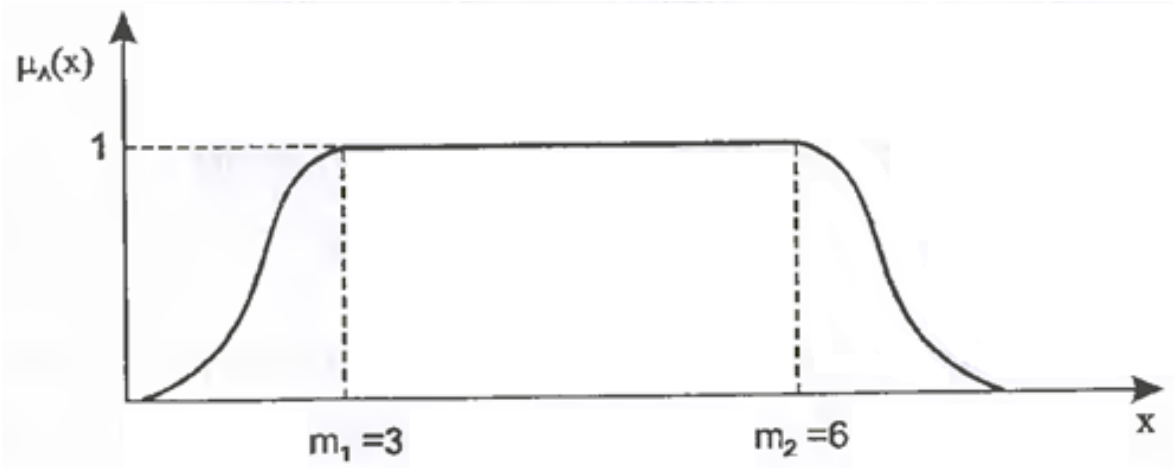


Рис. 4.6. Функція приналежності толерантного нечіткого інтервалу.

Зазначимо, що у конкретних ситуаціях функції $L(y)$, $R(y)$, а також параметри α, β унімодальних (a, α, β) і толерантних (a_1, a_2, α, β) нечітких чисел повинні підбиратися таким чином, щоб результат алгебраїчних операції (додавання, віднімання, добутку та ділення) точно або приблизно точно дорівнював нечіткому числу з тими ж функціями $L(y')$ та $R(y')$, а параметри α', β' результату не виходили за межі обмежень на ці параметри для вихідних нечітких чисел, особливо якщо результат й надалі буде братиме участь в операціях.

Приклади деяких лінгвістичних змінних представлених у формі чисел (L-R)-типу наведені у табл. 4.1.

Табл. 4.1 – Лінгвістичні змінні представлені у формі чисел (L-R)-типу.

№	Опис лінгвістичної змінної	(L-R)-представлення
1	Середній	$A = (a, \alpha, \beta)_{LR}$ $\alpha = \beta > 0$
2	Малий	$A = (a, \infty, \beta)_{LR}$ $\alpha = \infty$
3	Великий	$A = (a, \alpha, \infty)_{LR}$ $\beta = \infty$
4	Приблизно у діапазоні	$A = (a_1, a_2, \alpha, \beta)_{LR}$ $\alpha = \beta > 0$
5	Визначений	$A = (a, 0, 0)_{LR}$ $\alpha = \beta = 0$
6	Різноманітний: зона повної невизначеності	$A = (a, \infty, \infty)_{LR}$ $\alpha = \beta = \infty$

4.3. Лінгвістичні змінні

4.3.1. Визначення нечіткої та лінгвістичної змінної

Поняття нечіткої та лінгвістичної змінних використовується при описі об'єктів та явищ за допомогою нечітких множин.

Нечітка змінна визначається набором параметрів <α, X, A>, де α – назва нечіткої змінної, X – область визначення нечіткої змінної, $A = \{\mu_A(x)/x\}$ – задана на X нечітка множина, що описує можливі значення нечіткої змінної.

Лінгвістична змінна відрізняється від числової змінної тим, що її значеннями не є числами, вони є словами чи реченнями у природній чи формальній мові. Оскільки слова загалом менш точні, ніж числа, поняття лінгвістичної змінної дає можливість приблизно описувати явища, які настільки складні, що не піддаються опису у загальноприйнятих кількісних термінах. У зокрема, нечітких множинах, які представляють собою обмеження, пов'язані зі значеннями лінгвістичної змінної, можна розглядати як сукупну характеристику різних підкласів елементів універсальної множини. У цьому сенсі роль нечітких множин аналогічна тій ролі, яку відіграють слова та речення в природній мові.

Наприклад, прикметник "Гарний" відображає комплекс показників зовнішності індивідуума. Це прикметник можна також розглядати як назву нечіткої множини, яка є обмеженням, обумовленим нечіткою змінною "Гарний". З цієї точки зору терміни "Дуже красивий", "Негарний", "Надзвичайно гарний", "Цілком красивий" і т.п. – назви нечітких множин, утворених шляхом дії модифікаторів "Дуже, Ні, Надзвичайно, Повні" і т.п. на нечітку безліч "Гарний". По суті, ці нечіткі множини разом з нечітким безліччю "Гарний" грають роль значень лінгвістичної змінної "Зовнішність".

Важливий аспект поняття лінгвістичної змінної полягає в тому, що ця змінна вищого порядку, ніж нечітка змінна, у тому сенсі, що значеннями лінгвістичної змінної є нечіткі змінні.

Наприклад, значеннями лінгвістичної змінної "Вік" можуть бути: "Молодий, Немолодий, Старий, Дуже старий, Не молодий і не старий" і т.п. Кожне з цих значень є назвою нечіткої змінної. Якщо x - назва нечіткої змінної, то обмеження, обумовлене цією назвою, можна інтерпретувати як сенс нечіткої змінної x.

Інший важливий аспект поняття лінгвістичної змінної полягає у тому, що лінгвістичній змінній притаманні два правила:

1. Синтаксичне, яке може бути задано у формі граматики, що породжує назву значень змінної;

2. Семантичне, що визначає алгоритмічну процедуру для обчислення сенсу кожного значення.

Лінгвістична змінна (*linguistic variable*) – змінна, значеннями якої можуть бути слова чи словосполучення деякої природньої чи штучної мови.

Терм-множина (*term set*) – множина всіх можливих значень лінгвістичної змінної.

Терм (*term*) - будь-який елемент терм-множини. У теорії нечітких множин терм формалізується нечіткою множиною за допомогою функції приналежності.

Лінгвістична змінна характеризується набором параметрів <*X*, *T*(*X*), *U*, *G*, *M*> , в якому:

X – назва змінної;

T(*X*) – позначає терм-множину змінної *X*, тобто множину назв лінгвістичних значень змінної *X*, причому кожне з таких значень є нечіткою змінною зі значеннями з універсальної множини *U* з базовою змінною *u*;

G – синтаксичне правило, що породжує назви значень змінної *X*;

M – семантичне правило, яке ставить у відповідність до кожної нечіткої змінної *x* її сенс *M*(*x*), тобто нечітку підмножину універсальної множини *U*.

Конкретна назва *x*, породжена синтаксичним правилом *G*, називається **термом**. Терм, який складається з одного слова або кількох слів, що завжди фігурують разом один з одним, називається **атомарним термом**. Терм, який складається з більш ніж одного атомарного терма, називається **складовим термом**.

Приклад 4.8.

Розглянемо лінгвістичну змінну з ім'ям *X* = "Температура у кімнаті". Тоді лінгвістичну змінну можна визначити так:

1. Універсальна множена *U* = [5, 35];

2. Терм-множина *T* = {"Холодно", "Комфортно", "Спекотно"} з такими функціями приладдям:

$$\mu_{\text{холодно}}(u) = \frac{1}{1 + \left(\frac{u-10}{7}\right)^{12}};$$

$$\mu_{\text{комфортно}}(u) = \frac{1}{1 + \left(\frac{u-20}{3}\right)^{6}};$$

$$\mu_{\text{спекотно}}(u) = \frac{1}{1 + \left(\frac{u-30}{6}\right)^{10}};$$

3. Синтаксичне правило *G*, що породжує нові терми з використанням квантифікаторів "і", "або", "не", "дуже", "більш-менш" та інших;

4. *M* буде процедурою, що ставить кожному новому терму у відповідність нечітку множину з *X* за правилами: якщо терми *A* і *B* мали функції приналежності $\mu_A(u)$ та $\mu_B(u)$ відповідно, то нові терми матимуть такі функції приналежності, задані у табл. 4.2.

Табл. 4.2 – Функції приналежності нових термів.

Квантифікатор	**Функція приналежності**
не *t*	$1 - \mu_t(u)$
дуже *t*	$\mu_t(u)^2$
більш-менш *t*	$\sqrt{\mu_t(u)}$
A та *B*	$\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
A або *B*	$\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Графіки функцій приналежності термів "холодно", "не дуже холодно" і т.п. до лінгвістичної змінної "температура в кімнаті" показано на рис. 4.7.

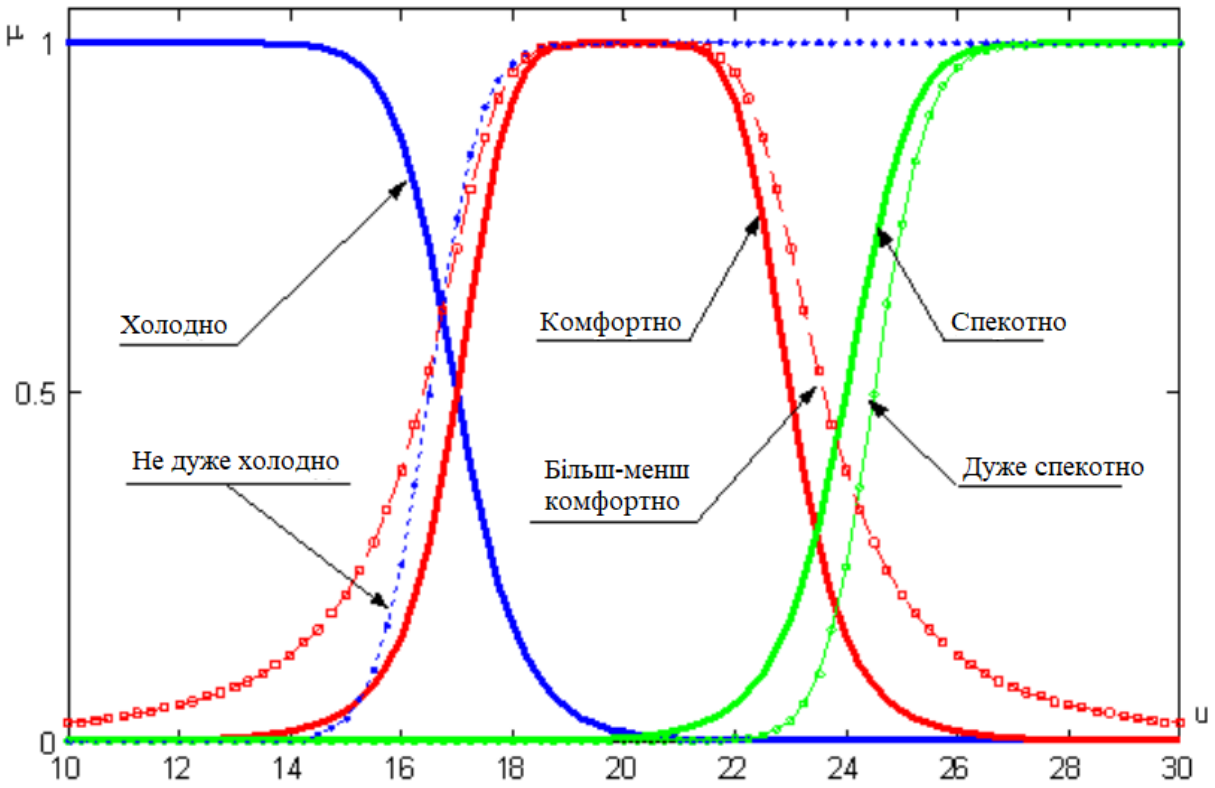


Рис. 4.7. Графіки функцій приналежності термів.

У розглянутому прикладі терм-множина складалася лише з невеликої кількості термів, так що доцільно було б просто перерахувати елементи терм-множини $T(X)$ і встановити пряму відповідність між кожним елементом та його змістом. У більш загальному випадку, кількість елементів у $T(X)$ може бути нескінченною, і тоді як для породження елементів множини $T(X)$, так і для обчислення їх сенсу необхідно застосовувати відповідний алгоритм, а не просто процедуру перерахування.

У такому випадку говорять, що **лінгвістична змінна *X* структурована**, якщо її терм-множина $T(X)$ та функцію M, яка ставить у відповідність кожному елементу терм-множини його зміст, можна задати алгоритмічно.

4.3.2. Лінгвістичні змінні істинності

У щоденному житті ми часто характеризуємо ступінь істинності твердження за допомогою таких виразів, як "дуже вірно", "цілком вірно", "більш-менш вірно", "хибно", "абсолютно хибно" і т.д. Подібність між цими виразами та значеннями лінгвістичної змінної наводить на думку про те, що в ситуаціях, коли істинність або помилковість твердження визначено недостатньо чітко, може виявитися доцільним трактувати «Істинність» як лінгвістичну змінну, для якої «Істино» і «Хибно» — лише два атомарні терми у терм-множині цієї змінної. У такому підході змінну називають **лінгвістичною змінною істинності**, а її значення – **лінгвістичними значеннями істинності**.

Трактування істинності як лінгвістичної змінної призводить до нечіткої лінгвістичної логіки, яка зовсім відмінна від звичайної двозначної чи навіть багатозначної логіки. Така нечітка логіка є основою того, що можна було б назвати наближеними міркуваннями, тобто видом міркувань, у якому значення істинності та правила їх виводу є нечіткими, а не неточними.

Значення істинності, що є числом [0,1], називатимемо **числовим значенням істинності**. Числові значення істинності відіграють роль значень базової змінної для лінгвістичної змінної «істинність». Лінгвістичні значення змінною «істинність»

називатимемо **лінгвістичними значеннями істинності.** Точніше будемо припускати, що «істинність» - назва булевої лінгвістичної змінної, для якої атомарним є терм «істинний», а терм «хибний» визначається не як заперечення терма «істинний», а як його дзеркальне відображення щодо точки 0,5.

По формулюванню Заде. Передбачається, що зміст первинного терму «істинний» є нечіткою підмножиною інтервалу $V = [0, 1]$ з наступною функцією приналежності:

$$\mu_{Істинний}(u) = \begin{cases} 0, \text{ при } 0 \le u \le a; \\ 2\left(\dfrac{u-a}{1-a}\right)^2, \text{ при } a \le u \le \dfrac{1+a}{2}; \\ 1-2\left(\dfrac{u-a}{1-a}\right)^2, \text{ при } \dfrac{1+a}{2} \le u \le 1. \end{cases}$$

яка показана на рис. 4.8, та збудована при значенні параметра $a = 0{,}4$.

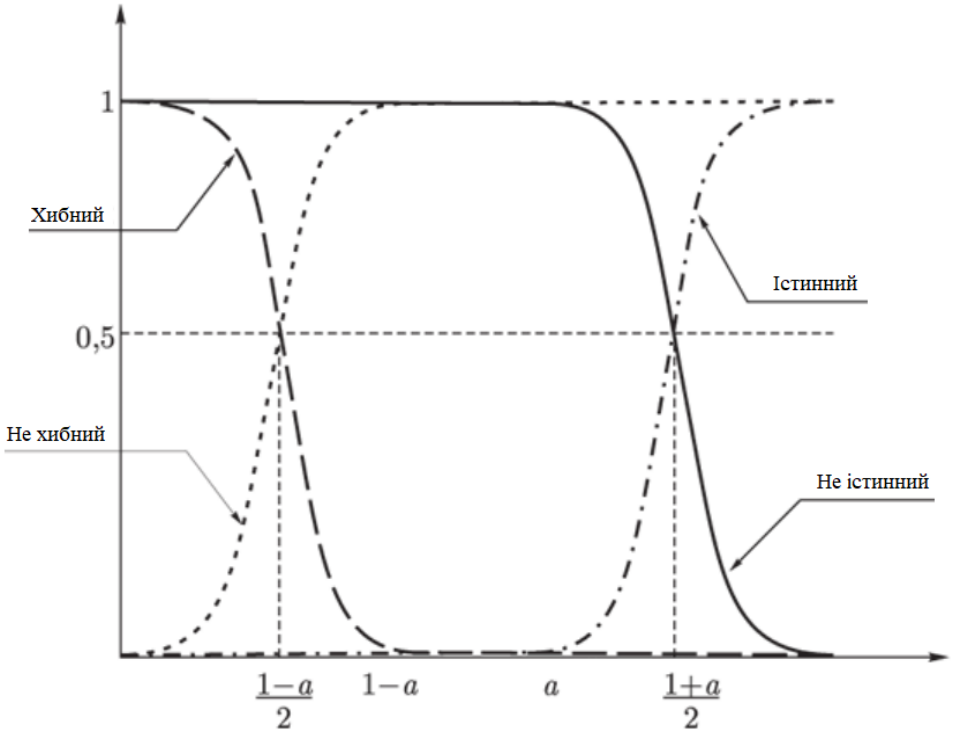


Рис. 4.8. Функцією приналежності нечіткої множини «істинний» по формулюванню Заде.

Тут точка $u = \frac{1+a}{2}$ є точкою переходу. Відповідно, для терма «Хибний» маємо $\mu_{Хибний}(u) = \mu_{Істинний}(1-u)$

По формулюванню Балдвіна (рис. 4.9).

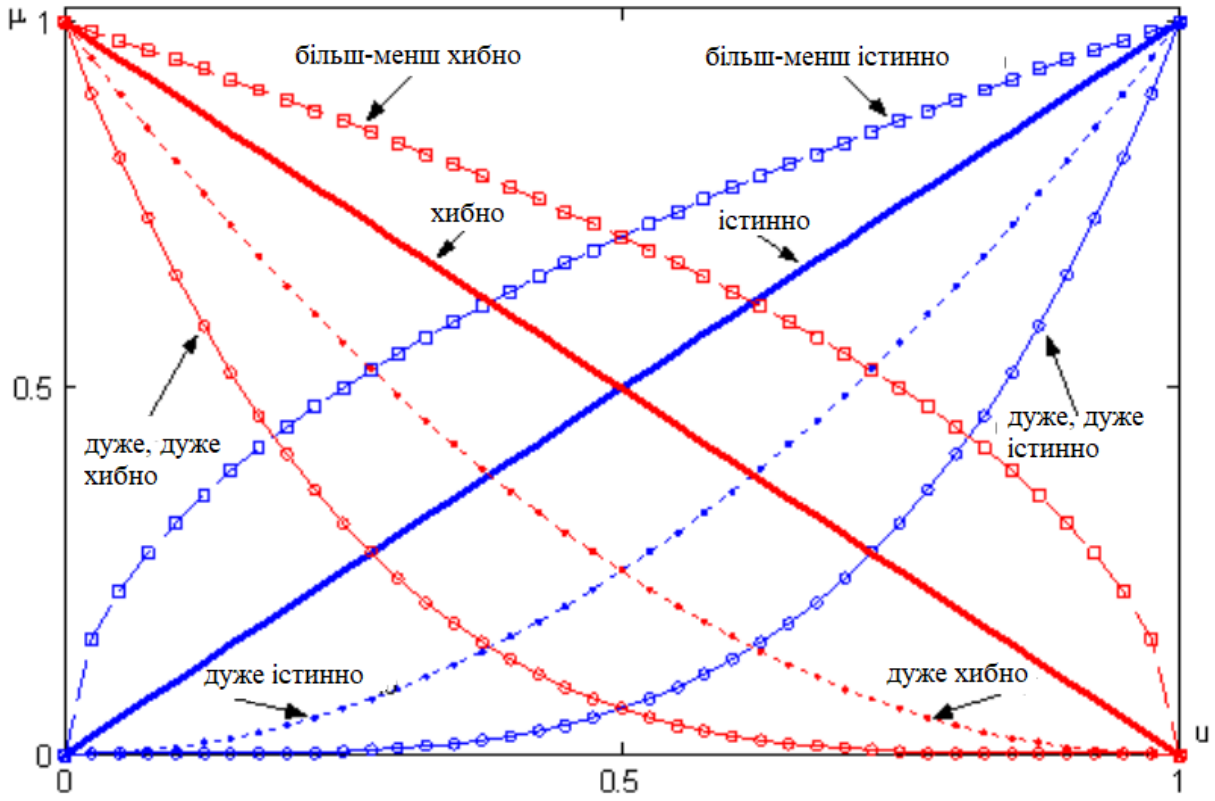


Рис. 4.9. Функцією приналежності нечіткої множини «істинності» по формулюванню Балдвіна.

4.3.3. Значення істинності «Невідомо» та «Невизначено»

Серед можливих значень істинності лінгвістичної змінної «Істиність» два значення привертають особливу увагу, а саме порожня множина $\varnothing$ і одиничний інтервал [0, 1], які відповідають найменшому та найбільшому елементам нечітких підмножин інтервалу [0, 1]. Важливість саме цих значень істинності обумовлена тим, що їх можна інтерпретувати як значення істинності «Невизначено» і «Невідомого» відповідно.

Важливо чітко розуміти різницю між 0 і $\varnothing$. Коли ми говоримо, що ступінь належності точки u множини $A \in \varnothing$, ми маємо на увазі, що функція приналежності $\mu_A(u)$ не визначена у точці u. Припустимо, наприклад, що U це множина дійсних чисел, а μ_A – функція, визначена на множині цілих чисел, причому, $\mu_A(u) = 1$, якщо u парне, і $\mu_A(u) = 0$, якщо u непарне. Тоді ступінь приналежності числа $u = 1{,}5$ множині $A \in \varnothing$, а не 0.

З іншого боку, якби μ_A було визначено на множині дійсних чисел і $\mu_A(u) = 1$ тоді і лише тоді, якщо u – парне число, то ступінь належності числа 1,5 множині A дорівнювало б 0.

Поняття значення істинності «Невідоме» у поєднанні з принципом узагальнення допомагає усвідомити деякі поняття та співвідношення звичайних двозначних та тризначних логік. Ці логіки можна розглядати як вироджені випадки нечіткої логіки, у якій значенням істинності «Невідомо» є весь одиничний інтервал, а не множина $\{0, 1\}$.

Контрольні запитання:

1. Поясніть чим відрізняється взаємно однозначне відображення від відображення, що не є взаємно однозначним та наведіть приклади генерування відображеннями нечітких множин, що це демонструють?

2. Дайте визначення нечіткого числа та поясніть відмінності між підмножинами базової множини, що характеризують нечітке число, таких як ядро, α-рівень та носій?

3. Дайте визначення нечітких чисел, які називаються: позитивними, негативними, нечітким нулем та нечітким числом, що не є ні позитивним ні негативним?

4. Які існують бінарні арифметичні операції над нечіткими числами та наведіть приклади їх застосування?

5. Які існують унарні арифметичні операції над нечіткими числами та наведіть приклади їх застосування?

6. Дайте визначення нечітких чисел (*L*-*R*)-типу та поясніть чим вони відрізняються від звичайних нечітких чисел?

7. Дайте визначення унімодального і толерантного нечіткого числа (*L*-*R*)-типу та наведіть приклади нечітких категорій, які можуть бути описані нечіткими числами даного типу.

8. Дайте визначення нечіткої і лінгвістичної змінної та опишіть різницю між ними?

9. Дайте визначення лінгвістичної змінної істинності та поясніть в чому різниця між формулюванням Заде і Балдвіна?

10. Поясніть в чому різниця між невідомим та невизначеним значенням істинності?

РОЗДІЛ 5

НЕЧІТКІ ВІДНОШЕННЯ ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

5.1. Основні визначення нечітких відношень

Нечіткі відношення грають фундаментальну роль теорії нечітких множин. Апарат теорії нечітких відношень використовується при вирішенні численних завдань моделювання структури та поведінки складних систем, при аналізі процесів прийняття рішень та в завданнях, у яких традиційно застосовується теорія звичайних (чітких) відношень. Ці відношення дозволяють формалізувати неточні твердження типу «*x* майже дорівнює *y*» або «*x* значно більше ніж *y*». Наведемо основні визначення нечітких відношень.

Нехай $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ – прямий добуток універсальних множин і M – деяка множина приналежності (наприклад $M = [0,1]$). **Нечітке *n*-арне відношення** визначається як нечітка підмножина R на E, що приймає свої значення в M.

Найпростіший тип нечітких відношень задається як **бінарне нечітке відношення** між елементами двох універсальних множин. При цьому на форму і вид функції приналежності нечіткого відношення попередньо ніяких обмежень не накладається. Далі ми обмежимося розглядом лише **бінарних нечітких відношень**. У разі коли $n = 2$ і $M = [0,1]$, нечітким відношенням R між множинами $X = E_1$ та $Y = E_2$ буде називатися функція R: $(X, Y) \to [0,1]$, яка ставить у відповідність кожній парі елементів $(x, y) \in X \times Y$ величину $\mu_R(x, y) \in [0,1]$.

Позначення: нечітке відношення на $X \times Y$ запишеться як:

$$x \in X, y \in Y : x \; R \; y.$$

Якщо множини X і Y мають кінцеву кількість елементів, нечітке відношення R між X і Y можна представити за допомогою його **матриці відношень**, у першому

рядку і першому стовпцю якої ставляться у відповідність елементи множин X і Y, а на перетині рядка x та стовпця y міститься елемент $\mu_R(x, y)$.

Приклад 5.1. Представлення нечітких відношень.

Нехай $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $M = [0, 1]$. Нечітке відношення $R = X\ R\ Y$ задано, наприклад, табл. 5.1.

Табл. 5.1 – Представлення нечіткого відношення.

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0.1	0.3
x_2	0	0.8	1	0.7
x_3	1	0.5	0.6	1

Приклад 5.2.

Задамо нечітке відношення $x \approx y$ («x приблизно дорівнює y»). Нехай $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тоді нечітке відношення R зручно задавати матрицею наступного виду:

R	y_0	y_1	y_2	y_3
x_0	1	0.5	0.2	0.1
x_1	0.5	1	0.6	0.3
x_2	0.2	0.6	1	0.8
x_3	0.1	0.3	0.8	1

Для безперервних множин $X \in [0, 3]$ та $Y \in [0, 3]$ нечітке відношення можна встановити наступною функцією приналежності:

$$\mu_R(x, y) = e^{-0.2(x-y)^2}.$$

Нечітке відношення на дискретних та безперервних множинах зображені на рис. 5.1.

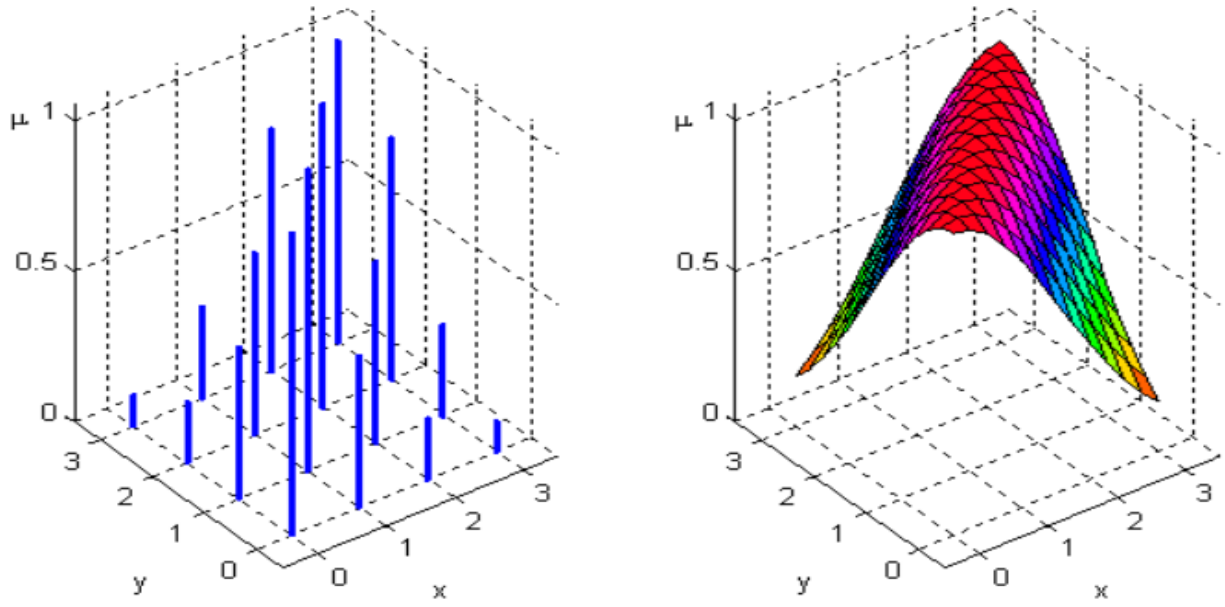


Рис. 5.1. Нечітке відношення «*x* приблизно дорівнює *y*» на дискретних та безперервних множинах.

Приклад 5.3.

Задамо нечітке відношення «*x* набагато менше, ніж *y*». Нехай $x, y \in \{0, 1, 2, 3\}$. Тоді нечітке відношення *R* зручно задавати матрицею наступного виду:

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}6 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для безперервних множин $X \in [0, 3]$ та $Y \in [0, 3]$ нечітке відношення «*x* набагато менше, ніж *y*» можна визначити наступною функцією приналежності:

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 0, \text{при } x \geq y, \\ \dfrac{1}{1 + 5/(x - y)^4}, \text{при } x < y. \end{cases}$$

Нечітке відношення «*x* набагато менше, ніж *y*» на дискретних та безперервних множинах зображені на рис. 5.2.

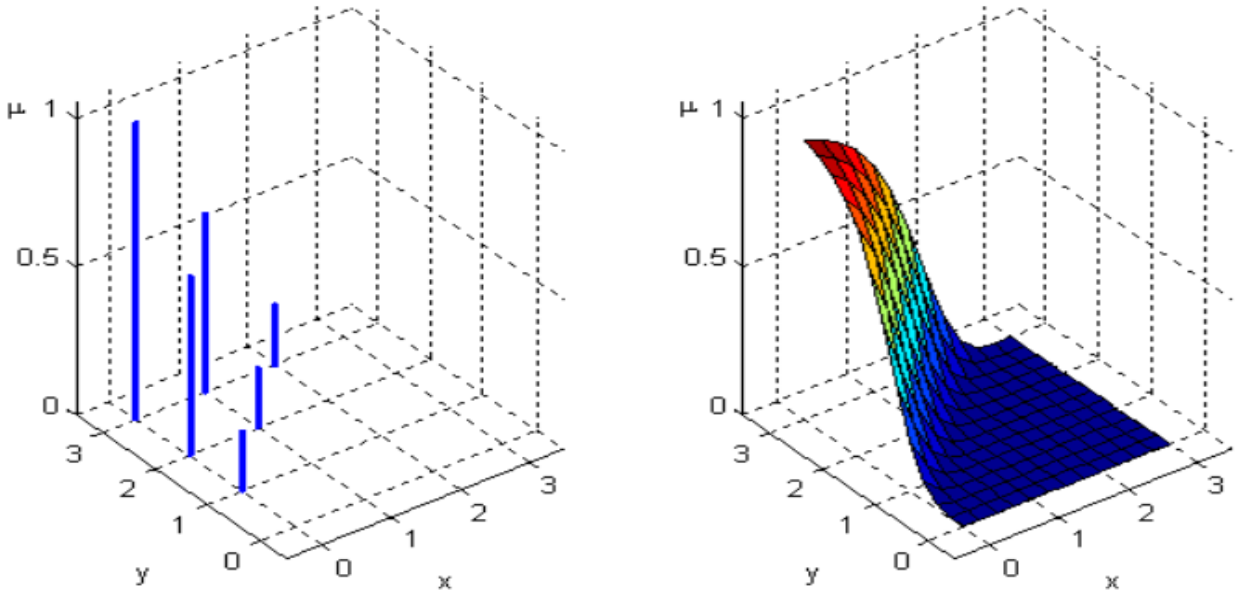


Рис. 5.2. Нечітке відношення «*x* набагато менше, ніж *y*» на дискретних та безперервних множинах.

Як видно з прикладів, нечіткі відношення є більш гнучкими у порівнянні з традиційними відношеннями. Вони дозволяють задати не лише сам факт виконання відношення, а й вказувати ступінь його виконання, що є дуже важливим для багатьох практичних завдань.

Приклад 5.4.

Задати ставлення «схожий менталітет» для наступних національностей {Українці, Чехи, Австрійці, Німці}.

Використання звичайного відношення дозволяє виділити лише одну пару націй зі схожими менталітетами – німців та австрійців. Цим відношенням не відбивається той факт, що за менталітетом чехи ближчі до німців, ніж українці. Нечітке відношення дозволяє легко задати більш повну інформацію:

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 1 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 1 & 0{,}8 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix}.$$

У випадку універсальних множин з кінцевою кількістю елементів очевидна інтерпретація нечіткого **відношення у вигляді виваженого графа**, в якому кожна пара вершин $(x, y) \in X \times Y$ з'єднується ребром з вагою $R(x, y)$.

Приклад 5.5.

Нехай $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Нечітке відношення $R = X\ R\ Y$ задає нечіткий граф (рис. 5.3).

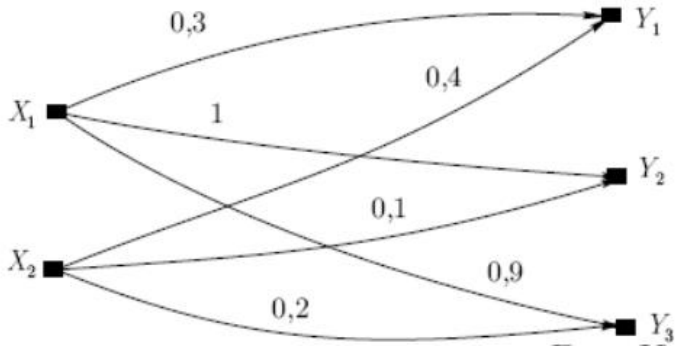


Рис. 5.3. Нечіткий граф відношення $R = X\ R\ Y$.

У випадку, коли $X = Y$, тобто X і Y збігаються, нечітке відношення R: $X \times X \to [0,1]$ називається **нечітким відношення на множині** X.

Приклад 5.6.

Нехай $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ і задано нечітке відношення R: $X \times X \to [0,1]$, тоді результат цього відношення може бути представлений у вигляді графу (рис. 5.4).

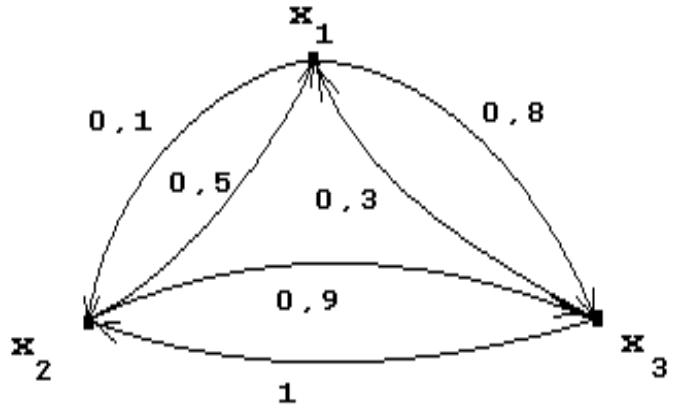


Рис. 5.4. Нечіткий граф відношення R: $X \times X$.

Зауваження. У загальному випадку нечіткий граф може бути визначений на деякому $G \subset X \times Y$, де G – множина упорядкованих пар (x, y) (необов'язково всіх можливих) таке, що $G \cap \overline{G} = \varnothing$ та $G \cup \overline{G} = X \times Y$.

Порожнє нечітке відношення. У теорії нечітких відношень порожнє нечітке відношення визначається як відношення, яке не містить жодного елементу (x, y). Це відношення позначається через $\varnothing$ і формально визначається як таке нечітке відношення, функція належності якого тотожно дорівнює 0, тобто:

$$\mu_X(x_1, \ldots, x_k) \equiv 0$$

на всіх елементах декартового добутку $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$.

Повне нечітке відношення збігається зі звичайним повним відношенням, яке, у своєю чергою, дорівнює, за визначенням, декартовому добутку відповідних множин $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Функція приналежності повного нечіткого відношення тотожно дорівнює одиниці, тобто:

$$\mu_X(x_1, \ldots, x_k) \equiv 1.$$

Носій нечіткого відношення. Носієм $S(R)$ нечіткого відношення R називається звичайна множина впорядкованих пар (x, y), для яких їх функція приналежності є позитивною:

$$S(R) = \{(x, y): \mu_R(x, y) > 0\}.$$

Нечітке відношення, що містить у собі інше нечітке відношення, або міститься в ньому. Нехай R_1 та R_2 - два нечітких відношення такі, що:

$$\forall (x, y) \in X \times Y: \mu_{R1}(x, y) \le \mu_{R2}(x, y),$$

тоді говорять, що R_2 включає R_1 чи R_1 міститься у R_2. Позначення: $R_1 \subseteq R_2$.

Приклад 5.7.

$$\mu_{R_1}(x, y) = \begin{cases} 0, x > y \\ 1 - e^{-k_1 (x-y)^2}, y \ge x \end{cases} \qquad \mu_{R_2}(x, y) = \begin{cases} 0, x > y \\ 1 - e^{-k_2 (x-y)^2}, y \ge x \end{cases}$$

Відношення R_1, R_2 – відношення типу $y >> x$ (y набагато більше x). При $k_2 > k_1$ відношення R_2 міститься R_1.

Нечітке відношення R на $X \times X$ називається **рефлексивним**, якщо для будь якого $x \in X$ виконується рівність $\mu_R(x, x) = 1$. У випадку коли X це множина з кінцевою кількістю елементів усі елементи головної діагоналі матриці рефлексивного відношення R дорівнює 1. Прикладом рефлексивного нечіткого відношення може бути відношення «приблизно дорівнює».

Нечітке відношення R на $X \times X$ називається **антирефлексивним**, якщо для будь якого $x \in X$ виконується рівність $\mu_R(x, x) = 0$. У випадку коли X це множина з кінцевою кількістю елементів усі елементи головної діагоналі матриці відношення R дорівнює 0. Прикладом антирефлексивного нечіткого відношення може бути відношення «значно більше».

Нечітке відношення R на $X \times Y$ називається **симетричним**, якщо для будь якої пари $(x, y) \in X \times Y$ виконується рівність $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$. Матриця симетричного нечіткого відношення є симетричною.

Нечітке відношення R на $X \times Y$ називається **асиметричним**, якщо вираз $\mu_R(x, y) > 0 \Rightarrow \mu_R(y, x) = 0$ вірно для будь якої пари $(x, y) \in X \times Y$. Прикладом асиметричного нечіткого відношення може бути відношення «небагато більше».

Нечіткі відношення R^{-1} на $X \times Y$ називається **зворотними** до R, якщо для будь якої пари $(x, y) \in X \times Y$ виконується рівність $\mu_R(x, y) = \mu_{R^{-1}}(y, x)$. Прикладом зворотного нечіткого відношення може бути пара «небагато більше» - «небагато менше».

5.2. Операції над нечіткими відношеннями

5.2.1. Об'єднання двох нечітких відношень R_1 та R_2

Об'єднання двох нечітких відношень позначається $R_1 \cup R_2$ та визначається виразом:

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) \vee \mu_{R_2}(x, y),$$

де $\vee$ - використовується для позначення операції max.

У загальному випадку в якості операції $\vee$ може використовуватися не лише операція max:

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x, y) = \max\left(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)\right),$$

але й будь яка *t*-норма:

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x, y) = T\left(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)\right), (x, y) \in X \times Y,$$

де $T(\ldots)$ – *T*-норма.

Приклад 5.8.

Якщо $x\, R_1\, y$ це нечітке відношення «числа x та y дуже близькі», а $x\, R_2\, y$ це нечітке відношення «числа x та y дуже різні» тоді їх об'єднання $xR_1 \cup R_2 y$ – нечітке відношення «числа x та y які дуже близькі або дуже різні».

Функції приналежності цих відношень задані $|y\text{-}x|$:

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x, y) = \begin{cases} \mu_{R_1}(x, y), & |y - x| \le \alpha \\ \mu_{R_2}(x, y), & |y - x| > \alpha \end{cases}$$

де α – таке $|y - x|$, що $\mu_{R1}(x, y) = \mu_{R2}(x, y)$

У вигляді матриці відношень результат об'єднання двох нечітких відношень $R_1 \cup R_2$ можливо представити наступним чином:

R_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0	0,8
x_2	1	0,7	0

R_2	y_1	y_2	y_3
x_1	0,7	0,9	1
x_2	0,3	0,4	0,5

$R_1 \cup R_2$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,7	0,9	1
x_2	1	0,7	0,5

Графічно $\mu_{R_1 \cup R_2}(x, y)$ можливо відобразити так, як це зображено на рис. 5.5.

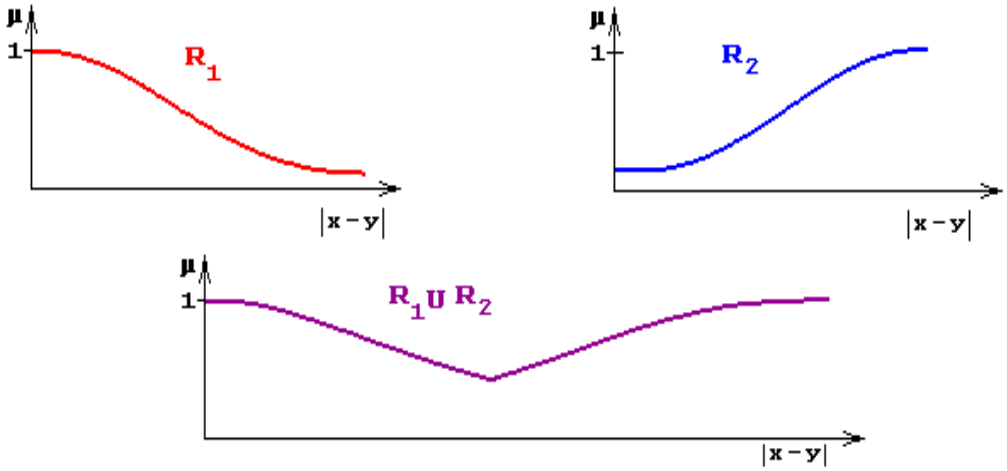


Рис. 5.5. Об'єднання двох нечітких відношень $\mu_{R_1 \cup R_2}(x, y)$.

5.2.2. Перетин двох нечітких відношень R_1 та R_2

Перетин двох нечітких відношень позначається $R_1 \cap R_2$ та визначається виразом:

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(x, y),$$

де $\wedge$ – використовується для позначення операції min.

У загальному випадку в якості операції $\wedge$ може використовуватися не лише операція min:

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x, y) = \min\left(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)\right),$$

але й будь яка *S*-кнорма:

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x, y) = S\left(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)\right), (x, y) \in X \times Y,$$

де *S*(…) – *S*-кнорма.

Приклад 5.9.

Якщо $x\ R_1\ y$ це нечітке відношення «модуль різниці |*y*-*x*| близький до α», а $x\ R_2\ y$ це нечітке відношення «модуль різниці |y-x| близький до β» тоді їх перетин $xR_1 \cap R_2\ y$ графічно можливо представити так, як це зображено на рис. 5.6.

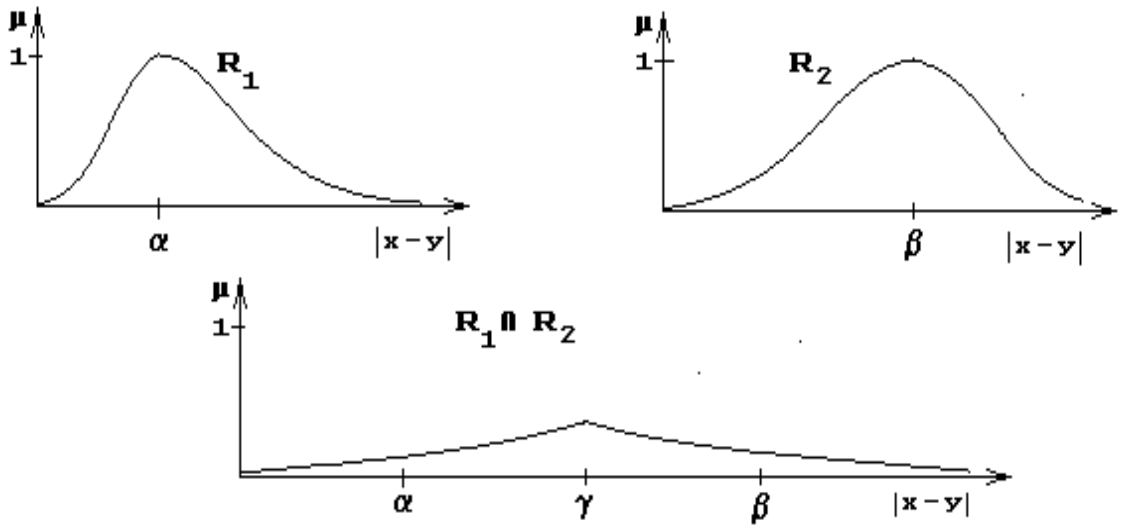
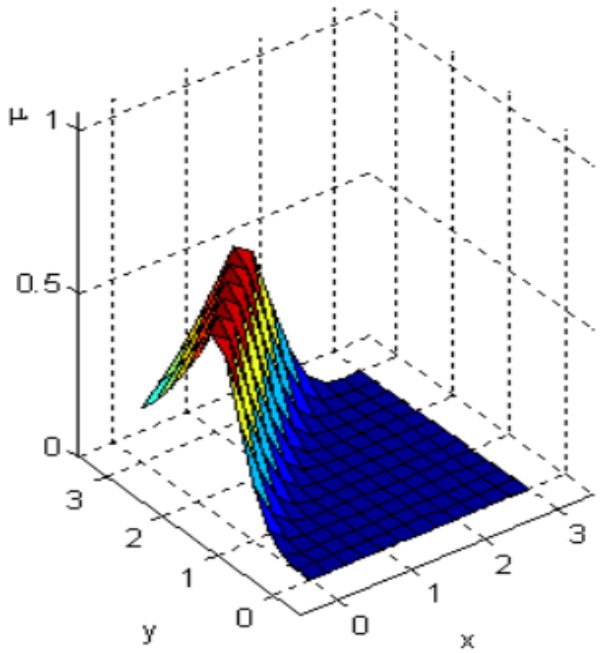


Рис. 5.6. Перетин двох нечітких відношень R_1 та R_2.

Приклад 5.10.

Перетин та об'єднання нечітких відношень «*x* приблизно дорівнює *y*» ($x \approx y$) та «*x* набагато менше за *y*» ($x << y$) показано на рис. 5.7.

Перетин нечітких відношень



Об'єднання нечітких відношень

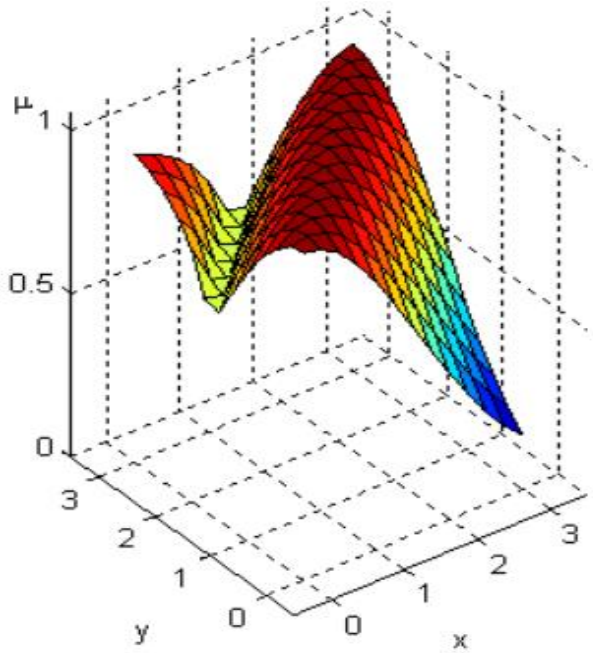


Рис. 5.7. Перетин та об'єднання нечітких відношень.

У якості *T*-норми та *S*-кнорми використовувалися операції знаходження максимуму та мінімуму, відповідно.

5.2.3. Доповнення нечітких відношень

Доповнення нечіткого відношення R позначається $\overline{R}$ та визначається функцією приналежності:

$$\mu_{\overline{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y)$$

Приклад 5.11.

Якщо R це нечітке відношення представлене у вигляді матриці відношення тоді його доповнення $\overline{R}$ можливо представити наступним чином:

R	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0	0,8
x_2	1	0,7	0,5

$\overline{R}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,9	1	0,2
x_2	0	0,3	0,5

5.2.4. Алгебраїчний добуток двох відношень

Алгебраїчний добуток двох відношень R_1 та R_2 позначається $R_1 \cdot R_2$ й визначається виразом:

$$\mu_{R_1 \cdot R_2}(x,y) = \mu_{R_1}(x,y) \cdot \mu_{R_2}(x,y).$$

5.2.5. Алгебраїчна сума двох відношень

Алгебраїчна сума двох відношень R_1 та R_2 позначається $R_1 \hat{+} R_2$ та визначається виразом:

$$\mu_{R_1 + R_2}(x,y) = \mu_{R_1}(x,y) + \mu_{R_2}(x,y) - \mu_{R_1}(x,y) \cdot \mu_{R_2}(x,y).$$

Для введених операцій об’єднання, перетину, алгебраїчного добутку та суми відношення справедливі такі **характеристики дистрибутивності**:

$$R_1 \cap (R_2 \cup R_3) = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_3),$$
$$R_1 \cup (R_2 \cap R_3) = (R_1 \cup R_2) \cap (R_1 \cup R_3),$$
$$R_1 \cdot (R_2 \cup R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cup (R_1 \cdot R_3),$$
$$R_1 \cdot (R_2 \cap R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cap (R_1 \cdot R_3),$$

$$R_1 \hat{+} (R_2 \cup R_3) = (R_1 \hat{+} R_2) \cup (R_1 \hat{+} R_3),$$
$$R_1 \hat{+} (R_2 \cap R_3) = (R_1 \hat{+} R_2) \cap (R_1 \hat{+} R_3).$$

5.2.6. Диз'юнктивна сума двох відношень

Диз'юнктивна сума двох відношень R_1 та R_2 позначається $R_1 \oplus R_2$ та визначається виразом:

$$R_1 \oplus R_2 = (R_1 \cap \overline{R}_2) \cup (\overline{R}_1 \cap R_2).$$

5.2.7. Звичайне відношення, найближче до нечіткого

Нехай R – нечітке відношення з функцією приналежності $\mu_R(x, y)$. Звичайне відношення, найближче до нечіткого, позначається $\underline{R}$ та визначається виразом:

$$\mu_{\underline{R}}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad \mu_R(x, y) < 0{,}5, \\ 1, & \text{при} \quad \mu_R(x, y) > 0{,}5, \\ 0 \ \text{чи} \ 1, & \text{при} \quad \mu_R(x, y) = 0{,}5. \end{cases}$$

Зазвичай за домовленістю приймають $\mu_{\underline{R}}(x, y) = 0$ при $\mu_R(x, y) = 0{,}5$.

5.2.8. Відношення включення

Відношення включення $R \subseteq S$ для нечітких відношень визначається за допомогою відношення часткового порядку:

$$\forall x \in X, y \in Y, \qquad R \subseteq S \Leftrightarrow R(x, y) \leq S(x, y).$$

Безліч усіх нечітких відношень (наприклад R, S, T) між X та Y утворює дистрибутивну решітку по відношенню до операцій об'єднання й перетину та задовольняє наступним тотожностям:

1. Ідемпотентність: $R \cap R = R;\ R \cup R = R$.

2. Комутативність: $R \cap S = S \cap R;\ R \cup S = S \cup R$.

3. Асоціативність: $R \cap (S \cap T) = (R \cap S) \cap T;\ \ R \cup (S \cup T) = (R \cup S) \cup T$.

4. Дистрибутивність:

$$R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T),$$
$$R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T).$$

Крім того для відношення включення виконується наступне співвідношення:

$$S \subseteq T \Longrightarrow R \cup S \subseteq R \cup T;\ R \cap S \subseteq R \cap T.$$

У табл. 5.2. зібрані властивості нечітких відношень, де I – означає одиничну матрицю, а O – нульову матрицю.

Табл. 5.2 – Властивості нечітких відношень.

№	**Властивості відношення**
1	$R \cdot I = I \cdot R = R$
2	$R \cdot O = O \cdot R = O$
3	$(R \cdot S) \cdot T = R \cdot (S \cdot T)$
4	$R^m \cdot R^n = R^{m+n}$
5	$(R^m)^n = R^{mn}$
6	$R \cdot (S \cup T) = (R \cdot S) \cup (R \cdot T)$
7	$R \cdot (S \cap T) \subseteq (R \cdot S) \cap (R \cdot T)$
8	$S \subset T \longrightarrow R \cdot S \subset R \cdot T$

5.2.9. Композиція двох нечітких відношень ((max-min)-композиція)

Нехай R_1 – нечітке відношення R_1: $(X \times Y) \rightarrow [0, 1]$ між X та Y, й R_2 - нечітке відношення R_2: $(Y \times Z) \rightarrow [0,1]$ між Y та Z. Нечітке відношення між X та Z, що позначається $R_2 \circ R_1$, визначене через R_1 та R_2 виразом:

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \bigvee_y \left(\mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(y, z)\right).$$

називається (max-min)-композицією (або (max-min)-згорткою) відношень R_1 та R_2.

У деяких літературних джерелах (max-min)-композицією (максимінною композицію) називають добутком нечітких відношень.

Приклад 5.12.

Нехай задані R_1 та R_2

R_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,7	0,4
x_2	1	0,5	0

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0	1	0,2
y_2	0,3	0,6	0	0,9
y_3	0,1	1	0	0,5

Тоді $R_1 \circ R_2$ буде мати наступний вигляд

$R_1 \circ R_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,3	0,6	0,1	0,7
x_2	0,9	0,5	1	0,5

При цьому

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, z_1) = \left(\mu_{R_1}(x_1, y_1) \wedge \mu_{R_2}(y_1, z_1)\right) \vee \left(\mu_{R_1}(x_1, y_2) \wedge \mu_{R_2}(y_2, z_1)\right) \vee$$

$$\vee \left(\mu_{R_1}(x_1, y_3) \wedge \mu_{R_2}(y_3, z_1)\right) = (0{,}1 \wedge 0{,}9) \vee (0{,}7 \wedge 0{,}3) \vee (0{,}4 \wedge 0{,}1) =$$

$$= 0{,}1 \vee 0{,}3 \vee 0{,}1 = 0{,}3;$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, z_2) = (0{,}1 \wedge 0) \vee (0{,}7 \wedge 0{,}6) \vee (0{,}4 \wedge 1) = 0 \vee 0{,}6 \vee 0{,}4 = 0{,}6;$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, z_3) = 0{,}1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_2, z_5) = 0{,}5.$$

де $\vee$ – використовується для позначення операції max, а $\wedge$ – використовується для позначення операції min.

Зауваження. У цьому прикладі спочатку використаний «аналітичний» спосіб композиції відношень R_1 та R_2, тобто. i-й рядок R_1 «множиться» на j-й стовпець R_2 з використанням операції $\wedge$, отриманий результат «згортається» з використанням операції $\vee$ в $\mu(x_i, z_j)$.

На рис. 5.8 наведені графи, відповідні R_1 та R_2, що «склеєні» по Y. В отриманому графі розглядаємо шляхи від x_i до z_j і кожному ставимо у відповідність мінімальну «вагу» з його складових. Потім визначаємо максимум по всіх шляхах з x_i до z_j, який і дає шукане $\mu(x_i, z_j)$.

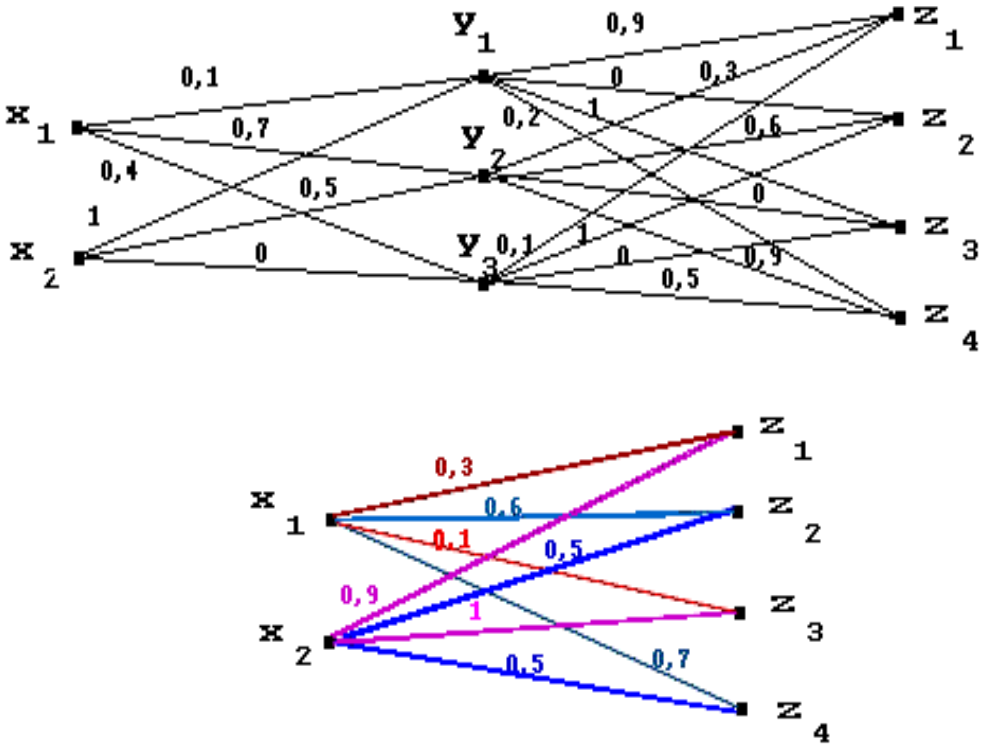


Рис. 5.8. – Нечіткі графи, що «склеєні» по *Y*.

Приклад 5.13.

Нехай нечіткі відношення *R* та *S* представлені матрицями:

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

При чому

$$X = \{x_1, x_2\}, Y = \{y_1, y_2\}, Z = \{z_1, z_2\}.$$

Тоді (max-min)-композиції нечітких відношень *R* та *S* буде мати наступний вигляд:

$$Q = R \circ S = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \end{bmatrix},$$

де

$$q_{11} = \max[\min(0{,}2; 0{,}3), \min(0{,}5; 0{,}7)] = 0{,}5;$$

$$q_{12} = \max[\min(0{,}2; 0{,}6), \min(0{,}5; 0{,}9)] = 0{,}5;$$

$$q_{13} = \max[\min(0{,}2; 0{,}8), \min(0{,}5; 0{,}4)] = 0{,}4;$$

$$q_{21} = \max[\min(0{,}6; 0{,}3), \min(1; 0{,}7)] = 0{,}7;$$

$$q_{22} = \max[\min(0{,}6; 0{,}6), \min(1; 0{,}9)] = 0{,}9;$$

$$q_{23} = \max[\min(0{,}6; 0{,}8), \min(1; 0{,}4)] = 0{,}6.$$

Тому

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}9 & 0{,}6 \end{bmatrix}.$$

Властивості (max-min)-композиції:

Операція (max-min)-композиції асоціативна, тобто:

$$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1,$$

дистрибутивна щодо об'єднання, але недистрибутивна щодо перетину:

$$R_3 \circ (R_2 \cup R_1) = (R_3 \circ R_2) \cup (R_3 \circ R_1),$$

$$R_3 \circ (R_2 \cap R_1) \neq (R_3 \circ R_2) \cap (R_3 \circ R_1).$$

Крім того, для (max-min)-композиції виконується така важлива властивість: якщо $R_1 \subset R_2$ то $R \circ R_1 \subset R \circ R_2$.

Приклад 5.14.

Нехай задано:

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2\},$$

$$A = \frac{0{,}4}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{0{,}6}{x_3}.$$

Нечітке відношення R задано матрицею

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 1 \\ 0{,}9 & 0{,}3 \end{bmatrix}.$$

Тоді результатом (max-min)-композиції $A \circ R$ буде нечітка множина B виду:

$$B = \frac{\mu_B(y_1)}{y_1} + \frac{\mu_B(y_2)}{y_2}.$$

Причому

$$\mu_B(y_1) = \max[\min(0{,}4; 0{,}5), \min(1; 0{,}2), \min(0{,}6; 0{,}9)] = 0{,}6;$$

$$\mu_B(y_2) = \max[\min(0{,}4; 0{,}7), \min(1; 1), \min(0{,}6; 0{,}3)] = 1.$$

Тому нечітка множина B має наступний вигляд

$$B = \frac{0{,}6}{y_1} + \frac{1}{y_2}.$$

Приклад 5.15.

Нехай $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ та задані нечітке відношення $X\ R\ Y$

$X\ R\ Y =$		y_1	y_2	y_3	y_4
	x_1	0,8	1	0	0,3
	x_2	0,8	0,3	0,8	0,2
	x_3	0,2	0,3	0	0,4

і нечітка множина $A = \{0{,}3/x_1;\ 0{,}7/x_2;\ 1/x_3\}$.

Проведемо операцію $\wedge$ для A та стовпця y_1 :

x_1	x_2	x_3
0,3	0,7	1

$\wedge$

y_1
0,8
0,8
0,2

$=$

y_1
$0{,}3 \wedge 0{,}8$
$0{,}7 \wedge 0{,}8$
$1 \wedge 0{,}2$

$=$

y_1
0,3
0,7
0,2

Після виконання операції $\vee$ на елементах отриманого стовпця маємо:

$$\mu_B(y_1) = 0{,}3 \vee 0{,}7 \vee 0{,}2 = 0{,}7.$$

Зробивши аналогічні обчислення для y_2, y_3, y_4 маємо:

$$\mu_B(y_2) = 0{,}3; \quad \mu_B(y_3) = 0{,}7; \quad \mu_B(y_4) = 0{,}4.$$

Остаточно отримаємо:

A $\qquad\qquad$ R $\qquad\qquad\qquad\qquad$ B

0,3	0,7	1

$\cdot$

0,8	1	0	0,3
0,8	0,3	0,8	0,2
0,2	0,3	0	0,4

$=$

0,7	0,3	0,7	0,4

Зауваження. При заданому R, якщо A індукує B, то звичайна найближча чітка підмножина $\underline{A}$ індукує $\underline{B}$.

5.2.10. *Зворотне відношення.*

Для будь-якого нечіткого відношення R визначається також зворотне відношення R^{-1}

$$\forall x, y \in X, \qquad R^{-1}(x, y) = R(x, y).$$

5.2.11. Звичайна підмножина α-рівня нечіткого відношення

Звичайною підмножиною α-рівня нечіткого відношення R називається чітке (звичайне) відношення Rα таке, що

$$\mu_{R_1}(x, y) = \begin{cases} 1, \text{при } \mu_R(x, y) \geq \alpha \\ 0, \text{при } \mu_R(x, y) < \alpha \end{cases}$$

Очевидно, якщо $\alpha_1 \leq \alpha_2$ тоді $R_{\alpha 1} \geq R_{\alpha 2}$.

5.2.12. Нечіткі підмножини послідовно обумовлюють одне одного

Якщо

A_1 індукує A_2 за допомогою R_1,

A_2 індукує A_3 за допомогою R_2,

.....

A_{n-1} індукує A_n за допомогою R_{n-1},

тоді A_1 індукує A_n за допомогою $R_{n-1} \bullet R_{n-2} \bullet \ldots \bullet R_1$, де $R_{n-1} \bullet R_{n-2} \bullet \ldots \bullet R_1$ – визначена вище композиція нечітких відношень $R_1, R_2, ..., R_n$.

Приклад 5.16. Обрахування нечітких підмножин, що послідовно обумовлюють одне одного.

Нехай задані нечіткі відношення R_1 та R_2, які представлені матрицями, що породжують $R_1 \bullet R_2$.

R_1 R_2 $R_1 \bullet R_2$

	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,7	0,4
x_2	1	0,5	0

$\bullet$

	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0	1	0,2
y_2	0,3	0,6	0	0,9
y_3	0,1	1	0	0,5

$=$

	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,3	0,6	0,1	0,7
x_2	0,9	0,5	1	0,5

Нехай $A=\{0{,}3/x_1;\ 0{,}7/x_2\}$, тоді

A_1 R_1 A_2

0,3	0,7

$\bullet$

0,1	0,7	0,4
1	0,5	0

$=$

0,7	0,5	0,3

A_2 R_2 A_3

0,7	0,5	0,3

$\bullet$

0,9	0	1	0,2
0,3	0,6	0	0,9
0,1	1	0	0,5

$=$

0,7	0,5	0,7	0,5

A_1 $R_1 \bullet R_2$ A_3

0,3	0,7

$\bullet$

0,3	0,6	0,1	0,7
0,9	0,5	1	0,5

$=$

0,7	0,5	0,7	0,5

5.3. Властивості нечітких відношень

Різні типи нечітких відношень визначаються за допомогою властивостей, аналогічних властивостям звичайних відношень, причому для нечітких відношень можна зазначити різні способи узагальнення цих властивостей.

1. Рефлексивність:

Якщо для будь-якого $x \in X$ виконується рівність $\mu_R(x, x) = 1$. У випадку коли X це множина з кінцевою кількістю елементів всі елементи головної діагоналі матриці відношення дорівнюють 1.

Прикладом рефлексивного нечіткого відношення може бути відношення "приблизно дорівнює".

$$E \subseteq R, \qquad \forall x \in X, R(x, x) = I.$$

де I – одинична матриця.

2. Слабка рефлексивність: $\forall x, y \in X,\ R(x, y) \leq R(x, x)$.

3. Сильна рефлексивність: $\forall x, y \in X,\ R(x, y) < I$, де I – одинична матриця.

4. Антирефлексивність:

Якщо для будь-кого $x \in X$ виконується рівність $\mu_R(x, x) = 0$. У випадку коли X це множина з кінцевою кількістю елементів всі елементи головної діагоналі матриці відношення дорівнюють 0.

Прикладом антирефлексивного нечіткого відношення може бути відношення "значно більше".

$$R \cap X \neq \emptyset, \qquad \forall x \in X, R(x, x) = 0.$$

5. Слабка антирефлексивність: $\forall x, y \in X,\ R(x, x) \leq R(x, y)$.

6. Сильна антирефлексивність: $\forall x, y \in X,\ 0 < R(x, y)$.

7. Симетричність:

Якщо для будь-якої пари $(x, y) \in X \times Y$ виконується рівність $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$. Матриця симетричного нечіткого відношення, яка задана на кінцевій множині, симетрична.

$$R = R^{-1}, \qquad \forall x, y \in X;$$

$$R(x, y) = R(y, x).$$

8. Антисиметричність:

$$R \cap R^{-1} \subseteq E, \qquad \forall x, y \in X\ (x \neq y);$$

$$R(x, y) \wedge R(y, x) = 0.$$

9. Асиметричність:

Якщо вираз $\mu_R(x, y) > 0 \Rightarrow \mu_R(y, x) = 0$ справедливо для будь-якої пари $(x, y) \in X \times Y$.

Прикладом асиметричного нечіткого відношення може бути відношення "не набагато більше".

$$R \cap R^{-1} = \emptyset, \qquad \forall x, y \in X, \qquad R(x,y) \wedge R(y,x) = 0.$$

10. Сильна лінійність:

$$R \cup R^{-1} \subseteq U, \qquad \forall x, y \in X, \qquad R(x,y) \vee R(y,x) = I.$$

де I – одинична матриця.

11. Слабка лінійність: $\forall x, y \in X,\ R(x,y) \vee R(y,x) > 0$.

12. Транзитивність:

Нечітке відношення R на $X \times Y$ називається транзитивним, якщо $R \circ R \subseteq R$. Відповідно

$$\mu_R(x,y) \geq \mu_{R \circ R}(x,y)$$

для будь-якої пари $(x, y) \in X \times Y$.

13. Транзитивне замикання:

Транзитивним замиканням R_T нечіткого відношення R називається наступне відношення: $R_T = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n \cup \ldots$, де $R^n = R^1 \circ R^2 \circ \ldots \circ R^n$.

5.4. Принцип декомпозиції нечітких відношень

Одна з найважливіших властивостей нечітких відношень полягає в тому, що вони можуть бути представлені у вигляді сукупності звичайних відношень, причому вони можуть бути впорядковані за включенням, являючи собою ієрархічну сукупність відношень.

Носієм нечіткого відношення R на множинах на X та Y називається підмножина декартового добутку $X \times Y$ виду:

$$\text{supp } R = \{(x,y): (x,y) \in X \times Y, \mu_R(x, y > 0)\}.$$

Носій нечіткого відношення можна розглядатися як звичайне відношення, що пов'язує всі пари $(x, y) \in X \times Y$, для яких ступінь виконання нечіткого відношення R не дорівнює нулю. Але більш корисним є все ж таки використання α-перетинів нечіткого відношення, визначення яких аналогічно визначенням множин α -рівня

Розкладання нечіткого відношення на сукупність звичайних відношень засноване на понятті α-рівня нечіткого відношення. α-рівнем нечіткого відношення R називається звичайне відношення R_α, що визначається для всіх $\alpha > 0$ наступним чином:

$$R_\alpha = \{(x, y) \in X^2 \, , R(x, y) \geq \alpha)\}.$$

Очевидно, що α-рівні нечітких відношень задовольняють співвідношенню:

$$\alpha \leq \beta \Longrightarrow R_\alpha \supseteq R_\beta,$$

та являють собою сукупність вкладених один в одного відношень.

Теорема декомпозиції.

Нечітке відношення R має якусь властивість з перерахованих (крім сильної рефлексивності, сильної антирефлексивності, слабкої лінійності) тоді і тільки тоді, коли ці властивості мають всі його α-рівні.

Ця теорема відіграє важливу роль у теорії нечітких відношень:

По-перше, вона показує, що основні типи звичайних відношень та їх властивості можуть бути узагальнені і на випадок нечітких відношень та наводить ясний спосіб такого узагальнення.

По-друге, виявляється, що основні типи нечітких відношень можуть бути представлені як сукупність, ієрархія нормальних відношень того ж самого типу. І якщо вирішенням практичного завдання є отримання на множині X деякого відношення заданого типу, наприклад еквівалентності або порядку, то побудоване на X відповідне нечітке відношення дозволяє отримувати одразу ансамбль необхідних звичайних відношень, а це дає можливість враховувати неоднозначність рішень, що притаманні практичним ситуаціям, та надає особі, яка приймає рішення, певну свободу вибору.

По-третє, теорія нечітких множин, припускаючи подібну неоднозначність можливих рішень, обмежень та цілей, дає можливість оперувати одночасно всією сукупністю таких об'єктів як єдиним цілим.

Будь-яке нечітке відношення R може бути представлено в наступному вигляді:

$$R = \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot R_{\alpha}, \; 0 < \alpha \leq 1,$$

де $\alpha \cdot R_{\alpha}$ - означає, що всі елементи R_{α} множаться на α.

$$\alpha R_{\alpha}(x, y) = \begin{cases} \alpha, \text{якщо } R_{\alpha}(x, y) = 1, \\ 0, \text{у іншому випадку.} \end{cases}$$

Крім всіх вищеописаних властивостей, що виконуються для всіх α-рівнів, можуть бути визначені аналогічні властивості, що виконуються тільки для одного або декількох α-рівнів. Наведемо приклади таких α-властивостей, припускаючи, що α фіксований:

α-симетричність

$$\forall x, y \in X \quad R(x, y) \geq \alpha \Rightarrow R(y, x) \geq \alpha.$$

α-транзитивність

$$\forall x, y, z \in X \quad R(x, y) \geq \alpha, R(y, z) \geq \alpha \Rightarrow R(x, z) \geq R(x, y) \wedge R(y, z).$$

Аналогічно можуть бути визначені й інші α-властивості. Вони можуть розглядатися в завданнях, у яких вводиться поріг на силу відношення R або шукається таке α, у якому R_{α} має необхідну властивість.

5.5. Транзитивне замикання нечітких відношень

Велике значення у теорії нечітких відношень відіграють транзитивні відношення. Вони мають багато зручних властивостей і визначають деяку правильну структуру множини X. Наприклад, якщо відношення R у X характеризує подібність між об'єктами, то транзитивність такого відношення забезпечує

можливість розбиття множини X на класи подібності, що не перетинаються. Якщо ж відношенню у X надати сенс "уподобання" або "домінування", то транзитивність такого відношення забезпечує можливість природного впорядкування об'єктів множини X, та існування об'єктів "найкращих", "недомінуючих" й т.і. Тому представляє великий інтерес можливість перетворення вихідного нетранзитивного відношення на транзитивне. Таке перетворення забезпечує **операція транзитивного замикання нечітких відношень**.

Транзитивним замиканням відношення R називається відношення $\hat{R}$, що визначається наступним чином:

$$\hat{R} = R^1 \cup R^2 \cup .... \cup R^k \cup ...$$

де відношення R^k визначаються рекурсивно:

$$R^1 = R, R^k = R^{k-1} \circ R, k = 2, 3, 4, ...$$

Теорема. Транзитивне замикання $\hat{R}$ будь-якого нечіткого відношення R транзитивно і є найменшим транзитивним відношенням, яке включає R, тобто $R \subset \hat{R}$, і для будь-якого транзитивного відношення T для якого $R \subset T$, витікає, що $\hat{R} \subset T$.

Як наслідок з даної теореми отримуємо, що R транзитивно тоді і тільки тоді, коли $R = \hat{R}$.

Якщо множина X містить n елементів, тоді маємо

$$\hat{R} = R^1 \cup R^2 \cup .... \cup R^n.$$

У разі, коли R рефлексивно, маємо

$$R \subseteq R^1 \subseteq \cdots \subseteq R^{n-1} = R^n = R^{n+1} = \cdots.$$

Корисним фактором є те, що α-рівень транзитивного замикання нечіткого відношення R збігається з транзитивним замиканням відповідного α-рівня:

$$(\hat{R})_\alpha = (\hat{R}_\alpha), \text{ для усіх } \alpha \neq 0.$$

Зауважимо, що при транзитивному замиканні нечіткого відношення $\hat{R}$ у загальному випадку зберігаються лише деякі властивості відношення *R*. Такими властивостями є рефлексивність, симетричність, лінійність та транзитивність.

5.6. Проекції нечітких відношень

Важливу роль теорії нечітких множин грає поняття проекції нечітких відношень. Дамо визначення проекції **бінарного нечіткого відношення**.

Нехай $\mu_Q(x, y)$ – функція приналежності нечіткого відношення $U \times V$. Проекції Q_U та Q_V відношення Q на U та V є множина в U та V з функцією приналежності виду:

$$\mu_{Q_U}(x) = \sup_V \mu_Q(x, y), \quad \mu_{Q_V}(x) = \sup_U \mu_Q(x, y).$$

Змінна $h(Q) = \sup \mu_Q(u) = \sup \mu_Q(v)$ називається **глобальною проекцією відношення** *Q*. Якщо $h(Q) = 1$, то відношення *Q* нормально, інакше відношення *Q* – субнормально.

Приклад 5.17. Проекції нечіткого відношення

$Q =$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	Перша проекція	
u_1	0,1	**0,2**	**1**	0,3	**0,9**	1	$= Q_1$
u_2	**0,9**	0,1	0,5	0,8	0,5	0,9	
u_3	0,4	0	0,6	**1**	0,3	1	
$Q_2 =$	0,9	0,2	1	1	0,9	1	$= h(Q)$

Друга проекція

Умовною проекцією нечіткого відношення *Q* на *U*, при довільному фіксованому $y_0 \in V$, називається множина P_U з функцією приналежності виду

$$\mu_{P_U}(x|y_0) = \mu_Q(x, y_0).$$

Аналогічно визначається умовна проекція на V при заданому $x_0 \in U$

$$\mu_{P_V}(y|x_0) = \mu_Q(x_0, y).$$

З цього визначення видно, що проекції Q_U та Q_V не впливають на умовні проекції P_U та P_V, відповідно. Дамо далі визначення, яке враховує їхній взаємозв'язок.

Умовні проекції другого типу визначаються наступним чином:

$$\mu_{P_U}(x|y_0) = \frac{\mu_Q(x, y_0)}{\mu_{Q_V}(y_0)}, \text{ при } \mu_{Q_V}(y_0) > 0,$$

$$\mu_{P_U}(y|x_0) = \frac{\mu_Q(x_0, y)}{\mu_{Q_U}(x_0)}, \text{ при } \mu_{Q_U}(x_0) > 0.$$

Якщо $\mu_{Q_V}(y_0) = 0$ або $\mu_{Q_U}(x_0) = 0$, то вважаємо, відповідно, що

$$\mu_{P_U}(x|y_0) = 0 \text{ або } \mu_{P_U}(y|x_0) = 0.$$

Зауважимо, що умовні проекції першого типу містяться у відповідних проекціях другого типу.

Нехай U і V – базові множини, Q – нечітке відношення на $U \times V$ та Q_U і Q_V – його проекції на U і V відповідно.

Нечіткі множини Q_U та Q_V називаються **незалежними**, якщо $Q = Q_U \times Q_V$.

Отже, вони незалежні за першим типом, якщо

$$\mu_Q(x, y) = \mu_{Q_U}(x) \wedge \mu_{Q_V}(y),$$

і незалежні за другим типом, якщо

$$\mu_Q(x, y) = \mu_{Q_U}(x) \cdot \mu_{Q_V}(y).$$

В іншому випадку проекції Q_U та Q_V є **залежними** (до відповідного типу).

Незалежність другого типу можна інтерпретувати наступним чином. Дані співвідношення з урахуванням довільності x_0 та u_0 можливо представити наступним чином:

$$\mu_Q(x, y) = \mu_{P_U}(x|y)\mu_{Q_V}(y),$$

$$\mu_Q(x, y) = \mu_{P_V}(y|x)\mu_{Q_U}(x).$$

Циліндричні продовження проекцій нечіткого відношення.

Проекції Q_1 та Q_2 нечіткого відношення $U\ Q\ V$, що, у свою чергу, визначені на $U \times V$ нечітких відношеннях U та V з функціями приналежності: $\mu_{Q_1}(u, v) = \mu_{Q_1}(u)$ при будь-якого u, $\mu_{Q_2}(u, v) = \mu_{Q_2}(v)$ при будь-якого v, мають назву, відповідно, циліндричним продовженням Q'_1 і циліндричним продовженням Q'_2.

Зауваження. Очевидно, що для будь-яких нечітких підмножин A та B, визначених відповідно на X та Y, можна побудувати їх циліндричні продовження A та B.

Приклад 5.18. (продовження прикладу 5.17).

Якщо маємо першу Q_1 та другу Q_2 проекції відношення Q, тоді циліндричні продовження Q'_1 (проекції Q_1) та Q'_2 (проекції Q_2) нечіткого відношення Q мають наступний вигляд:

$Q_1 =$

u_1	1
u_2	0,9
u_3	1

$Q'_1 =$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	1	1	1	1	1
u_2	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9
u_3	1	1	1	1	1

та

$Q_2 =$

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0,9	0,2	1	1	0,9

$Q'_2 =$

u_1	0,9	0,2	1	1	0,9
u_2	0,9	0,2	1	1	0,9
u_3	0,9	0,2	1	1	0,9

Сепарабельність відношень.

Нечітке відношення $U\ Q\ V$ називається **сепарабельним**, якщо воно дорівнює перетину циліндричних продовжень своїх проекцій, тобто якщо $Q = Q'_1 \cap Q'_2$ тоді $\mu_Q(u, v) = \mu_{Q_1}(u) \cap \mu_{Q_2}(v)$.

Зауваження. Якщо визначено декартовий добуток нечітких множин, тоді, очевидно, нечітке відношення $U\,Q\,V$ сепарабельно, якщо воно є декартовим добутком своїх проекцій, тобто $Q = Q'_1 \times Q'_2$.

Приклад 5.19. (продовження прикладів 5.17 та 5.18).

Якщо маємо циліндричні продовження Q'_1 (проекції Q_1) та Q'_2 (проекції Q_2) нечіткого відношення Q:

$Q'_1=$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	1	1	1	1	1
u_2	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9
u_3	1	1	1	1	1

$Q'_2=$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	0,9	0,2	1	1	0,9
u_2	0,9	0,2	1	1	0,9
u_3	0,9	0,2	1	1	0,9

Для перевірки сепарабельності відношення Q обрахуємо значення перетину циліндричних продовжень його проекцій, тобто знайдемо $\mu_{Q'_1}(u) \cap \mu_{Q'_2}(v)$

$Q'_1 \times Q'_2=$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	0,9	0,2	1	1	0,9
u_2	0,9	0,2	0,9	0,9	0,9
u_3	0,9	0,2	1	1	0,9

$\neq Q$

З результату видно, що $Q'_1 \times Q'_2 \neq Q$, тому вихідне відношення Q – несепарабельно.

Контрольні запитання:

1. Дайте визначення нечіткого відношення та поясніть, які існують форми його опису?
2. У чому проявляється більша гнучкість нечіткого відношення у порівнянні із традиційними відношеннями?

3. Дайте визначення носія нечіткого відношення, а також порожнього і повного нечіткого відношення та наведіть приклади побудови таких відношень?

4. Поясніть в чому різниця між рефлексивним і антирефлексивним нечітким відношенням?

5. Поясніть в чому різниця між симетричним і асиметричним нечітким відношенням?

6. Які існують логічні операції з нечіткими відношеннями та наведіть приклади їх застосування?

7. Які існують алгебраїчні операції з нечіткими відношеннями та наведіть приклади їх застосування?

8. В чому суть (max-min)-композиції двох нечітких відношень та які властивості їй притаманні?

9. Опишіть різницю між властивостями, які притаманні нечітким відношенням?

10. Як визначити чи є нечітке відношення нормальним або субнормальним?

РОЗДІЛ 6

БАЗОВІ ВІДОМОСТІ ПРО ТРИКУТНІ (ТРІАНГУЛЯРНІ) НОРМИ. ТЕОРІЯ НАБЛИЖЕНИХ МІРКУВАНЬ

6.1. Визначення тріангулярних норм (*T*-норм) та кнорм (*S*-кнорм)

Розглянуті у попередніх лекціях логічні та арифметичні операції над нечіткими множинами описувалися з використанням операцій max та min. Однак в теорії нечітких множин розглядаються також питання побудови узагальнених, параметризованих операторів перетину, об'єднання та доповнення, що дозволяють врахувати різноманітні смислові відтінки відповідних їм логічним операціям «І», «АБО», «НІ». Так, наприклад, операції перетину та об'єднання описувалися наступним чином:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big),$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big).$$

Водночас наголошувалося, що це не єдині визначення зазначених операцій. Перетин нечітких множин можна задати й у більш загальному вигляді:

$$\mu_{A\cap B}(x) = T\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big),$$

де функція T – це так звана T-норма. Тому

$$\min\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = T\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big)$$

вважатимуться прикладом дії T-норми. Аналогічно, об'єднання нечітких множин можна визначити так:

$$\mu_{A\cup B}(x) = S\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big),$$

де функція S – це так звана S-кнорма. У цьому випадку

$$\max\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = S\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big)$$

можна вважати прикладом дії S-кнорми.

Тобто для $0 \le x \le 1$ та $0 \le y \le 1$: $\min(x, y)$ відповідає *T*-нормі, а $\max(x, y)$ відповідає *S*-кнормі.

T-норми і *S*-кнорми відносяться до класу так званих трикутних норм. Розглянемо їх формальні визначення.

6.1.1. Тріангулярна (трикутна) норма (T-норма або нечітке розширення «І»)

Трикутною нормою (*T*-нормою) називається двомісна дійсна функція T: [0, 1] × [0, 1] → [0. 1], яка задовольняє наступним умовам:

Обмеженість:

$$T(0,0) = 0;\ T(\mu_A, 1) = \mu_A;\ T(1, \mu_A) = \mu_A.$$

Монотонність:

$$T(\mu_A, \mu_B) \le\ T(\mu_C, \mu_D), \text{якщо } \mu_A \le \mu_C, \mu_B \le \mu_D\ .$$

Комутативність:

$$T(\mu_A, \mu_B) =\ T(\mu_B, \mu_A).$$

Асоціативність:

$$T(\mu_A, T(\mu_B, \mu_C)) =\ T(T(\mu_A, \mu_B), \mu_C).$$

Аксіома обмеженості забезпечує виконання граничних умов, які мають виконуватися для всіх операцій перетину нечітких множин, включаючи і звичайні множини. *Аксіома монотонності* гарантує незмінність порядку величин значень функцій приналежності від будь-яких інших функцій приналежності. *Аксіоми комутативності та асоціативності* забезпечують виконання відповідних властивостей у всіх операцій перетину. Графік операції мінімум представлений на рис. 6.1.

Розглянемо геометричний зміст довільної *T*-норми.

З аксіом обмеженості та комутативності випливає, що область визначення $x_1\ T\ x_2$ знаходиться на сторонах одиничного куба в площині (x_1; x_2). Тобто, на стороні $x_2 = 1$ одиничного куба утворюється лінія $x_1\ T\ x_2 = x_1$ на стороні $x_2 = 0$ – лінія в площині $x_1\ T\ x_2 = 0$. Крім того, якщо використовувати симетричність аксіоми комутативності, то за $x_1 = 1$ виходить пряма лінія $x_1\ T\ x_2 = x_2$, а на стороні

$x_1 = 0$ – лінія у площині $x_1 \; T \; x_2 = x_2$. Таким чином, значення $x_1 \; T \; x_2$ у чотирьох вершинах одиничного куба є значеннями чіткої операції «І». До того ж з аксіоми комутативності очевидно, що графік симетричний щодо площини, яка утворюється нахилами $x_1 = x_2$.

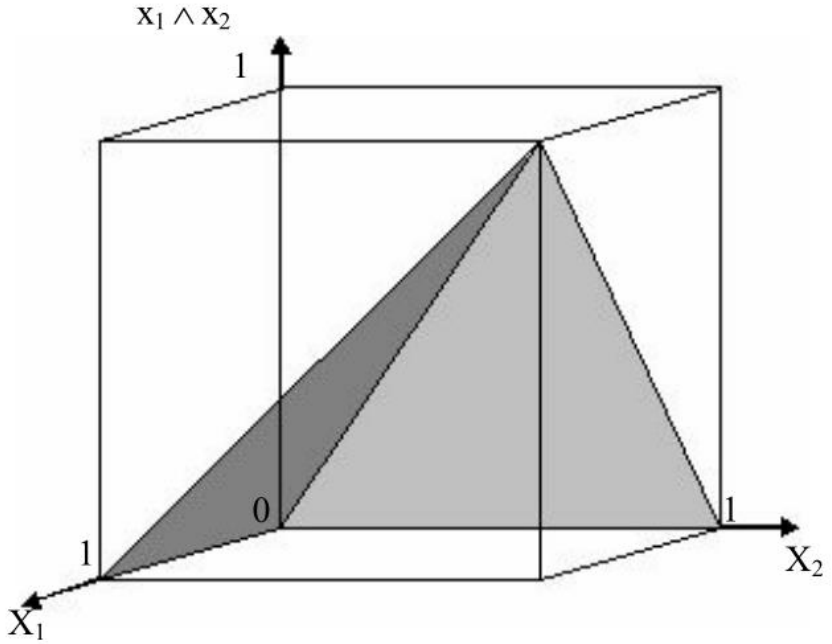


Рис. 6.1. Графік операції мінімум.

На рис.6.2 відображено граничні умови довільної *T*-норми.

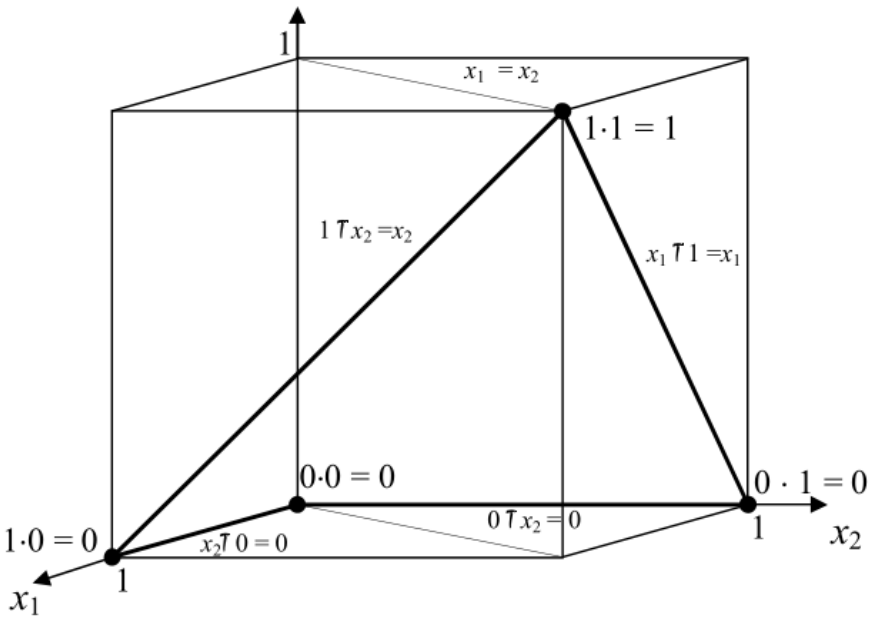


Рис. 6.2. Граничні умови довільної *T*-норми.

6.1.2. Тріангулярна (трикутна) кнорма (S-кнорма чи нечітке розширення «АБО»)

Трикутною кнормою (S-кнормою) називається двомісна дійсна функція S: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, яка задовольняє наступним умовам:

Обмеженість:

$$S(1,1) = 1;\ S(\mu_A, 0) = \mu_A;\ S(0, \mu_A) = \mu_A.$$

Монотонність:

$$S(\mu_A, \mu_B) \geq\ S(\mu_C, \mu_D), \text{якщо } \mu_A \geq \mu_C, \mu_B \geq \mu_D\ .$$

Комутативність:

$$S(\mu_A, \mu_B) =\ S(\mu_B, \mu_A).$$

Асоціативність:

$$S(\mu_A, S(\mu_B, \mu_C)) =\ S(S(\mu_A, \mu_B), \mu_C).$$

Аксіоматика розглянутих операторів практично однакова, крім першої аксіоми. Ця аксіома забезпечує виконання граничних умов, які повинні виконуватися для всіх операцій об'єднання нечітких множин, включаючи і звичайні множини.

Графік операції представлений на рис. 6.3.

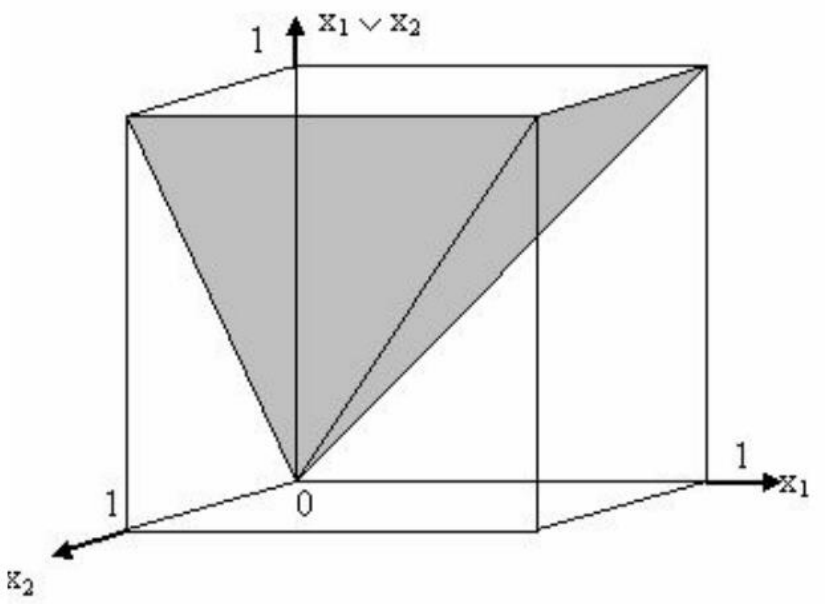


Рис. 6.3. Графік операції максимум.

Граничні умови довільної *S*-кнорми відображені на рис. 6.4.

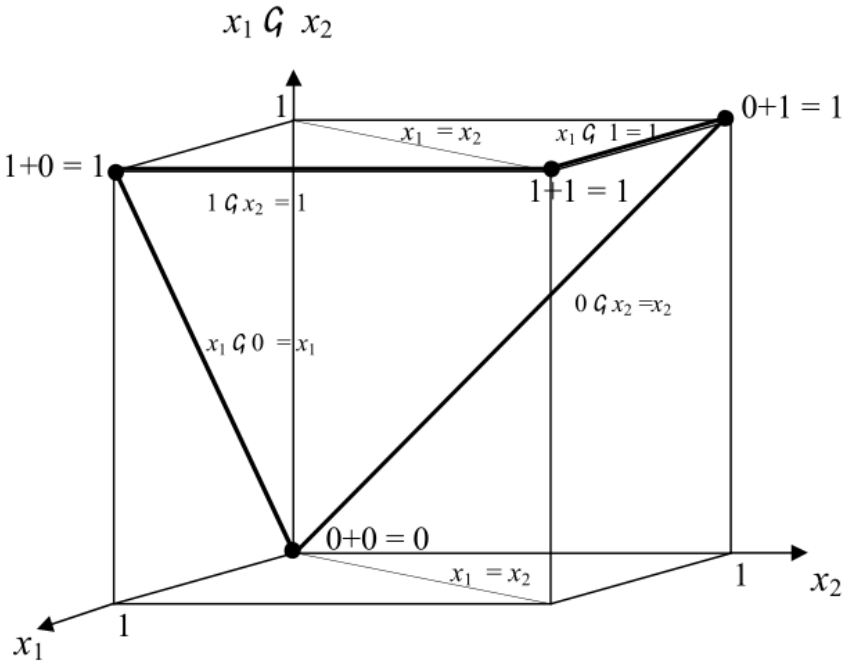


Рис. 6.4. Граничні умови довільної *S*-кнорми.

6.1.3. Структури гіперплощин деяких існуючих T-норми і S-кнорм

Трикутні норми типу max/min.

Трикутні норми типу max/min, що називають тріангулярними нормами по Заде (рис. 6.5), описуються наступним виразом:

$$T_M\{a_1, a_2\} = \min\{a_1, a_2\}; \;\; S_M\{a_1, a_2\} = \max\{a_1, a_2\}.$$

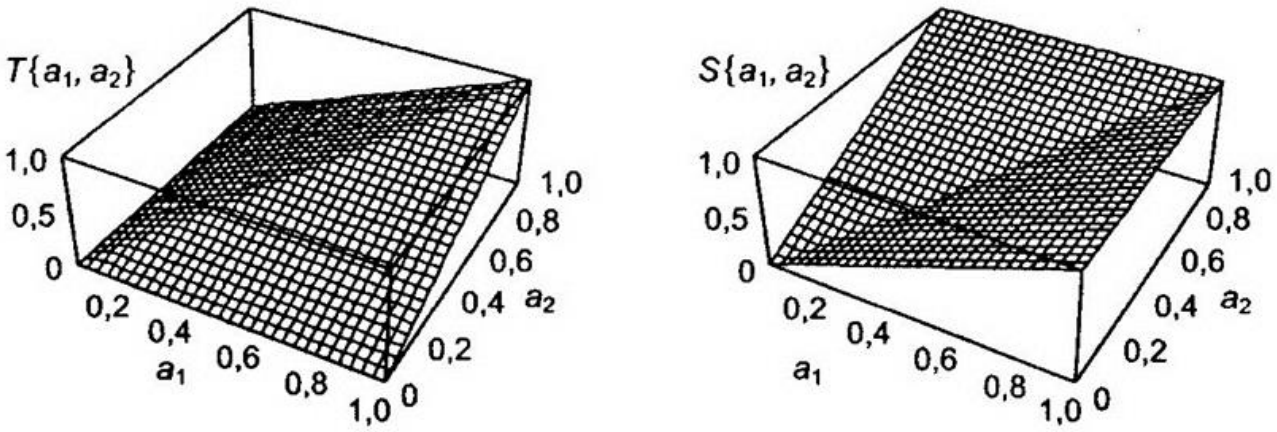


Рис. 6.5. Трикутні норми типу max/min.

Трикутні алгебраїчні норми.

Тріангулярні алгебраїчні норми (рис. 6.6) описуються наступним виразом:

$$T_P\{a_1, a_2\} = a_1 \cdot a_2;\ \ S_P\{a_1, a_2\} = a_1 + a_2 - a_1 \cdot a_2.$$

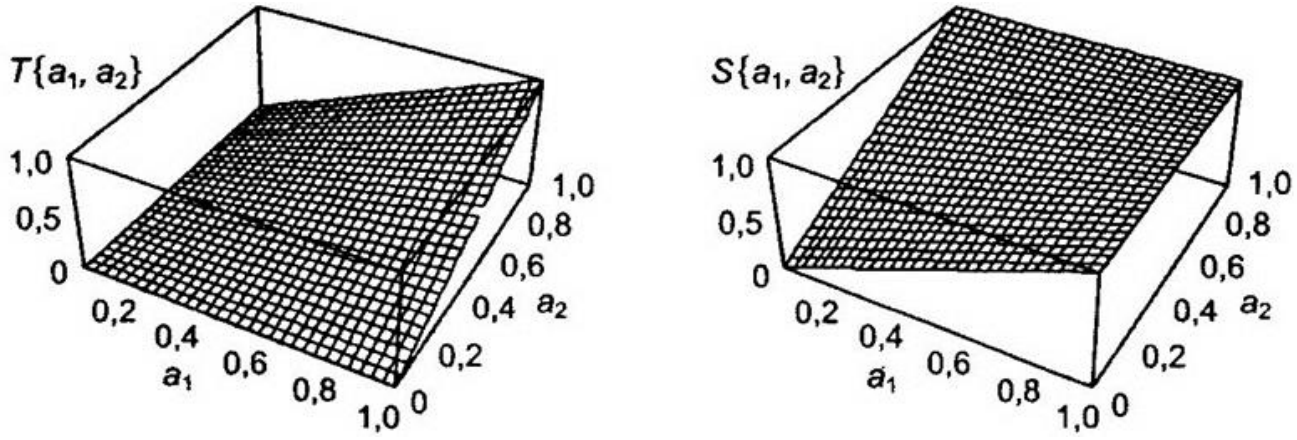


Рис. 6.6. Тріангулярні алгебраїчні норми.

Трикутні норми по Лукасевичу.

Тріангулярні норми по Лукасевичу (рис. 6.7) описуються наступним виразом:

$$T_L\{a_1, a_2\} = \max\{a_1 + a_2 - 1, 0\};\ S_P\{a_1, a_2\} = \min\{a_1 + a_2, 1\}.$$

$$T_L\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i - (n-1), 0\right\};$$

$$S_P\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \min\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\,, 1\right\}.$$

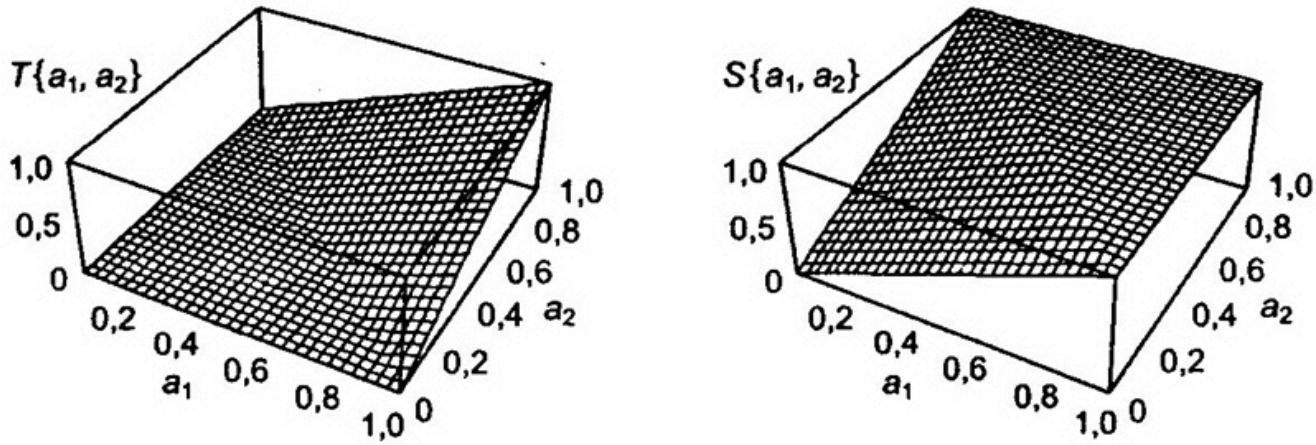


Рис. 6.7. Тріангулярні норми по Лукасевичу.

Граничні трикутні норми.

Граничні тріангулярні норми (рис. 6.8) описуються наступним виразом:

$$T_D\{a_1, a_2\} = \begin{cases} 0, \text{якщо } S_M\{a_1, a_2\} < 1, \\ T_M\{a_1, a_2\}, \text{якщо } S_M\{a_1, a_2\} = 1. \end{cases}$$

$$S_D\{a_1, a_2\} = \begin{cases} 1, \text{якщо } T_M\{a_1, a_2\} > 0, \\ S_M\{a_1, a_2\}, \text{якщо } T_M\{a_1, a_2\} = 0. \end{cases}$$

$$T_D\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \begin{cases} 0, \text{якщо } S_M\{a_1, a_2, \dots, a_n\} < 1, \\ T_M\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \text{якщо } S_M\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = 1. \end{cases}$$

$$S_D\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \begin{cases} 1, \text{якщо } T_M\{a_1, a_2, \dots, a_n\} > 0, \\ S_M\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \text{якщо } T_M\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = 0. \end{cases}$$

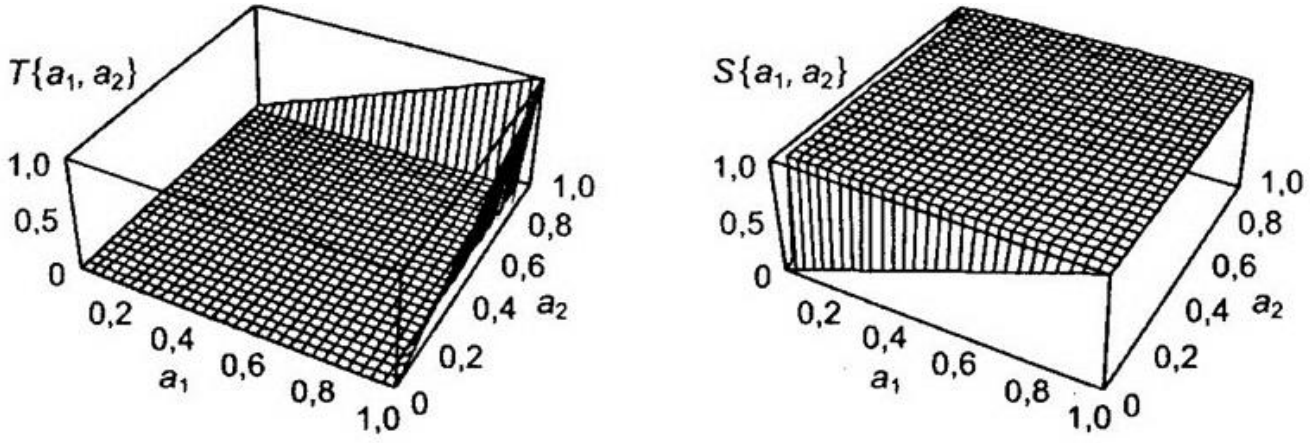


Рис 6.8. Граничні трикутні норми.

У табл. 6.1 та табл. 6.2 перераховані відомі *T*-норми і *S*-кнорми, що найчастіше використовуються у літературних джерелах.

Табл. 6.1 – Відомі *T*-норми.

Ім'я функції	**Визначення функції *T*(*x*, *y*)**
Обмежений добуток	$\begin{cases} 0, \text{ якщо } \max(x, y) < 1 \\ \min(x, y), \text{ якщо } \max(x, y) = 1 \end{cases}$
Посилена сума	$\max(0; x + y - 1)$
Добуток Ейнштейна	$x \bullet y / [1 + (1 - x) \bullet (1 - y)]$
Алгебраїчний добуток	$x \bullet y$
Добуток Гамахера	$x \bullet y / [1 - (1 - x) \bullet (1 - y)]$
Мінімум	$\min(x; y)$

Табл. 6.2 – Відомі *S*-кнорми.

Ім'я функції	**Визначення функції $S(x, y)$**
Обмежена сума	$\begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \min(x, y) > 0 \\ \max(x, y), & \text{якщо} \quad \min(x, y) = 0 \end{cases}$
Посилена різниця	$\min(1; x + y)$
Сума Ейнштейна	$1 - (1 - x) \cdot (1 - y)/(1 + x \cdot y)$
Алгебраїчна сума	$1 - (1 - x) \cdot (1 - y)$
Сума Гамахера	$1 - (1 - x) \cdot (1 - y)/(1 - x \cdot y)$
Максимум	$\max(x; y)$

Приклад 6.1. Обрахування значень при застосуванні різних *T*-норм та *S*-кнорм.

Припустимо, що $x = 0{,}5$ та $y = 0{,}1$.

Обмежений добуток:

$$T(0{,}5;\ 0{,}1) = 0, \text{ тому що } \max(x, y) = \max(0{,}5;\ 0{,}1) = 0{,}5 < 1.$$

Посилена сума:

$$T(0{,}5;\ 0{,}1) = \max(0,\ x + y - 1) = \max(0,\ -0{,}4) = 0.$$

Добуток Ейнштейна:

$$T(0{,}5;\ 0{,}1) = x \cdot y/[1 + (1 - x) \cdot (1 - y)] = 0{,}5 \cdot 0{,}1/(1 + 0{,}5 \cdot 0{,}9) = 0{,}05/1{,}45 = 0{,}034.$$

Алгебраїчний добуток:

$$T(0{,}5;\ 0{,}1) = x \cdot y = 0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}05.$$

Добуток Гамахера:

$$T(0{,}5;\ 0{,}1) = x \cdot y/[1 - (1 - x) \cdot (1 - y)] = 0{,}5 \cdot 0{,}1/(1 - 0{,}5 \cdot 0{,}9) = 0{,}05/0{,}55 = 0{,}091.$$

Мінімум:

$$T(0{,}5;\ 0{,}1) = \min(x; y) = \min(0{,}5;\ 0{,}1) = 0{,}1.$$

Обмежена сума:

$$S(0{,}5;\ 0{,}1) = 1, \text{ тому що } \min(x, y) = \min(0{,}5;\ 0{,}1) = 0{,}1 > 0$$

Посилена різниця:

$$S(0{,}5;\ 0{,}1) = \min(1; x + y) = \min(1; 0{,}5 + 0{,}1) = \min(1; 0{,}6) = 0{,}6.$$

Сума Ейнштейна:

$$S(0{,}5,\ 0{,}1) = 1 - (1 - x) \bullet (1 - y)/(1 + x \bullet y) = 0{,}571.$$

Алгебраїчна сума:

$$S(0{,}5,\ 0{,}1) = 1 - (1 - x) \bullet (1 - y) = 1 - (1 - 0{,}5) \bullet (1 - 0{,}1) = 0{,}55.$$

Сума Гамахера:

$$S(0{,}5,\ 0{,}1) = 1 - (1 - x) \bullet (1 - y)/(1 - x \bullet y) = 1 - 0{,}5 \bullet 0{,}9/(1 - 0{,}5 \bullet 0{,}1) = 0{,}818.$$

Максимум:

$$S(0{,}5,\ 0{,}1) = \max(x;\ y) = \max(0{,}5;\ 0{,}1) = 0{,}5.$$

Існують наступні шість пар *T*-норм та *S*-кнорм, які наведені у табл. 6.3.

Табл. 6.3 – Існуючі пари *T*-норм і *S*-кнорм.

***T*-норма: *T*(*x*, *y*)**	***S*-кнорма: *S*(*x*, *y*)**
Обмежений добуток	Обмежена сума
Посилена сума	Посилена різниця
Добуток Ейнштейна	Сума Ейнштейна
Алгебраїчний добуток	Алгебраїчна сума
Добуток Гамахера	Сума Гамахера
Мінімум	Максимум

Для кожної пари *T*-норм і *S*-кнорм справедливі такі рівняння:

$$T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y),\ S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y).$$

Кожна пара тріангулярних норм і кнорм, які підпорядковуються узагальненим відношенням Де Моргана, називаються **парою відносних тріангулярних норм.** Всі функції приналежності (як для І, так й АБО-зв'язок нечітких значень) вибираються такими ж далекими один від одного, як пари відносних тріангулярних *T*-норм і *S*-кнорм (*T*-норми вибираються для «І», *S*-кнорми – для «АБО»).

У табл. 6.4 наведені ще приклади пар відносних тріангулярних норм, що описані у літературних джерелах.

Табл. 6.4 – Існуючі пари *T*-норм і *S*-кнорми

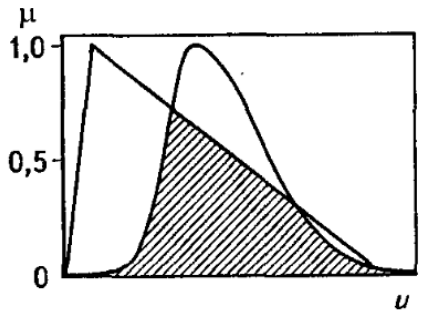
***T*-норма**	***S*-кнорма**	**Параметри**
$\min(a, b)$	$\max(a, b)$	
ab	$a + b - ab$	
$\max(a + b - 1, 0)$	$\min(a + b, 1)$	
$\begin{cases} a, \text{якщо } b = 1 \\ b, \text{якщо } a = 1 \\ 0, \text{якщо } a, b \neq 1 \end{cases}$	$\begin{cases} a, \text{якщо } b = 0 \\ b, \text{якщо } a = 0 \\ 1, \text{якщо } a, b \neq 0 \end{cases}$	
$\frac{ab}{\gamma + (1-\gamma)(a + b - ab)}$	$\frac{(a + b - (2-\gamma)ab}{1 - (1-\gamma)ab}$	$\gamma > 0$
$\frac{ab}{max(a, b, \alpha)}$	$\frac{a + b - ab - \min(a, b, 1-\alpha)}{\max(1-a, 1-b, \alpha)}$	$\alpha \in [0,1]$
$\left(1 + \sqrt[\lambda]{\left(\frac{1}{a} - 1\right)^{\lambda} + \left(\frac{1}{b} - 1\right)^{\lambda}}\right)^{-1}$	$\left(1 + \sqrt[\lambda]{\left(\frac{1}{a} - 1\right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{b} - 1\right)^{-\lambda}}\right)^{-1}$	$\lambda > 0$
$\max(1 - \sqrt[\rho]{(1-a)^{\rho} + (1-b)^{\rho}}, 0)$	$\min(1 - \sqrt[\rho]{a^{\rho} + b^{\rho}}, 1)$	$\rho \geq 1$
$\max\left(\frac{a + b - 1 + \lambda ab}{1 + \lambda}, 0\right)$	$\max(a + b + \lambda ab, 1)$	$\lambda \geq -1$

Приклад 6.2. Результати операції перетину, що будуть отримані при застосуванні різних *T*-норм:

Перетин по Заде

Формула:

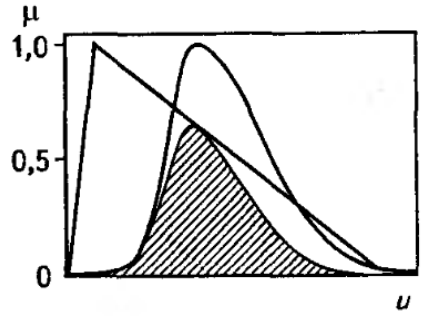
$\min(a, b)$



Імовірнісне перетинання («I»)

Формула:

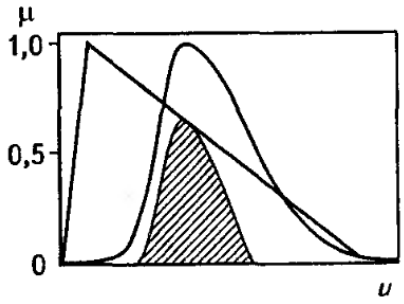
$a - b$



Перетин по Лукасевичу

Формула:

$\max(a + b - 1, 0)$

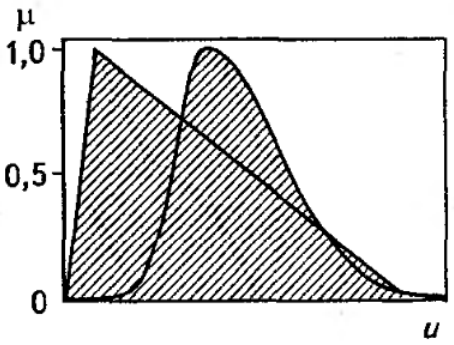


Приклад 6.3. Результати операції об’єднання, що будуть отримані при застосуванні різних *S*-кнорм:

Об'єднання по Заде

Формула:

$\max(a, b)$

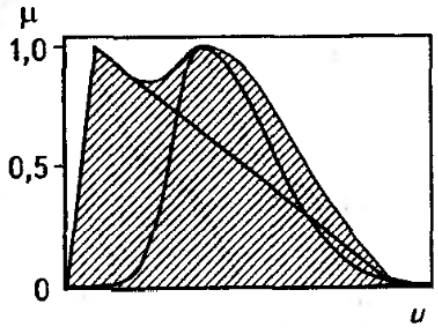


Імовірнісне об'єднання

(«АБО»)

Формула:

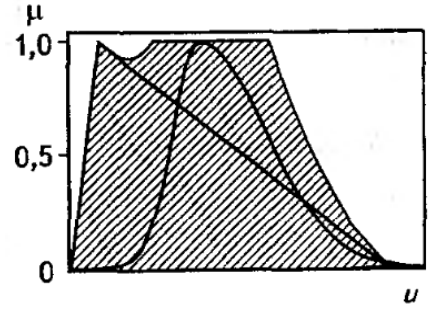
$a + b - ab$



Об'єднання по Лукасевичу

Формула:

$\min(a + b, 1)$



6.1.4. Тріангулярні норми та кнорми для N аргументів

Так як правило асоціативності справедливо для *T*-норм та *S*-кнорм, тому має сенс наступні визначення для трьох аргументів:

$$T(x, y, z) = T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z));$$

$$S(x, y, z) = S(S(x, y), z) = S(x, S(y, z)).$$

Аналогічно для N параметрів:

$$T(x_1, x_2, ...,x_N) = T(T(x_1, x_2, ...,x_{N-1}),x_N) = T(x_1, T(x_2, \ldots,x_N));$$
$$S(x_1, x_2, ...,x_N) = S(S(x_1, x_2, ...,x_{N-1}),x_N) = S(x_1, S(x_2, \ldots,x_N)).$$

Посилена сума та посилена різниця:

$$T(x_1, x_2, ...,x_N) = \max[0, \sum_n xn - (N-1)];$$
$$S(x_1, x_2, ...,x_N) = \min[1, \sum_n xn]$$

Алгебраїчний добуток та алгебраїчна сума:

$$T(x_1, x_2, ...,x_N) = \prod_n xn;$$
$$S(x_1, x_2, ...,x_N) = 1 - \sum_n 1 - xn.$$

Мінімум та максимум:

$$T(x_1, x_2, ...,x_N) = \min(x_1, x_2, ...,x_N);$$
$$S(x_1, x_2, ...,x_N) = \max(x_1, x_2, ...,x_N).$$

Для інших тріангулярних функцій немає простих узагальнених формул для N аргументів.

6.2. Параметризовані тріангулярні функції

Існують наступні параметризовані тріангулярні функції:

Перетин Гамахера: $P(x, y)=x \cdot y / [\alpha - (\alpha - 1) \cdot (x + y - x \cdot y)]$.

Залежно від вибору параметра α перетин Гамахера можна перетворити до наступних T-норм:

α = 0 – добуток Гамахера;

α = 1 – алгебраїчний добуток;

α = 2 – добуток Ейнштейна;

α = ∞ – обмежений добуток.

Об'єднання Гамахера: $Q(x, y) = [(\alpha - 1) \bullet x \bullet y + x + y] / (1 + x \bullet y)$.

Залежно від вибору параметра α об'єднання Гамахера можна перетворити до наступних *S*-кнорм:

α = –1 – сума Гамахера;

α = 0 – алгебраїчна сума;

α = 1 – сума Ейнштейна;

α = ∞ – посилена різниця.

Перетин Ягера: $P(x, y) = 1 - \min[1, \sqrt[\alpha]{(1-x)^{\alpha} + (1-y)^{\alpha}}]$.

Залежно від вибору параметра α перетин Ягера можна перетворити до наступних *T*-норм:

α = 1 – обмежений добуток;

α = ∞ – функція min.

Об'єднання Ягера: $Q(x, y) = \min[1, \sqrt[\alpha]{x^{\alpha} + y^{\alpha}}]$.

Залежно від вибору параметра α об'єднання Ягера можна перетворити до наступних *S*-кнорм:

α = 1 – обмежена сума;

α = ∞ – функція max.

Функція Вернера:

Для «І»-зв'язок: $P(x, y) = \alpha \bullet \min(x, y) + (1 - \alpha) \bullet (x + y)/2$.

Для «АБО»-зв'язок: $Q(x, y) = \alpha \bullet \max(x, y) + (1 - \alpha) \bullet (x + y)/2$.

Зважене середнє.

З будь-якою парою *T*-норм та *S*-кнорм може бути сформовано «зважене середнє»:

Арифметичне середнє: $R(x, y) = (1 - \alpha) \bullet T(x, y) + \alpha \bullet S(x, y)$, при $0 < \alpha < 1$

Геометричне середнє: $R(x, y) = T(x, y)^{(1 - \alpha)} \bullet S(x, y)^{\alpha}$, при $0 < \alpha < 1$.

Приклад 6.4. Визначення добутку нечітких множин з використанням *T*-норм та *S*-кнорм у загальному вигляді.

Припустимо, існує два об'єкти проблемної області A і B з двома множинами базових значень $\{a\}$ і $\{b\}$, нечітких значень $\{f\}$ і $\{g\}$, і функціями приналежності $p(a, f)$ та $q(b, g)$ відповідно. Сутності A та B можуть бути як різними, так і фактично ідентичними.

Розглянемо дві нечіткі множини $P(f) = \{a \mid p(a, f)\}$ об'єктної змінної A та $Q(g) = \{b \mid q(b, g)\}$ змінної B. Операція $n(x, y)$ буде T-нормою або S-кнормою відповідно.

Визначимо добуток множин $P(f)$ і $Q(g)$ у загальному вигляді наступним чином:

$$Z(f, g) = P(f) \otimes Q(g) = \{(a,b) \mid n[p,(a, f), q(b, g)]\}$$
$$\{a, p(a, f)\} \in P(f), \{b, p(b, g)\} \in Q(g).$$

Іншими словами, Z – це безліч усіх триплетів a, b, n, де a і b – базові значення A та B, f та g – нечіткі значення A та B, а $n[p(a, f), q(b, g)] = \mu[(a, b), (f, g)]$ визначає комбіновану приналежність базових значень (a, b) нечітким значенням (f, g).

Якщо пара (f, g) нечітких значень пов'язується зв'язкою «І», тобто $(f, g) = f$ І g, потрібно вибрати T-норму $n(x, y)$. Якщо ж пара (f, g) нечітких значень пов'язується зв'язкою «АБО», тобто $(f, g) = f$ АБО g, необхідно зв'язувати f і g функцією $n(x, y)$, яка має бути S-кнормою. При цьому вибір загалом визначається зручністю використання.

6.3. Операції нечіткої множини самої із собою та її доповненою множиною

6.3.1. *Кон'юнкція (перетин) нечіткої множини самої із собою*.

На противагу традиційній теорії множин перетин нечіткої множини $M = \{(b, \mu)\}$ із самою собою не обов'язково еквівалентно M.

$M \cap M = \{b \mid T(\mu, \mu)\}$, причому $M \cap M \neq M$ (для більшості T-норм). Залежно від вибору T-норми $T(\mu, \mu)$ дає відповідні функції приналежності базових значень b у нечітких множинах $M \cap M$.

У табл. 6.5 наведені результати застосування різних T-норм при отриманні функції приналежності кон'юнкції (перетину) нечіткої множини самої із собою.

Відповідно $T(\mu, \mu) = \min(\mu, \mu) = \mu$, $M \cap M = \{b \mid T(\mu, \mu)\} \equiv M$.

Табл. 6.5 – Застосування T-норм при кон'юнкції нечіткої множини самої із собою.

Ім'я функції	**Визначення функції $T(x, y)$**	**$T(\mu, \mu)$**
Обмежений добуток	$\begin{cases} 0, & \text{якщо } \max(x, y) < 1 \\ \min(x, y), & \text{якщо } \max(x, y) = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & \text{якщо } \mu < 1 \\ 1, & \text{якщо } \mu = 1 \end{cases}$
Посилена сума	$\max(0; x + y - 1)$	$\begin{cases} 0, & \text{якщо } \mu = 0{,}5 \\ 2 \cdot (\mu - 1), & \text{якщо } \mu > 0{,}5 \end{cases}$
Добуток Ейнштейна	$x \bullet y / [1 + (1 - x) \bullet (1 - y)]$	$\mu^2 / (2 - 2 \bullet \mu + \mu^2)$
Алгебраїчний добуток	$x \bullet y$	μ^2
Добуток Гамахера	$x \bullet y / [1 - (1 - x) \bullet (1 - y)]$	$\mu / (2 - \mu)$
Мінімум	$\min(x; y)$	M

6.3.2. Диз'юнкція (об'єднання) нечіткої множини самої із собою

Диз'юнкція нечіткої множини $M = \{(b, \mu)\}$ із собою не обов'язково еквівалентна M.

$M \cup M = \{b \mid S(\mu, \mu)\} \neq M$, якщо $S(\mu, \mu) \neq \mu$. І це типовий випадок. Залежно від вибору S-кнорми $S(\mu, \mu)$ дає відповідні функції приналежності базових значень b у нечіткій множині $M \cup M$.

У табл. 6.6 наведені результати застосування різних S-кнорм при отриманні функції приналежності диз'юнкції (об'єднання) нечіткої множини самої із собою.

Майже для усіх S-кнорм $M \cup M = \{b \mid S(\mu, \mu)\} \neq M$. Винятком є $S(x, y) = \max(x, y)$, коли $M \cup M \equiv M$, і це можна довести, якщо $S(\mu, \mu) > \mu$, оскільки $S(x, y) = \max(x, y)$, то $S(\mu, \mu) = \mu$, що означає, що M та $M \cup M$ ідентичні.

Табл. 6.6 – Застосування *S*-кнорм при кон'юнкції нечіткої множини самої із собою.

Ім'я функції	**Визначення функції *S*(*x*, *y*)**	***S*(μ, μ)**
Обмежена сума	$\begin{cases} 1, & \text{якщо } \min(x,y) > 0 \\ \max(x,y), & \text{якщо } \min(x,y) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 1, & \text{якщо } \mu > 0 \\ 0, & \text{якщо } \mu = 0 \end{cases}$
Посилена різниця	$\min(1; x + y)$	$\begin{cases} 1, & \text{якщо } \mu > 0{,}5 \\ 2 \cdot \mu, & \text{якщо } \mu = 0{,}5 \end{cases}$
Сума Ейнштейна	$1 - (1 - x) \bullet (1 - y)/(1 + x \bullet y)$	$2 \bullet \mu / (1 + \mu^2)$
Алгебраїчна сума	$1 - (1 - x) \bullet (1 - y)$	$\mu / (2 - \mu)$
Сума Гамахера	$1 - (1 - x) \bullet (1 - y)/(1 - x \bullet y)$	$2 \bullet \mu / (1 + \mu)$
Максимум	$\max(x; y)$	M

6.3.3. Кон'юнкція (перетин) нечіткої множини з її доповненою множиною

На відміну від традиційної теорії множин перетин нечіткої множини $M = \{(b, \mu)\}$ з її доповненою множиною $\overline{M} = \{(b, 1 - \mu)\}$ є не обов'язково порожня множина: $M \cap \overline{M} = \{b \mid T(\mu, 1 - \mu)\} \neq \varnothing$, якщо $T(\mu, 1 - \mu) \neq 0$.

У табл. 6.7 наведені результати застосування різних *T*-норм при отриманні функції приналежності кон'юнкції (перетину) нечіткої множини з її доповненою множиною.

Табл. 6.7 – Застосування *T*-норм при кон'юнкції нечіткої множини з її доповненою множиною.

Ім'я функції	**Визначення функції *T*(*x*, *y*)**	***T*(μ, μ)**
Обмежений добуток	$\begin{cases} 0, & \text{якщо } \max(x,y) < 1 \\ \min(x,y), & \text{якщо } \max(x,y) = 1 \end{cases}$	0
Посилена сума	$\max(0; x + y - 1)$	0
Добуток Ейнштейна	$x \bullet y / [1 + (1 - x) \bullet (1 - y)]$	$\mu \bullet (1 - \mu) / (1 + (1 - \mu) \bullet \mu)$
Алгебраїчний добуток	$x \bullet y$	$\mu \bullet (1 - \mu)$
Добуток Гамахера	$x \bullet y / [1 - (1 - x) \bullet (1 - y)]$	$\mu \bullet (1 - \mu) / (1 - (1 - \mu) \bullet \mu)$
Мінімум	$\min(x; y)$	$\min(\mu; 1 - \mu)$

6.3.4. Диз'юнкція (об'єднання) нечіткої множини з її доповненою множиною

Диз'юнкція (об'єднання) нечіткої множини $M = \{(b, \mu)\}$ з її доповненою множиною $\overline{M} = \{(b, 1 - \mu)\}$ не обов'язково одинична множина:

$$M \cup \overline{M} = \{b \mid S(\mu, 1 - \mu)\} \neq 1, \text{ якщо } S(\mu, 1 - \mu) \neq 1.$$

У табл. 6.8 наведені результати застосування різних *S*-кнорм при отриманні функції приналежності диз'юнкції (об'єднанні) нечіткої множини з її доповненою множиною.

Приклад 6.5.

Якщо $\mu = ½$, тоді $M \cap \overline{M} = \{b \mid T(½; 1 - ½)\} = \min(½; 1 - ½) = ½ \neq 0$.

Якщо $\mu = ½$, тоді $M \cup \overline{M} = \{b \mid S(½; 1 - ½)\} = \max(½; 1 - ½) = ½ \neq 1$.

Табл. 6.8 – Застосування *S*-кнорм при диз'юнкції нечіткої множини з її доповненою множиною.

Ім'я функції	**Визначення функції $S(x, y)$**	**$S(\mu, \mu)$**
Обмежена сума	$\begin{cases} 1, & \text{якщо } \min(x, y) > 0 \\ \max(x, y), & \text{якщо } \min(x, y) = 0 \end{cases}$	1
Посилена різниця	$\min(1; x + y)$	1
Сума Ейнштейна	$1 - (1 - x) \bullet (1 - y)/(1 + x \bullet y)$	$1 / [1 + \mu \bullet (1 - \mu)]$
Алгебраїчна сума	$1 - (1 - x) \bullet (1 - y)$	$1 - \mu \bullet (1 - \mu)$
Сума Гамахера	$1 - (1 - x) \bullet (1 - y)/(1 - x \bullet y)$	$[1 - 2\mu \bullet (1 - \mu)]/$ $[1 - \mu \bullet (1 - \mu)]$
Максимум	$\max(x; y)$	$\max(\mu; 1 - \mu)$

6.4. Наближені міркування

6.4.1. Композиційне правило виводу

Під **наближеними міркуваннями** розуміється процес, при якому з нечітких посилів отримують деякі наслідки, можливо, теж нечіткі. Наближені міркування лежать в основі здібності людину розуміти природну мову, розбирати почерк, грати в ігри, що вимагають розумових зусиль, загалом, приймати рішення у складному та

не повністю визначеному середовищі. Ця здатність міркувань у якісних, неточних термінах відрізняє інтелект людини від інтелекту обчислювальної машини.

У класичній двозначній логіці логічне виведення базується на наступних тавтологіях:

- модус поненс $(A \wedge (A \to B)) \to B$;
- модус толленс $((A \to B) \wedge \overline{B})) \to \overline{A}$;
- силогізм $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$;
- контрапозиція $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$.

Основним правилом виведення у традиційній (чіткій) логіці є правило модусу поненс (*modus ponens*), яке можна записати $(A \wedge (A \to B)) \to B$, згідно з яким ми судимо про істинність висловлювання B за істинністю висловлювань A та $A \to B$.

Посил	A є істинно;
Імплікація	якщо A, то B – істинно;
Логічний висновок	B істинно

Приклад 6.6. Застосування правила виведення модусу поненс (*modus ponens*).

Якщо A – вислів "Джон у лікарні", B - вислів "Джон хворий", тоді, якщо висловлювання "Джон у лікарні" та "Якщо Джон у лікарні, то він хворий", теж є істинними, тоді істинний і вислів "Джон хворий".

У багатьох звичних міркуваннях правило модусу поненс (*modus ponens*) використовується не у точній, а у наближеній формі. Так, зазвичай ми знаємо, що A істинно і що $A^* \to B$, де A^* є, в певному сенсі, наближення до A. Тоді з $A^* \to B$ ми можемо зробити висновок про те, що B приблизно істинно.

Однак, на відміну від традиційної логіки, нашим головним інструментом буде не правило модусу поненс (*modus ponens*), а так зване **композиційне правило виводу** запропоноване Л. Заде, окремим випадком якого і є правило модусу поненс (*modus ponens*). Це лише узагальнення наступної знайомої процедури.

Припустимо, що є крива $y = f(x)$ (рис. 6.9., *a*) і задано значення $x = a$. Тоді з того, що $y = f(x)$ і $x = a$, ми можемо зробити висновок, що $y = b = f(a)$.

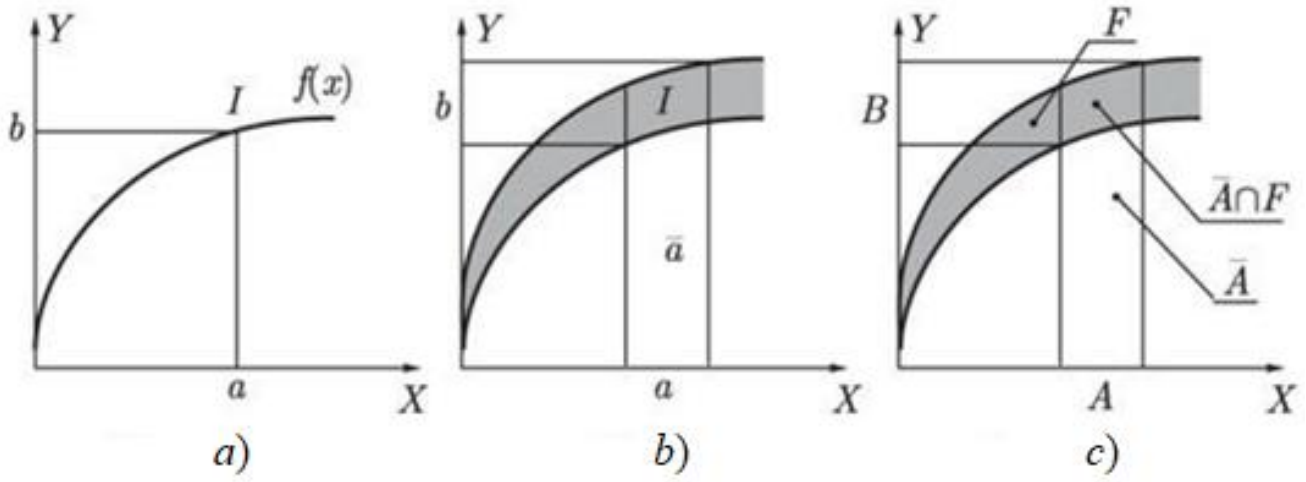


Рис 6.9. Композиційне правило виводу.

Узагальним тепер цей процес, припустивши, що *a* – інтервал, а $f(x)$ – функція, значення якої є інтервали, як на рис. 6.9., *b*. У цьому випадку, щоб знайти інтервал $y = b$, що відповідає інтервалу *a*, ми спочатку побудуємо циліндричну множину $\bar{a}$ з основою *a* і знайдемо його перетин *I* з кривою, значення якої є інтервали. Потім спроектуємо цей перетин на вісь *OY* і отримаємо бажане значення *y* у вигляді інтервалу *b*.

Щоб просунутися ще на один крок шляхом узагальнення, припустимо, що *A* – нечітка підмножина осі *OX*, а *F* – нечітке відношення $OX \times OY$ (рис. 6.9., *c*). Знову утворюючи циліндричну нечітку множину $\bar{A}$ з основою *A* та її перетин з нечітким відношенням *F*, ми отримаємо нечітку множину $\bar{A} \cap F$, яка є аналогом точки перетину *I* рисунку А. Таким чином, з того, що $y = f(x)$ і $x = A$ – нечітка підмножина осі *OX*, ми отримуємо значення *y* у вигляді нечіткої підмножини *B* осі *OY*.

6.4.2. Композиційне правило виводу по Заде

Нехай U і V – дві універсальні множини з базовими змінними u і v відповідно. Нехай A і F нечіткі підмножини множин U і $U \times V$. **Тоді композиційне правило виводу стверджує**, що з нечітких множин A і F випливає нечітка множина $B = A \circ F$, де $\circ$ – мінімаксна композиція нечітких множин, яка визначається формулою:

$$\mu_B(v) = \bigvee_{u \in U} \left(\mu_A(u) \wedge \mu_F(u, v)\right).$$

Нагадаємо, що "$\wedge$" – це операція мінімуму (T-норма), "$\vee$" – операція максимуму (S-кнорма).

Зауважимо, що нечітка множина F в даному випадку є нечітким відношенням між змінними u і v.

На основі композиційного правила виведення як окремий випадок можна визначити узагальнене правило виведення модус поненс:

Посил	A^*
Імплікація	$A \to B$
Логічний висновок	$A^* \circ (A \to B)$

Наведене формулювання має дві відмінності від традиційного формулювання правила модус поненс: по-перше, тут допускається, що A, A^*, B – нечіткі множини, і, по-друге, A^* необов'язково ідентично A.

Розглянемо застосування композиційного правила виведення.

Приклад 6.7.

Нехай $U = V = \{1, 2, 3, 4\}$. Нечітка множина A = «Малий» задану у табличному вигляді:

A	1	2	3	4
$\mu_A(x)$	1	0,6	0,2	0

Нечітке відношення F = «Приблизно дорівнює» представлено у вигляді матриці відношення:

F	1	2	3	4
1	1	0,5	0	0
2	0,5	1	0,5	0
3	0	0,5	1	0,5
4	0	0	0,5	1

Тоді згідно композиційного правила виводу отримаємо:

$$B = A \circ F$$

$$B = [1 \quad 0{,}6 \quad 0{,}2 \quad 0] \circ \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0{,}6 \quad 0{,}5 \quad 0{,}2].$$

Тобто B представляє собою наступну нечітку множину:

B	1	2	3	4
$\mu_B(x)$	1	0,6	0,5	0,2

Пояснимо докладніше, як обраховується множина B. Розглянемо, наприклад, обчислення значення функції приналежності елемента 2 множини B (тобто добуток рядка A на другий стовпець F):

$$\mu_B(2)=(1 \wedge 0{,}5) \vee (0{,}6 \wedge 1) \vee (0{,}2 \wedge 0{,}5) \vee (0 \wedge 0)=0{,}5 \vee 0{,}6 \vee 0{,}2 \vee 0=0{,}6.$$

Отриманий результат можна проінтерпретувати так: B = «більш або менш малий», якщо терм «більш або менш» визначається як оператор збільшення нечіткості.

Словами цей наближений висновок можна записати у вигляді:

Посил	u – «Малий»
Посил	u, v – «Приблизно дорівнює»
Наближений висновок	v – «Більш або менш малий»

У розглянутому прикладі використовувався висхідний вивід від передумов до виводу. Він найчастіше зустрічається на практиці. Однак композиційне правило

виводу застосовується і у разі низхідного виводу, коли матриця нечітких відношень F задається експертом, коли спостерігається вихід B і потрібно визначити вхід A.

Приклад 6.8. Застосування композиційного правила низхідного виводу.

Розглянемо спрощену модель діагностики дня, що невдало склався у N:

x_1 – у N болить голова,

x_2 – у N поганий настрій.

y_1 – N не підготувався до занять,

y_2 – N посварився з сестрою,

y_3 – N не пішов до друга на день народження.

При цьому між усіма x_i та y_j (i = 1, 2; j = 1, 2, 3) існують нечіткі відношення, задані імплікаціями $x_i \rightarrow y_j$. Разом усі ці нечіткі відношення задають матрицю нечітких відношень F:

$$F = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Наприклад, ступінь впевненості у тому, що якщо у N болить голова, то він посвариться із сестрою – дорівнює 0,1.

Якщо N не підготувався до занять, не посварився із сестрою і привітав друга із днем народження, його стан можна оцінити так:

$$B = 0{,}9/y_1 + 0{,}1/y_2 + 0{,}2/y_3.$$

Бажано визначити причини такого стану:

$$A = a_1/x_1 + a_2/x_2.$$

Напишемо A та B у вигляді нечітких векторів-рядків:

$$B = [0{,}9;\ 0{,}1;\ 0{,}2],\ A = [a_1;\ a_2].$$

Тоді формулу $B = A \circ F$ можна представити у наступному вигляді:

$$\begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Використав мінімаксну композицію, отримаємо систему:

$$0{,}9 = (0{,}9 \wedge a_1) \vee (0{,}6 \wedge a_2);$$
$$0{,}1 = (0{,}1 \wedge a_1) \vee (0{,}5 \wedge a_2);$$
$$0{,}2 = (0{,}2 \wedge a_1) \vee (0{,}5 \wedge a_2).$$

Вирішимо цю систему:

Насамперед, у першому рядку другий член правої частини не впливає на ліву частину, тому отримаємо:

$$0{,}9 = 0{,}9 \wedge a_1, \text{тоді } a_1 \geq 0{,}9.$$

Далі з другого рядка випливає, що:

$$0{,}1 \geq 0{,}5 \wedge a_2, \text{тоді } a_2 \leq 0{,}1.$$

Умови $a_1 \geq 0{,}9$ та $a_2 \leq 0{,}1$ задовольняють вимогам третього рядка.

Таким чином, отримуємо рішення:

$$0{,}9 \leq a_1 \leq 1 \text{ і } 0 \leq a_2 \leq 0{,}1,$$

тобто швидше за все у *N* у цей день боліла голова (a_1 – «вимір» головного болю, a_2 – «вимір» поганого настрою).

6.4.3. Правило модус поненс (modus ponens) як окремий випадок композиційного правила виведення

Правило модус поненс (*modus ponens*) можна розглядати як окремий випадок композиційного правила виведення. Щоб встановити цей зв'язок, ми спершу узагальнимо поняття матеріальної імплікації з пропозиційними змінними на нечітку множину.

Нехай *A* і *B* нечіткі висловлювання, μ_A і μ_B відповідні їм функції приналежності. Тоді імплікації $A \to \overline{B}$ буде відповідати деяка функція приналежності $\mu_{A \to \overline{B}}$. По аналогії з традиційною логікою, можна припустити, що $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$.

Тоді

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \max\{1 - \mu_A(x), \mu_B(y)\}.$$

Однак це не єдине узагальнення оператора імплікації, у табл. 6.9 показано різні інтерпретації цього поняття.

Табл. 6.9 – Узагальнення оператора імплікації.

Ларсена	$\mu_{A\to B}(x,y)=\mu_A(x)\cdot\mu_B(y)$
Лукасевич	$\mu_{A\to B}(x,y)=\min\{1,1-\mu_A(x)+\mu_B(y)\}$
Мамдані	$\mu_{A\to B}(x,y)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}$
Standard Strict	$\mu_{A\to B}(x,y)=\begin{cases}1, \text{якщо } \mu_A(x)\le\mu_B(y);\\ 0, \text{у іншому випадку}\end{cases}$
Godel	$\mu_{A\to B}(x,y)=\begin{cases}1, \text{якщо } \mu_A(x)\le\mu_B(y);\\ \mu_B(y), \text{у іншому випадку}\end{cases}$
Gaines	$\mu_{A\to B}(x,y)=\begin{cases}1, \text{якщо } \mu_A(x)\le\mu_B(y);\\ \dfrac{\mu_B(x)}{\mu_A(x)}, \text{у іншому випадку}\end{cases}$
Kleene-Dienes	$\mu_{A\to B}(x,y)=\max\{1-\mu_A(x),\mu_B(y)\}$
Kleene-Dienes-Lu	$\mu_{A\to B}(x,y)=1-\mu_A(x)+\mu_A(x)\cdot\mu_B(y)$

Визначимо тепер узагальнене правило модусу поненс (*modus ponens*) – *generalized modus ponens*:

Посил	$A\to B$
Подія	A^*
Висновок	$A^*\circ(A\to B)$

Наведене формулювання має дві відмінності від традиційного формулювання правила модусу поненс (*modus ponens*): по-перше, тут припускається, що A, A^*, B – нечіткі множини, і, по-друге, що A^* необов'язково ідентично A.

Контрольні запитання:

1. Поясніть в чому різниця між тріангулярною *T*-нормою та *S*-кнормою?
2. Які існують форми опису тріангулярних *T*-норм та *S*-кнорм?
3. Які існують відомі тріангулярні *T*-норми та *S*-кнорми?
4. Які існують параметризовані тріангулярні функції?

5. Які існують особливості при визначенні перетину нечіткої множини самої із собою при використанні різних *T*-норм?

6. Які існують особливості при визначенні об’єднання нечіткої множини самої із собою при використанні різних *S*-кнорм?

7. Які існують особливості при визначенні перетину нечіткої множини з її доповненою множиною при використанні різних *T*-норм?

8. Які існують особливості при визначенні об’єднання нечіткої множини з її доповненою множиною при використанні різних *S*-кнорм?

9. В чому особливості композиційного правила виводу по Заде?

10. В чому особливості композиційного правила виводу модус поненс?

РОЗДІЛ 7

СИСТЕМИ ТА АЛГОРИТМИ НЕЧІТКОГО ВИВОДУ

7.1. Структура та опис функціонування систем нечіткого виводу

Для багатьох додатків, пов'язаних з керуванням технологічними процесами, потрібна побудова моделі аналізованого процесу. Знання моделі дозволяє підібрати відповідний регулятор (модуль керування). Однак часто побудова коректної моделі є складною проблемою, яка іноді потребує згоди на різні спрощення. Застосування теорії нечітких множин для керування технологічними процесами не передбачає знання моделей цих процесів. Слід лише сформулювати правила поведінки у формі нечітких умовних суджень типу «ЯКЩО ... ТОДІ». Модулі нечіткого керування можуть розглядатися як окремий випадок систем нечіткого виводу. На рис. 7.1 представлено типову структуру такої системи. Вона складається з наступних компонентів:

- база правил;
- блок фузифікації;
- блок вироблення рішення;
- блок дефузифікації.

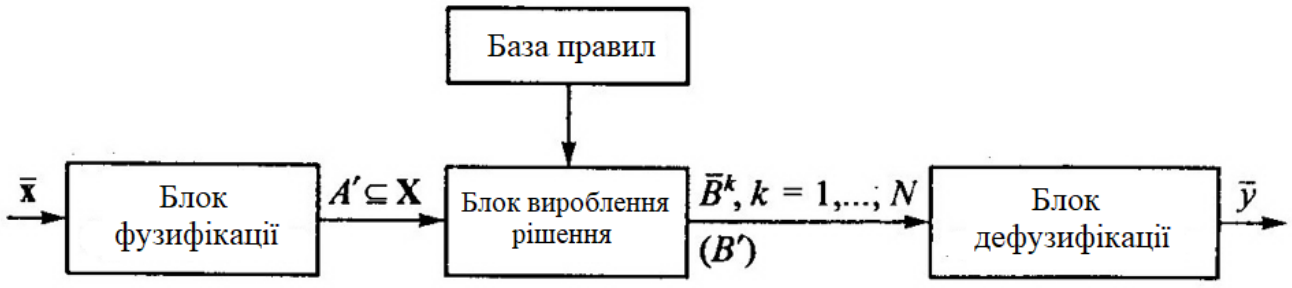


Рис. 7.1. Типова структура системи нечіткого виводу.

База правил. База правил, іноді звана лінгвістичною моделлю або нечіткою базою знань, представляє собою безліч нечітких правил $R^{(k)}$, $k = 1,..., N$ виду:

$R^{(k)}$: ЯКЩО $x_1 \in A_1^k$ I $x_2 \in A_2^k$ I ... I $x_n \in A_n^k$ ТОДІ $y_1 \in B_1^k$ I $y_2 \in B_2^k$ I … I $y_m \in B_m^k$,

де N – кількість нечітких правил; A_i^k - нечіткі множини

$$A_i^k \subseteq X_i \subset R, i = 1, \dots, n;$$

B_j^k – нечіткі множини

$$B_j^k \subseteq Y_j \subset R, j = 1, \dots, m;$$

$x_1, x_2, ..., x_n$ – вхідні змінні лінгвістичної моделі, причому

$$[x_1, x_2, \dots, x_n]^T = x \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n;$$

$y_1, y_2, ..., y_m$ – вихідні змінні лінгвістичної моделі, причому

$$[y_1, y_2, \dots, y_m]^T = y \in Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_m.$$

Символами X_i, $i = 1, ..., n$ та Y_j, $j = 1, ..., m$ позначаються відповідно простори вхідних та вихідних змінних.

Для подальших міркувань приймемо, що конкретні правила $R^{(k)}$, $k = 1,..., N$ зв'язані між собою логічним оператором «АБО». Крім того припустимо, що виходи $y_1, y_2, ..., y_m$ взаємно незалежні. Тому без втрати спільності будемо використовувати нечіткі правила зі скалярним виходом у наступній формі:

$R^{(k)}$: ЯКЩО $x_1 \in A_1^k$ I $x_2 \in A_2^k$ I ... I $x_n \in A_n^k$ ТОДІ $y \in B^k$,

де $B^k \subset Y \subset R$ та $k = 1,..., N$.

Зауважимо, що кожне таке правило складається з частини ЯКЩО, що зветься **посилом** (*antecedent*), та частини ТОДІ, що зветься **наслідком** (*consequent*). Посил правила містить набір умов, тоді як наслідок містить висновок. Змінні $x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ та y можуть набувати як лінгвістичні (наприклад, «малий», «середній», «великий»), так і числові значення. Звернімо увагу, що правило $R^{(k)}$ також можна інтерпретувати як нечітке відношення, визначене на множені $X \times Y$, тобто $R^{(k)} \subset X \times Y$ - це нечітка множина з функцією приналежності

$$\mu_{R^{(k)}}(x, y) = \mu_{A^k \to B^k}(x, y).$$

При проектуванні модулів нечіткого керування слід оцінювати достатність кількості нечітких правил, їх несуперечність та наявність кореляції між окремими правилами.

У загальному випадку нечіткий вивід рішення відбувається за три (або чотири) кроки. Дамо словесний опис дій, що виконуються на кожному етапі нечіткого виводу.

Етап фузифікації. За допомогою функцій приналежності всіх термів вхідних лінгвістичних змінних і на підставі заданих чітких значень з універсальних множин вхідних лінгвістичних змінних визначаються ступені впевненості у тому, що вихідна лінгвістична змінна набуває конкретного значення. Цей ступінь впевненості є ординатою точки перетину графіка функції приналежності терму та прямої x, що дорівнює чіткому значенню лінгвістичної змінної.

Конкретне значення $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{X}$ вхідного сигналу модуля нечіткого керування підлягає операції фузифікації (*fuzzification*), в результаті якої йому буде зіставлено нечітку множину

$$A' \subseteq X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n.$$

Нечітка множина A' подається на вхід блоку вироблення рішення.

Етап безпосереднього нечіткого виводу. На підставі набору правил (нечіткої бази знань) обчислюється значення істинності для передумови кожного правила виходячи з конкретних нечітких операцій, відповідних кон'юнкції або диз'юнкції термів у лівій частині правил. Найчастіше це або максимум, або мінімум з ступенів впевненості термів, обчислених на етапі фузифікації, який застосовується до заключення кожного правила. Використовуючи один із способів побудови нечіткої імплікації, ми отримаємо нечітку змінну, відповідну обчисленому значенню ступеня впевненості у лівій частини правила та нечіткої множини у правій частині правила.

Операція нечіткої імплікації займає центральне місце у нечітких продукційних моделях, визначаючи причинно-наслідкове відношення між

посилами та наслідками правил. В даний час існує велика кількість (кілька десятків) різних варіантів цієї операції. Усіх їх можна розділити на три основні класи:

***S*-імплікації**, що визначаються як

$$\mu_R(x,y) = S(\mathrm{NOT}(\mu_A(x), \mu_B(y))),$$

де *S* – оператор *S*-кнорми; NOT – оператор нечіткого доповнення на інтервалі [0, 1].

Основою операцій імплікації цього класу є булева імплікація. Типовими прикладами *S*-імплікації можуть бути імплікації Клінс-Даєнса і Лукашевича.

***R*-імплікації**, утворені на основі порівняння з *T*-нормою:

$$\mu_R(x,y) = \sup\{z \in [0,1] | T(\mu_A(x), z) \le \mu_B(y)\}.$$

Прикладами *R*-імплікації є імплікації Геделя та Гейнса.

***T*-імплікації,** що визначаються як

$$\mu_R(x,y) = T\big(\mu_A(x), \mu_B(y)\big),$$

де *T* – оператор *T*-норми.

Типовими прикладами *T*-імплікації є імплікації Мамдані та Ларсена.

У літературі наводиться перелік операцій нечіткої імплікації, що найчастіше використовується на практиці:

• **класична нечітка імплікація**, або **імплікація Кліне-Даєнса (*Kleene-Dienes*):**

Нехай *A* і *B* – нечіткі висловлювання та μ_A, μ_B відповідні їм функції приналежності. Імплікація *A* => *B* визначається формулами:

$$A \ge B \equiv \bar{A} \vee B,$$

$$\mu_R(x,y) = \max\{1 - \mu_A(x), \mu_B(y)\}, \text{при } \mu_A(x) \ge \mu_B(y).$$

• **нечітка імплікація Заде (*Zadeh*):**

$$\mu_R(x,y) = \max\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}, 1 - \mu_A(x)\}.$$

• **нечітка імплікація Мамдані (*Mamdani*):**

$$\mu_R(x,y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}.$$

• **нечітка імплікація Ларсена (*Larsen*):**

$$\mu_R(x,y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y).$$

• **нечітка імплікація Лукашевича (*Lukasiewicz*):**

$$\mu_R(x,y) = \min\{1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)\} \text{ або } \mu_R(x,y) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(y) - 1\}.$$

• **стандартна чітка імплікація (*standard strict*):**

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1, \text{при } \mu_A(x) \le \mu_B(y), \\ 0, \text{при } \mu_A(x) > \mu_B(y). \end{cases}$$

• **нечітка імплікація Геделя (*Gedel*):**

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1, \text{при } \mu_A(x) \le \mu_B(y), \\ \mu_B(y), \text{при } \mu_A(x) > \mu_B(y). \end{cases}$$

• **нечітка імплікація Гейнса (*Gaines*):**

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1, \text{при } \mu_A(x) \le \mu_B(y), \\ \dfrac{\mu_B(y)}{\mu_A(x)}, \text{при } \mu_A(x) > \mu_B(y). \end{cases}$$

• **нечітка імплікація Гогуена:**

$$\mu_R(x,y) = \min\{1, \frac{\mu_B(y)}{\mu_A(x)}\}, \text{при } \mu_A(x) > 0.$$

• **нечітка імплікація Кліне-Даєнса-Лукашевича:**

$$\mu_R(x,y) = 1 - \mu_A(x) + \mu_A(x) \cdot \mu_B(y).$$

• **нечітка ймовірнісна імплікація:**

$$\mu_R(x,y) = \min\{1, 1 - \mu_A(x) + \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)\}.$$

• **нечітка імплікація з обмеженою сумою:**

$$\mu_R(x,y) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(y)\}.$$

• **нечітка імплікація Н. Ваді:**

$$\mu_R(x,y) = \max\{ \mu_A(x) \cdot \mu_B(y), 1 - \mu_A(x)\}.$$

• **нечітка імплікація Ягера (*Yager*):**

$$\mu_R(x,y) = \mu_A(y)^{\mu_B(x)}.$$

Вибір тієї чи іншої операції нечіткої імплікації здійснюється залежно від використовуваного базису нечітких операцій та її найбільш ефективної обчислювальної реалізації.

Зазвичай як вивід використовується мінімізація. При мінімізуючому логічному виводі вихідна функція приналежності обмежена зверху відповідно до обчисленого ступеня істинності посила правила (нечітке логічне І). У логічному виводі з використанням продукції вихідна функція приналежності масштабується за допомогою обчисленого ступеня істинності передумови правила.

Припустимо, що на вхід блоку вироблення рішення подано нечітку множину

$$A' \subseteq X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n.$$

Визначимо відповідну нечітку множину на виході цього блоку. Розглянемо два випадки, яким відповідатимуть різні методи дефузифікації.

***Випадок* 1.**

На виході блоку вироблення рішення відповідно до узагальненого нечіткого правила *modus ponens* отримуємо *N* нечітких множин $\bar{B}^k \subseteq Y$. Нечітка множина $\bar{B}^k$ визначається комбінацією нечіткої множини A' і відношення $R^{(k)}$, тобто:

$$\bar{B}^{(k)} = A' \circ (A^k \longrightarrow B^k), k = 1, \ldots, N.$$

При цьому функція приналежності нечіткої множини буде виглядати наступним чином:

$$\mu_{\bar{B}^k}(y) = \sup_{x \in X}\left[\mu_{A'}(x) *^T \mu_{A^k \to B^k}(\bar{x}, y)\right].$$

Конкретна форма функції приналежності залежить від застосовуваної *T*-норми, правила виводу та від способу визначення декартового добутку нечітких множин.

Приклад 7.1.

Якщо $n = 2$, *T*-норма має тип «min», нечіткий вивід визначається правилом типу «min», тоді функція приналежності нечіткої множини буде виглядати наступним чином:

$$\mu_{\bar{B}^k}(y) = \sup_{x \in X}\left[\min\left(\mu_{A'}(x), \mu_{A^k \to B^k}(x, y)\right)\right] =$$

$$= \sup_{x \in X}\left[\min\left(\mu_{A'}(x), \min(\mu_{A^k}(x), \mu_{B^k}(y))\right)\right] =$$

$$= \sup_{x_1 \in X_1, x_2 \in X_2} \left[\min \left(\mu_{A_1'}(x_1), \mu_{A_2'}(x_2), \mu_{A_1^k}(x_1), \mu_{A_2^k}(x_2), \mu_{B^k}(y) \right) \right].$$

тому що

$$\mu_{A^k}(x) = \mu_{A_1^k \times A_2^k}(x_1, x_2) = \min \left[\mu_{A_1^k}(x_1), \mu_{A_2^k}(x_2) \right];$$

$$\mu_{A'}(x) = \mu_{A_1' \times A_2'}(x_1, x_2) = \min \left[\mu_{A_1'}(x_1), \mu_{A_2'}(x_2) \right].$$

Якщо ж n = 2, T-норма має тип «добуток», нечітка імплікація визначається правилом типу «добуток», тоді функція приналежності нечіткої множини набуває наступного вигляду:

$$\mu_{\bar{B}^k}(y) = \sup_{x \in X} \{ \mu_{A'}(x), \mu_{A^k \to B^k}(x, y) \} =$$

$$= \sup_{x \in X} \{ \mu_{A'}(x), \mu_{A^k}(x), \mu_{B^k}(y) \} =$$

$$= \sup_{x_1 \in X_1, x_2 \in X_2} \{ \mu_{A_1'}(x_1), \mu_{A_2'}(x_2), \mu_{A_1^k}(x_1), \mu_{A_2^k}(x_2), \mu_{B^k}(y) \}.$$

Приклад 7.2.

Агрегування ступенів істинності передумов двох правил:

$П_1$: ЯКЩО x_1 є A_{11} І x_2 є A_{12} ТОДІ ……;

$П_2$: ЯКЩО x_1 є A_{21} АБО x_2 є A_{22} ТОДІ …….

При цьому в якості зв'язки «І» між передумовами першого правила використана min-кон'юнкція, а в якості зв'язки «АБО» між передумовами другого правила – max-диз'юнкція.

Агрегування ступеня істинності посилів цих правил визначаються наступним чином (рис. 7.2):

$$\alpha_1 = \min \{ \mu_{A_{11}}(x_1'), \mu_{A_{12}}(x_2') \};$$

$$\alpha_2 = \max \left\{ \mu_{A_{21}}(x_1'), \mu_{A_{22}}(x_2') \right\}.$$

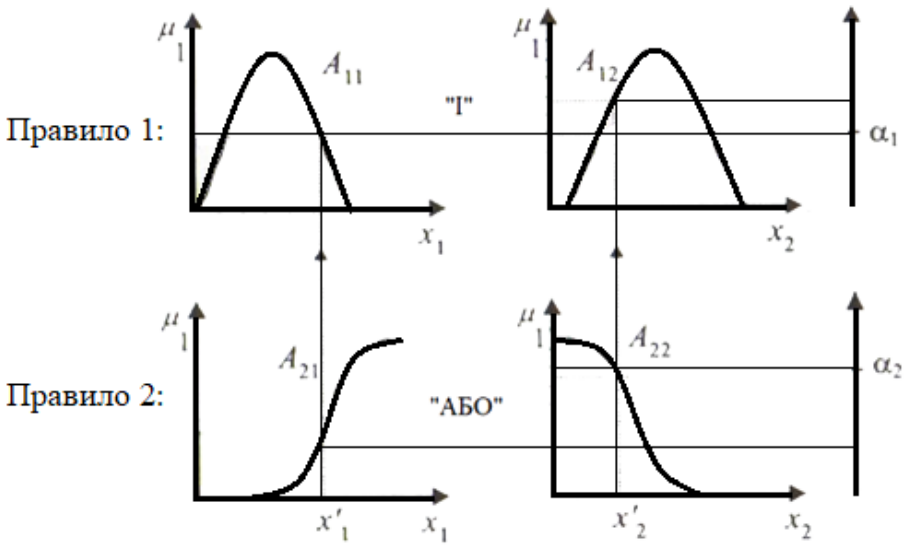


Рис. 7.2. Агрегування ступеня істинності посилів правил.

***Випадок* 2.**

На виході блоку вироблення рішення отримуємо одну нечітку множину $B' \subseteq Y$, що визначається виразом

$$B' = \bigcup_{k-1}^{N} A' \circ R^{(k)} = \bigcup_{k-1}^{N} A' \circ (A^k \longrightarrow B^k).$$

При цьому функція приналежності нечіткої множини буде виглядати наступним чином:

$$\mu_{B'}(y) = S_{k=1}^{N} \mu_{\bar{B}^k}(y),$$

причому функція приналежності визначається формулою:

$$\mu_{\bar{B}^k}(y) = \sup_{x \in X} \left[\mu_{A'}(x) *^T \mu_{A^k \longrightarrow B^k}(\bar{x}, y) \right].$$

Приклад 7.3.

Розглянемо приклад активізації двох виводів для кожного з двох правил на основі операції min-активізації з припущенням, що вагові коефіцієнти правил дорівнюють одиниці.

П$_1$: ЯКЩО x_1 є A_{11} І x_2 є A_{12} ТОДІ y_1 є B_{11} І y_2 є B_{12};

П$_2$: ЯКЩО x_1 є A_{21} І x_2 є A_{22} ТОДІ y_1 є B_{21} І y_2 є B_{22}.

В результаті цієї процедури знаходяться модифіковані функції приналежності (рис. 7.3) виводу по цих правилах:

$$\mu_{B'_{11}}(y_1) = \min\{\alpha_1, \mu_{B_{11}}(y_1)\};$$

$$\mu_{B'_{12}}(y_2) = \min\{\alpha_1, \mu_{B_{12}}(y_2)\};$$

$$\mu_{B'_{21}}(y_1) = \min\{\alpha_2, \mu_{B_{21}}(y_1)\};$$

$$\mu_{B'_{22}}(y_2) = \min\{\alpha_2, \mu_{B_{22}}(y_2)\}.$$

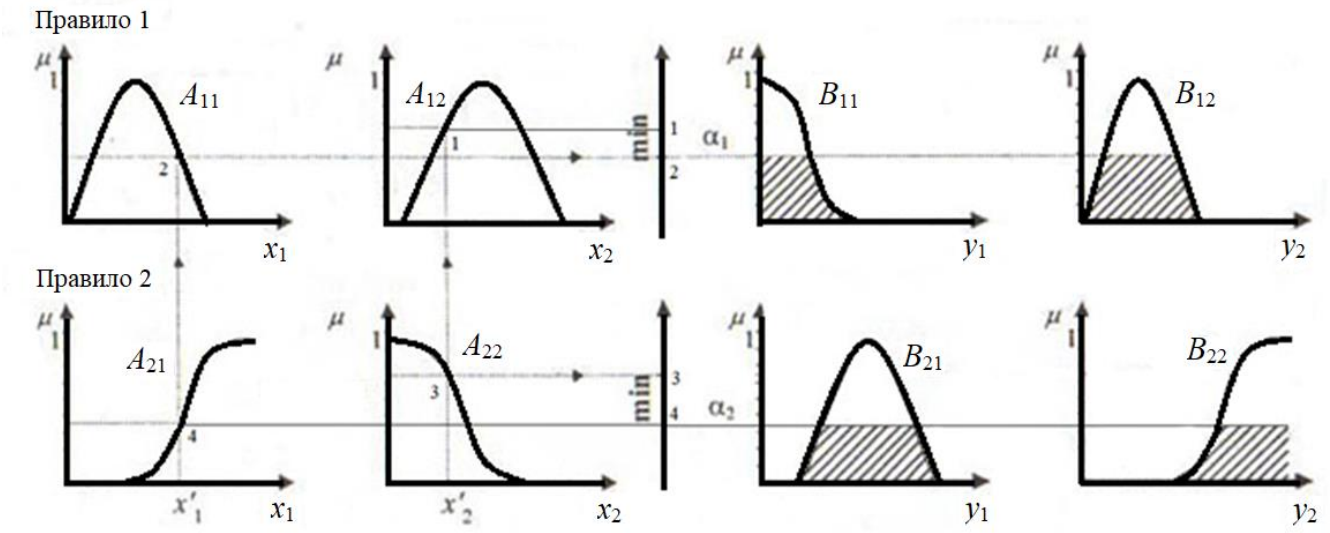


Рис. 7.3. Модифіковані функції приналежності.

Етап композиції (агрегації, акумуляції). Усі нечіткі множини, які призначені для кожного терму кожної вихідної лінгвістичної змінної, об'єднуються разом, і формується єдина нечітка множина – що є значенням для кожної виведеної лінгвістичної змінної (при цьому зазвичай використовуються функції max або sum).

Приклад 7.4.

На рис. 7.4 показано акумулювання активізованих виводів правил відповідно до прикладів 7.2 та 7.3 з використанням операції max-диз'юнкції.

У результаті формуються нечіткі множини для вихідних змінних з функціями приналежності:

$$\mu_{B_1'}(y_1) = \max\{\mu_{B_{11}'}(y_1), \mu_{B_{21}'}(y_1)\};$$
$$\mu_{B_2'}(y_2) = \max\{\mu_{B_{12}'}(y_2), \mu_{B_{22}'}(y_2)\}.$$

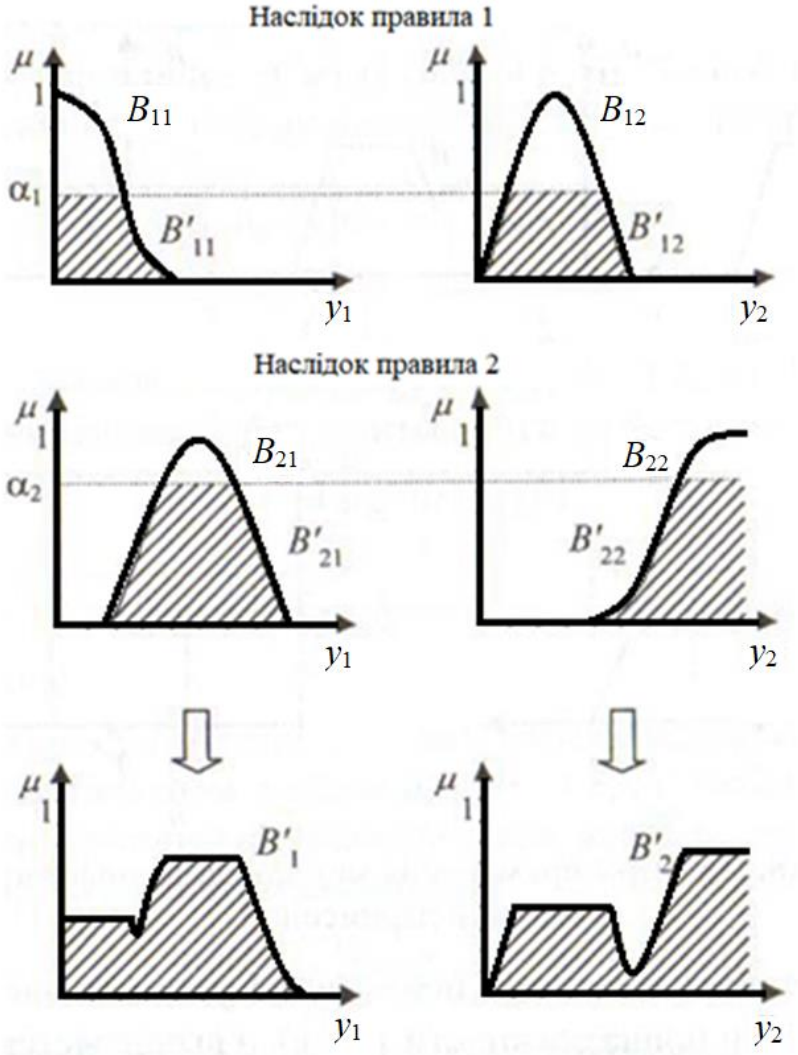


Рис. 7.4. Акумулювання активізованих виводів правил.

Етап дефузифікації (*defuzzification*). Необов'язковий етап, використовується тоді, коли необхідно перетворити нечіткий набір значень вихідних лінгвістичних змінних до точних значень.

На виході блоку вироблення рішення формується або N нечітких множин $\overline{B}^k$ з функціями приналежності $\mu_{\overline{B}^k}(y)$, k = 1, 2, ..., N, або одна нечітка множина B' з

функцією приналежності $\mu_{B'}(y)$. При цьому постає завдання відображення нечітких множин (або нечіткої множини B') в єдине значення $\bar{y} \subseteq Y$, яке являє собою керуючий вплив, що подається на вхід об'єкта. Таке відображення називається дефузифікацією.

Якщо на виході блоку вироблення рішення формується N нечітких множин $\bar{B}^k$, то значення $\bar{y} \subseteq Y$ можна розрахувати за допомогою різних методів. Є досить велика кількість методів переходу до точних значень (принаймні, 30). Розглянемо два загальних методи – "методи повної інтерпретації" та "метод максимуму". У методі повної інтерпретації точне значення змінної, що виводиться, обчислюється як значення "центру ваги" функції приналежності для нечіткого значення. У методі максимуму у якості точного значення змінної, що виводиться, приймається максимальне значення функції приналежності. У теорії нечітких множин процедура дефузифікації аналогічна до знаходження характеристик положення (математичного очікування, моди, медіани) випадкових величин у теорії ймовірності. Найпростішим способом виконання процедури дефузифікації є вибір чіткого числа, що відповідає максимуму функції приналежності. Однак придатність цього методу поширюється лише на одноекстремальні функції приналежності. Для багатоекстремальних функцій приналежності часто використовуються такі методи дефузифікації:

1) *COG* (*Center Of Gravity*) – "центр ваги". Фізичним аналогом цієї формули є знаходження центру ваги плоскої фігури, обмеженої осями координат та графіком функції приналежності нечіткої множини.

2) *MOM* (*Mean Of Maximums*) - "центр максимумів". При використанні методу центру максимумів потрібно знайти середнє арифметичне елементів універсальної множини, що мають максимальні ступені приналежності.

3) Перший максимум (*First Maximum*) – максимум функції приналежності з найменшою абсцисою.

Приклад 7.5.

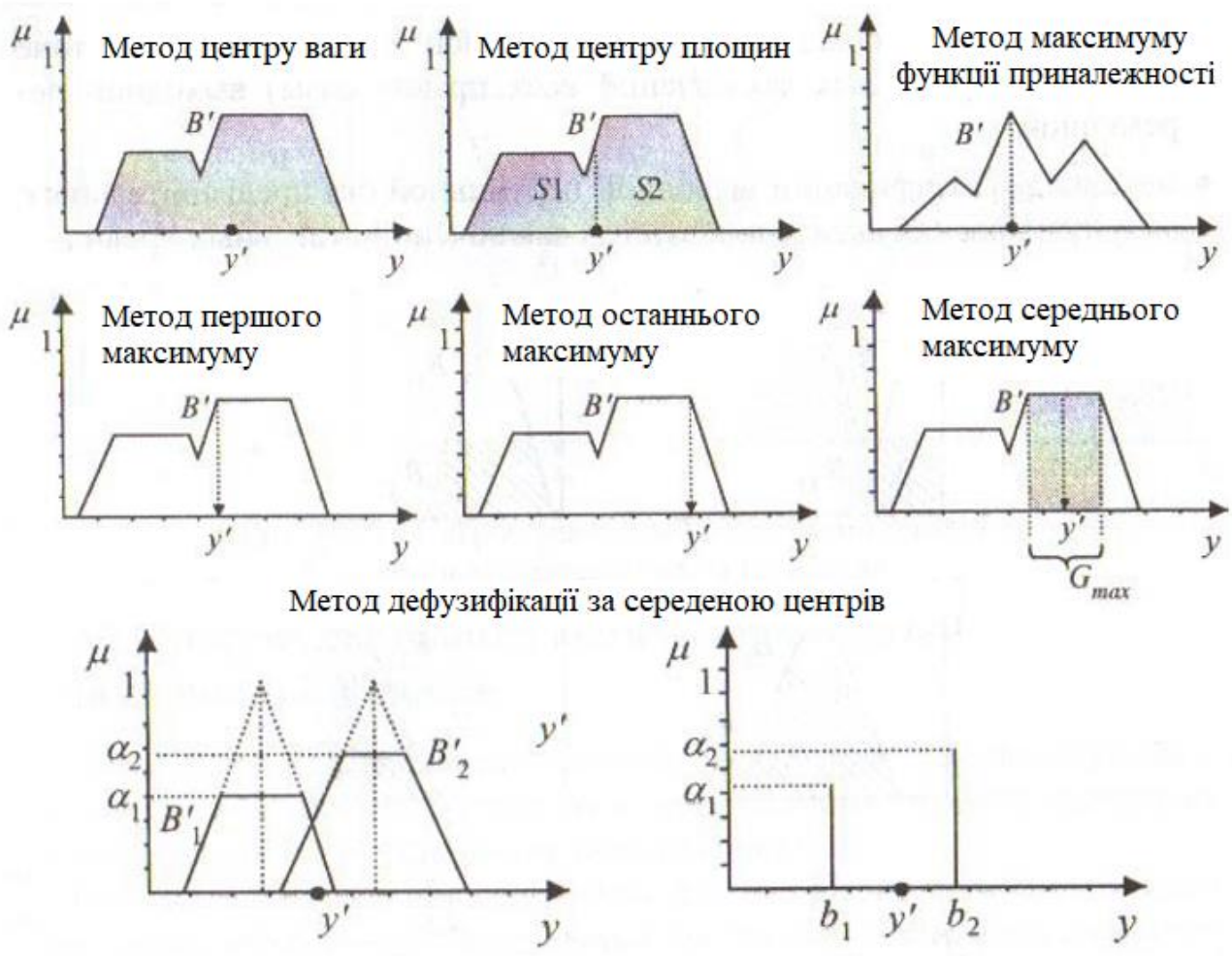


Рис. 7.5. Застосування різних методів дефузифікації вихідних змінних.

Розглянимо більш детально основні методи дефузифікації.

1. Метод дефузифікації за середнім центром (*center average defuzzification*).

Значення $\bar{y}$ розраховується за формулою:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \mu_{\bar{B}^k}(\bar{y}^k)\bar{y}^k}{\sum_{k=1}^{N} \mu_{\bar{B}^k}(\bar{y}^k)},$$

де $\bar{y}^k$ – точка, у якій функція $\mu_{B^k}(y)$ набуває максимального значення, тобто

$$\mu_{\bar{B}^k}(\bar{y}^k) = \max \mu_{B^k}(y^k).$$

Точка $\bar{y}^k$ називається центром (*center*) нечіткої множини B^k. На рис. 7.6 представлена ідея цього методу для $N = 2$. Звернемо увагу, що значення $\bar{y}$ не залежить від форми і носія функції приналежності $\mu_{B^k}(y)$.

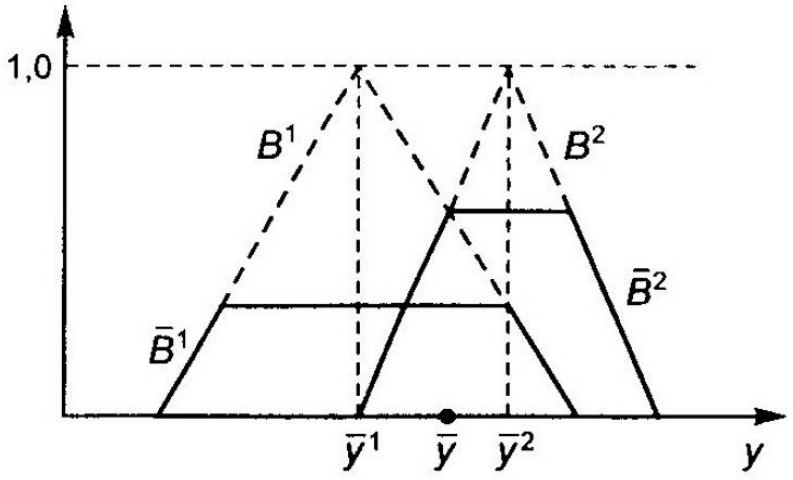


Рис. 7.6. Метод дефузифікації за середнім центром.

2. Метод дефузифікації за сумою центрів (*center of sums defuzzification*). Значення $\bar{y}$ розраховується за формулою

$$\bar{y} = \frac{\int_Y y \sum_{k=1}^{N} \mu_{\bar{B}^k}(\bar{y}^k) dy}{\int_Y \sum_{k=1}^{N} \mu_{\bar{B}^k}(\bar{y}^k)\, dy},$$

Якщо вихідне значення блоку вироблення рішення являє собою єдину нечітку множину B', то значення $\bar{y}$ можна визначити із застосуванням наступних методів.

3. Метод центру ваги (*center of gravity method* або *center of area method*).

Значення $\bar{y}$ розраховується як центр ваги функції приналежності $\mu_{B'}(y)$, тобто:

$$\bar{y} = \frac{\int_Y y\mu_{B'}(y)dy}{\int_Y \mu_{B'}(y)\, dy} = \frac{\int_Y y S_{k=1}^{N} \mu_{\bar{B}^k}(y)dy}{\int_Y S_{k=1}^{N} \mu_{\bar{B}^k}(y)\, dy},$$

за умови, що обидва інтеграли у наведеному вираженні існують.

У дискретному випадку формула набуває наступного вигляду:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \mu_{B'}(\bar{y}^k)\bar{y}^k}{\sum_{k=1}^{N} \mu_{B'}(\bar{y}^k)}.$$

На рис. 7.7 ілюструється спосіб визначення значення $\bar{y}$ по методу центру ваги для $N = 2$.

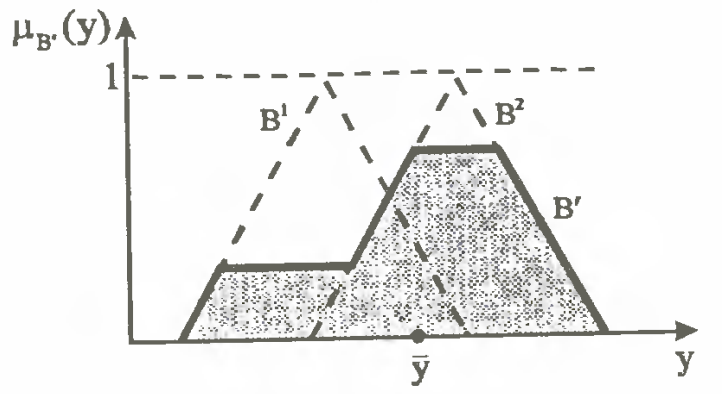


Рис. 7.7. Метод центру ваги.

4. Метод максимуму функції приналежності.

Значення $\bar{y}$ розраховується відповідно до формули $\mu_{B'}(\bar{y}) = \sup_{y \in Y}\{\mu_{B'}(y)\}$, за умови унімодальності функції $\mu_{B'}(y)$.

Цей метод не враховує форму функції приналежності, що ілюструється на наступному рис.7.8.

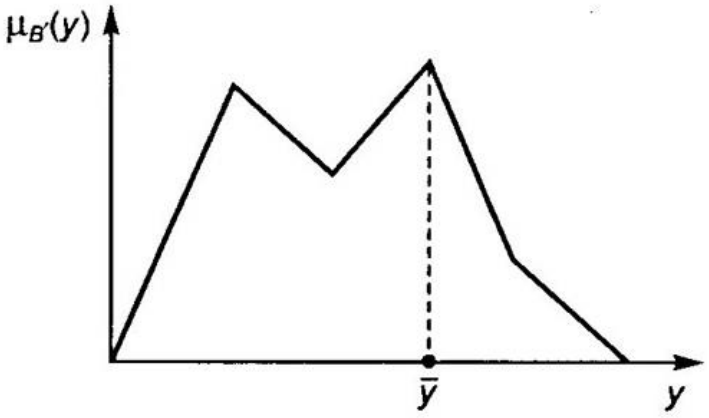


Рис. 7.8. Метод максимуму функції приналежності.

Розглянемо роботу алгоритму нечіткого виведення на конкретному прикладі.

Приклад 7.6. Здійснення нечіткого логічного виводу.

Нехай є деяка система, наприклад реактор, що описується трьома параметрами: температура, тиск і витрата робочої рідини. При цьому усі показники виміряні, і множини можливих значень відомі. Також з досвіду роботи із системою відомі деякі правила, що пов'язують значення цих параметрів. Припустимо, що зламався датчик, який вимірює значення одного з параметрів системи, але знати його показники необхідно хоча б приблизно. Тоді постає завдання знайти це невідоме значення (наприклад, нехай це буде тиск) при відомих показниках двох інших параметрів (температури і витрати робочої рідини). Сформуємо зв'язки цих величин у вигляді наступних правил:

***Правило* 1:** якщо температура низька і витрата робочої рідини мала, тоді тиск низький;

***Правило* 2:** якщо температура середня, тоді тиск середній;

***Правило* 3:** якщо температура висока або витрата робочої рідини велика, тоді тиск високий.

У цьому випадку температура, тиск та витрата робочої рідини – лінгвістичні змінні. Опишемо кожну з них.

Температура. Множина можливих значень – відрізок [0; 150]. Початкова множина термів {Висока, Середня, Низька}. Функції приналежності термів мають вигляд, як наведено на рис. 7.9.

Рис. 7.9. Функції приналежності термів «температура».

Тиск. Множина можливих значень – відрізок [0; 100]. Початкова множина термів {Високий, Середній, Низький}. Функції приналежності термів мають вигляд, як наведено на рис. 7.10.

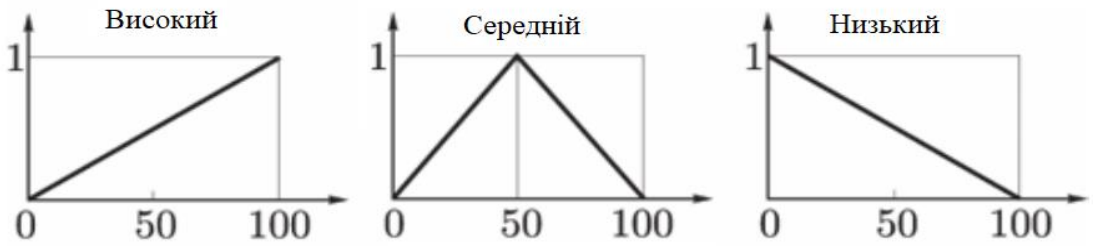


Рис. 7.10. Функції приналежності термів «тиск».

Витрата робочої рідини (витрата). Множина можливих значень – відрізок [0; 8]. Початкова множина термів [Велика, Середня, Мала]. Функції приналежності термів мають вигляд, як наведено на рис. 7.11.

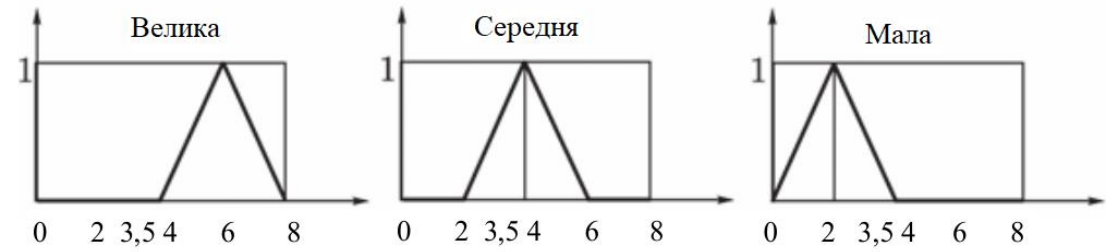


Рис. 7.11. Функції приналежності термів «витрата».

Нехай відомі значення: температура дорівнює 85 та витрата робочої рідини дорівнює 3,5. Зробимо розрахунок значення тиску.

Послідовно розглянемо етапи нечіткого виводу.

Спочатку за заданими значеннями вхідних параметрів знайдемо ступені впевненості найпростіших тверджень по кожному з заданих правил. Цей етап називається фузифікацією, тобто переходом від заданих чітких значень до ступенів впевненості (нечітких значень).

- Температура висока – 0,7;

- Температура середня – 1;

- Температура низька – 0.3;

- Витрата велика – 0;

- Витрата середня – 0,75;

- Витрата мала – 0,25.

Потім обчислимо ступені впевненості посилів правил:

- Температура низька і витрата мала:

min(темп. низька, витрата мала) = min(0,3; 0,25) = 0,25;

- Температура середня: 1;

- Температура висока або витрата велика:

max (темп. висока, витрата велика) = max(0,7; 0) = 0,7.

Кожне з правил є нечіткою імплікацією. Ступінь впевненості посилів ми вирахували, а ступінь впевненості заключення задається функцією приналежності відповідного терму. Тому, використовуючи один із способів побудови нечіткої імплікації, ми отримаємо нову нечітку змінну, що відповідає ступеню впевненості у значенні вихідних даних при застосуванні до заданих вхідних даних відповідного правила. Використовуючи визначення нечіткої імплікації як мінімум лівої та правої частин (визначення *Mamdani*), отримаємо рис. 7.12.

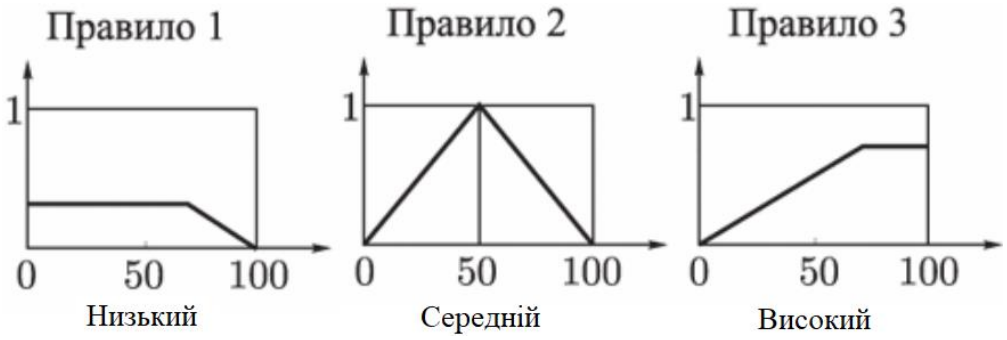


Рис. 7.12. Результат нечіткої імплікації.

Тепер необхідно поєднати результати застосування усіх правил. Цей етап називається акумуляцією. Один з основних способів акумуляції – побудова максимуму отриманих функцій приналежності (рис. 7.13).

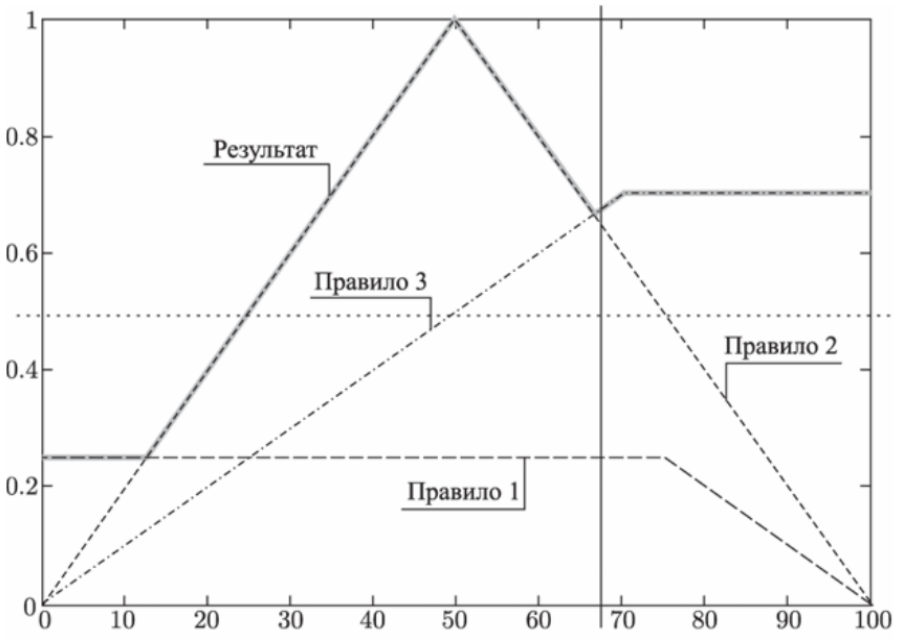


Рис. 7.13. Результат етапу акумуляції.

Отриману функцію приналежності вже можливо вважати результатом. Це новий терм вихідної змінної – тиск. Його функція приналежності говорить про ступінь впевненості у значенні тиску при заданих значеннях вхідних параметрів та використання правил, що визначають співвідношення вхідних та вихідних змінних. Але зазвичай все-таки потрібне якесь конкретне числове значення. Для отримання використовується етап дефузифікації, тобто отримання конкретного значення з універсальної множини за заданою на ньому функцією приналежності.

Існує безліч методів дефузифікації, але в нашому випадку достатньо методу першого максимуму. Застосовуючи його до отриманої функції приналежності, отримуємо, що значення тиску дорівнює 50. Таким чином, якщо ми знаємо, що температура дорівнює 85, а витрата робочої рідини - 3,5, то можемо зробити висновок, що тиск в реакторі дорівнює приблизно 50.

7.2. Алгоритми нечіткого виводу

Етапи нечіткого виводу можна реалізувати по-різному. Сукупність окремих реалізацій етапів роботи системи нечіткого виводу визначає **алгоритм нечіткого виводу.**

7.2.1. Алгоритм нечіткого виводу Мамдані

При виконанні нечіткого виводу на основі алгоритму Мамдані використовуються наступні компоненти нечіткої продукційної моделі:

1. База нечітких продукційних правил формується на основі правил типу:

$П_i$: ЯКЩО $x_1 \in A_{i1}$ І ... І $x_j \in A_{ij}$ І ... І $x_m \in A_{im}$ ТОДІ $y \in B_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Зауваження: Типи структур бази нечітких продукційних правил (*SISO*-, *MISO*-, *MIMO*-структури) залежить від кількості вхідних та вихідних змінних, у зв'язку з цим структура може бути:

SISO – *Single Input, Single Output* (один вхід, один вихід);

MISO – *Multi Input, Single Output* (багато входів, один вихід);

MIMO – *Multi Input, Multi Output* (багато входів, багато виходів).

В основі нечітких правил з передумовами, представленими в кон'юнктивній формі, весь простір вхідних змінних ділиться на решітку нечітких гіперкубів паралельно осям координат. Кожен із гіперкубів є декартовим добутком відповідних одновимірних нечітких множин (рис. 7.14).

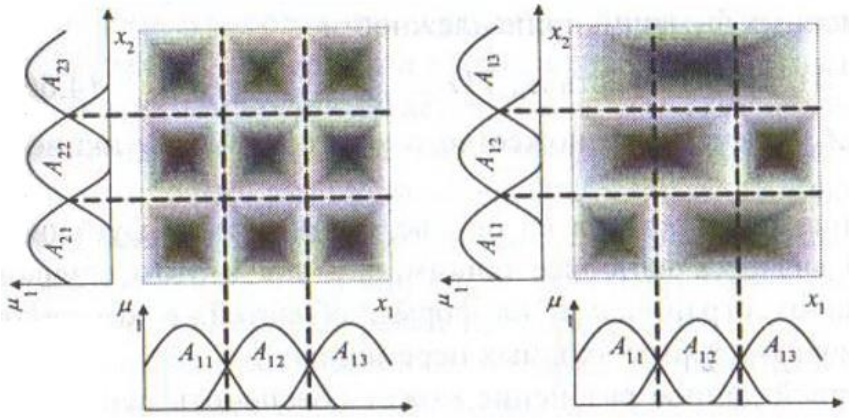


Рис. 7.14. Простір вхідних змінних.

При цьому правила формуються таким чином, щоб отримати всі можливі комбінації функцій приналежності всіх вхідних змінних.

Припустимо, база нечітких продукційних правил з *MISO*-структурою (з двома входами та одним виходом) складається з двох правил:

$П_1$: ЯКЩО x_1 є A_{11} І x_2 є A_{12} ТОДІ y є B_1;

$П_2$: ЯКЩО x_1 є A_{21} І x_2 є A_{22} ТОДІ y є B_2.

2. Декартовий добуток нечітких множин задано виразом:

$$\mu_{A'_{i1}\times A'_{i1}}(x_1, x_2) = \min\left\{\mu_{A'_{i1}}(x_1), \mu_{A'_{i2}}(x_2)\right\}.$$

3. Нечітка імплікація – операція min-кон'юнкції

$$\mu_R(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}.$$

4. *T*-норма – min-кон'юнкція.

5. Акумулювання активізованих виводів правил – max-диз'юнкція.

Узагальнену нечітку модель та алгоритм нечіткого виводу Мамдані для наведеного прикладу можна представити так:

$$\mu_{B'_i}(y) = \max_{i=1,2} \sup_{x\in X}\left[\min\left(\mu_{A'_i}(x), \mu_{A_i\to B_i}(x, y)\right)\right] =$$

$$= \max_{i=1,2}\sup_{x_1\in X_1, x_2\in X_2}\left[\min\left(\mu_{A'_{i1}}(x_1), \mu_{A'_{i2}}(x_2), \mu_{A_{i1}}(x_1), \mu_{A_{i2}}(x_2), \mu_{B_i}(y)\right)\right].$$

де sup – верхня грань, максимальне значення x у цій точці.

На рис. 7.15 ілюструється виконання алгоритму нечіткого виводу Мамдані для описаного прикладу.

Етапи виконання алгоритму нечіткого виводу Мамдані:

***Етап* 1.** Визначення ступеня спрацьовування (істинності) кожного посилу по кожному правилу для заданих значень вхідних змінних (фузифікація)

$$\mu_{A_{ij}}(x'_j), i, j = 1, 2.$$

***Етап* 2.** Агрегування ступенів істинності посилів за кожним із правил α_i. Для описаного прикладу:

$$\alpha_1 = \min\{\mu_{A_{11}}(x'_1), \mu_{A_{12}}(x'_2)\};\ \ \alpha_2 = \max\{\mu_{A_{21}}(x'_1), \mu_{A_{22}}(x'_2)\}.$$

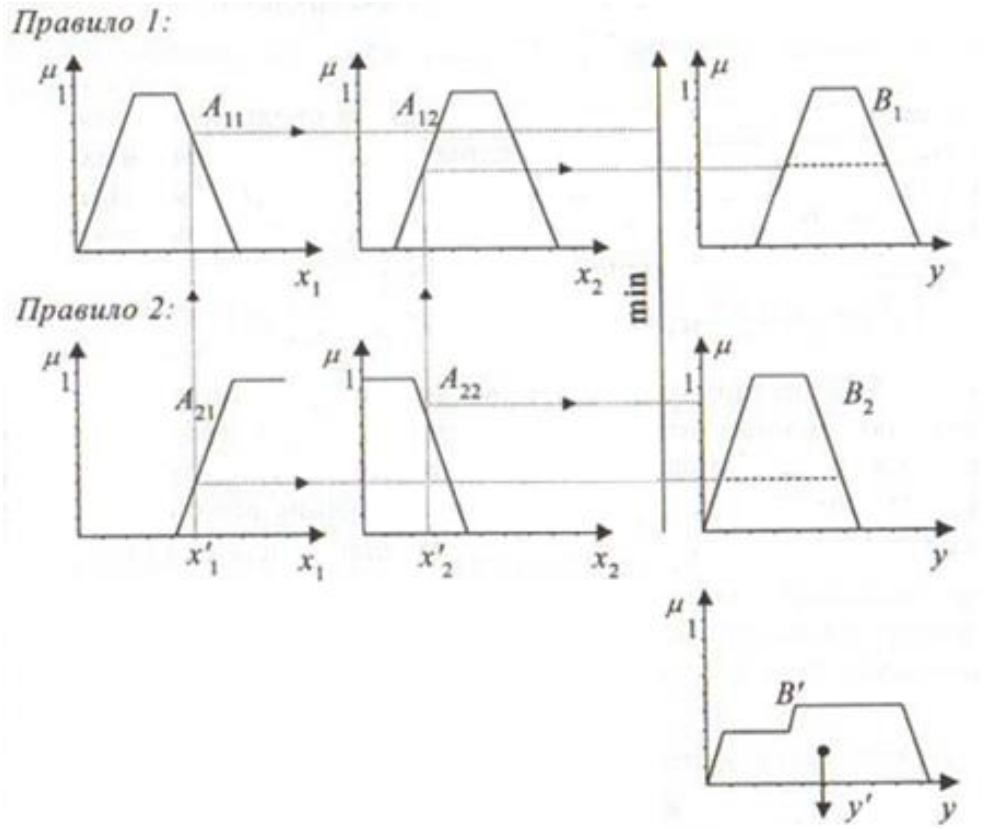


Рис. 7.15. Виконання алгоритму нечіткого виводу Мамдані.

При цьому у якості операції агрегування можуть використовуватися й інші нечіткі логічні операції:

$$\mu_{A_{ij} \wedge A_{im}}(x) = \min\{\mu_{A_{ij}}(x'_j), \mu_{A_{im}}(x'_m)\};$$

$$\mu_{A_{ij} \cdot A_{im}}(x) = \mu_{A_{ij}}(x'_j) \cdot \mu_{A_{im}}(x'_m);$$

$$\mu_{A_{ij} \otimes A_{im}}(x) = \max\{\mu_{A_{ij}}(x'_j) + \mu_{A_{im}}(x'_m) - 1, 0\};$$

$$\mu_{A_{ij} \triangle A_{im}}(x) = \begin{cases} \mu_{A_{im}}(x'_m), \text{при } \mu_{A_{ij}}(x'_j) = 1; \\ \mu_{A_{ij}}(x'_j), \text{при } \mu_{A_{im}}(x'_m) = 1; \\ 0, \text{у інших випадках.} \end{cases}$$

***Етап* 3.** Активізація (визначення ступеня істинності) наслідків щодо кожного з правил на основі операції min-активізації:

$$\mu_{B'_1}(y) = \min\{\alpha_1, \mu_{B_1}(y)\};$$

$$\mu_{B'_2}(y) = \min\{\alpha_2, \mu_{B_2}(y)\}.$$

***Етап* 4.** Акумулювання отриманих на попередньому етапі наслідків за всіма правилами. Об'єднання знайдених усічених нечітких множин проводиться з використанням операції максимум (max-диз'юнкції). У результаті формується нечітка множина для вихідної змінної з функцією приналежності:

$$\mu_{B'}(y) = \max\{\mu_{B'_1}(y), \mu_{B'_2}(y)\}.$$

***Етап* 5.** Етап приведення до чіткості виконується, якщо необхідно привести отриману нечітку множину до чіткого вигляду. В алгоритмі нечіткого виводу Мамдані, як правило, використовується центроїдний метод дефузифікації, при якому чітке значення вихідної змінної визначається як «центр ваги» (*center of gravity*) для $\mu_{B'}(y)$:

$$y' = \frac{\int_{Y_{\min}}^{Y_{\max}} y\mu_{B'}(y)dy}{\int_{Y_{\min}}^{Y_{\max}} \mu_{B'}(y)dy},$$

де $Y_{\min}$, $Y_{\max}$ – межі інтервалу носія нечіткої множини вихідної змінної y.

Для дискретного варіанта:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{r=1}^{Y_{\max}} y_r\mu_{B'}(y_r)}{\sum_{r=1}^{Y_{\max}} \mu_{B'}(y_r)},$$

де $Y_{\max}$ - число елементів y_r у дискретній області Y, на якій обчислюється «центр ваги».

Приклад 7.7.

Нехай задана нечітка база правил, що описує залежність між віком водія (x) та можливістю виникнення дорожньо-транспортної пригоди (y):

Якщо x = молодий, тоді y = висока;

Якщо x = середній, тоді y = низька;

Якщо x = дуже старий, тоді y = висока.

Нехай функції приналежності термів мають вигляд, показаний на наступному рис. 7.16. Тоді нечіткі наслідки, які відповідають правилам описаної бази правил, будуть мати такий вигляд, який наведено на рис. 7.17.

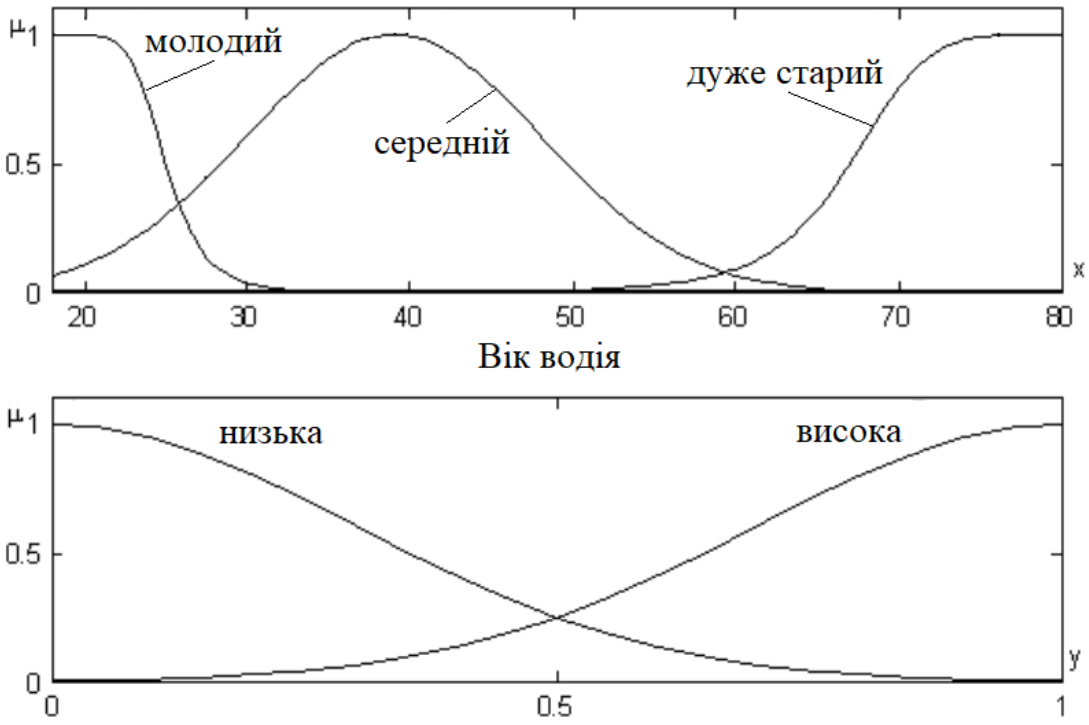
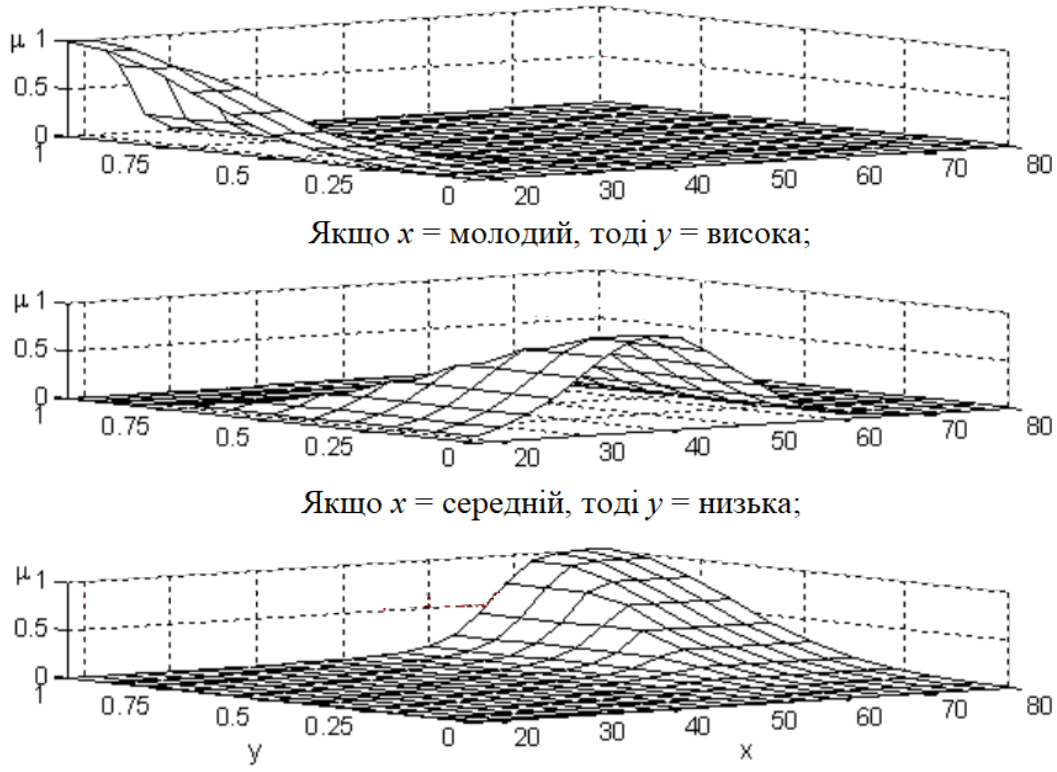


Рис. 7.16. Вигляд функцій приналежності термів.



Якщо *x* = молодий, тоді *y* = висока;

Якщо *x* = середній, тоді *y* = низька;

Якщо *x* = дуже старий, тоді *y* = висока.

Рис. 7.17. Вигляд функцій приналежності нечітких наслідків.

За нечіткою базою правил виконаємо нечіткий логічний вивід Мамдані при різних значеннях вхідної змінної x = 28 та x = «старий». Виконання нечіткого логічного виводу при даних значеннях вхідної змінної показано на рис. 7.18 та рис. 7.19.

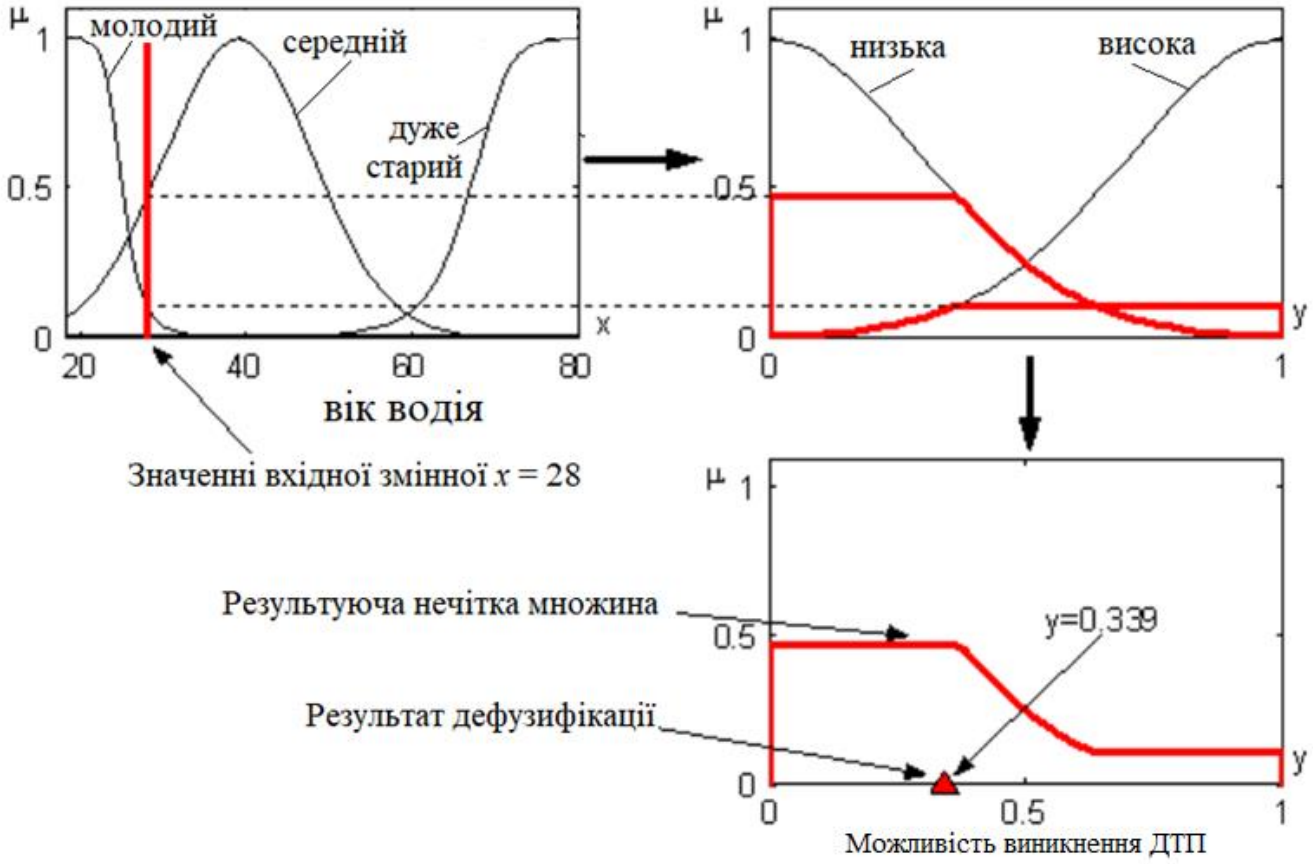


Рис. 7.18. Нечіткий логічний вивід Мамдані при x = 28.

Операція агрегування здійснювалася знаходженням максимуму. Дефузифікація проводилася методом центру ваги. На рис. 7.20 показана залежність «вхід-вихід», що відповідає заданій нечіткій базі правил. Ділянки графіка, що відповідають першому, другому та третьому правилу бази правил позначені відповідно #1, #2 та #3.

Інша алгоритми нечіткого виводу розглянемо аналогічно, порівнюючи їх із алгоритмом Мамдані.

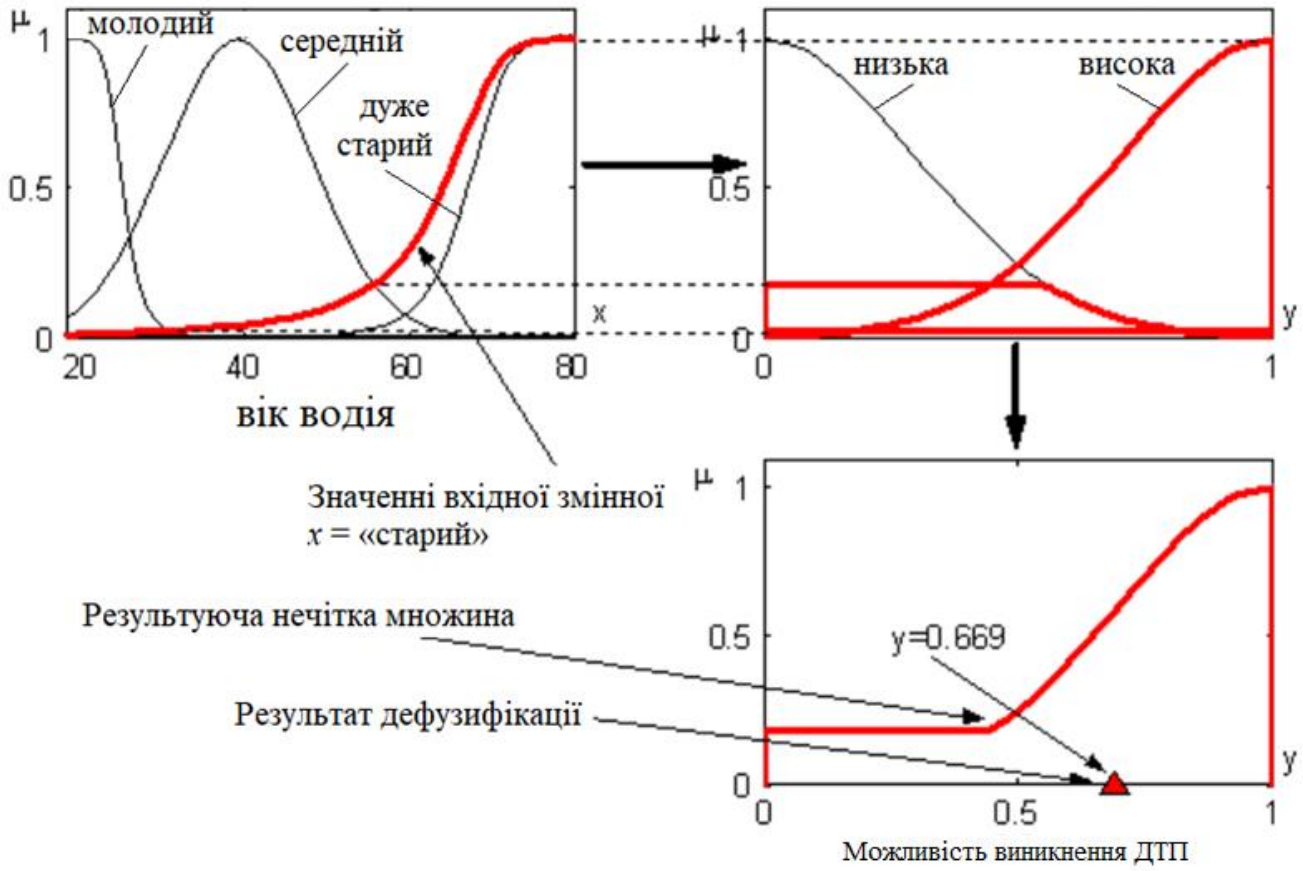


Рис. 7.19. Нечіткий логічний вивід Мамдані при *x* = «старий».

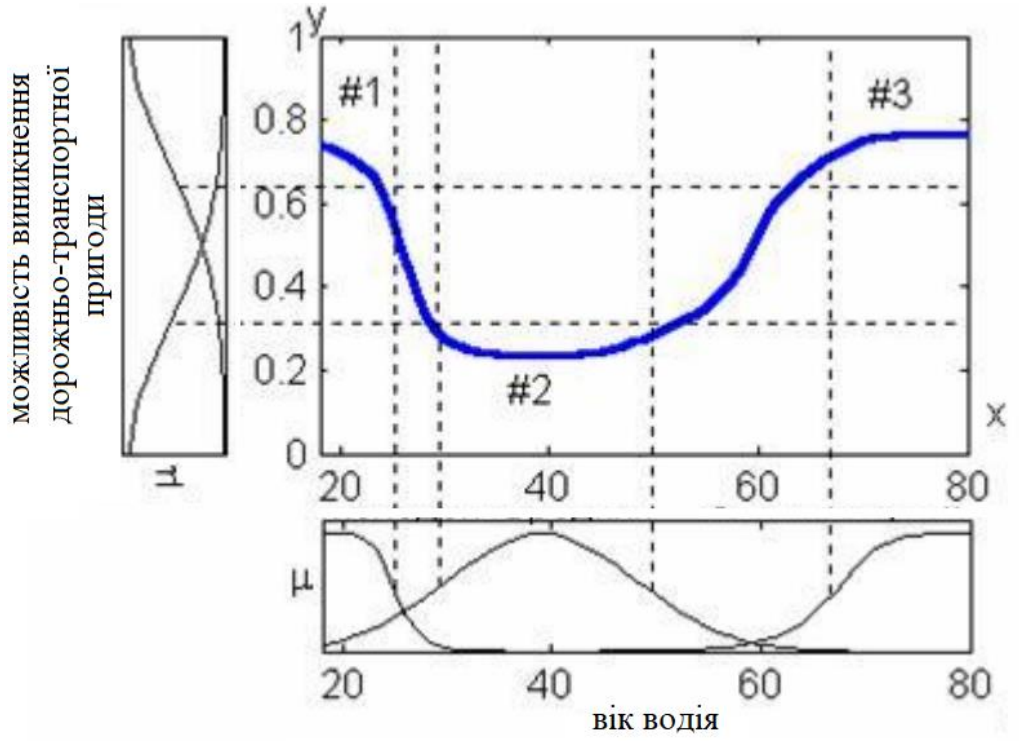


Рис. 7.20. Залежність «вхід-вихід».

7.2.2. Алгоритм нечіткого виводу Ларсена

При виконанні нечіткого виводу на основі алгоритму Ларсена (*Larsen*) використовуються наступні компоненти нечіткої продукційної моделі:

1. База нечітких продукційних правил формується аналогічно алгоритму Мамдані на основі правил типу:

$$П_i: \text{ЯКЩО } x_1 \in A_{i1} \text{ I } ... \text{ I } x_j \in A_{ij} \text{ I } ... \text{ I } x_m \in A_{im}$$

$$\text{ТОДІ } y_1 \in B_{i1} \text{ I } ... \text{ I } y_k \in B_{ik} \text{ I } ... \text{ I } y_p \in B_{ip},\ i = 1, \ldots, n.$$

2. Декартовий добуток нечітких множин задано аналогічно алгоритму Мамдані:

$$\mu_{A'_{i1}\times A'_{i1}}(x_1, x_2) = \min\left\{\mu_{A'_{i1}}(x_1), \mu_{A'_{i2}}(x_2)\right\}.$$

3. Нечітка імплікація – операція нечіткого добутку

$$\mu_R(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y).$$

4. *T*-норма – min-кон'юнкція (аналогічно алгоритму Мамдані).

5. Акумулювання активізованих виводів правил – max-диз'юнкція (аналогічно алгоритму Мамдані).

У цьому випадку нечітку модель та алгоритм нечіткого виводу Ларсена для наведеного прикладу можна представити наступним чином:

$$\mu_{B'_i}(y) = \max_{i=1,2} \sup_{x\in X}\{\mu_{A'_i}(x) \cdot \mu_{A_i\to B_i}(x, y)\} =$$

$$= \max_{i=1,2}\sup_{x_1\in X_1, x_2\in X_2}\left\{\mu_{B_i}(y) \cdot \min\left(\mu_{A'_{i1}}(x_1), \mu_{A'_{i2}}(x_2), \mu_{A_{i1}}(x_1), \mu_{A_{i2}}(x_2)\right)\right\}.$$

Етапи виконання алгоритму нечіткого виводу Ларсена

***Етап* 1.** Фузифікація (подібно до алгоритму Мамдані). Визначення ступеня спрацьовування (істинності) кожного посилу кожного правила для заданих значень вхідних змінних (фузифікація):

$$\mu_{A_{ij}}(x'_j), i, j = 1, 2.$$

***Етап* 2.** Агрегування ступенів істинності посилів за кожним із правил α_i (подібно до алгоритму Мамдані).

***Етап* 3.** Активізація наслідків щодо кожного з правил на основі операції prod-активації:

$$\mu_{B_1'}(y) = \alpha_1 \cdot \mu_{B_1}(y);\ \ \mu_{B_2'}(y) = \alpha_2 \cdot \mu_{B_2}(y).$$

***Етап* 4.** Акумулювання отриманих на попередньому етапі наслідків за всіма правилами та отримання результуючої нечіткої множини виконується із використанням операції max-диз'юнкції:

$$\mu_{B'}(y) = \mu_{B_1'}(y) \vee \mu_{B_2'}(y) = \max\{\mu_{B_1'}(y), \mu_{B_2'}(y)\}.$$

А у разі *n* правил:

$$\mu_{B'}(y) = \bigvee_{i=1}^{n} \mu_{B_i'}(y).$$

***Етап* 5.** Приведення до чіткості проводиться у разі потреби на основі одного з розглянутих вище методів дефузифікації.

На рис. 7.21 ілюструється виконання алгоритму нечіткого виводу Ларсена для описаного прикладу.

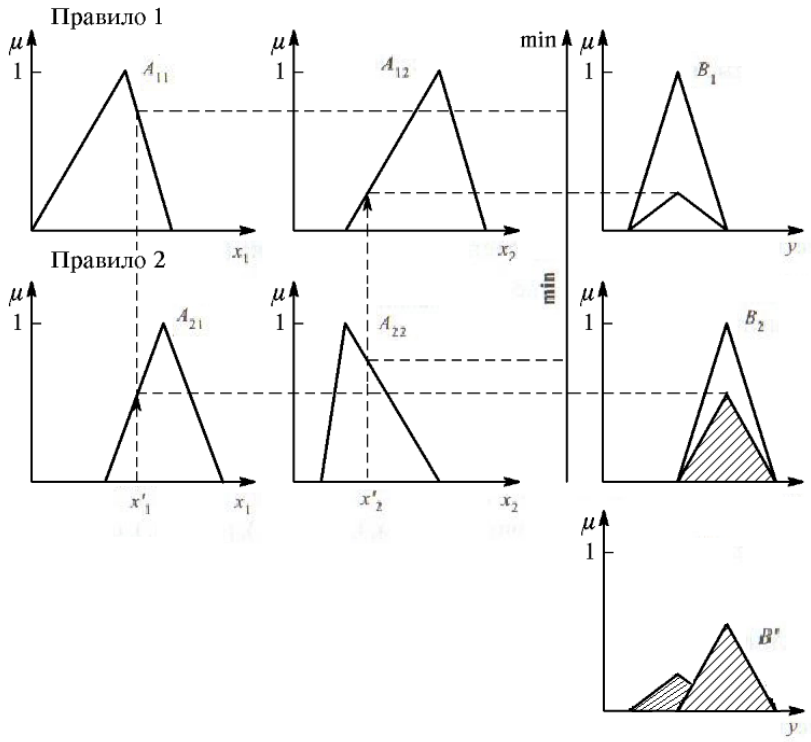


Рис. 7.21. Виконання алгоритму нечіткого виводу Ларсена.

7.2.3. Алгоритм нечіткого виводу Цукамото

При виконанні нечіткого виводу на основі алгоритму Цукамото (*Tsukamoto*) використовуються наступні компоненти нечіткої продукційної моделі:

1. База нечітких продукційних правил формується на основі правил типу:

$$\text{П}_i\text{: ЯКЩО } x_1 \in A_{i1} \text{ І ... І } x_j \in A_{ij} \text{ І ... І } x_m \in A_{im}$$

$$\text{ТОДІ } y = f_i^{-1}(\alpha_i),\ i = 1, \ldots, n.$$

Припустимо, база нечітких продукційних правил з *MISO*-структурою (з двома входами та одним виходом) складається з двох правил:

$$\text{П}_1\text{: ЯКЩО } x_1 \in A_{11} \text{ І } x_2 \in A_{12} \text{ ТОДІ } y = f_1^{-1}(\alpha_1);$$

$$\text{П}_2\text{: ЯКЩО } x_1 \in A_{21} \text{ І } x_2 \in A_{22} \text{ ТОДІ } y = f_2^{-1}(\alpha_2).$$

де f_1, f_2 – монотонні функції.

На рис. 7.22 показано приклад виконання алгоритму Цукамото.

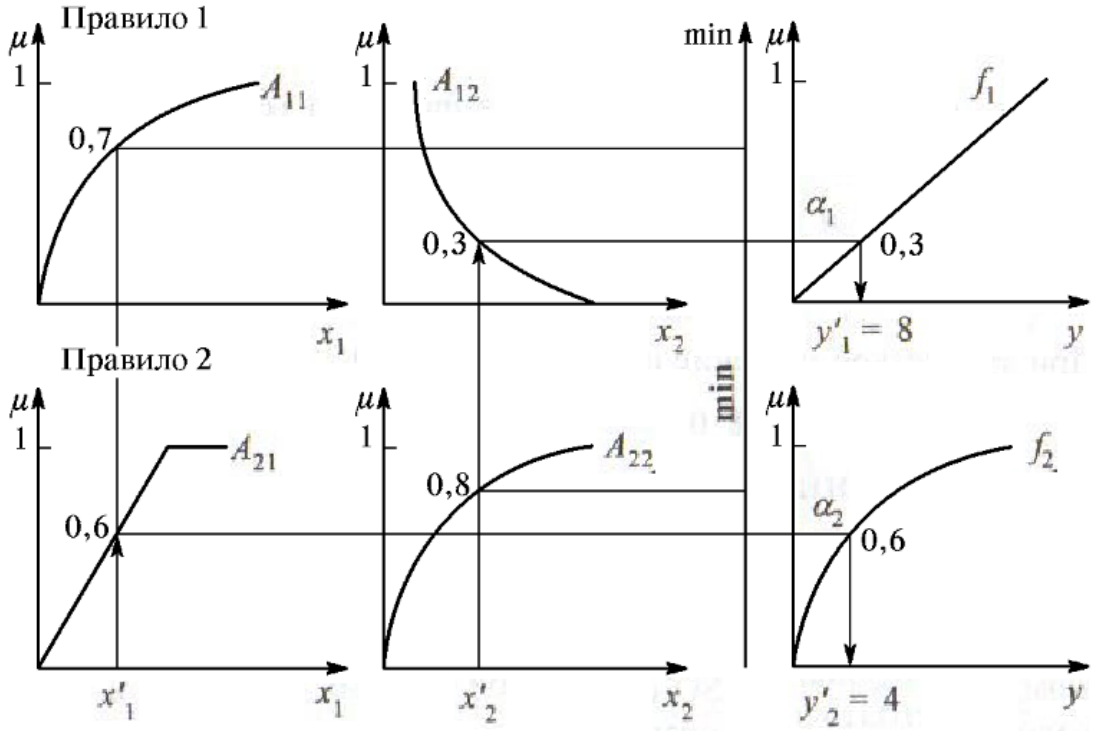


Рис. 7.22. Виконання алгоритму нечіткого виводу Цукамото.

Етапи виконання алгоритму нечіткого виводу Цукамото

***Етап* 1.** Введення нечіткості (аналогічно до алгоритму Мамдані).

***Етап* 2.** Агрегування ступенів істинності посилів за кожним із правил α_1 та α_2 (аналогічно до алгоритму Мамдані).

***Етап* 3.** Активізація наслідків за кожним із правил:

$$y_1' = f_1^{-1}(\alpha_1), \;\; y_2' = f_2^{-1}(\alpha_2).$$

У результаті є чіткі значення вихідних змінних по кожному із наслідків правил.

***Етап* 4.** Етап акумулювання активізованих наслідків правил у цьому алгоритмі відсутня внаслідок чітких значень вихідних змінних.

***Етап* 5.** У якості методу дефузифікації в алгоритмі Цукамото використовується різновид методу «центру ваги»:

$$y' = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i^{-1}(\alpha_i)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

Це у свою чергу дозволяє здійснити приведення до чіткості вихідної змінної без попереднього акумулювання активізованих наслідків окремих правил:

$$y' = \frac{\alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2'}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

7.2.4. Алгоритм нечіткого виводу Такагі-Сугено

При виконанні нечіткого виводу на основі алгоритму Такагі-Сугено (*Takagi-Sugeno*) використовуються наступні компоненти нечіткої продукційної моделі:

1. База нечітких продукційних правил формується на основі правил типу:

$П_i$: ЯКЩО $x_1 \in A_{i1}$ І ... І $x_j \in A_{ij}$ І ... І $x_m \in A_{im}$

ТОДІ $y = c_{i1}x_1 + \ldots + c_{ij}x_j + \ldots + c_{im}x_m + c_{i0}$, $i = 1, \ldots, n$.

Припустимо, база нечітких продукційних правил з *MISO*-структурою (з двома входами та одним виходом) складається з двох правил:

$П_1$: ЯКЩО $x_1 \in A_{11}$ І $x_2 \in A_{12}$ ТОДІ $y = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{10}$;

$П_2$: ЯКЩО $x_1 \in A_{21}$ І $x_2 \in A_{22}$ ТОДІ $y = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{20}$.

де c_{ij} (i, j = 1, 2) – коефіцієнти компонентів вектору; c_{i0} – зсув.

2. Нечітка імплікація – операція min-кон'юнкції.

На рис. 7.23 показаний приклад виконання алгоритму нечіткого виводу Такагі-Сугено для описаного прикладу.

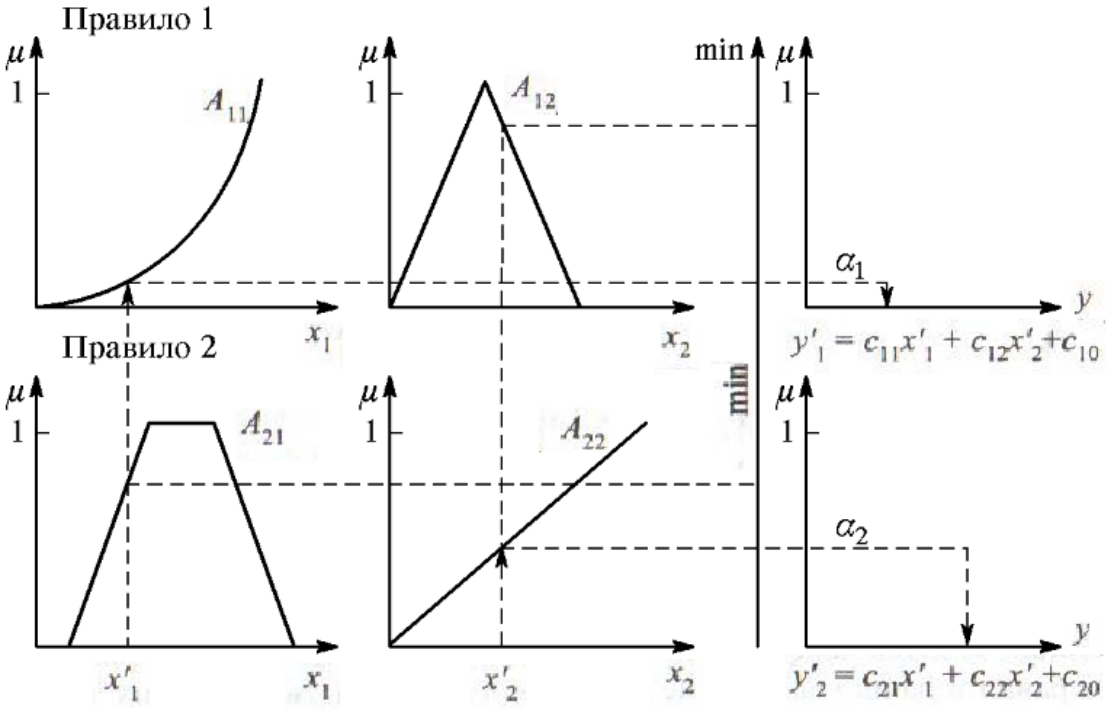


Рис. 7.23. Виконання алгоритму нечіткого виводу Такагі-Сугено.

Етапи виконання алгоритму нечіткого виводу Такагі-Сугено:

***Етап* 1.** Введення нечіткості (аналогічно до алгоритму Мамдані).

***Етап* 2.** Агрегування ступенів істинності передумов за кожним із правил (аналогічно до алгоритму Мамдані). Для описаного прикладу:

$$\alpha_1 = \min\{\mu_{A_{11}}(x'_1), \mu_{A_{12}}(x'_2)\};$$

$$\alpha_2 = \min\{\mu_{A_{21}}(x'_1), \mu_{A_{22}}(x'_2)\}.$$

***Етап* 3.** Активізація наслідків за кожним із правил:

$$y'_1 = c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + c_{10},$$

$$y'_2 = c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + c_{20}.$$

У результаті є чіткі значення вихідних змінних по кожному із наслідків правил.

***Етап* 4.** Етап акумулювання активізованих наслідків правил у цьому алгоритмі відсутня внаслідок чітких значень вихідних змінних.

***Етап* 5.** У якості методу дефузифікації в даному алгоритмі використовується різновид методу «центру ваги»:

$$y' = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j}^{m} c_{ij}\, x_j + c_{i0} \right)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

Це у свою чергу дозволяє здійснити приведення до чіткості вихідної змінної без попереднього акумулювання активізованих наслідків окремих правил:

$$y' = \frac{\alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2'}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Приклад 7.8.

Нехай задана нечітка база правил:

Якщо x = низький, тоді $y = 3 \cdot x$;

Якщо x = високий, тоді $y = 3 - x$.

Функції приналежності термів задані наступними виразами:

$$\mu_{\text{низький}}(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{0{,}18} \right) \text{ та } \mu_{\text{високий}}(x) = \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{0{,}18} \right),\ x \in [0, 1]$$

За нечіткою базою правил виконаємо нечіткий логічний вивід Такагі-Сугено при значенні вхідної змінної x = 0,4. Виконання нечіткого логічного виводу при даному значенні вхідної змінної показано на наступних рис.7.24.

Дефузифікація проводилася методом «центру ваги» (зваженого середнього). На рис. 7.25 показано залежність «вхід-вихід» для наведеної вище нечіткої бази правил. Ділянки графіка, що відповідають першому та другому правилу бази правил позначені відповідно #1 та #2.

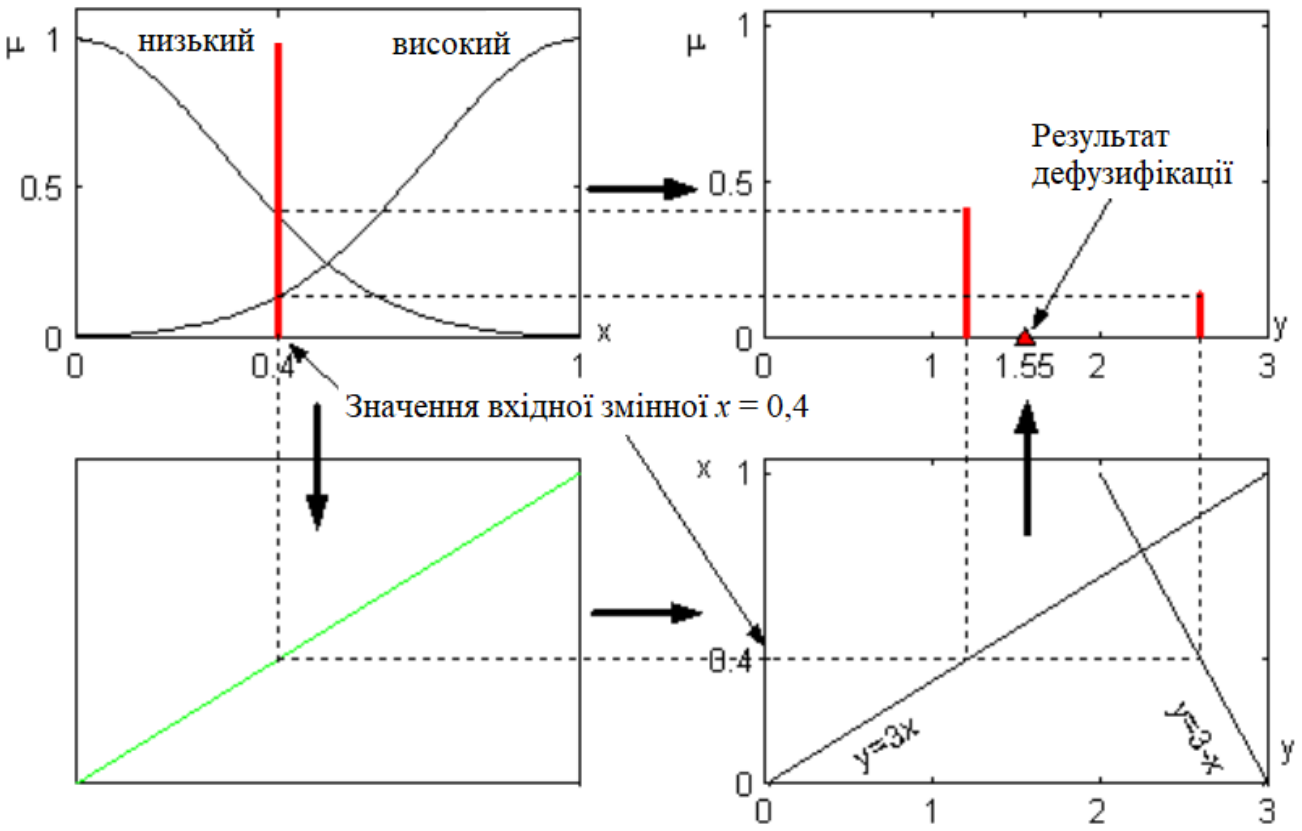


Рис. 7.24. Виконання нечіткого виводу Такагі-Сугено при x = 0,4.

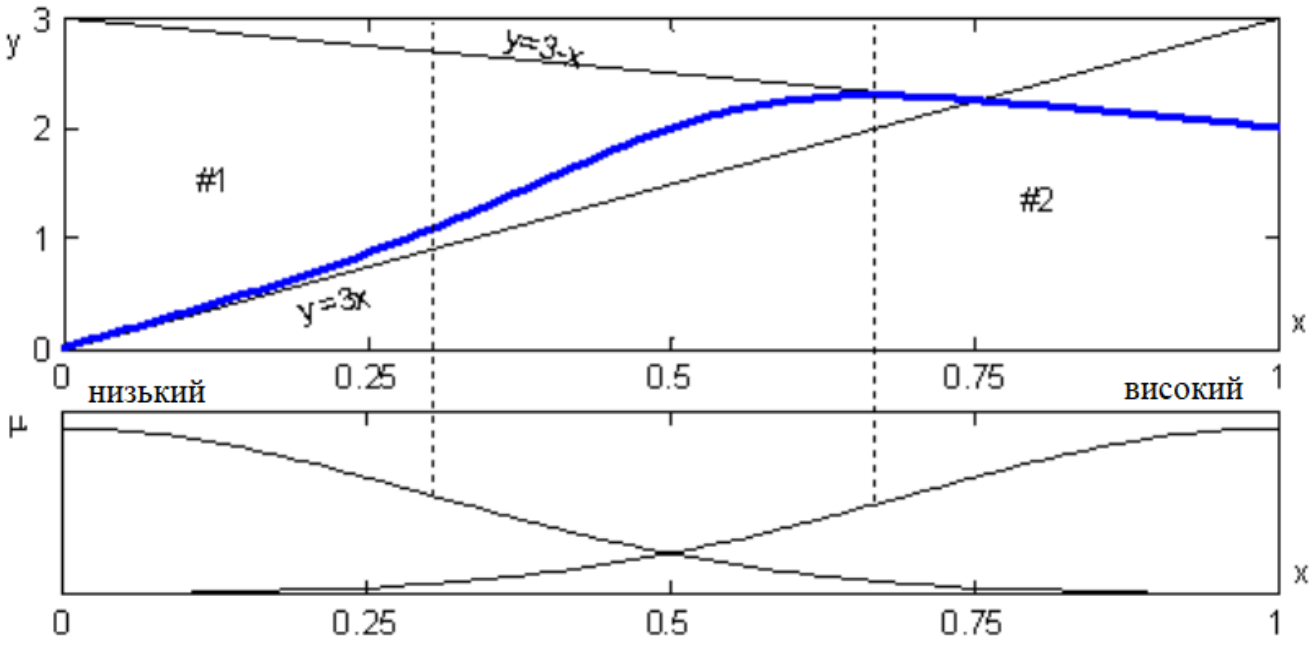


Рис. 7.25. Залежність «вхід-вихід».

Приклад 7.9

Розглянемо роботу алгоритму Такагі-Сугено з двома правилами:

$П_1$: ЯКЩО x_1 = «велике» І x_2 = «середнє» ТОДІ $y_1 = 2 + 7x_1 + 3x_2$;

$П_2$: ЯКЩО x_1 = «мале» І x_2 = «мале» ТОДІ $y_2 = -2x_1 + 5x_2$.

Визначимо вихідний сигнал y, який буде отримано в результаті роботи алгоритму Такагі-Сугено при наступних значеннях вхідних змінних $x_1 = 2$ і $x_2 = 3$. З урахуванням графіків функцій приналежності термів, які зображені на наступному рис. 7.26.

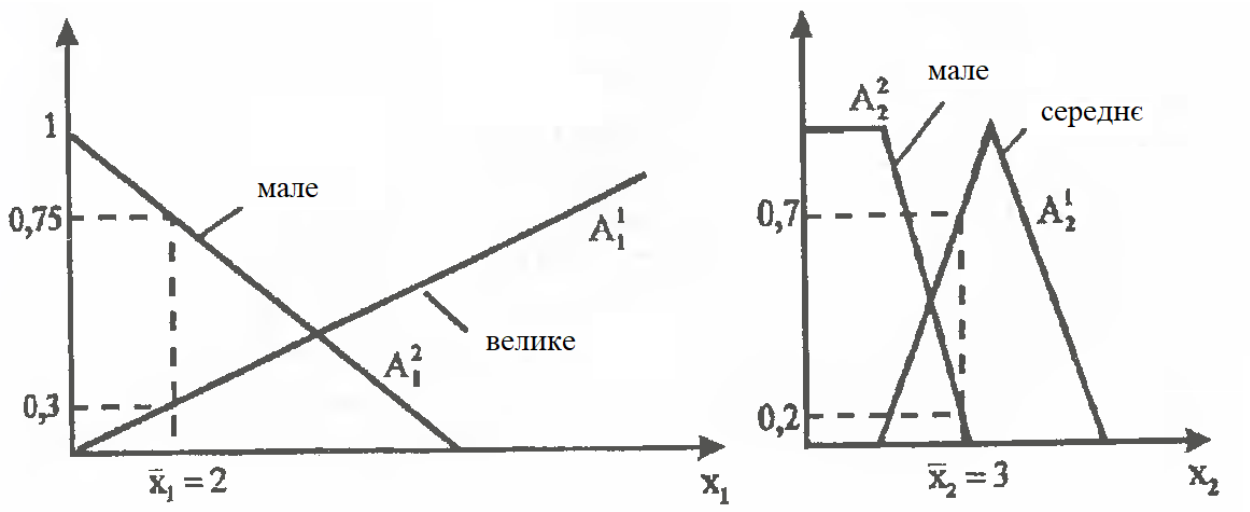


Рис. 7.26. Результаті роботи алгоритму Такагі-Сугено при $x_1 = 2$ і $x_2 = 3$.

Отримаємо:

$$\mu_{A_1^1}(2) = 0{,}3;$$

$$\mu_{A_2^1}(3) = 0{,}7;$$

$$\mu_{A_1^2}(2) = 0{,}75;$$

$$\mu_{A_2^2}(3) = 0{,}2.$$

Якщо прийняти, що значення W^k (k = 1, 2) розраховуються за допомогою операції min, то маємо

$$\min(0{,}3;\ 0{,}7) = 0{,}3;$$

$$\min(0{,}75;\ 0{,}2) = 0{,}2.$$

Крім того,

$$y_1 = f_1(2, 3) = 7;$$

$$y_2 = f_2(2, 3) = 11.$$

Розрахуємо вихідне значення алгоритму нечіткого виводу:

$$y' = \frac{\alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2'}{\alpha_1 + \alpha_2} = 8{,}6.$$

7.2.5. Спрощений алгоритм нечіткого виводу

При виконанні нечіткого виводу на основі спрощеного алгоритму (алгоритм Сугено 0-го порядку) використовуються наступні компоненти нечіткої продукційної моделі:

1. База нечітких продукційних правил формується на основі правил типу:

$П_i$: ЯКЩО $x_1 \in A_{i1}$ І ... І $x_j \in A_{ij}$ І ... І $x_m \in A_{im}$ ТОДІ $y = c_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Припустимо, база нечітких продукційних правил з *MISO*-структурою (з двома входами та одним виходом) складається з двох правил:

$П_1$: ЯКЩО $x_1 \in A_{11}$ І $x_2 \in A_{12}$ ТОДІ $y = c_1$;

$П_2$: ЯКЩО $x_1 \in A_{21}$ І $x_2 \in A_{22}$ ТОДІ $y = c_2$.

де c_i - зсув.

2. Нечітка імплікація – операція min-кон'юнкції

На рис.7.27 показаний приклад виконання спрощеного алгоритму нечіткого виводу для описаного прикладу.

Етапи виконання спрощеного алгоритму нечіткого виводу:

***Етап* 1.** Введення нечіткості (аналогічно до алгоритму Мамдані).

***Етап* 2.** Агрегування ступенів істинності передумов за кожним із правил (аналогічно до алгоритму Мамдані). Для описаного прикладу:

$$\alpha_1 = \min\{\mu_{A_{11}}(x_1'), \mu_{A_{12}}(x_2')\};$$

$$\alpha_2 = \min\{\mu_{A_{21}}(x_1'), \mu_{A_{22}}(x_2')\}.$$

***Етап* 3.** Активізація наслідків за кожним із правил:

$$y_1' = c_1, \; y_2' = c_2.$$

У результаті є чіткі значення вихідних змінних по кожному із наслідків правил.

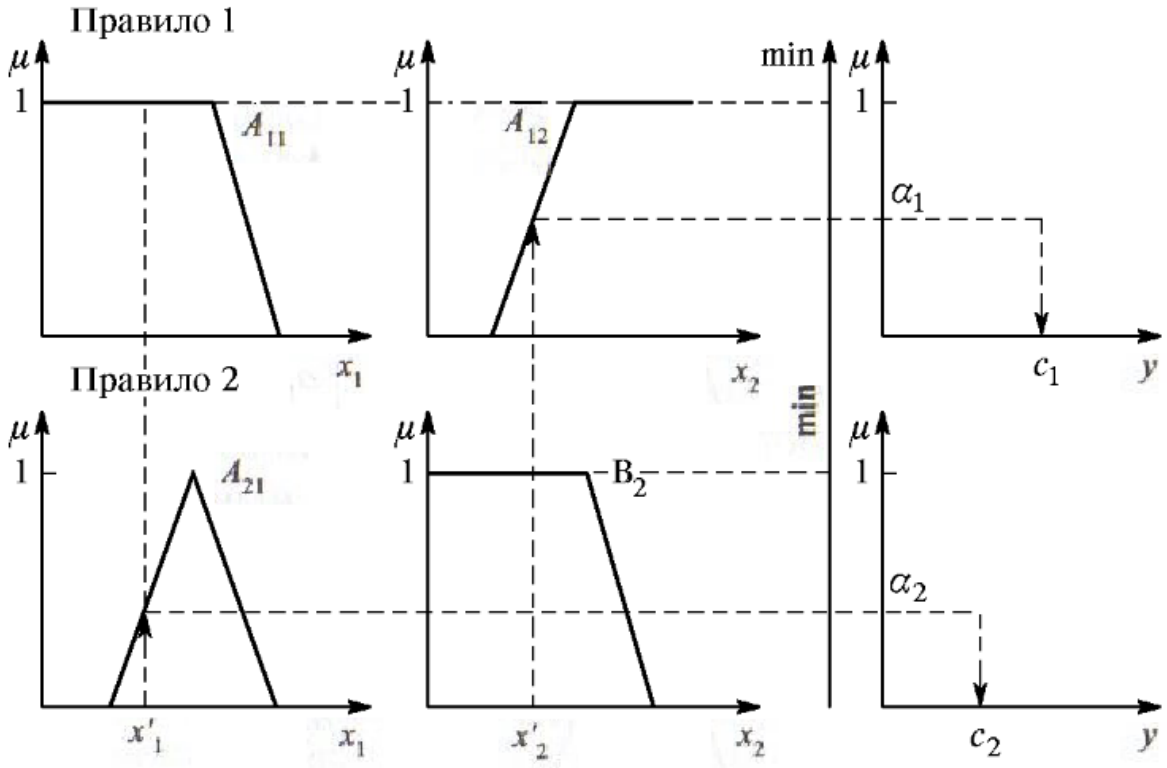


Рис. 7.27. Виконання спрощеного алгоритму нечіткого виводу.

***Етап* 4.** Етап акумулювання активізованих наслідків правил у цьому алгоритмі відсутня внаслідок чітких значень вихідних змінних.

***Етап* 5.** У якості методу дефузифікації в даному алгоритмі використовується різновид методу «центру ваги»:

$$y' = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot c_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i},$$

що дозволяє здійснити приведення до чіткості вихідної змінної без попереднього акумулювання активізованих висновків окремих правил:

$$y' = \frac{\alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Контрольні запитання:

1. Які компоненти входять до типової структури системи нечіткого виводу?
2. Які особливості необхідно враховувати при формуванні бази правил та з чого складається кожне правило у лінгвістичній моделі?
3. В чому принципова різниця між типами структур бази нечітких продукційних правил (*SISO*-, *MISO*-, *MIMO*-структур)?
4. Які існують методи фузифікації вхідних змінних та в чому особливості їх застосування?
5. Які існують методи дефузифікації вихідних змінних та в чому особливості їх застосування?
6. В чому особливості застосування алгоритму нечіткого виводу Мамдані?
7. В чому ключова відмінність між алгоритмами нечіткого виводу Ларсена та Мамдані?
8. В чому ключова відмінність між алгоритмами нечіткого виводу Цукамото та Мамдані?
9. В чому ключова відмінність між алгоритмами нечіткого виводу Такагі-Сугено та Мамдані?
10. В чому ключова відмінність між спрощеним алгоритмом нечіткого виводу та алгоритмом Такагі-Сугено?

РОЗДІЛ 8

НЕЧІТКА КЛАСТЕРИЗАЦІЯ

8.1. Введення у нечітку кластеризацію

Терміном **кластерний аналіз** прийнято позначати сукупність методів, підходів і процедур, розроблених для вирішення проблеми формування однорідних класів в довільній проблемній області.

Методи аналізу даних, складовою частиною яких є методи кластерного аналізу, не використовують апріорних припущень про імовірнісну природу вихідної інформації і керуються лише евристичними міркуваннями про характер і особливості досліджуваної сукупності об’єктів.

Кластерний аналіз (або автоматична класифікація, розпізнавання образів без вчителя) займає одне з центральних місць серед методів аналізу даних і є сукупністю підходів, методів і алгоритмів, призначених для знаходження деякого розбиття досліджуваної сукупності об’єктів на підмножини схожих між собою об’єктів. При цьому вихідним припущенням для виділення таких підмножин, що отримали спеціальну назву кластерів, служить лише неформальне припущення про те, що об’єкти, які відносяться до одного кластера, повинні мати більшу схожість між собою, чим з об’єктами з інших кластерів.

У даній лекції розглядаються методи кластеризації для об'єктів з кількісними ознаками: алгоритми чітких та нечітких середніх та алгоритм гірської кластеризації. Наприкінці лекції показується, як використовувати результати кластеризації для синтезу нечітких баз знань.

Вихідною інформацією для кластеризації є матриця спостережень:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{M1} & \cdots & x_{Mn} \end{bmatrix},$$

кожен рядок якої є значення n ознак одного з M об'єктів кластеризації. Кластеризація полягає у розбитті об'єктів з $\boldsymbol{X}$ на кілька підмножин (кластерів), у яких об'єкти між собою більш схожі, ніж з об'єктами із інших кластерів. У метричному просторі схожість зазвичай визначають через відстань. Відстань може розраховуватися як між вихідними об'єктами – рядками матриці $\boldsymbol{X}$, так і від цих об'єктів до прототипів центрів кластерів. Найчастіше координати прототипів наперед невідомі, їх знаходять одночасно з розбиттям даних на кластери.

Кластерний аналіз (кластеризація) – це технологія, що дозволяє розподілити вхідні дані на класи – групи однотипних екземплярів вибірки, або кластери – компактні області групування екземплярів вибірки у просторі ознак. Вихідною інформацією для кластеризації є вибірка спостережень $x=\{x^s_j\}$, де x^s_j – значення j-ої ознаки s-го екземпляра вибірки, $s = 1, 2, \ldots, S$; $j=1, 2, \ldots, N$, S – кількість екземплярів вибірки, N – кількість ознак, що характеризують екземпляри вибірки.

Задача кластеризації полягає в розбитті об’єктів з x на декілька кластерів, у яких об’єкти більш схожі між собою, ніж з об’єктами інших кластерів. У метричному просторі «схожість» звичайно визначають через відстань.

Концептуальний взаємозв’язок між кластерним аналізом і теорією нечітких множин заснована на тій обставині, що при вирішенні завдань структуризації складних систем більшість формованих класів об’єктів розмиті за своєю природою. Ця розмитість полягає в тому, що перехід від приналежності до неприналежності елементів до даних класів швидше поступовий, чим стрибкоподібний. Тому найбільш адекватну відповідь в подібного роду випадках слід шукати не на питання: “Чи належить даний елемент тому або іншому класу?”, а на питання: “У якій мірі даний елемент належить даному класу?”.

Вимога знаходження однозначної кластеризації елементів досліджуваної проблемної області є досить грубою і жорсткою, особливо при рішенні задач системного аналізу, що слабо структуруються. Методи нечіткої кластеризації

послабляють цю вимогу. Послаблення вимоги здійснюється за рахунок введення в розгляд нечітких кластерів і відповідних їм функцій приналежності, що набувають значень з інтервалу [0, 1].

В загальному випадку завданням нечіткої кластеризації є знаходження нечіткого розбиття множини елементів досліджуваної сукупності, які утворюють структуру нечітких кластерів, присутніх у вхідних даних. Це завдання зводиться до знаходження мір приналежності елементів універсуму шуканим нечітким кластерам, які в сукупності і визначають нечітке розбиття вихідної множини елементів.

Існує безліч методів кластеризації, які можна класифікувати на чіткі та нечіткі. Чіткі методи кластеризації розбивають вихідну множину об'єктів $\boldsymbol{X}$ на кілька підмножин, що не перетинаються. При цьому будь-який об'єкт із $\boldsymbol{X}$ належить лише одному кластеру. Нечіткі методи кластеризації дозволяють одному й тому ж об'єкту одночасно належати кількома, і навіть усім кластерам, але з різними ступенями. Нечітка кластеризація у багатьох ситуаціях «природніша», ніж чітка, наприклад, для об'єктів, розташованих на межі кластерів. Проілюструємо цю тезу на добре відомому в теорії кластеризації прикладі – «метелика».

Приклад 8.1.

«Метелик» представляє собою 15 об'єктів, двовимірне зображення яких нагадує однойменну комаху як показано на рис. 8.1.

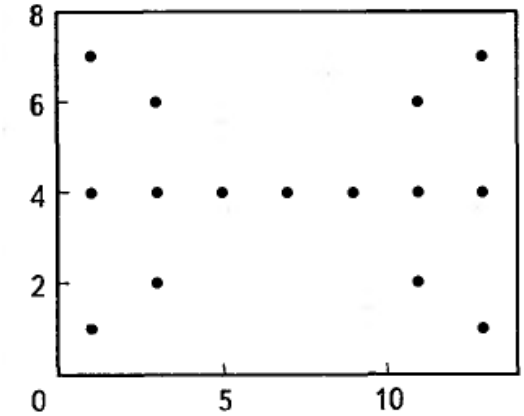


Рис. 8.1. Двовимірне зображення «Метелик».

При чіткій кластеризації виходять два кластери з семи та восьми об'єктів, як показано на наступному рис. 8.2.

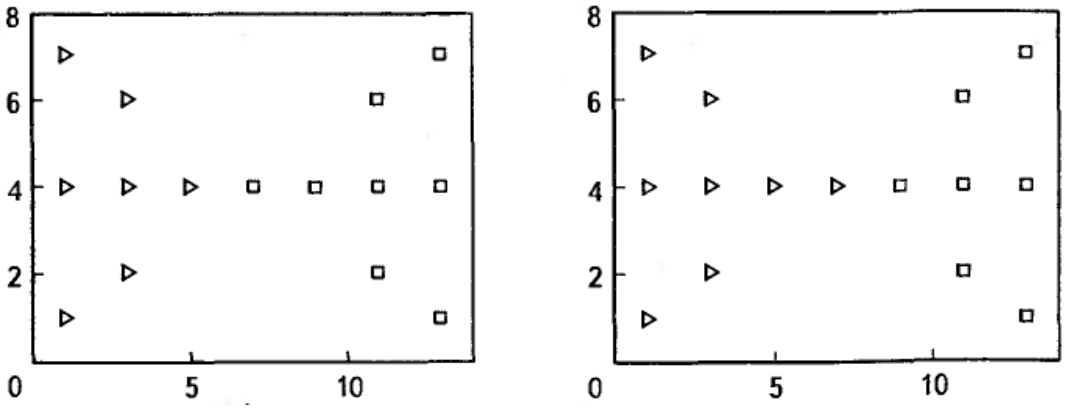


Рис. 8.2. Чітка кластеризація на два кластери.

На рис. 8.2 об'єкти першого кластера позначені трикутниками, а другого – квадратами. Симетричний «метелик» при чіткій кластеризації розбивається на два несиметричні кластери.

При нечіткій кластеризації проблемний восьмий об'єкт, розташований у центрі «метелика», та одночасно належить двом симетричним кластерам з одним і тим же ступенем. На рис. 8.3 розмір маркерів пропорційний до ступеня належності об'єкта кластеру.

Рис. 8.3. Нечітка кластеризація на два кластери.

Методи кластеризації також класифікуються за тим, чи визначено кількість кластерів заздалегідь чи ні. У разі коли кількість кластерів невідома вона знаходяться по розподілу вхідних даних під час виконання алгоритму.

Далі розглянемо алгоритми *c*-середніх, що розбивають дані на заздалегідь задану кількість кластерів, та опишемо алгоритм гірської кластеризації, який не вимагає задачі кількості кластерів.

8.2. Нечіткий кластерний аналіз

Нечіткий кластерний аналіз використовується при побудові нейро-нечітких систем для визначення нечітких множин, якщо вони невідомі апріорі. Нечіткі множини знаходяться як проекції кластерів на кожну розмірність. Можливо поєднувати апріорні знання з кластерним аналізом, використовуючи його для уточнення параметрів функції приналежності. Недоліком такого методу визначення нечітких множин є складність їхньої інтерпретації.

Більшість методів нечіткої кластеризації спрямовані на мінімізацію суми:

$$J(x,u,C)=\sum_{s=1}^{S}\sum_{v=1}^{V}\left((u_v^s)^m d^2(x^s,C^v)\right)$$

при виконанні умов:

$$V>1;\sum_{s=1}^{S}u_v^s>0;\sum_{v=1}^{V}u_v^s=1,$$

де S – кількість екземплярів; N – кількість параметрів, що описують один екземпляр (або кластер); V – кількість кластерів; $x=(x^1, x^2, ..., x^S)^T$ – це матриця входів для екземплярів навчаючої вибірки; $x^s = (x^s_1, x^s_2, ..., x^s_N)$ – входи s-го екземпляра; s=1, 2,..., S; $u = (u^1, u^2, ..., u^S)^T$ – матриця приналежностей екземплярів до кожного з кластерів; $u^s = (u^s_1, u^s_2, ..., u^s_V)$ – вектор приналежностей s-го екземпляра до кожного з кластерів; u^s_v [0,1], $C = (C^1,C^2, ...,C^V)^T$ – матриця центрів кластерів;

$C^v = (C^v_1, C^v_2, \ldots, C^v_N)$ – центр v-го кластера; $v = 1, 2, \ldots, V$, $m > 1$ – ступінь нечіткості отриманого розподілу (зазвичай обирається рівним 2); $d(x^s, C^v)$ – відстань між s-м екземпляром та центром v-го кластера.

Координати центрів кластерів визначають за формулою:

$$C_j^v = \frac{\sum_{s=1}^{S} (u_v^s)^m x_j^s}{\sum_{s=1}^{S} (u_v^s)^m}.$$

Найбільш простим є метод, в якому відстань між екземпляром та кластером знаходиться як **евклідова відстань**:

$$d(x^s, C^v) = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} (x_j^s - C_j^v)^2}.$$

Такий метод шукає кластери як сфери однакового розміру.

Більш складні методи кластеризації шукають кластери як гіпереліпсоїди різного розміру. Такі методи називають **частковими**, вони не можуть вірно опрацьовувати шуми та викиди і віднаходити кластери з неопуклими поверхнями. Для проведення кластерного аналізу за допомогою часткового методу необхідно задати його параметри: діапазон значень змінних, кількість кластерів для кожної із змінних (або їх ширину), функцію приналежності, що описує кластери та інші параметри в залежності від обраного методу кластеризації.

За допомогою **ієрархічних методів** можна віднайти кластери, об'єднуючи менші кластери та розподіляючи більші. Таким чином знаходиться дерево кластерів, на різних рівнях якого можна отримати різне розподілення на кластери.

Щільнісні методи та **сіткові методи** дозволяють розподіляти на кластери різного розміру довільно розподілені екземпляри. Вони також добре впізнають шуми та викиди, але потребують ретельного вибору параметрів, необхідних для реалізації методу.

Множину ознак у об'єктів кластеризації слід вибирати так, щоб всі значення ознак були виміряні в **шкалі відношень** або **шкалі інтервалів**. У цьому випадку

результати нечіткої кластеризації мають змістовну інтерпретацію, адекватну проблемі знаходження нечітких кластерів.

Інтервальна шкала. В процесі вимірювання ознаці об’єкту ставиться у відповідність, як правило, деяке дійсне число, що дорівнює значенню цієї ознаки. Допустимим перетворенням в шкалах інтервалів є довільна лінійно зростаюча функція між двома множинами значень ознак. Характерною властивістю цієї шкали є відсутність абсолютного нуля. Приклад ознаки, які можна виміряти в інтервальній шкалі: температура в шкалах Цельсія і Фаренгейта.

Шкала відношень. В процесі вимірювання ознаці об'єкту ставиться у відповідність також деяке дійсне число, що дорівнює значенню цієї ознаки. Допустимим перетворенням в шкалах відношень є довільна лінійно зростаюча функція, що проходить через нуль. Характерною властивістю цієї шкали є наявність абсолютного нуля. Приклади ознак, які можна виміряти в шкалі відношень: відстань в метрах, маса в кілограмах або швидкість в км/год.

8.3. Алгоритми нечіткої кластеризації

8.3.1. Кластеризація алгоритмом c-середніх (FCM – Fuzzy c-means)

Розглянемо ключові ідеї чіткої кластеризації алгоритмом *c*-середніх, базовий нечіткий алгоритм *c*-середніх та основні шляхи поліпшення нечіткої кластеризації.

8.3.1.1. Чітка кластеризація алгоритмом c-середніх

При кластеризації алгоритмом *c*-середніх безліч X розбивається на підмножини A_i, $i = 1,\ldots, c$ із наступними властивостями:

$$\bigcup_{i=\overline{1,c}} A_i = X;$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset;\ \ i,j = \overline{1,c};\ \ i \neq j;$$

$$\emptyset \subset A_i \subset X;\ i = \overline{1,c}.$$

Ці умови вказують, що всі об'єкти мають бути розподілені за кластерами. При цьому кожен об'єкт повинен належати лише одному кластеру і жоден із кластерів не може бути порожнім або містити всі об'єкти. Кількість кластерів $c \in \{2, 3,..., M-1\}$ задається на початок роботи алгоритму.

Завдання кластеризації зручно формулювати, використовуючи характеристичну функцію. Характеристична функція набуває значення 0, якщо елемент не належить кластеру, і 1, якщо елемент належить кластеру. З використанням характеристичної функції кластери описуються наступною матрицею розбиття:

$$\boldsymbol{U} = [\varphi_{ki}], \varphi_{ki} \in \{0,1\}, k = \overline{1,M}, i = \overline{1,c},$$

де k-й рядок матриці $\boldsymbol{U}$ вказує на приналежність об'єкта X_k =(x_{k1}, x_{k2}, …, x_{kn},) кластерам A_1, A_2, …, A_c.

Матриця $\boldsymbol{U}$ повинна мати такі властивості:

$$\sum_{i=\overline{1,c}} \varphi_{ki} = 1, k = \overline{1,M};$$

$$0 < \sum_{k=\overline{1,M}} \varphi_{ki} < M, i = \overline{1,c}.$$

Для оцінки якості розбиття використовують критерій розкидання, що показує суму відстаней від об'єктів до центру свого кластера. Для евклідового простору цей критерій має наступний вигляд:

$$\sum_{i=\overline{1,c}} \sum_{X_k \in \Lambda_i} \|V_i - X_k\|^2,$$

де $A_i = \{X_p : \varphi_{pi} = 1, p = \overline{1,M}\}$ – i-й кластер;

$V_i = \frac{1}{|A_i|} \sum_{X_k \in \Lambda_i} X_k$ – центр i-го кластеру;

$|A_i|$ – кількість об’єктів кластера A_i.

Кластеризацію об'єктів $\boldsymbol{X}$ можна сформулювати як наступне завдання оптимізації: знайти матрицю $\boldsymbol{U}$, що мінімізує значення критерію:

$$\sum_{i=\overline{1,c}} \sum_{X_k \in \Lambda_i} \|V_i - X_k\|^2.$$

Дискретний характер чіткого розбиття зумовлює негладкість цільової функції, що ускладнює пошук оптимальної кластеризації.

8.3.1.2. Базовий алгоритм нечітких с-середніх

Нечіткі кластери опишемо наступною матрицею нечіткого розбиття:

$$\boldsymbol{F} = [\mu_{ki}], \mu_{ki} \in \{0,1\}, k = \overline{1,M}, i = \overline{1,c},$$

у якій k-й рядок містить ступень приналежності об'єкта X_k =(x_{k1}, x_{k2}, …, x_{kn},) кластерам $A_1, A_2, \ldots, A_c$. Єдиною відмінністю матриць $\boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{U}$ є те, що при нечіткому розбитті ступінь належності об'єкта до кластера набуває значень з інтервалу [0, 1], а при чіткому — з двоелементної множини $\{0, 1\}$.

Властивості матриці нечіткого розбиття записуються наступним чином:

$$\sum_{i=\overline{1,c}} \mu_{ki} = 1, k = \overline{1,M};$$

$$0 < \sum_{k=\overline{1,M}} \mu_{ki} < M, i = \overline{1,c}.$$

Нечітке розбиття дозволяє просто вирішити проблему об'єктів, розташованих на межі двох кластерів - їм призначають однакові ступені приналежності, наприклад, по 0.5. Недолік нечіткого розбиття проявляється під час роботи з об'єктами, що віддалені від центрів усіх кластерів. Віддалені об'єкти мають мало спільного з будь-яким із кластерів, тому інтуїтивно хочеться призначити їм малі ступені приналежності. Однак за вказаною умовою сума ступенів приналежності дорівнює одиниці, як у віддалених, так і у близьких до центрів кластерів об'єктів. Для усунення цього недоліку можна використовувати можливісне розбиття, при якому довільний об'єкт з $\boldsymbol{X}$ повинен належати хоча б одному кластеру. Для цього послаблюють умову таким чином:

$$\exists i: \mu_{ki} > 0, \forall k.$$

Для оцінки якості нечіткого розбиття використовується наступний критерій розкидання:

$$\sum_{i=\overline{1,c}} \sum_{k=\overline{1,M}} (\mu_{ki})^m \|V_i - X_k\|^2,$$

$$V_i = \frac{\sum_{k=\overline{1,M}} (\mu_{ki})^m X_k}{\sum_{k=\overline{1,M}} (\mu_{ki})^m},$$

де V_i – центри нечітких кластерів; $m \in (1, \infty)$ – експоненційна вага.

Найбільш відомий і часто застосовуваний метод мінімізації описаного критерію - алгоритм нечітких *c*-середніх. Він базується на методі невизначених множників Лагранжа. Алгоритм знаходить локальний оптимум, тому виконання його з різних початкових точок може призвести до різних результатів.

Алгоритм нечітких *c*-середніх:

Крок 1. Встановити параметри алгоритму: c – кількість кластерів; m – експоненційна вага; ε – параметр зупинки алгоритму.

Крок 2. Випадковим чином згенерувати матрицю нечіткого розбиття $\boldsymbol{F}$, що задовольняє умовам:

$$\sum_{i=\overline{1,c}} \mu_{ki} = 1, k = \overline{1, M};$$

$$0 < \sum_{k=\overline{1,M}} \mu_{ki} < M, i = \overline{1, c}.$$

Крок 3. Розрахувати центри кластерів за такою формулою:

$$V_i = \frac{\sum_{k=\overline{1,N}} (\mu_{ki})^m X_k}{\sum_{k=\overline{1,N}} (\mu_{ki})^m}, i = \overline{1, c}.$$

Крок 4. Розрахувати відстані між об'єктами з $\boldsymbol{X}$ та центрами кластерів:

$$D_{ki} = \sqrt{\|X_k - V_i\|^2}, k = \overline{1, M}, i = \overline{1, c}.$$

Крок 5. Перерахувати елементи матриці нечіткого розбиття для усіх $k = 1,\ldots, M$ та $i = 1,.., c$:

Якщо $D_{ki} > 0$, тоді:

$$\mu_{ki} = \frac{1}{\left(D_{ik}^2 \sum_{j=\overline{1,c}} \frac{1}{D_{jk}^2}\right)^{\frac{1}{m-1}}};$$

Якщо $D_{ki} = 0$, тоді:

$$D_{ki} = 0, \text{тоді } \mu_{ki} = \begin{cases} 1, \text{при } j = i, \ \ j = \overline{1,c}; \\ 0, \text{при } j \neq i, \ \ j = \overline{1,c}. \end{cases}$$

Крок 6. Перевірити умову $||F - F^*||^2 < \varepsilon$, де F^* – матриця нечіткого розбиття попередньої ітерації алгоритму. Якщо умова виконується, то перейти до кроку 7, інакше – до кроку 3.

Крок 7. Кінець.

Приклад 8.2.

Задамо дані, що описують двовимірне зображення «метелик» у табличному вигляді (рис. 8.4).

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
x_1	1	1	1	3	3	3	5	7	9	11	11	11	13	13	13
x_2	1	4	7	2	4	6	4	4	4	2	4	6	1	4	7

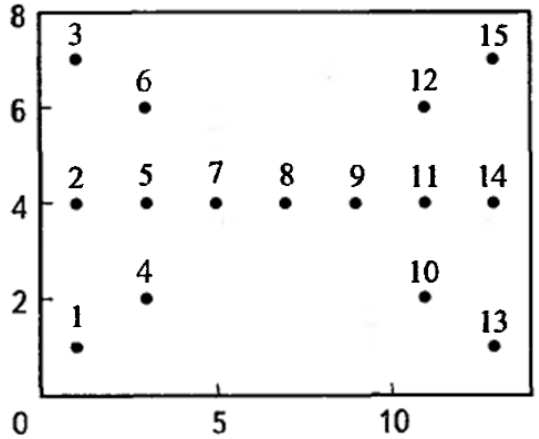


Рис. 8.4. Двовимірне зображення «Метелик» у табличному вигляді.

Необхідно виконати кластеризацію даних за алгоритмом нечітких *c*-середніх.

Встановимо такі параметри алгоритму: $c = 2$, $m = 2$, $\varepsilon = 10^{-5}$. Після восьми ітерацій отримаємо наступне нечітке розбиття:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
μ_{k1}	0,909	0,976	0,909	0,947	0,998	0,947	0,879	0,5	0,121	0,053	0,002	0,053	0,091	0,024	0,091
μ_{k2}	0,091	0,024	0,091	0,053	0,002	0,053	0,121	0,5	0,879	0,947	0,998	0,947	0,909	0,976	0,909

Значення критерію

$$\sum_{i=\overline{1,c}} \sum_{k=\overline{1,M}} (\mu_{ki})^m \|V_i - X_k\|^2,$$

при цьому нечіткому розбитті дорівнює 82,94.

Результати нечіткої кластеризації показано на рис. 8.5. При цьому розмір маркерів є пропорційним до ступеня належності об'єкта відповідному кластеру.

Рис. 8.5. Результат нечіткої кластеризації.

Тривимірні зображення нечітких кластерів наведено на рис. 8.6.

В алгоритмі нечітких *c*-середніх найважливішим параметром є кількість кластерів. Правильно вибрати кількість кластерів для реальних завдань без будь-якої апріорної інформації про структури даних досить складно. Існує два формальні підходи до вибору числа кластерів.

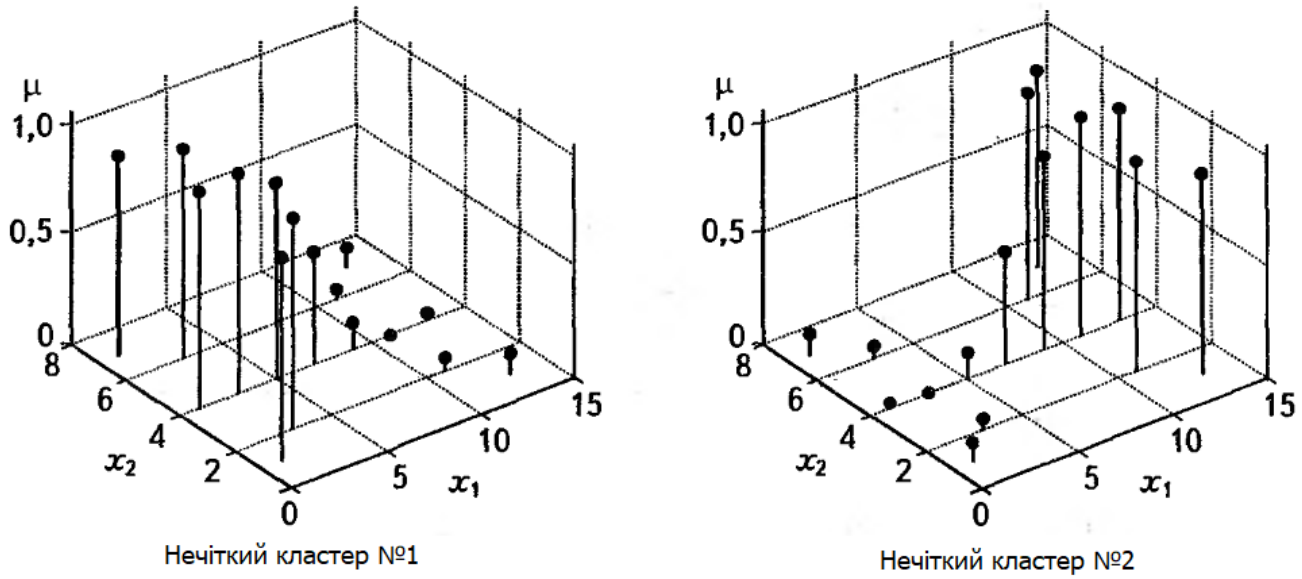


Рис. 8.6. Тривимірні зображення нечітких кластерів.

Перший підхід заснований на критерії компактності та відокремленості отриманих кластерів. Логічно припустити, що при правильному виборі кількості кластерів дані будуть розбиті на компактні і добре відокремлені один від одного групи. В іншому випадку кластери, ймовірно, не будуть компактними і добре відокремленими. Існує кілька критеріїв оцінки компактності кластерів, але питання проте, як формально та достовірно визначити правильність вибору кількості кластерів для довільного набору даних все ще залишається відкритим. Для алгоритму нечітких *c*-середніх рекомендується використовувати індекс Хеі-Beni, що має наступний вигляд:

$$\chi = \frac{\sum_{i=\overline{1,c}} \sum_{k=\overline{1,M}} (\mu_{ki})^m \|V_i - X_k\|^2}{M \min(\|V_i - X_k\|^2)}.$$

Другий підхід пропонує починати кластеризацію при досить великій кількості кластерів, а потім послідовно поєднувати схожі суміжні кластери. При цьому використовуються різні формальні критерії схожості кластерів.

Експоненційна вага (m) в алгоритмі нечітких середніх задає рівень нечіткості, розмазаності одержуваних кластерів. Чим більше m, тим нечітке розбиття розмазаніше. При $m \to \infty$ елементи матриці $\boldsymbol{F}$ наближаються до $1/c$,

отже, всі об'єкти будуть належати всім кластерам з тим самим ступенем. Експоненційна вага дозволяє при формуванні координат центрів кластерів посилити вплив об'єктів з великими ступенями приналежності та зменшити вплив об'єктів з малими ступенями приналежності. На сьогодні немає теоретично обґрунтованого правила вибору значення експоненційної ваги. Зазвичай її встановлюють $m = 2$.

8.3.1.3. Узагальнення алгоритму нечітких с-середніх

У базовому алгоритмі нечітких *с*-середніх відстань між об'єктом $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ і центром кластера $V = (v_1, v_2, ..., v_n)$ розраховується через стандартну евклідову норму: $D^2 = ||X - V||^2$. У кластерному аналізі застосовуються й інші норми, серед яких часто використовується діагональна норма і норма Махалонобіса. У загальному вигляді норму можна задати через симетричну позитивно визначену матрицю $\boldsymbol{B}$ розміром $n \times n$.

$$\|X - V\|_B^2 = (X - V)\boldsymbol{B}(X - V)^T,$$

де *Т*-операція транспонування.

Для евклідової норми матриця являє собою одиничну матрицю:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

При евклідовій нормі кластери виділяються у вигляді гіперсфер.

Для діагональної норми матриця $\boldsymbol{B}$ задається наступним чином:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \varpi_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \varpi_n \end{bmatrix}.$$

Елементи головної діагоналі матриці інтерпретуються як ваги координат. Діагональна норма дозволяє виділити кластери у вигляді гіпереліпсоїдів, орієнтованих уздовж координатних осей.

Для норми Махалонобіса матриця розраховується через коваріаційну матрицю $\boldsymbol{R}$ від X:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{R}^{-1'},$$

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{M} \sum_{k=\overline{1,M}} (X_k - \bar{X})^T (X_k - \bar{X}),$$

$$\bar{X} = \frac{1}{M} \sum_{k=\overline{1,M}} X_k,$$

де X - вектор середніх значень даних.

При нормі Махаланобіса кластери виходять у вигляді гіпереліпсоїдів, осі яких можуть бути орієнтовані в довільних напрямках.

Приклади ізоліній розглянутих норм показані на рис. 8.7.

Рис. 8.7. Приклади ізоліній гіпереліпсоїдів.

На рис. 8.8 наведено приклад кластеризації методом нечітких *c*-середніх при евклідовій відстані: зліва зображені об'єкти кластеризації; праворуч показані результати нечіткої кластеризації. Центри нечітких кластерів позначені символами "+". Вісім ізоліній функцій приналежності нечітких кластерів побудовано для значень 0,67; 0,71; 0,75; 0,79; 0,83; 0,87; 0,91 та 0,95.

Для деяких наборів даних "очна кластеризація" дозволяє виділити скупчення об'єктів у вигляді різних геометричних фігур: сфер, еліпсоїдів різної орієнтації, ланцюжків і т.п. У результаті кластеризації за алгоритмами з фіксованою нормою форма всіх кластерів виходить однаковою. Алгоритми кластеризації як би «нав'язують» даним непритаманну їм структуру, що призводить не тільки до неоптимальних, а часом і до принципово неправильних

результатів. Для усунення цього недоліку запропоновано кілька методів, серед яких виділимо алгоритм Густавсона-Кесселя (*Gustafson-Kessel*).

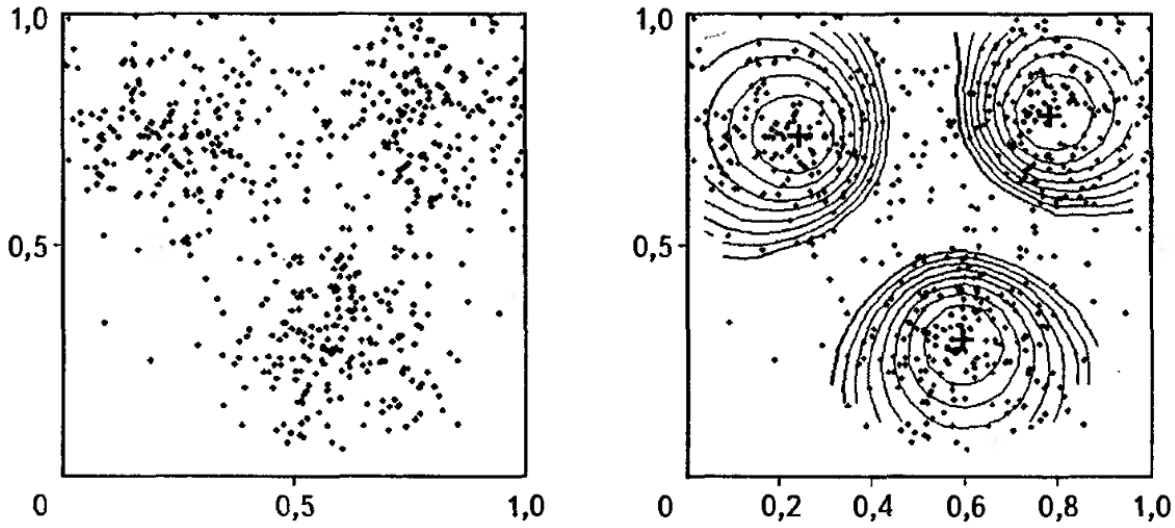


Рис. 8.8. Кластеризація методом нечітких *c*-середніх при евклідовій відстані.

Алгоритм Густавсона-Кесселя використовує адаптивну норму для кожного кластера, тобто для кожного *i*-го кластера існує своя норм-породжуюча матриця $\boldsymbol{B}_i$. По цьому алгоритму виділяються кластери різної геометричної форми, так як оптимізуються не тільки координати центрів кластерів і матриця нечіткого розбиття, але також і норм-породжуючі матриці. Критерій оптимальності

$$\sum_{i=\overline{1,c}} \sum_{k=\overline{1,M}} (\mu_{ki})^m \|V_i - X_k\|^2,$$

лінійний щодо $\boldsymbol{B}_i$, тому для отримання ненульових рішень вводяться деякі обмеження на норм-породжуючі матриці. В алгоритмі Густавсона-Кесселя це наступне обмеження на значення визначника норм-породжуючих матриць:

$$|B_i| = \beta_i, \;\; \beta_i > 0, \;\; i = \overline{1,c}.$$

Оптимальне рішення знаходять за допомогою методу невизначених множників Лагранжа. Алгоритм Густавсона-Кесселя має значно більшу обчислювальну трудомісткість у порівнянні з алгоритмом нечітких *c*-середніх.

8.3.2. Алгоритм кластеризації з можливостями (PCM – Probabilistic Clustering Method)

Крішнапурам (*Krishnapuram*) та Келлер (*Keller*) запропонували ідею щодо послаблення обмеження матриці $\boldsymbol{U}$:

$$\sum_{i=\overline{1,c}} \varphi_{ki} = 1, \;\; k = \overline{1,M},$$

шляхом додавання другого члена у функцію, що дозволило вирішити проблему з шумовими точками.

Нехай задано безліч спостережень $X = (x_1, ..., x_N)$, де $x_i \in \boldsymbol{R}^d$, $i = 1,..., N$, $\beta = (\beta_1, ..., \beta_C)$ – центри кластерів, d_{ij}^2 – відстань від точки x_i до центру β_j, а $\mathbf{U} = \{u_{ij}\}$ – матриця розміром $C \times N$, елементи якої є характеристичними значеннями елемента x_j по відношенню до кластера S_i. Потрібно розбити безліч спостережень X на C нечітких кластерів $S_1, ..., S_C$ таким чином, щоб мінімізувати функцію втрат

$$\arg\min_{(U,\beta)} \sum_{i=1}^{C}\sum_{j=1}^{N} u_{ij}^m d_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{C} \eta_i \sum_{j=1}^{N} (1-u_{ij})^m,$$

де $m \in [1,+\infty)$ – експоненційна вага, η_i – позитивні числа. На характеристичні значення u_{ij} накладаються такі обмеження:

$$u_{ij} \in [0,1], \text{для } \forall i,j;$$

$$0 < \sum_{j=1}^{N} u_{ij} \le N, \;\; \forall i;$$

$$\max u_{ij} > 0, \;\; \forall j.$$

Мінімізація функції:

$$\arg\min_{(U,\beta)} \sum_{i=1}^{C}\sum_{j=1}^{N} u_{ij}^m d_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{C} \eta_i \sum_{j=1}^{N} (1-u_{ij})^m,$$

передбачає, щоб у першому доданку відстань від точки x_i до центру кластера β_j було якнайменше, у той час, як у другому доданку u_{ij} має бути якомога ближче до

одиниці. Якби у функції не було б другий доданок, то без обмеження на u_{ij}, мінімізація функції призводила б до тривіального рішення $u_{ij} = 0$ для усіх i, j.

Зауважимо, що рядки та стовпці матриці $\boldsymbol{U} = \{u_{ij}\}$ незалежні один від одного. Тому мінімізацію функції можна звести до мінімізації CN незалежних функцій:

$$u_{ij}^m d_{ij}^2 + \eta_i (1 - u_{ij})^m.$$

Відповідно до необхідних умов локального екстремуму, отримуємо:

$$u_{ij} = \frac{1}{1 + \left(\frac{d_{ij}^2}{\eta_i}\right)^{\frac{1}{m-1}}},\ i = 1, \dots C,\ j = 1, \dots, N,$$

$$\beta_j = \frac{\sum_{j=1}^N u_{ij}^m x_j}{\sum_{j=1}^N u_{ij}^m},\ i = 1, \dots, C.$$

Елементи матриці $\boldsymbol{U} = \{u_{ij}\}$ сильно залежать від вибору параметра η_i. Якщо η_i маленьке, то u_{ij} маленьке. Якщо η_i велике, то u_{ij} також велике. Також η_i визначає ступінь, з якого другий доданок функції порівняно з першим. Якщо обидва доданки рівноважні, то η_i має бути порядку d_{ij}^2. Автори методу запропонували такі співвідношення для η_i :

$$\eta_i = \frac{\sum_{j=1}^N u_{ij}^m d_{ij}^2}{\sum_{j=1}^N u_{ij}^m},\ i = 1, \dots, C,$$

$$\eta_i = \frac{\sum_{u_{ij} > \alpha} d_{ij}^2}{\sum_{u_{ij} > \alpha} 1},\ i = 1, \dots, C,$$

де $0 < \alpha < 1$. Параметр η_i може бути фіксованим для всіх ітерацій алгоритму, якщо кластери мають схожу форму. У загальному випадку η_i змінюється в кожній ітерації алгоритму, що може призвести до нестійкості, оскільки необхідні умови локального екстремуму отримані для фіксованого η_i . Тому часто спочатку застосовують алгоритм нечіткої кластеризації для ініціалізації u_{ij}, далі обчислюють η_i по формулі:

$$\eta_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} u_{ij}^m d_{ij}^2}{\sum_{j=1}^{N} u_{ij}^m}, \; i = 1, \ldots, C,$$

після чого застосовують алгоритм кластеризації з можливостями, в якому η_i обчислюється за формулою:

$$\eta_i = \frac{\sum_{u_{ij} > \alpha} d_{ij}^2}{\sum_{u_{ij} > \alpha} 1}, \; i = 1, \ldots, C$$

Значення m відіграє важливу роль у визначенні характеристичних значень u_{ij}. На рис. 8.9 видно, що при $m \to 1$ характеристичні значення u_{ij} прагнуть нуля для тих точок x_j, для яких d_{ij}^2 більше, ніж η_i . При $m \to \infty$ характеристичні значення перестають прагнути до нуля. Значення $m = 2$ дає хороші результати в алгоритмі нечіткої кластеризації. Однак, у алгоритмі з можливостями для такого значення m характеристичні функції зменшуються не досить швидко для великих значень d_{ij}^2. Тому найкращий вибір $m = 1{,}5$.

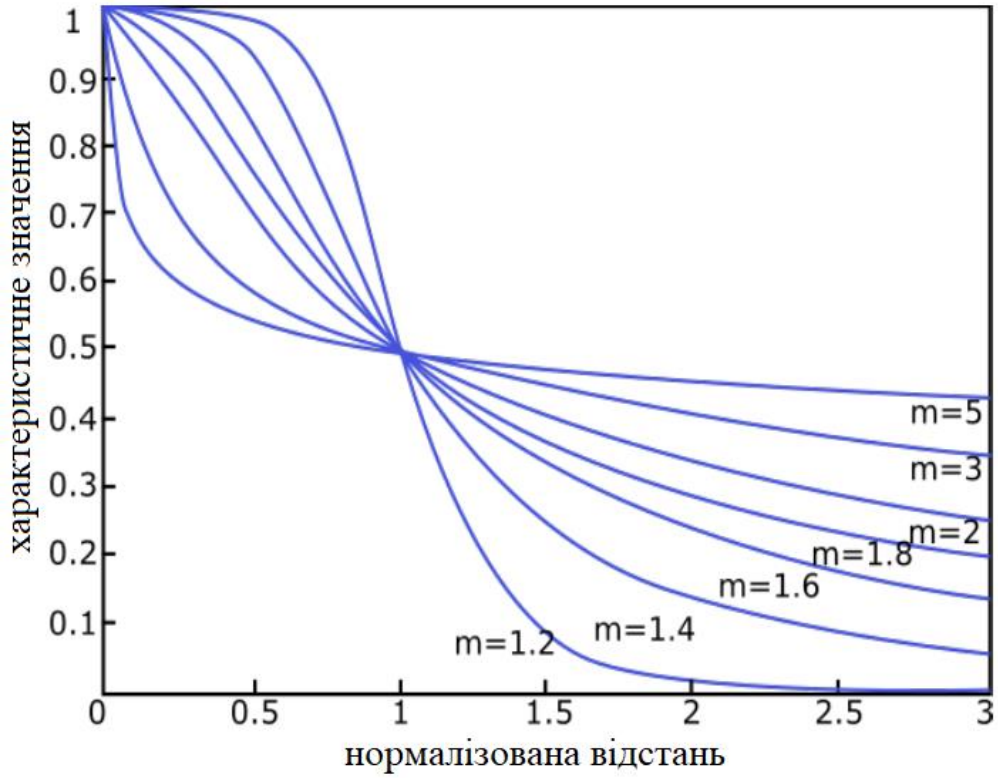


Рис. 8.9. Зміна характеристичних значень u_{ij} в залежності від m.

Процедура алгоритму кластеризації з можливостями виглядає так. Генеруємо елементи матриці $\boldsymbol{U} = \{u_{ij}\}$. Обчислюємо кластерні центри за формулою:

$$\beta_j = \frac{\sum_{j=1}^{N} u_{ij}^m x_j}{\sum_{j=1}^{N} u_{ij}^m},\ i = 1, \ldots, C.$$

Далі відбувається ітерація між кроками:

Крок 1. Розрахувати відстань d_{ij} від кожного спостереження x_i до центрів кластерів βj.

Крок 2. Обчислити η_i за формулою:

$$\eta_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} u_{ij}^m d_{ij}^2}{\sum_{j=1}^{N} u_{ij}^m},\ i = 1, \ldots, C,$$

або

$$\eta_i = \frac{\sum_{u_{ij} > \alpha} d_{ij}^2}{\sum_{u_{ij} > \alpha} 1},\ i = 1, \ldots, C$$

Крок 3. Перерахувати елементи матриці $\boldsymbol{U}$ за формулою

$$u_{ij} = \frac{1}{1 + \left(\frac{d_{ij}^2}{\eta_i}\right)^{\frac{1}{m-1}}},\ i = 1, \ldots C,\ j = 1, \ldots, N,$$

Крок 4. Перерахувати центри кластерів βj по формулі

$$\beta_j = \frac{\sum_{j=1}^{N} u_{ij}^m x_j}{\sum_{j=1}^{N} u_{ij}^m},\ i = 1, \ldots, C.$$

для нових елементів матриці $\boldsymbol{U}$ з кроку 3.

Крок 5. Порівняти

$$u_{ij}^{(t+1)} \text{ с } u_{ij}^{(t)}$$

де t – номер ітерації.

Якщо

$$\|u_{ij}^{(t+1)} - u_{ij}^{(t)}\|^2 < \varepsilon$$

(для заданого ε), то зупиняємось, інакше – переходимо на першого кроку.

Запропонований Крішнапурам та Келлер алгоритм з можливостями – це лише деяка реалізація загальної ідеї підходу з можливостями. Підхід з можливостями означає, що характеристичне значення точки по відношенню до кластера є можливість точки належати кластеру.

Так як мінімізація функції зводиться до мінімізації *CN* незалежних функцій, то можуть виникати кластери, що збігаються. Це проблема типова для функцій, які можна виразити як суму незалежних функції. Причина криється не в поганому виборі другого доданку, а скоріше у відсутності відповідних обмежень на u_{ij}. З одного боку, обмеження в алгоритмі нечіткої кластеризації занадто сильне - воно змушує шумові точки належати одному або декільком кластерам з достатньо високим ступенем належності. З іншого боку, обмеження у алгоритмі з можливостями занадто слабке, оскільки матриця $\boldsymbol{U}$ залежить від вибору параметрів m і η_i . І хоча алгоритм з можливостями кластеризації більш працездатний щодо шуму, так як шумові точки будуть належати кластерам з маленькими характеристичними значеннями, платити за це доведеться кластерами, що збігаються.

Щоб подолати проблему чутливості до шуму, а також проблему кластерів, що збігаються, було запропоновано декілька алгоритмів. Наприклад була запропонована можливостно-нечітка модель кластеризації (PFCM), в якій функція, що досліджується на мінімум, включала і характеристичні значення u_{ij} і ступеня приналежності w_{ij} . Однак цей алгоритм, як і раніше, стикається з проблемами ініціалізації та вибору параметрів моделі. Ще один алгоритм заснований на ідеї, що на початковому етапі всі дані є центрами кластерів. Потім відбувається процедура автоматичного злиття точок спеціальним чином відповідно до вихідної структури

даних. При цьому число кластерів знаходиться автоматично із збереженням працездатності алгоритму. Однак, той факт, що всі точки використовуються як початкові центри кластерів, є серйозною проблемою при масштабуванні цього алгоритму для великих обсягів даних та високої розмірності.

8.3.3. Кластеризація методом пікового групування (гірський алгоритм)

Гірський алгоритм кластеризації запропонований Ягером (*Yager*) і Фільовим (*Filev*) у 1993 році. Особливістю алгоритму є те, що він не вимагає завдання кількості кластерів.

Ідея методу полягає в тому, що спочатку визначають точки, які можуть бути центрами кластерів. Далі для кожної такої точки розраховується значення потенціалу, що показує можливість формування кластера в її околиці. Чим щільніше розташовані об’єкти в околиці потенційного центра кластера, тим вище значення його потенціалу. Після цього ітераційно вибираються центри кластерів серед точок з максимальними потенціалами. Метод гірської кластеризації можна записати як послідовність таких кроків.

Розглянемо гірський алгоритм кластеризації докладніше.

На першому кроці потрібно сформувати потенційні центри кластерів. Для алгоритму гірської кластеризації число потенційних центрів кластерів (Q) має бути кінцевим. Такими центрами можуть бути як об'єкти кластеризації (рядки матриці $\boldsymbol{X}$), так і особливі точки факторного простору. В останньому випадку діапазони зміни вхідних ознак розбивають на кілька інтервалів. Провівши через точки розбиття прямі, паралельні координатним осям, отримуємо решіточний гіперкуб. Вузли цієї решітки і будуть відповідати центрам потенційних кластерів. Позначимо через q_r – кількість значень, які можуть приймати центри кластерів по r-й координаті, $r = 1, \ldots, n$. Тоді кількість можливих кластерів буде дорівнювати : $Q = q_1\, q_2 \ldots q_n$.

На другому кроці алгоритму розраховується потенціал центрів кластерів за формулою:

$$P(Z_h) = \sum_{k=\overline{1,M}} \exp\left(-\alpha D(Z_h, X_k)\right), \quad h = \overline{1,Q},$$

де Z_h = ($z_{1,h}$, $z_{2,h}$, ..., $z_{n,h}$) – потенційний центр h-го кластера, h = 1, …, Q, α - позитивна константа; $D(Z_h, X_k)$ – відстань між потенційним центром кластера (Z_h) та об'єктом кластеризації (X_k). У евклідовому просторі ця відстань розраховується за формулою:

$$D(Z_h, X_k) = \sqrt{\|Z_h - X_k\|^2}.$$

Коли об'єкти кластеризації задані двома ознаками (n = 2), графічне зображення розподілу потенціалу буде поверхнею, що нагадує гірський рельєф (рис. 8.10). Звідси і назва – гірський алгоритм кластеризації.

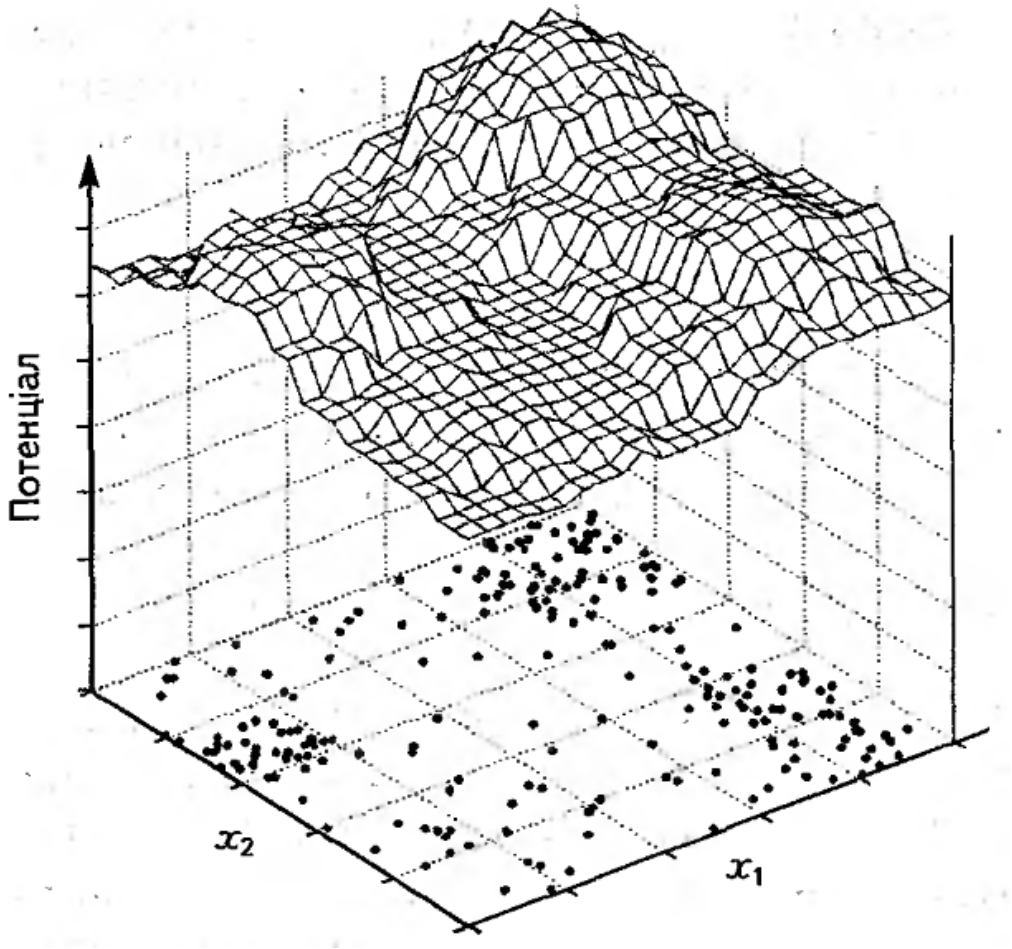


Рис. 8.10. Гірський алгоритм кластеризації.

На третьому кроці алгоритму у якості центрів кластерів вибирають координати «гірських вершин». Центром першого кластера призначають точку із найбільшим потенціалом. Зазвичай, найвища вершина оточена кількома досить високими піками. Призначення центром наступного кластера точки з максимальним потенціалом серед вершин, що залишилися, призвело б до виділення великої кількості близько розташованих центрів кластерів. Отже, перед вибором наступного кластерного центру необхідно видалити вплив щойно знайденого кластера. Для цього значення потенціалу можливих центрів кластерів, що залишилися, перераховується наступним чином: від поточних значень потенціалу віднімають внесок центру щойно знайденого кластера (тому кластеризацію за цим методом іноді називають субтрактивною (*subtractive*). Перерахунок потенціалу відбувається за такою формулою:

$$P_2(Z_h) = P_1(Z_h) - P_1(V_1)\exp\left(-\beta D(Z_h, V_1)\right), \quad Z_h \neq V_1, \quad h = \overline{1,Q},$$

де $P_1(\ )$ – потенціал на 1-й ітерації; $P_2(\ )$ – потенціал на 2-й ітерації; β – позитивна константа; V_1 – центр першого знайденого кластера:

$$V_1 = \arg_{Z_1, Z_2, \ldots, Z_Q} \max\left(P_1(Z_1), P_1(Z_2), \ldots, P_1\left(Z_Q\right)\right).$$

Центр другого кластера визначається по максимальному значенню оновленого потенціалу:

$$V_2 = \arg_{Z_h:\, Z_h \neq V_1, h=\overline{1,Q}} \max\left(P_2(Z_1), P_2(Z_2), \ldots, P_2\left(Z_Q\right)\right).$$

Далі знову перераховується значення потенціалів:

$$P_3(Z_h) = P_2(Z_h) - P_2(V_2)\exp\left(-\beta D(Z_h, V_2)\right), \quad Z_h \neq V_1, \quad Z_h \neq V_2, \quad h = \overline{1,Q},$$

Ітераційна процедура виділення центрів кластерів триває до того часу, поки максимальне значення потенціалу перевищує певний поріг. Кластеризація по гірському алгоритму не є нечіткою, проте її часто використовують при синтезі нечітких правил з даних.

8.4. Синтез нечітких правил за результатами кластеризації

Позначимо через V_1, V_2, ..., V_c центри кластерів, знайдені внаслідок гірської кластеризації. Для спрощення викладок приймемо, що центри кластерів задані двома координатами: $V_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, c$. Завдання полягає в синтезі нечітких правил, що пов'язують вхід (x) з виходом (y).

Центру кластера V_i ($i = 1, \ldots, c$) ставиться у відповідність одне нечітке правило:

$$\text{ЯКЩО } x = \tilde{x}_i, \text{ ТОДІ } y = \tilde{y}_i.$$

в якому нечіткі терми інтерпретуються так: $\tilde{x}_i$ – "близько x_i" і $\tilde{y}_i$ – " близько y_i". Функції приналежності цих нечітких термів задаються гаусовою кривою:

$$\tilde{x}_i = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - x_i}{\beta}\right)^2\right), \quad i = \overline{1, c};$$

$$\tilde{y}_i = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y - y_i}{\beta}\right)^2\right), \quad i = \overline{1, c},$$

де β - параметр алгоритму гірської кластеризації.

Нечіткі правила можна синтезувати і за результатами нечіткої кластеризації. Нехай об'єкти кластеризації мають дві ознаки ($n = 2$). Тоді результати нечіткого розбиття можна уявити тривимірною поверхнею. Для побудови такої поверхні слід для кожного об'єкта відкласти по осях абсцис і ординат значення ознак, а, по осі аплікат – ступінь приналежності об'єкта нечіткому кластеру. Кількість поверхонь дорівнює кількості кластерів (n). На рис. 8.11 (з прикладу 8.2) показані функції приналежності нечітких кластерів, які нагадують нечіткі відношення. Отже, кожному кластеру можна поставити у відповідність одне нечітке правило.

За результатами нечіткої кластеризації можна синтезувати нечіткі правила різних баз знань: сінглтонної, Мамдані та Сугено. Функції приналежності термів у посилках правила отримують проектуванням ступенів приналежності відповідного кластера (рядків матриці нечіткого розбиття $\boldsymbol{F}$) на осі вхідних змінних.

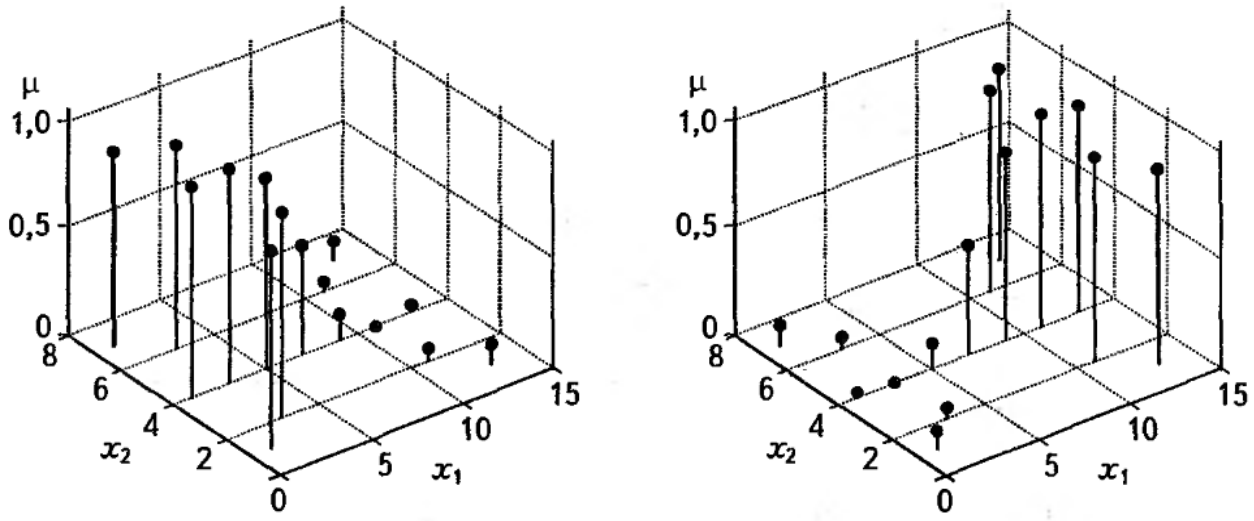


Рис. 8.11. Функції приналежності нечітких кластерів.

Потім отримані множини ступенів приналежності апроксимують відповідними параметричними функціями приналежності. В якості результату правила сінглтонної бази знань вибирають координату центру кластера. Результат правил бази знань Мамдані знаходять як і функції приналежності термів вхідних змінних. Результат правил бази знань Сугено знаходять методом найменших квадратів. При кластеризації з використанням норми Махалонобіса у якості результату правил типу Сугено можуть бути обрані рівняння довгих осей гіпереліпсоїдів.

Приклад 8.3.

Дані для кластеризації, а також центри двох нечітких кластерів зображені на рис. 8.12., на якому виведені ізолінії для наступних значень функцій приналежності: 0,95; 0,90; 0,85; 0,80; 0,75; 0,70 та 0,65. Функції приналежності нечітких кластерів показані двома тривимірними поверхнями. Вони інтерпретуються з функціями приналежності термів, що можна представити наступними нечіткими правилами:

ЯКЩО x = «низький», ТОДІ y = «низький»,

ЯКЩО x = «високий», ТОДІ y = «високий».

Функції приналежності описаних правил (рис. 8.13), отримані проекціюванням поверхонь на осі x та y. При цьому маркери на графіках функцій приналежності відповідають одному об'єкту кластеризації.

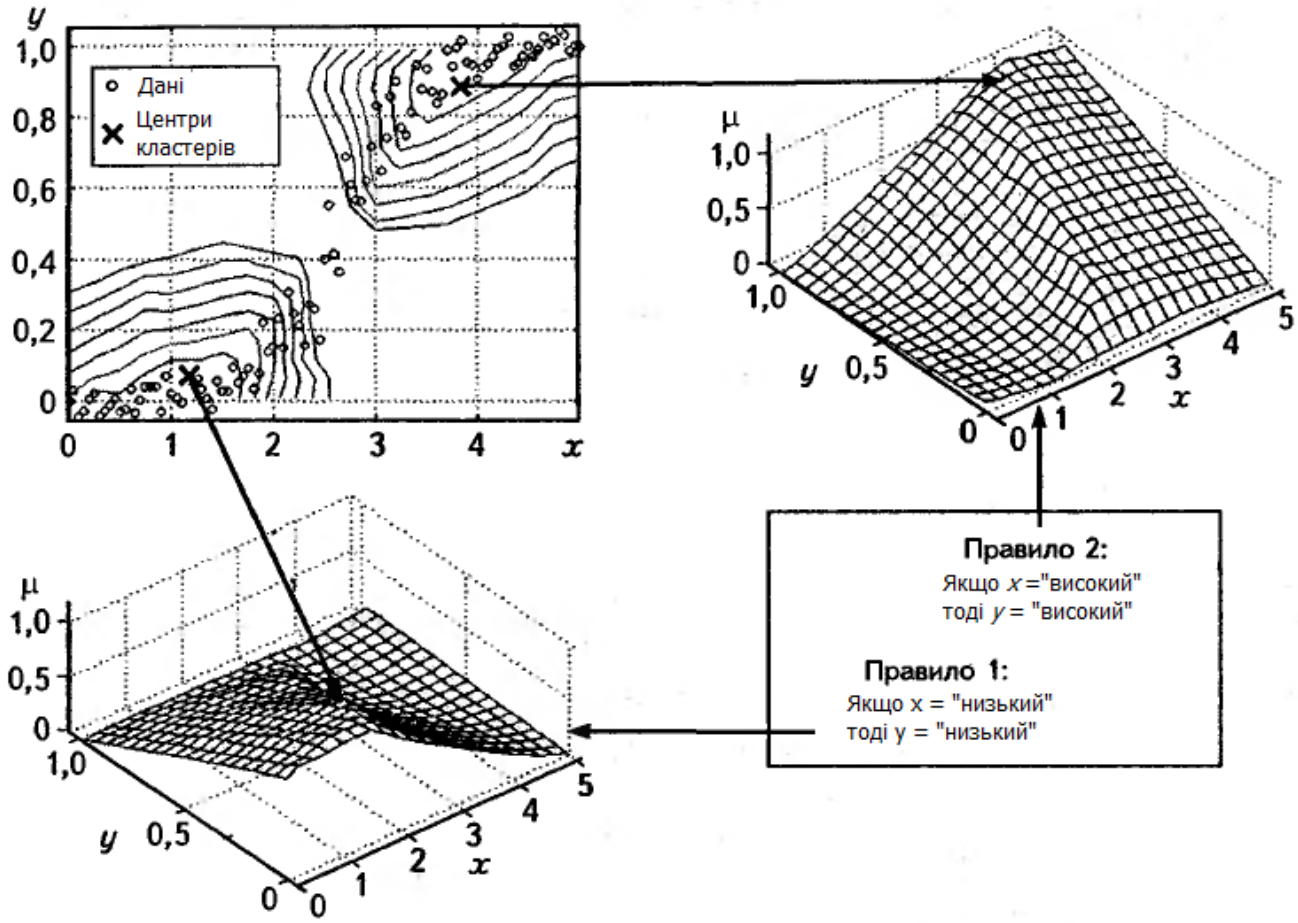


Рис. 8.12. Вхідні дані для кластеризації.

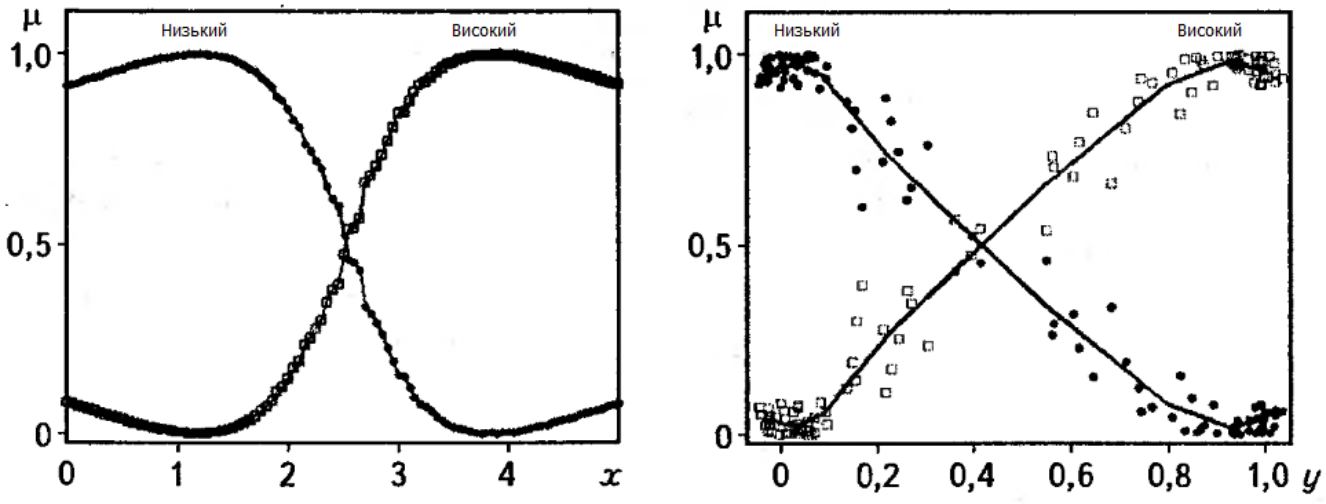


Рис. 8.13. Функції приналежності правил.

Контрольні запитання:

1. В чому особливості формулювання та рішення задач кластеризації?
2. Які методи застосовуються при нечіткому кластерному аналізі?
3. Які існують найпопулярніші алгоритми нечіткої кластеризації та в чому їх особливості?
4. Яка принципова різниця між ізолініями гіпереліпсоїдів при використанні евклідової і діагональної норми та норми Махаланобіса?
5. Як визначити оптимальну кількість кластерів для набору даних?
6. Які існують особливості завдання цільової функції та як вона впливає на проходження процедури нечіткої кластеризації?
7. Чи впливають на результати нечіткої кластеризації викиди або аномалії у наборі вхідних даних?
8. Які алгоритми нечіткої кластеризації краще підходять для даних з великою кількістю спостережень?
9. Як впливає вибір початкових центрів на результати нечіткої кластеризації?
10. Які існують умови зупинки роботи алгоритмів нечіткої кластеризації?

РОЗДІЛ 9

ГЕНЕТИЧНІ АЛГОРИТМИ

9.1. Основні поняття генетичних алгоритмів

Генетичні алгоритми виникли в результаті спостереження та спроб копіювання природних процесів, що відбуваються у світі живих організмів, зокрема, еволюції та пов'язаної з нею селекції (природного відбору) популяцій живих істот. Звичайно при подібному зіставленні генетичних алгоритмів слід звертати увагу на принципово різну тривалість перебігу згаданих природних процесів, тобто на надзвичайно швидку обробку інформації в нервовій системі і дуже повільний процес природної еволюції. Однак при комп'ютерному моделюванні ці відмінності виявляються несуттєвими.

Ідею генетичних алгоритмів висловив Джон Холланд у 1975 році. Він зацікавився властивостями процесів природної еволюції (зокрема фактом, що еволюціонують хромосоми, а не самі живі істоти). Холланд був упевнений у можливості скласти і реалізувати у вигляді комп'ютерної програми алгоритм, який вирішуватиме складні завдання так, як це робить природа – шляхом еволюції. Тому він почав працювати над алгоритмами, що оперували послідовностями двійкових цифр (одиниць і нулів), що отримали назву **хромосом**. Ці алгоритми імітували еволюційні процеси у поколіннях таких хромосом. У них були реалізовані **механізми селекції** та **репродукції**, які аналогічні механізмам природної еволюції. Так само, як і у природі, генетичні алгоритми здійснювали пошук «хороших» хромосом без використання будь-якої інформації про характер розв'язуваної задачі. Була потрібна лише оцінка кожної хромосоми, що відображає її пристосованість. **Механізм селекції** полягає у виборі хромосом з найвищою оцінкою (тобто найбільш пристосованих), які репродукують частіше, ніж особини з нижчою

оцінкою (гірше пристосовані). **Репродукція** означає створення нових хромосом внаслідок рекомбінації генів батьківських хромосом. **Рекомбінація** – це процес, у результаті якого виникають нові комбінації генів. Для цього використовуються дві операції: **схрещування**, що дозволяє створити дві абсолютно нові хромосоми нащадків шляхом комбінування генетичного матеріалу пари батьків, а також **мутація**, яка може викликати зміни в окремих хромосомах.

Генетичний алгоритм є метод, що відображає природну еволюцію методів вирішення проблем, і в першу чергу завдань оптимізації. Генетичні алгоритми – це процедури пошуку, засновані на механізмах природного відбору та успадкування. У них використовується еволюційний принцип виживання найбільш пристосованих особин. Вони відрізняються від традиційних методів оптимізації декількома базовими елементами. Зокрема, генетичні алгоритми:

1) обробляють не значення параметрів самої задачі, а їх закодовану форму;

2) здійснюють пошук рішення виходячи не з єдиної точки, а з деякої популяції;

3) використовують лише цільову функцію, а не її похідні чи іншу додаткову інформацію;

4) застосовують ймовірнісні, а не детерміновані правила вибору.

Перераховані чотири властивості призводять в результаті до стійкості генетичних алгоритмів і до їх переваги над іншими широко застосовуваними технологіями оптимізації.

При описі генетичних алгоритмів використовують визначення та терміни, запозичені з генетики. Наприклад, йдеться про популяцію особин, а як базові поняття застосовуються ген, хромосома, генотип, фенотип, алель. Також використовуються відповідні цим термінам визначення технічного лексикону, зокрема, ланцюг, двійкова послідовність, структура.

Популяція – це кінцева безліч особин.

Особини (індивідууми), які входять у популяцію, в генетичних алгоритмах представляються хромосомами з закодованими у них множинами параметрів завдання, тобто рішень, які інакше називаються точками у просторі пошуку (*search points*). У деяких роботах особини називаються організмами.

Хромосоми (інші назви – ланцюжки або кодові послідовності) – це впорядковані послідовності генів.

Ген (що також називається властивістю, знаком чи детектором) – це атомарний елемент генотипу, зокрема, хромосоми.

Генотип (чи структура) – це набір хромосом даної особини. Отже, особинами популяції може бути генотипи чи поодинокі хромосоми (у досить поширеному випадку, коли генотип складається з однієї хромосоми).

Фенотип – це набір значень, відповідних даному генотипу, тобто декодована структура чи множина параметрів завдання (рішення, точка простору пошуку).

Алель – це значення конкретного гена, що також визначається як значення властивості або варіант властивості.

Локус (або позиція) вказує місце розташування даного гена в хромосомі (ланцюжку). Безліч позицій генів – це **локи**.

Кросовер (кросинговер) – операція, при якій дві хромосоми обмінюються своїми частинами.

Мутація – випадкова зміна однієї чи кількох позицій у хромосомі.

Інверсія – зміна порядку послідовності бітів у хромосомі чи її фрагменті.

Таким чином, кожна **хромосома** є конкатенацією (об’єднанням) ряду підрядків, званих **генами** (рис. 9.1). Гени розташовуються у різних позиціях чи **локусах** хромосоми і набувають значення, звані **алелями**, тобто **ген** – біт, **локус** – його позиція у рядку, і **алель** – його значення (0 або 1).

З наведених вище визначень випливає, що термінологія генетичних алгоритмів є синтезом власне генетичних і штучних понять. У біологічних системах у процесі індивідуального розвитку організму взаємодія генотипу з навколишнім

середовищем формує сукупність зовнішніх ознак і властивостей, яка називається **фенотипом**. У математичному моделюванні структура, що розглядається, декодується за допомогою безлічі параметрів, яку в літературі іноді називають альтернативним рішенням або точкою. Різні значення параметрів утворюють **простір рішень**. У штучній генетичній системі можливе використання як числових, і нечислових параметрів.

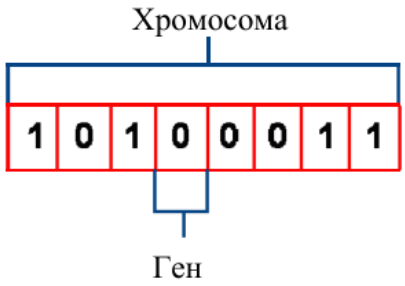


Рис. 9.1. Структура хромосоми.

Дуже важливим поняттям генетичних алгоритмах вважається **функція пристосованості** (*fitness function*), або, як її ще називають, функцією оцінки. Вона є мірою пристосованості цієї особи в популяції. Ця функція відіграє найважливішу роль, оскільки дозволяє оцінити ступінь пристосованості конкретних особин у популяції і вибрати з них найбільш пристосованих (тобто таких, що мають найбільші значення функції пристосованості) відповідно до еволюційного принципу виживання «найсильніших» (найкраще пристосованих). Функція пристосованості також одержала свою назву безпосередньо з генетики. Вона сильно впливає на функціонування генетичних алгоритмів і повинна мати точне та коректне визначення. У задачах оптимізації функція пристосованості, як правило, оптимізується (точніше, максимізується) і називається **цільовою функцією**. У задачах мінімізації цільова функція перетворюється і проблема зводиться до максимізації. У теорії керування функція пристосованості може набувати вигляду функції похибки, а у теорії ігор – вартісної функції. На кожній ітерації генетичного алгоритму пристосованість кожної особини цієї популяції оцінюється за допомогою

функції пристосованості і на цій основі створюється наступна популяція особин, що становлять множину потенційних розв'язків проблеми, наприклад завдання оптимізації.

Чергова популяція в генетичному алгоритмі називається **поколінням**, а до новоствореної популяції особин застосовується термін "**нове покоління**" або "**покоління нащадків**".

Приклад 9.1

Розглянемо функцію: $f(x) = 2 \cdot x^2 + 1$, і припустимо, що x приймає цілі значення з інтервалу від 0 до 15. Задача оптимізації цієї функції полягає в переміщенні простором, що складається з 16 точок зі значеннями 0, 1, …, 15 для виявлення тієї точки, в якій функція набуває максимального (або мінімального) значення.

В цьому випадку як **параметр задачі** виступає змінна x. Множина {0, 1, …, 15} складає **простір пошуку** та одночасно – множину потенційних розв'язків задачі. Кожне з 16 чисел, що належать до цієї множини, називається **точкою простору пошуку** (або рішенням, значенням параметра, фенотипом). Слід зазначити, що рішення, яке оптимізує функцію, називається **найкращим чи оптимальним рішенням**. Значення параметра від 0 до 15 можна закодувати наступним чином:

0000 0001 0010 0011 0100 0101 0110 0111
1000 1001 1010 1011 1100 1101 1110 1111

Це відомий спосіб двійкового кодування, пов'язаний із записом десяткових цифр у двійковій системі. Подані кодові послідовності також називають **цілями** або **хромосомами**. У прикладі вони виступають і в ролі **генотипів**. Кожна з хромосом складається з чотирьох **генів** (інакше можна сказати, що двійкові послідовності складаються з чотирьох бітів). Значення гена в конкретній позиції називається **алель**, що приймає в даному випадку значення 0 або 1. **Популяція** складається з особин, що вибираються серед цих 16 хромосом. Прикладом популяції з чисельністю, що дорівнює 6, може бути, наприклад, множина хромосом

{0010, 0101, 0111, 1001, 1100, 1110}, що являють собою закодовану форму наступних фенотипів: {2, 5, 7, 9, 12, 14}. **Функція пристосованості** у цьому прикладі задається виразом $f(x) = 2 \cdot x^2 + 1$. Пристосованість окремих хромосом популяції визначається значенням цієї функції для значень x, відповідних цим хромосомам, тобто для **фенотипів**, які відповідають певним **генотипам**.

9.2. Класичний генетичний алгоритм

Стандартний (класичний) генетичний алгоритм (також званий елементарним чи простим генетичним алгоритмом) складається з наступних кроків:

1. Ініціалізація, або вибір вхідної популяції хромосом;
2. Оцінка пристосованості хромосом у популяції;
3. Перевірка умови зупинення алгоритму;
4. Селекція хромосом;
5. Застосування генетичних операторів;
6. Формування нової популяції;
7. Вибір «найкращої» хромосоми.

Розглянемо конкретні етапи цього алгоритму докладніше:

1. Ініціалізація, тобто формування вхідної популяції, полягає у випадковому виборі заданої кількості хромосом (особин), що представляються двійковими послідовностями фіксованої довжини.

2. Оцінювання пристосованості хромосом у популяції полягає у розрахунку функції пристосованості кожної хромосоми цієї популяції. Чим більше значення цієї функції, тим вище «якість» хромосоми. Форма функції пристосованості залежить від характеру завдання, що розв'язується. Передбачається, що функція пристосованості завжди набуває позитивних значень. Для вирішення оптимізаційної задачі потрібно максимізувати цю функцію. Якщо вхідна форма функції пристосованості не задовольняє цим умовам, виконується

відповідне перетворення (наприклад, задачу мінімізації функції можна легко звести до завдання максимізації).

3. Перевірка умови зупинення алгоритму. Визначення умови зупинення генетичного алгоритму залежить з його конкретного застосування. В оптимізаційних задачах, якщо відомо максимальне (або мінімальне) значення функції пристосованості, зупинка алгоритму може статися після досягнення очікуваного оптимального значення, можливо - із заданою точністю. Зупинка алгоритму може статися у разі, коли його виконання не призводить до поліпшення вже досягнутого значення. Алгоритм може бути зупинений після певного часу виконання або після виконання заданої кількості ітерацій. Якщо умова зупинки виконано, відбувається перехід до завершального етапу вибору «найкращої» хромосоми, інакше, на наступному кроці виконується селекція.

4. Селекція хромосом полягає у виборі (за розрахованими на другому етапі значенням функції пристосованості) тих хромосом, які братимуть участь у створенні нащадків для наступної популяції, тобто для наступного покоління. Такий вибір проводиться згідно з принципом природного відбору, за яким найбільші шанси на створення нових особин мають хромосоми з найбільшими значеннями функції пристосованості. Існують різноманітні методи селекції. Найбільш популярним вважається так званий **метод рулетки** (*roulette wheel selection*), який свою назву отримав за аналогією із відомою азартною грою. Кожній хромосомі може бути зіставлений сектор колеса рулетки, величина якого встановлюється пропорційно значенню функції пристосованості даної хромосоми. Тому чим більше значення функції пристосованості, тим більше сектор на колесі рулетки. Все колесо рулетки відповідає сумі значень функції пристосованості всіх хромосом популяції, що розглядається. Кожній хромосомі, що позначається ch_i для i =1, 2,.... N (де N позначає чисельність популяції) відповідає сектор колеса $v(ch_i)$, виражений у відсотках згідно з формулою

$$v(ch_i) = p_s(ch_i) \cdot 100\%,$$

$$p_s(ch_i) = \frac{F(ch_i)}{\sum_{i=1}^{N} F(ch_i)},$$

де $F(ch_i)$ – значення функції пристосованості хромосоми ch_i; $p_s(ch_i)$ – ймовірність селекції (відбору) хромосоми ch_i. Селекція хромосоми може бути представлена як результат повороту колеса рулетки, оскільки хромосома, що «виграла» (тобто була обрана) відноситься до сектора цього колеса, що випав. Очевидно, що чим більше сектор, тим більша ймовірність "перемоги" відповідної хромосоми. Тому можливість вибору даної хромосоми виявляється пропорційною значенню її функції пристосованості. Якщо все коло колеса рулетки представити у вигляді цифрового інтервалу [0, 100], то вибір хромосоми можна ототожнити з вибором числа з інтервалу [a, b], де a і b позначають відповідно початок і закінчення фрагмента кола, відповідного цьому сектору колеса (очевидно, що $0 \le a < b \le 100$). У цьому випадку вибір за допомогою колеса рулетки зводиться до вибору числа з інтервалу [0, 100], яке відповідає конкретній точці на колі колеса. Існують і інші методи селекції хромосом.

У результаті процесу селекції створюється **батьківська популяція**, що також називається **батьківським пулом** (*mating pool*) із чисельністю N, що дорівнює чисельності поточної популяції.

5. Застосування генетичних операторів до хромосом, що були відібрані за допомогою селекції, призводить до формування нової популяції нащадків від створеної на попередньому кроці батьківської популяції.

У класичному генетичному алгоритмі застосовуються два основні генетичні оператори: **оператор схрещування** або **кросовера** (*crossover*) та оператор **мутації** (*mutation*). Проте слід зазначити, що оператор мутації відіграє явно другорядну роль порівняно з оператором схрещування. Це означає, що схрещування в класичному генетичному алгоритмі проводиться практично завжди, тоді як мутація досить рідко. Імовірність схрещування, зазвичай, досить велика (зазвичай вона дорівнює $0{,}5 \le p_c \le 1$), тоді як ймовірність мутації встановлюється дуже малою (найчастіше 0

$\leq p_m \leq 0{,}1$). Це випливає з аналогії зі світом живих організмів, де мутації відбуваються надзвичайно рідко. При цьому, вираз $1 - p_c$ означає вірогідність збереження особин, що переходять на стадію мутації.

У генетичному алгоритмі мутація хромосом може виконуватися на популяції батьків перед схрещуванням чи популяції нащадків, що були утворені у результаті схрещування.

5.1. Оператор схрещування. На першому етапі схрещування вибираються пари хромосом із батьківської популяції (батьківського пулу). Це тимчасова популяція, що складається з хромосом, відібраних у результаті селекції та призначених для подальших перетворень операторами схрещування та мутації з метою формування нової популяції нащадків. На цьому етапі хромосоми з батьківської популяції поєднуються в пари. Це відбувається випадковим способом відповідно до ймовірності схрещування p_c.

Найбільш популярним типом схрещування є **одноточкове схрещування** (кросинговер) – при якому випадково вибирається точка розриву, батьківські хромосоми розриваються у цій точці та обмінюються правими частинами. Тобто для кожної пари відібраних батьків розігрується позиція гена (локус) в хромосомі, що визначає так звану **точку схрещування**. Якщо хромосома кожного з батьків складається з L генів, то очевидно, що точка схрещування I_k є натуральним числом, меншим за L. Тому фіксація точки схрещування зводиться до випадкового вибору числа з інтервалу $[1, L - 1]$. У результаті схрещування пари батьківських хромосом виходить наступна пара нащадків:

1) нащадок, хромосома якого на позиціях від 1 до I_k складається з генів першого з батьків, а на позиціях від $I_k + 1$ до L – з генів другого з батьків;

2) нащадок, хромосома якого на позиціях від 1 до I_k складається з генів другого з батьків, а на позиціях від $I_k + 1$ до L – з генів першого з батьків.

Дію оператора одноточкового схрещування можна проілюстрована так, як це наведено на рис. 9.2.

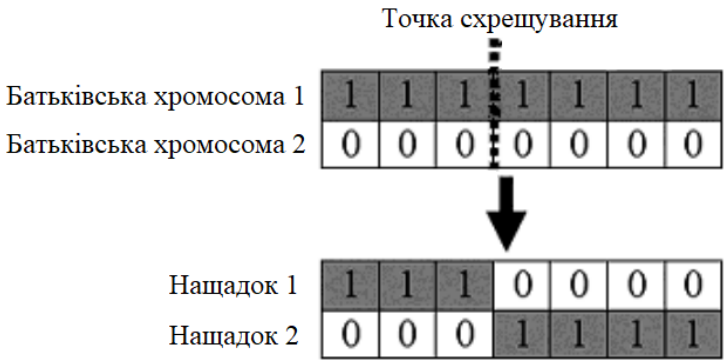


Рис. 9.2. Оператор одноточкового схрещування.

При **двоточковому схрещуванні** (кросинговері) хромосома як би замикається в кільце, вибираються 2 точки розриву та батьківськи хромосоми обмінюються частинами, що знаходяться між двох цих точок (рис. 9.3).

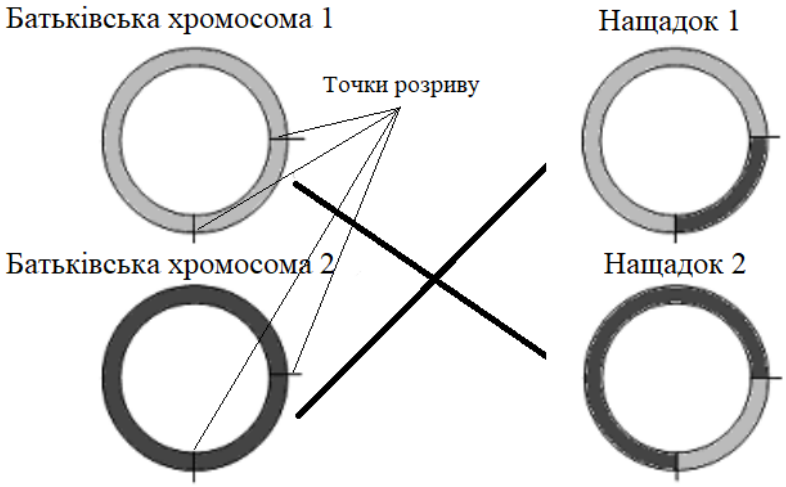


Рис. 9.3. Оператор двоточкового схрещування.

У двоточковому схрещуванні (і взагалі багатоточковому схрещуванні) хромосоми розглядаються як цикли, які формуються з'єднанням кінців лінійної хромосоми разом (рис. 9.4). Для заміни сегмента одного циклу сегментом іншого циклу потрібен вибір двох точок розрізу. У цьому представленні одноточкове схрещування може бути розглянутий як кросинговер з двома точками, але з однією точкою розрізу, зафіксованою на початку рядка. Отже, двоточковий кросинговер

вирішує те саме завдання, що і одноточковий, але більш повно. Хромосома, що розглядається як цикл, може містити більшу кількість стандартних блоків, так як вони можуть здійснити «циклічне повернення» в кінці рядка. Зараз багато дослідників погоджуються, що двоточковий кросинговер взагалі краще, ніж одноточковий.

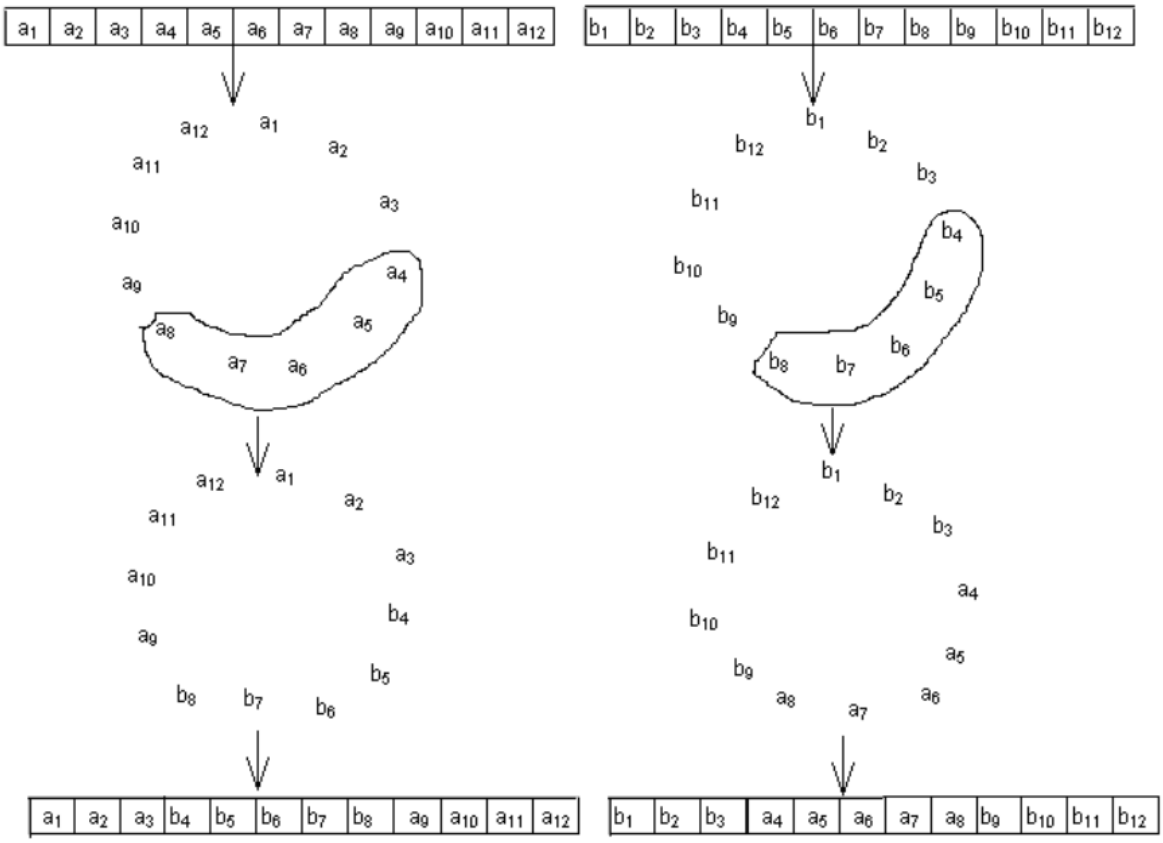


Рис. 9.4. Представлення хромосоми, при з'єднанні її кінців.

При **рівномірному схрещуванні** нащадок може успадкувати з рівною ймовірністю гени кожного з батьків (рис. 9.5).

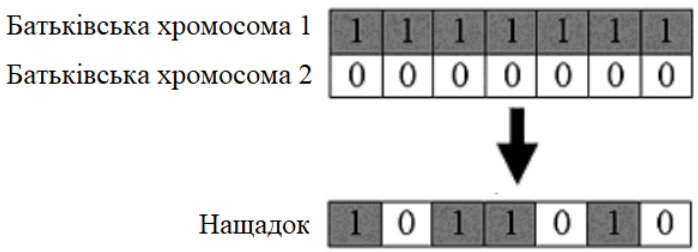


Рис. 9.5. Приклад рівномірного схрещуванні.

Рівномірне схрещування у всій популяції (*uniform gene pool recombination*) виходить застосуванням рівномірного схрещування всіх членів популяції, тобто нащадок може успадкувати будь-який ген, що є у популяції в заданій позиції хромосоми.

5.2. Оператор мутації випадково з ймовірністю p_m змінює значення в одному чи кількох генах в хромосомі на протилежне (тобто з 0 на 1 або навпаки). У генетичному алгоритмі мутація розглядається як метод відновлення втраченого генетичного матеріалу, а не як пошук найкращого рішення. Зазвичай мутація застосовується до генів з дуже низькою ймовірністю $p_m \in [0.001; 0.01]$.

Наприклад, якщо в хромосомі [100110**1**01010] мутації піддається ген на позиції 7, то його значення, яке дорівнює 1, змінюється на 0, що призводить до утворення хромосоми [100110**0**01010].

Мутація зазвичай відбувається з ймовірністю p_m для кожного гена. Хорошим емпіричним правилом вважається вибір ймовірності мутації рівним: $p_m = \frac{1}{n}$, де n – число генів у хромосомі (при цьому в середньому хоча б один ген буде схильний до мутації). У разі бінарного алфавіту мутація полягає в інвертуванні випадково вибраних бітів, як показано на рис. 9.6.

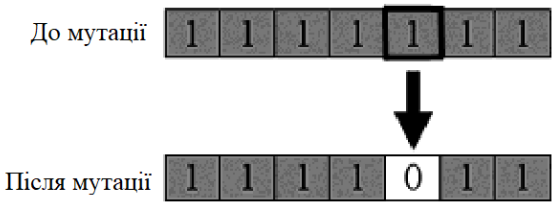


Рис. 9.6. Приклад мутації.

6. Формування нової популяції. Хромосоми нащадків, що були отримані внаслідок застосування генетичних операторів до хромосом тимчасової батьківської популяції, включаються до складу нової популяції. Яка стає так званою поточною популяцією для цієї ітерації генетичного алгоритму. На кожній черговій ітерації розраховуються значення функції пристосованості усіх хромосом цієї

популяції, після чого перевіряється умова зупинки алгоритму. При цьому, або фіксується результат у вигляді хромосоми з найбільшим значенням функції пристосованості, або здійснюється перехід до наступного кроку генетичного алгоритму, тобто до селекції. У класичному генетичному алгоритмі вся попередня популяція хромосом заміщується новою популяцією нащадків, що має ту саму чисельність.

7. Вибір «найкращої» хромосоми. Якщо умова зупинки алгоритму виконано, слід вивести результат роботи, тобто представити розв'язане завдання. Найкращим рішенням вважається хромосома з найбільшим значенням функції пристосованості.

На завершення слід визнати, що генетичні алгоритми успадкували властивості природного еволюційного процесу – генетичні зміни популяцій організмів із часом.

Головний фактор еволюції – це природний відбір (селекція), який призводить до того, що серед особин (індивідуумів), які генетично різняться, з однієї і тієї ж популяції, виживають і залишають потомство тільки найбільш пристосовані до навколишнього середовища особі. У генетичних алгоритмах також виділяється етап селекції, у якому з поточної популяції вибираються і входять у батьківську популяцію особини, що мають найбільші значення функції пристосованості. На наступному етапі, який іноді називається еволюцією, застосовуються генетичні оператори схрещування та мутації, які виконують рекомбінацію генів у хромосомах.

Операція схрещування полягає в обміні фрагментами ланцюжків між двома батьківськими хромосомами. Пари батьків для схрещування вибираються з батьківського пулу випадковим чином так, щоб ймовірність вибору конкретної хромосоми для схрещування дорівнювала ймовірності p_c. Наприклад, якщо в якості батьків випадково вибираються дві хромосоми з батьківської популяції чисельністю N, то $p_c = 2/N$. Аналогічно, якщо з батьківської популяції чисельністю

N вибирається $2 \cdot z$ хромосом ($z \leq N/2$), які утворюють пари батьків, то $p_c = 2 \cdot z/N$. Звернемо увагу на те, що у випадку коли усі хромосоми поточної популяції об'єднані в пари до схрещування, то $p_c = 1$. Після операції схрещування батьки батьківської популяції заміщаються їх нащадками.

Операція мутації змінює значення генів у хромосомах із заданою ймовірністю p_m. Це призводить до інвертування значень відібраних генів із 0 на 1 і навпаки. Значення p_m, зазвичай, дуже мало, тому мутації піддається лише невелика кількість генів. Схрещування – це ключовий оператор генетичних алгоритмів, що визначає їх можливості та ефективність. Мутація грає більш обмежену роль. Вона вводить у популяцію деяку різноманітність і попереджає втрати, які могли б статися внаслідок виключення якогось значущого гена внаслідок схрещування.

У класичному генетичному алгоритмі виділяються три види операцій: репродукції, схрещування та мутації. Терміни селекція та репродукція в даному контексті використовуються як синоніми. При цьому репродукція в даному випадку пов'язується швидше зі створенням копій хромосом батьківського пулу, тоді як найпоширеніший зміст цього поняття означає процес формування нових особин, що походять від конкретних батьків. Якщо приймаємо таке тлумачення, то оператори схрещування і мутації можна вважати операторами репродукції, а селекція – відбором особин (хромосом) для репродукції.

Розглянемо виконання класичного генетичного алгоритму та послідовність виконання його етапів на якомога простішому прикладі.

Приклад 9.2. Ілюстрація виконання класичного генетичного алгоритму.

Розглянемо дуже спрощений приклад, який передбачає знаходження хромосоми з максимальною кількістю одиниць. Припустимо, що хромосоми складаються з 12 генів, а популяція налічує 8 хромосом. Очевидно, що найкращою буде хромосома, що складається з 12 одиниць. Подивимося, як протікає процес розв'язання цієї досить тривіальної задачі за допомогою генетичного алгоритму.

1. Ініціалізація або вибір вхідної популяції хромосом. Необхідно сформувати вхідну популяцію, тобто випадково згенерувати 8 двійкових послідовностей довжиною 12 бітів.

ch_1 = [111001100101] ch_5= [010001100100]

ch_2 = [001100111010] ch_6 = [010011000101]

ch_3 = [011101110011] ch_7 = [101011011011]

ch_4 = [001000101000] ch_8 = [000010111100]

2. Оцінка пристосованості хромосом у популяції. У спрощеному прикладі вирішується задача знаходження такої хромосоми, яка містить найбільшу кількість одиниць. Тому функція пристосованості визначає кількість одиниць у хромосомі. Позначимо функцію пристосованості символом *F*. Тоді її значення для кожної хромосоми з вихідної популяції будуть такі:

$F(ch_1) = 7$ $F(ch_5)= 4$

$F(ch_2) = 6$ $F(ch_6) = 5$

$F(ch_3) = \mathbf{8}$ $F(ch_7) = \mathbf{8}$

$F(ch_4) = 3$ $F(ch_8) = 5$

Середня пристосованість популяції дорівнює:

$$F_{cp} = (7 + 6 + 8 + 3 + 4 + 5 + 8 + 5) / 8 = 46 / 8 = 5{,}75.$$

Хромосоми ch_3 та ch_7 характеризуються найбільшими значеннями функції пристосованості. У цій популяції вони вважаються найкращими кандидатами для вирішення завдання.

На даному етапі умова зупинки алгоритму не виконується (ми не знайшли хромосому, що складається з 12 одиниць), тому переходимо к наступному кроку алгоритму – до селекції хромосом із поточної популяції.

3. Селекція хромосом. Селекція провадиться методом рулетки. На підставі формул: $v(ch_i) = p_s(ch_i) \cdot 100\%$, $p_s(ch_i) = \frac{F(ch_i)}{\sum_{i=1}^{N} F(ch_i)}$, для кожної з 8 хромосом

поточної популяції (у нашому випадку - вхідної популяції, для якої $N = 8$) отримуємо сектори колеса рулетки, виражені у відсотках:

$v(ch_1) = 15{,}22$ $v(ch_3) = \mathbf{17{,}39}$ $v(ch_5) = 8{,}7$ $v(ch_7) = \mathbf{17{,}39}$

$v(ch_2) = 13{,}04$ $v(ch_4) = 6{,}52$ $v(ch_6) = 10{,}87$ $v(ch_8) = 10{,}87$

Розіграш за допомогою колеса рулетки (рис. 9.7) зводиться до випадкового вибору числа з інтервалу [0, 100], що вказує відповідний сектор на колесі, тобто на конкретну хромосому.

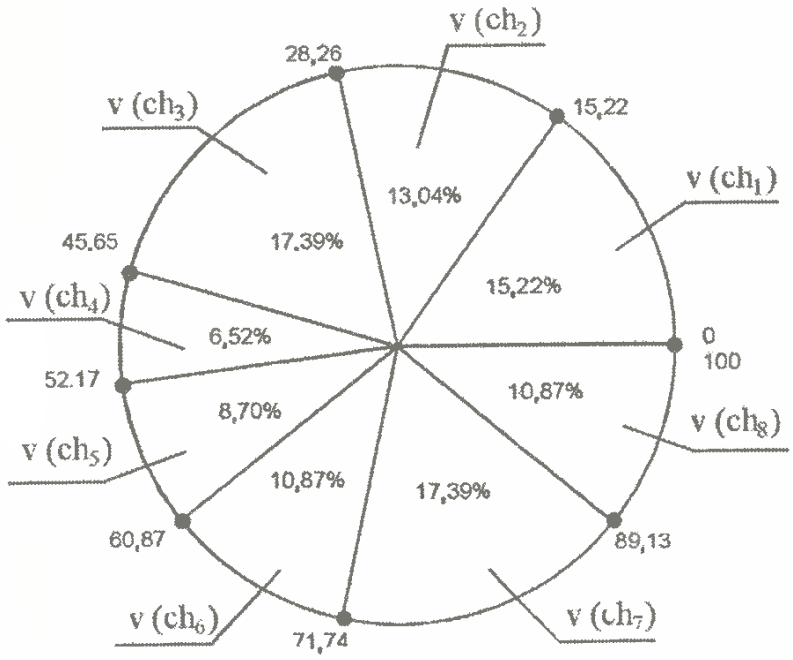


Рис. 9.7. Колесо рулетки.

Припустимо, що розіграно наступні 8 чисел: 79; 44; 9; 74; 44; 86; 48; 23.

Це означає вибір хромосом: ch_7 ch_3 ch_1 ch_7 ch_3 ch_7 ch_4 ch_2

Як видно, хромосома ch_7 була обрана тричі, а хромосома ch_3 – двічі. Зауважимо, що ці хромосоми мають найбільше значення функції пристосованості. Однак обрана і хромосома ch_4 з найменшим значенням функції пристосованості. Всі обрані таким чином хромосоми включаються до так званого батьківського пулу.

4. Застосування генетичних операторів. Припустимо, що жодна з відібраних у процесі селекції хромосом не піддається мутації, і вони становлять популяцію хромосом, призначених для схрещування. Це означає, що ймовірність

схрещування $p_c = 1$, а ймовірність мутації $p_m = 0$. Припустимо, що з цих хромосом випадково сформовані пари батьків

$$ch_2 \text{ і } ch_7; \quad ch_1 \text{ і } ch_7; \quad ch_3 \text{ і } ch_4; \quad ch_3 \text{ і } ch_7.$$

Для першої пари випадково обрана точка схрещування $I_k = 4$, для другої $I_k = 3$, для третьої $I_k = 11$, для четвертої $I_k = 5$. При цьому процес схрещування протікає так:

Перша пара батьків:	Перша пара нащадків
ch_2 = [**0011** || 00111010]	[**0011** || **11011011**]
ch_7 = [1010 || **11011011**]	[1010 || 00111010]
$I_k = 4$	
Друга пара батьків:	Друга пара нащадків:
ch_1 = [**111** || 001100101]	[**111** || **011011011**]
ch_7 = [101 || **011011011**]	[101 || 001100101]
$I_k = 3$	
Третя пара батьків	Третя пара нащадків:
ch_3 = [**01110111001** || 1]	[**01110111001** || **0**]
ch_4 = [00100010100 || **0**]	[00100010100 || 1]
$I_k = 11$	
Четверта пара батьків:	Четверта пара нащадків:
ch_3 = [**01110** || 1110011]	[**01110** || **1011011**]
ch_7 = [10101 || **1011011**]	[10101 || 1110011]
$I_k = 5$	

В результаті виконання оператора схрещування виходять 4 пари нащадків.

Якби при випадковому підборі пар хромосом для схрещування були об'єднані, наприклад, ch_3 з ch_3; ch_4 з ch_7 замість ch_3 з ch_4; ch_3 з ch_7, а інші пари залишилися без зміни, то схрещування ch_3 з ch_3 дало б дві такі ж самі хромосоми незалежно від розіграної точки схрещування. Це означало б отримання двох нащадків, ідентичних своїм батькам. Зауважимо, що така ситуація найбільш

вірогідна для хромосом з найбільшим значенням функції пристосованості, тобто такі хромосоми отримують найбільші шанси на перехід у нову популяцію.

5. Формування нової популяції. Після виконання операції схрещування ми отримуємо наступну популяцію нащадків (на відміну від хромосом попередньої популяції позначення новосформовані хромосоми – *Ch*):

Ch_1 = [001111011011] Ch_5 = [011101110010]

Ch_2 = [101000111010] Ch_6 = [001000101001]

Ch_3 = [111011011011] Ch_7 = [011101011011]

Ch_4 = [101001100101] Ch_8 = [101011110011]

Далі здійснюється повернення другого етапу, тобто до оцінки пристосованості хромосом із знов сформованої популяції, яка стає поточною. Значення функцій пристосованості хромосом цієї популяції становлять

$F(Ch_1) = 8$ $F(Ch_3) = \mathbf{9}$ $F(Ch_5) = 7$ $F(Ch_7) = \mathbf{8}$

$F(Ch_2) = 6$ $F(Ch_4) = 6$ $F(Ch_6) = 4$ $F(Ch_8) = 8$

Середня пристосованість нової популяції дорівнює:

$$F_{ср} = (8 + 6 + 9 + 6 + 7 + 4 + 8 + 8) / 8 = 56 / 8 = 7.$$

Зауважимо, що популяція нащадків характеризується набагато вищим середнім значенням функції пристосованості, ніж популяція батьків.

Звернемо увагу, що в результаті схрещування отримана хромосома Ch_3 з найбільшим значенням функції пристосованості, якої не мала жодна з хромосом батьківської популяції. Однак могло статися і протилежне, оскільки після схрещування на першій ітерації хромосома, що в батьківській популяції характеризувалася найбільшим значенням функції пристосованості, могла просто «загубитися». Крім цього середня пристосованість нової популяції все одно виявилася б вищою за попередню, а хромосоми з великими значеннями функції пристосованості мали б шанси з'явитися в наступних поколіннях.

9.3. Схеми хромосом

Поняття **схема хромосоми** було запроваджено для визначення множин хромосом, які мають деякі загальні властивості (подібні одна до одної). Якщо алелі приймають значення 0 або 1 (розглядаються хромосоми з двійковим алфавітом), то схема представляє собою множину хромосом, що містять 0 та 1 на деяких заздалегідь визначених позиціях. При розгляді схем хромосом зручно використовувати розширений алфавіт {0, 1, *}, у якому крім 0 і 1 введено додатковий символ «*», що означає будь-яке допустиме значення (тобто 0 або 1). Символ «*» у конкретній позиції означає «все одно» (*don't care*). Наприклад,

$$(10*1) = \{10\mathbf{0}1, 10\mathbf{1}1\}$$

$$(*01*10) = \{\mathbf{0}01\mathbf{0}10, \mathbf{0}01\mathbf{1}10, \mathbf{1}01\mathbf{0}10, \mathbf{1}01\mathbf{1}10\}$$

Вважається, що **хромосома належить до схеми (або хромосома відповідає схемі, або хромосома представляє схему)**, якщо для кожної j-ї позиції (локусу), $j = 1, 2,\ldots, L$, де L - довжина хромосоми; символ, що займає j-ю позицію хромосоми, відповідає символу, що займає j-ю позицію схеми, причому символу «*» відповідають як 0, так і 1. Зазначимо, якщо у схемі є m символів «*», то ця схема містить 2^m хромосом. Крім того, кожна хромосома довжиною L належить до 2^L схем. У табл. 9.1 та табл. 9.2 представлені схеми, до яких належать хромосоми довжиною 2 та 3 відповідно. Ланцюжки довжиною 2 відповідають 4-м різним схемам (табл. 9.1), а ланцюжки довжиною 3 – восьми схемам (табл. 9.2). Всі схеми різні між собою. Основними характеристиками схем є порядок та довжина.

Табл. 9.1 – Схеми хромосом з довжиною 2.

Ланки	Схеми хромосом			
	1	2	3	4
00	**	*0	0*	00
01	**	*1	0*	01
10	**	*0	1*	10
11	**	*1	1*	11

Табл. 9.2 – Схеми хромосом з довжиною 3.

Ланки	Схеми хромосом							
	1	2	3	4	5	6	7	8
000	***	**0	*0*	0**	*00	0*0	00*	000
001	***	**1	*0*	0**	*01	0*1	00*	001
010	***	**0	*1*	0**	*10	0*0	01*	010
011	***	**1	*1*	0**	*11	0*1	01*	011
100	***	**0	*0*	1**	*00	1*0	10*	100
101	***	**1	*0*	1**	*01	1*1	10*	101
110	***	**0	*1*	1**	*10	1*0	11*	110
111	***	**1	*1*	1**	*11	1*1	11*	111

Порядок схеми хромосоми $o(S)$ (*order*) – це число фіксованих бітів (кількість постійних позицій: кількість 0 або 1 у схемі при алфавіті {0,1,*}) у схемі S.

Наприклад:

$$o(10*1) = 3;\ o(*01*10) = 4;\ o(**0*1*) = 2;\ o(*101**) = 3.$$

Порядок схеми $o(S)$ дорівнює довжині L за вирахуванням кількості символів *, що легко перевірити на представлених прикладах (для L= 4 з одним символом * і для L = 6 з двома, чотирма та трьома символами *). Легко помітити, що порядок схеми, що складається виключно із символів *, дорівнює нулю, тобто $o(****) = 0$, а порядок схеми без єдиного символу * дорівнює L; наприклад, o(10011010) = 8. Порядок схеми $o(S)$ – це ціле число з інтервалу $[0, L]$.

Довжина схеми $\delta(S)$ (*defining length*) (не плутати з довжиною L) – це відстань між першим і останнім постійним символом в схемі S (тобто різниця між правою і лівою крайніми позиціями, що містять постійні символи).

Наприклад:

$\delta(10*1) = 4 - 1 = 3;$ $\delta(*01*10) = 6 - 2 = 4;$

$\delta(**0*1*) = 5 - 3 = 2;$ $\delta(*101**) = 4 - 2 = 2;$

$\delta(***001*110) = 10 - 4 = 6.$

Вважається, що схема з однією фіксованою позицією має нульову довжину. Довжина схеми – це ціле число з інтервалу [0, L – 1]. Зазначимо, що довжина схеми з постійними символами на першій та останній позиції дорівнює L – 1 (як у першому з наведених прикладів). Довжина схеми з єдиною постійною позицією дорівнює нулю, зокрема, δ(**1*) = 0. Довжина схеми характеризує змістовність та визначає концентрацію інформації, що міститься у схемі.

Порядок і довжина схеми використовуються для визначення ймовірності мутації і кросинговера відповідно.

У зв'язку з тим, що більш пристосовані особини (хромосоми) описуються схемою з більшою пристосованістю, мета роботи генетичного алгоритму полягає у пошуку двійкового рядка певного виду з усієї множини бінарних рядків довжини m. Тоді простір пошуку складає 2^m рядків, а його розмірність дорівнює m. Схема відповідає деякій гіперплощині в цьому просторі. Дане твердження можна проілюструвати в такий спосіб. Нехай розрядність хромосоми дорівнює 3 тоді всього можна закодувати $2^3 = 8$ рядків. Представимо куб у тривимірному просторі (рис. 9.8). Позначимо вершини цього куба трирозрядними бінарними рядками так, щоб мітки сусідніх вершин відрізнялися рівно на один розряд, причому вершина з міткою "000" була б на початку координат.

Якщо взяти схему виду (∗∗0), вона опише ліву грань куба, а схема (∗10) – верхнє ребро цієї грані. Очевидно, що схема (∗∗∗) відповідає усьому простору. Якщо взяти двійкові рядки завдовжки 4 розряди, то розбиття простору схемами можна зобразити на прикладі чотиривимірного куба з названими вершинами, так як це показано на рис. 9.9.

Тут схемі (∗1∗∗) відповідає гіперплощина, що включає задні грані зовнішнього та внутрішнього куба (рис. 9.9), а схемі (∗ ∗ 10) – гіперплощина з верхніми ребрами лівих граней обох кубів (рис. 9.9). Таким чином терміни «гіперплощина» і «схема» взаємозамінні.

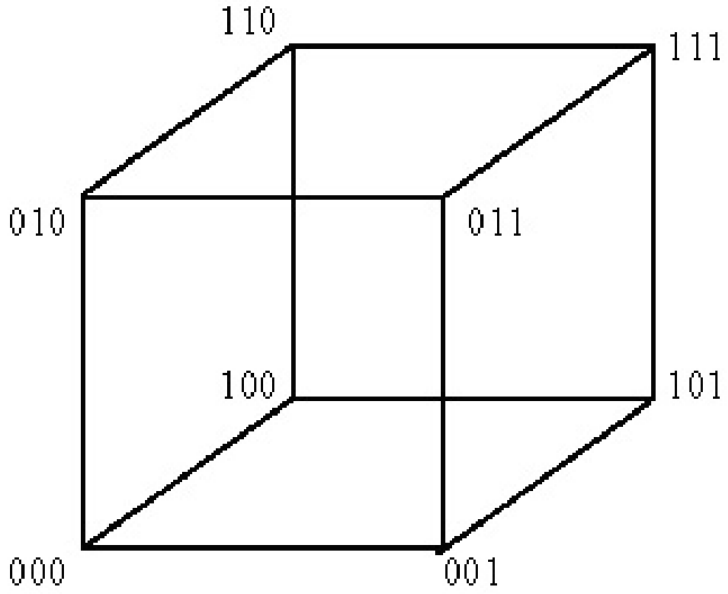


Рис. 9.8. Куб у тривимірному просторі.

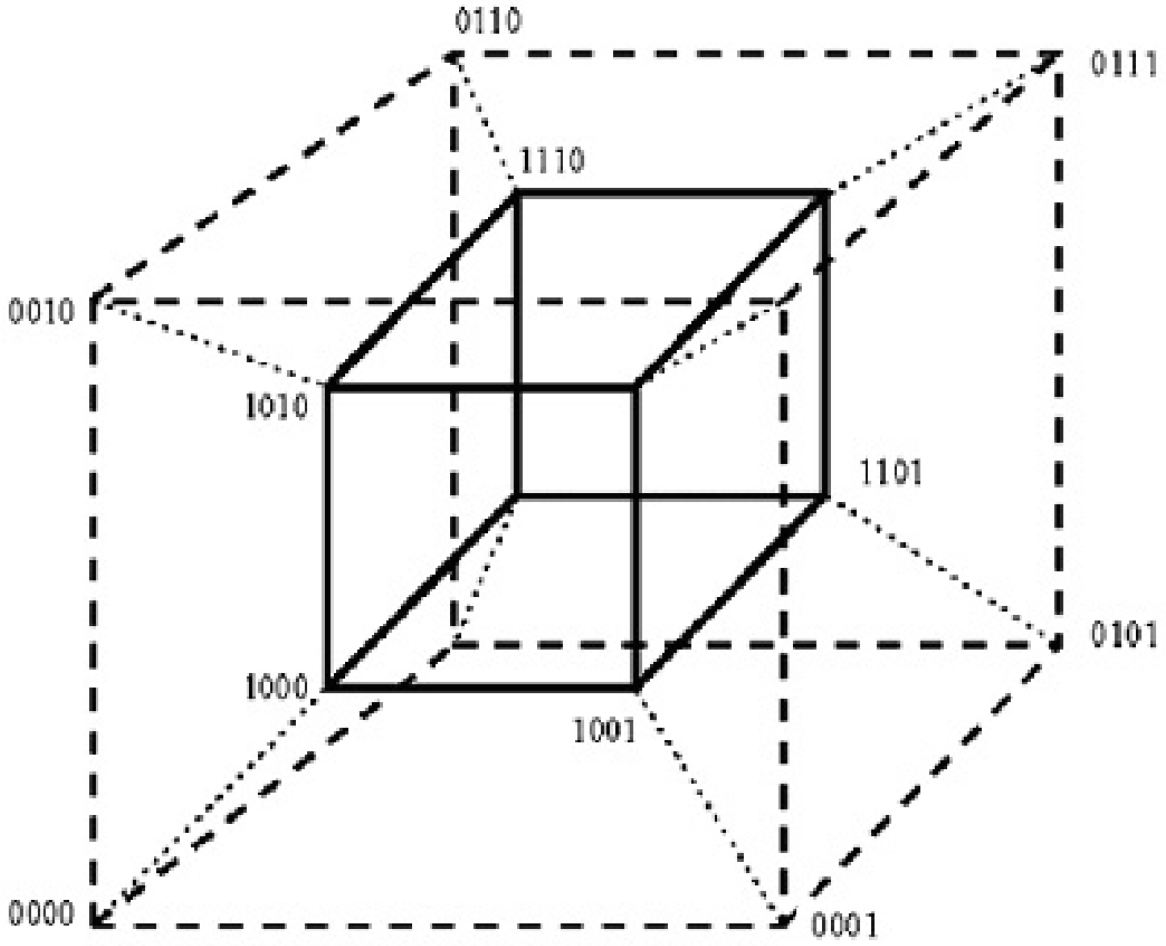


Рис. 9.9. Чотиривимірний куб.

Розбиття простору пошуку можна уявити і інакше (рис. 9.10). Представимо координатну площину, в якій по одній осі ми відкладатимемо значення двійкових рядків, а по іншій – значення цільової функції.

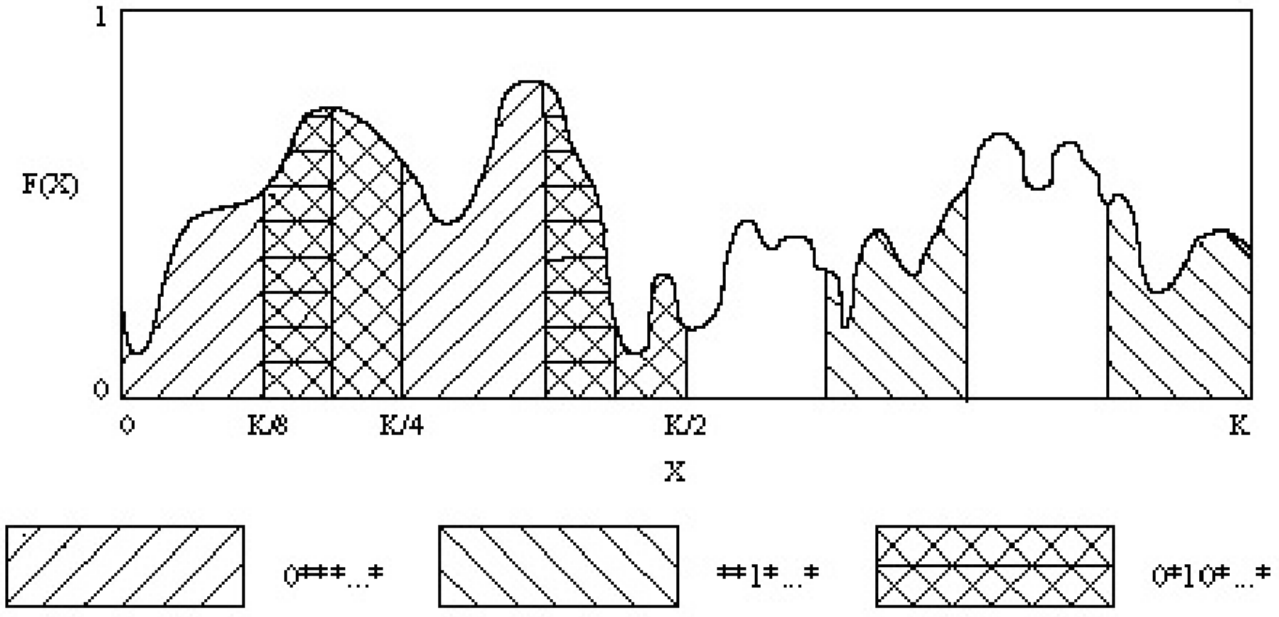


Рис. 9.10. Розбиття простору пошуку.

Ділянки простору, заштриховані різним стилем, відповідають різним схемам. Число *K* у правій частині горизонтальної осі відповідає максимальному значенню бінарного рядка – [111 ... 111]. З рис. 9.10 видно, що схема (0∗∗∗...∗) покриває всю ліву половину відрізка, схеми (∗∗1∗...∗) – 4 ділянки шириною в одну восьму частину, а схема (0∗10∗...∗) – ліві половини ділянок, які знаходяться на перетині перших двох схем. Таким чином, у цьому випадку відбувається розбиття простору.

Будівельні блоки розвитку популяції вважаються схеми, що мають:

• високу пристосованість;

• низький порядок;

• коротку довжину.

Пристосованість схеми визначається як середня пристосованість рядків, які її містять. Після процедури відбору залишаються лише рядки з вищою

пристосованістю. Отже, рядки, які є прикладами схем з високою пристосованістю, вибираються частіше. Кросинговер рідше руйнує схеми з більш короткою певною довжиною, а мутація рідше руйнує схеми із низьким порядком. Тому такі схеми мають більше шансів переходити з покоління в покоління. Холланд у 1992 році показав, що в той час, як генетичний алгоритм явно обробляє n рядків на кожному поколінні, неявно обробляються близько n^3 таких коротких схем низького порядку та з високою пристосованістю (корисних схем). Він називав це явище неявним паралелізмом (*Implicit parallelism*). Для вирішення реальних завдань, присутність неявного паралелізму означає, що велика популяція має більше можливостей локалізувати рішення експоненційно швидше за популяцію з меншим числом особин. Дане твердження відоме як «теорема схем».

9.4. Теорема схем

Теорема схем показує, яким чином класичний генетичний алгоритм експоненційно збільшує кількість прикладів корисних схем хромосом які є будівельними блоками розвитку популяції, що призводить до знаходження рішення необхідного завдання.

Нехай $m(H, t)$ – число прикладів схеми хромосоми H у t-му поколінні. Обчислимо очікуване число прикладів H у наступному поколінні, тобто $m(H, t + 1)$ у термінах $m(H, t)$. Класичний генетичний алгоритм кожному рядку при відборі особин у популяції ставить у відповідність ймовірність її «виживання» пропорційно до їх пристосованості (наприклад, як у методі рулетки). Очікується, що схема H може бути обрана $m(H, t)\cdot(f(H)/f_{ср})$ раз, де $f_{ср}$ – середня пристосованість популяції, а $f(H)$ – середня пристосованість тих рядків у популяції, які є прикладами H.

Імовірність того, що одноточковий кросинговер зруйнує схему дорівнює ймовірності того, що точка розриву потрапить між певними бітами. Імовірність того, що H «переживає» кросинговер не менше за $1 - p_c\cdot(\delta(H)/(L - 1))$,

де p_c – ймовірність кросинговера. Ця ймовірність –це нерівність, оскільки схема зможе вижити, якщо в кросинговері також брав участь приклад подібної схеми.

Імовірність того, що H переживе одноточкову мутацію $(1 - p_m)^{o(H)}$, де p_m – ймовірність мутації. Цей вираз можна апроксимувати як $(1 - o(H))$ для малих значень p_m та $o(H)$. Добуток очікуваного числа відборів та ймовірностей виживання відомий як **теорема схем**:

$$\langle m(H, t+1)\rangle \geqslant m(H, t)\,\frac{f(H, t)}{\bar{f}(t)}\left[1 - p_{\mathrm{c}}\frac{\delta(H)}{\ell - 1}\right](1 - p_{\mathrm{m}})^{o(H)}.$$

Теорема схем показує, що будівельні блоки ростуть по експоненті, в той час як схеми з пристосованістю нижче за середню розпадаються з тією ж швидкістю. Вчений Голдберг у своїх дослідженнях теореми схем висуває гіпотезу будівельних блоків, яка полягає в тому, що «будівельні блоки об'єднуються, щоб сформувати найкращі хромосоми». Тобто рекомбінація та експоненційне зростання будівельних блоків веде до формування найкращих будівельних блоків.

У той час як теорема схем передбачає зростання прикладів хороших схем, сама теорема дуже спрощено описує поведінку генетичного алгоритму. Насамперед, $f(H)$ і $f_{\text{ср}}$ не залишаються незмінними від покоління до покоління. По-друге, теорема схем пояснює втрати схем, але не появу нових. Нові схеми часто створюються кросинговером та мутацією. Крім того, в результаті еволюції члени популяції стають все більш схожими один на одного так, що зруйновані схеми хромосом будуть відразу ж відновлять. Нарешті, доказ теореми схем побудований на елементах теорії ймовірність і, отже, не враховує розкид значень. В багатьох завданнях розкид значень придатності схеми може бути досить великий, роблячи процес формування схем дуже складним.

Істотна різниця придатності схеми може призвести до неоптимального рішення. Незважаючи на простоту, теорема схем визначає кілька важливих аспектів поведінки генетичного алгоритму. Мутації з більшою ймовірністю руйнують схеми

високого порядку, в той час як кросинговер з більшою ймовірність руйнує схеми з більшою певною довжиною. Коли відбувається відбір, популяція сходиться пропорційно відношенню пристосованості кращої особини, до середньої пристосованості популяції: це відношення називається – **мірою тиску відбору** (*selection pressure*). Збільшення p_c або p_m, або зменшення тиску відбору веде до збільшує простір пошуку, але не дозволяє використовувати всі хороші схеми, які є у популяції. Зменшення p_c або p_m, або збільшення тиску вибору веде до покращення використання знайдених схем, але гальмує дослідження простору рішень у пошуках нових гарних схем. Моделювання генетичного алгоритму передбачає збереження рівноваги між тим та іншим, що зазвичай відомо як проблема «***балансу дослідження та використання***».

9.5. Переваги та недоліки генетичних алгоритмів

Перелік переваг притаманний генетичним алгоритмам (ГА):

1. Генетичні алгоритми можуть бути використані для широкого класу завдань.

2. Генетичні алгоритми придатні для вирішення великомасштабних проблем оптимізації.

3. Генетичні алгоритми не накладають жодних обмежень на функції до яких вони можуть бути застосовані.

4. Генетичні алгоритми відносно стійкі до потрапляння у локальні оптимуми функцій.

5. Розриви, що існують на поверхні рішення, мають незначний вплив на повну ефективність оптимізації.

6. Генетичні алгоритми можуть використовуватися в задачах із середовищем, що змінюється.

7. Генетичні алгоритми досить прості у реалізації.

Труднощі у практичному використанні ГА:

1. Не для всіх завдань вдається знайти оптимальне кодування параметрів.

2. За допомогою ГА проблематично знайти точний глобальний оптимум.

Наприклад: функція Катковника (рис. 9.11 та рис. 9.12):

$$I(x_1, x_2) = 0{,}5(x_1^2 + x_2^2)\left[2A + A\cos(1{,}5x_1)\cos(3{,}14x_2) + A\cos\left(\sqrt{5}x_1\right)\cos(3{,}5x_2)\right],$$

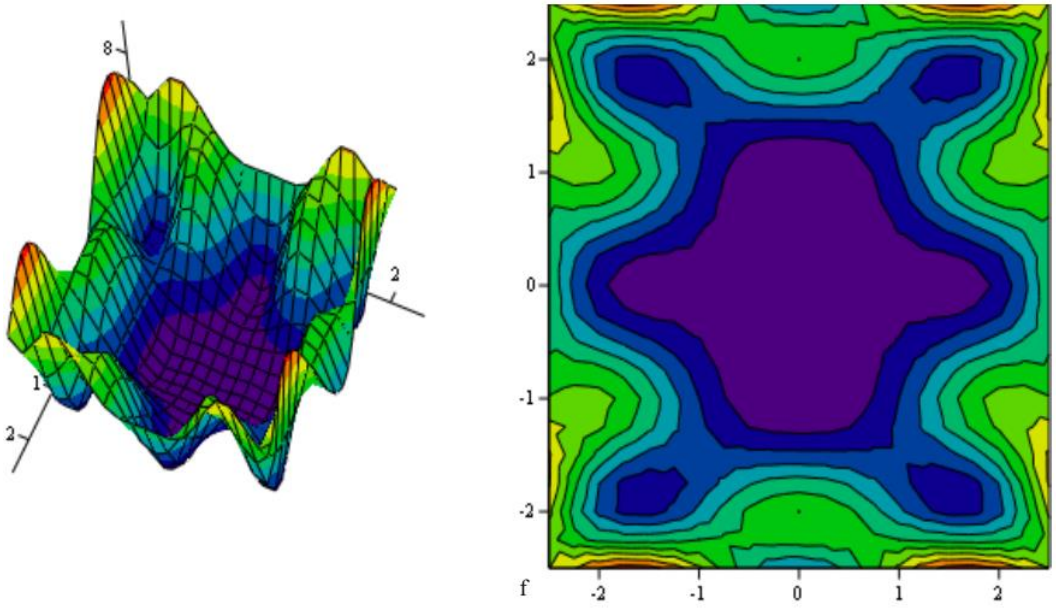


Рис. 9.11. Функція Катковника при $A = 0{,}8$;
$x_1, x_2 \in [-2{,}5; 2{,}5]; \min = I(0,0) = 0.$

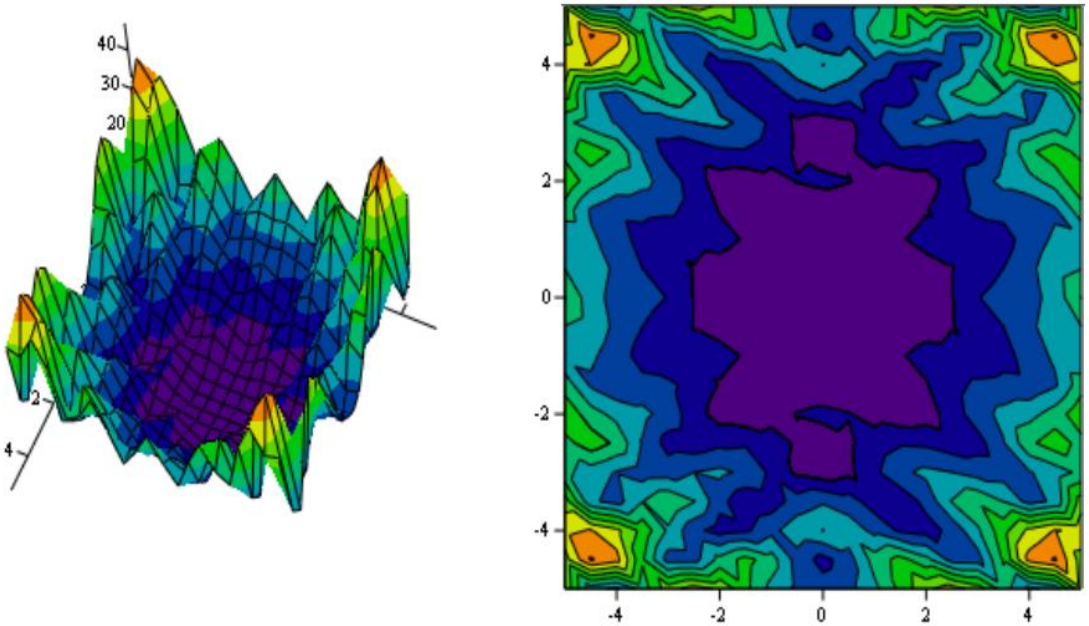


Рис. 9.12. Функція Катковника при $A = 0{,}8$; $x_1, x_2 \in [-5; 5]; \min = I(0,0) = 0.$

3. ГА неефективно застосовувати у разі оптимізації функції, яка потребує для цього багато часу на обчислення.

Наприклад: функція Растригіна з поворотом осей (рис. 9.13):

$$I(x,y) = (0{,}1 \cdot K_x \cdot A)^2 + (0{,}1 \cdot K_y \cdot B)^2 -$$

$$-4\cos(0{,}8 \cdot K_x \cdot A) - 4\cos\big(0{,}8 \cdot K_y \cdot B\big) + 8,$$

де $A = x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha),\ B = x \cdot \sin(\alpha) - y \cdot \cos(\alpha)$;

K_x, K_y – коефіцієнти розтягування та стискання по осям *x*, *y*;

α – кут повороту, $\alpha = \frac{\pi}{2}$;

$kx = 1{,}5;\ ky = 0{,}8,\ x, y \in [-16{,}16]; \min = I(0,0) = 0.$

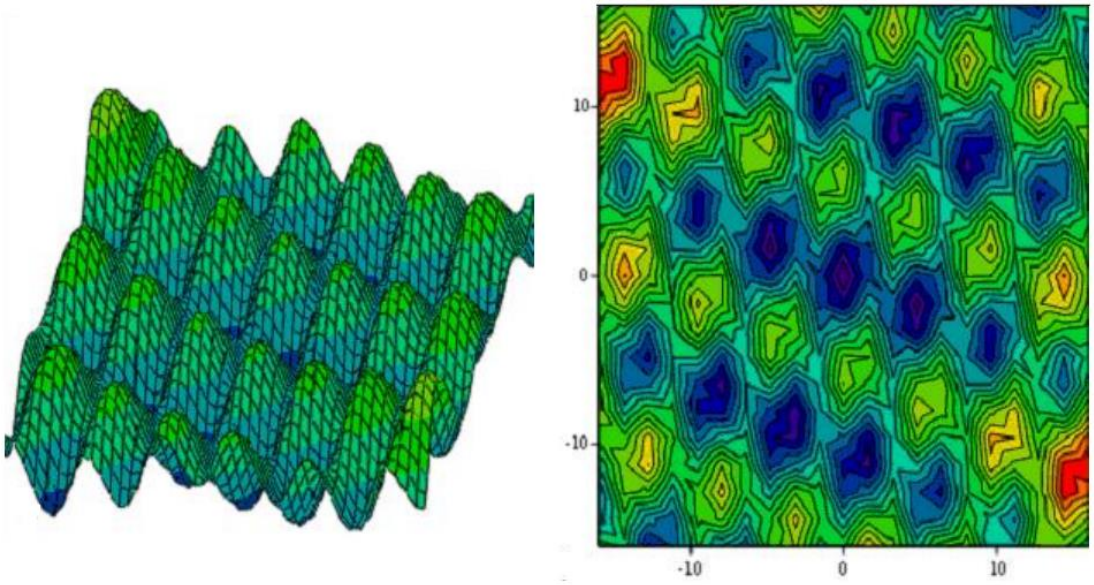


Рис. 9.13. Функція Растригіна.

4. ГА складно знайти всі можливі розв'язки задачі.

Наприклад, функція «Сомбреро» (рис. 9.14):

$$I(x,y) = \frac{1 - \sin^2\big(\sqrt{x^2 + y^2}\big)}{1 + 0{,}001 \cdot (x^2 + y^2)},$$

$$x, y \in [-10{,}10], \min = I(0{,}0) = 0.$$

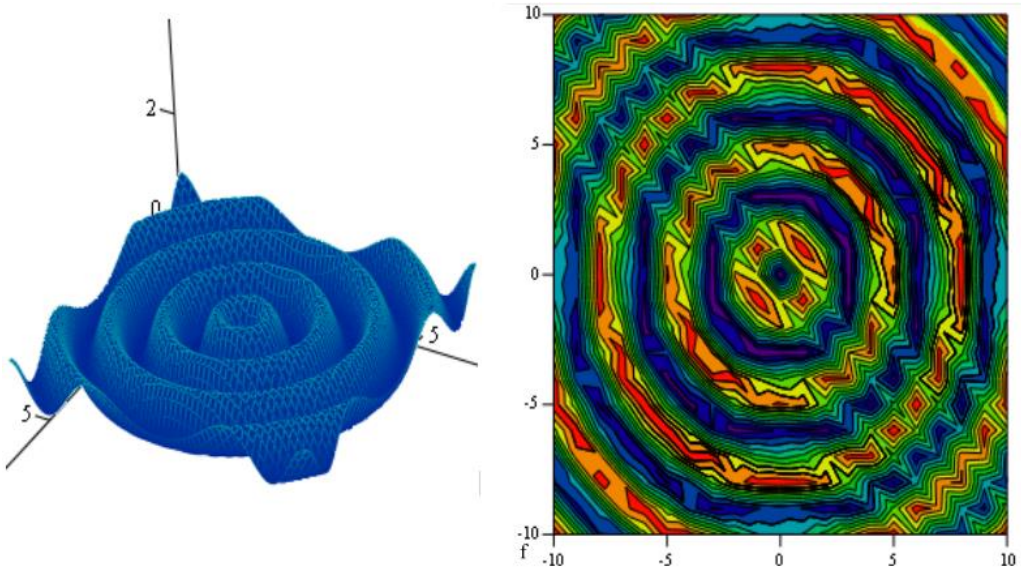


Рис. 9.14. Функція «Сомбреро».

5. При пошуку екстремумів у багатоекстремальних функцій ГА стикається з безліччю атракторів (тобто множина точок у фазовому просторі, до якої збігаються функція).

Приклади багатоекстремальних функцій.

На графіку функції Растригіна від однієї змінної (рис. 9.15):

$$I(x, y) = 0{,}1x^2 + 0{,}1y^2 - 4\cos(0{,}8 \cdot x) - 4\cos(0{,}8 \cdot y) + 8,$$

$$x, y \in [-16{,}16], \min = I(0{,}0) = 0,$$

видно, що дійсний мінімум досягається лише при x = 0, при інших значеннях x можуть бути знайдені локальні екстремуми.

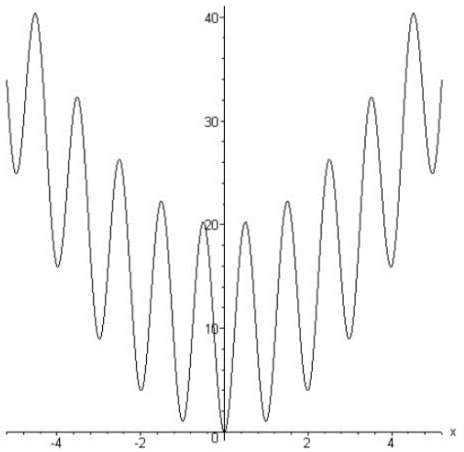


Рис. 9.15. Функція Растригіна від однієї змінної

Аналогічна ситуація спостерігається і у разі побудові багатоекстремальних функцій від більшої кількості змінних (рис. 9.16 – рис. 9.19).

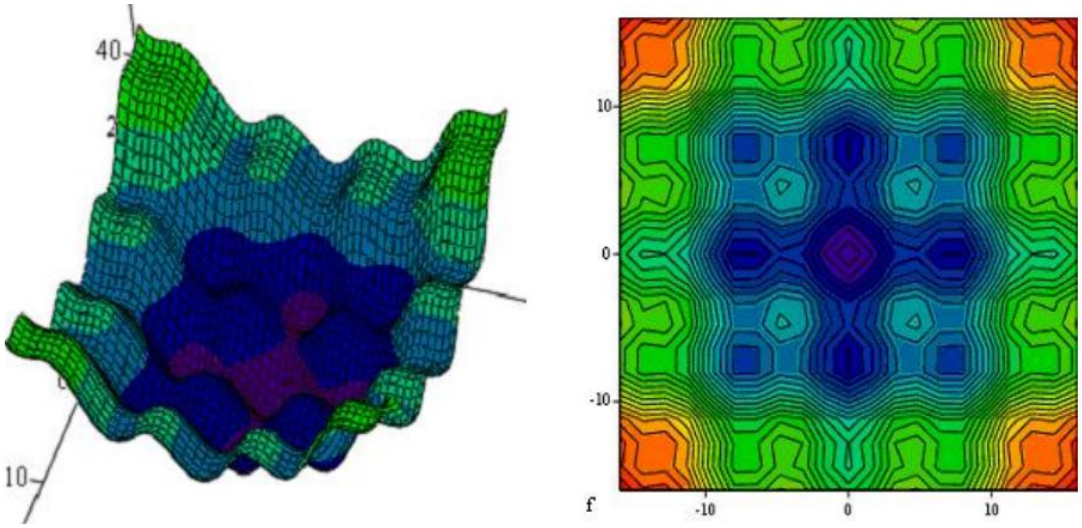


Рис. 9.16. Багатоекстремальна функція від двох змінних.

Наприклад:

функції Гріванка (рис. 9.17):

$$I(x,y) = \frac{-10}{0{,}005(x^2+y^2) - \cos(x)\cos\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + 2} + 10,$$

$$x, y \in [-16{,}16], \min = I(0{,}0) = 0;$$

мультиплікативно-потенційна функція (рис. 9.18):

$$I(x_1, x_2) = -z(x_1)z(x_2);$$

$$z(x) = -\frac{1}{(x-1)^2 + 0{,}2} - \frac{1}{2(x-2)^2 + 0{,}15} - \frac{1}{3(x-3)^2 + 0{,}3},$$

$$x_1, x_2 \in [0{,}4]; \min = I(2,2) = -60{,}8;$$

та адитивно-потенційних функцій (рис. 9.19):

$$I(x_1, x_2) = z(x_1) + z(x_2);$$

$$z(x) = -\frac{1}{(x-1)^2 + 0{,}2} - \frac{1}{2(x-2)^2 + 0{,}15} - \frac{1}{3(x-3)^2 + 0{,}3},$$

$$x_1, x_2 \in [0{,}4]; \min = I(2,2) = -15{,}6.$$

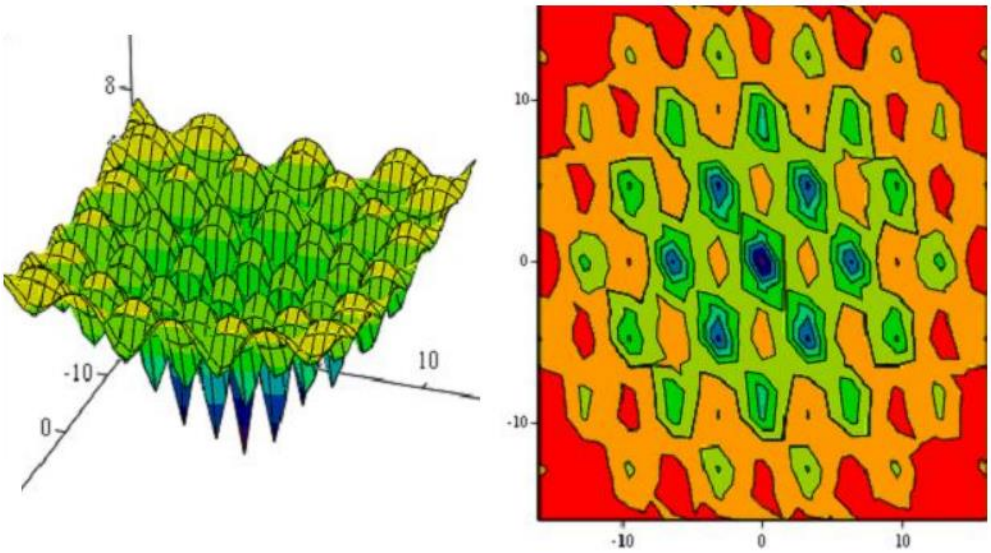


Рис. 9.17. Функція Гріванка (*Griewank*).

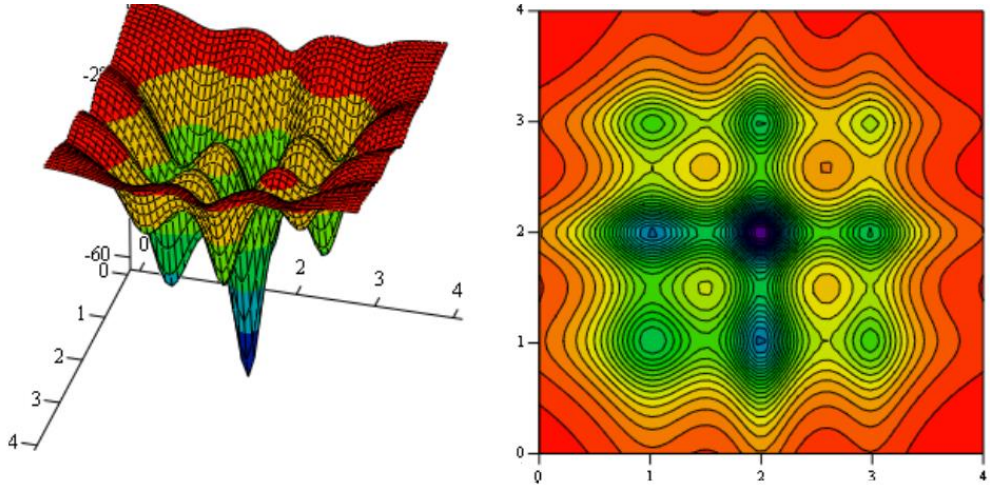


Рис. 9.18. Мультиплікативно-потенційна функція.

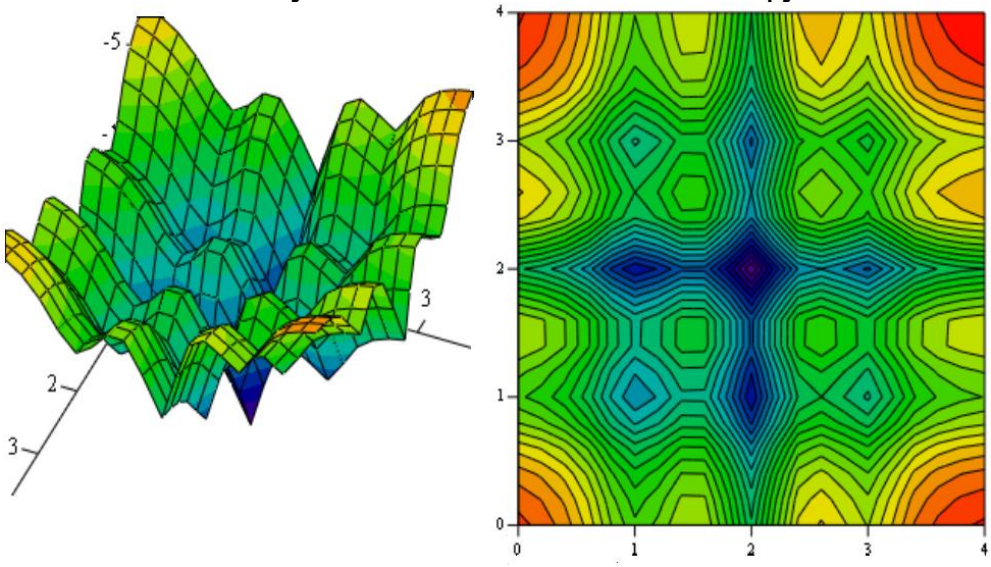


Рис. 9.19. Адитивна потенційна функція.

6. ГА важко застосувати для ізольованих функцій. Ізольованість («пошук голки в стозі сіна») – проблема для будь-якого методу оптимізації, оскільки функція не надає жодної інформації, що підкаже в якій стороні шукати екстремум. Лише випадкове потрапляння особини до глобального екстремуму може вирішити завдання.

Приклади ізольованих функцій (рис. 9.20) – функція Де Йонг 2:

$$I(x,y) = \frac{-100}{100(x^2 - y) + (1-x)^2 + 1} + 100, \quad x, y \in [-5{,}5]; \min = I(1,1) = 0.$$

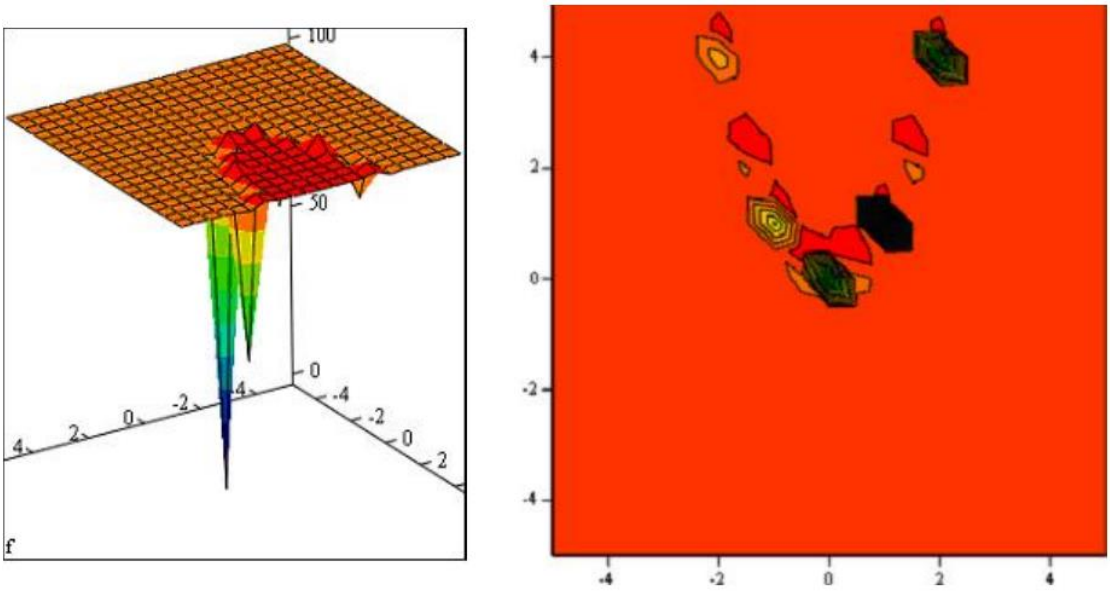


Рис. 9.20. Ізольована функція Де Йонг 2.

7. Додатковий шум розкидає значення пристосованості схем, тому часто навіть хороші схеми малого порядку не проходять відбір, що уповільнює пошук рішення ГА.

Приклад функції з додатковим шумом (рис. 9.21):

$$I(x_1, x_2) = 0{,}5(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) \cdot [1 + 0{,}5\cos(1{,}5x_1)\cos(3{,}2x_1 x_2)\cos(3{,}14x_2) +$$
$$+0{,}5\cos(2{,}2x_1)\cos(4{,}8x_1 x_2)\cos(3{,}5x_2)],$$
$$x_1, x_2 \in [0{,}4];$$
$$\min = I(0,0) = 0.$$

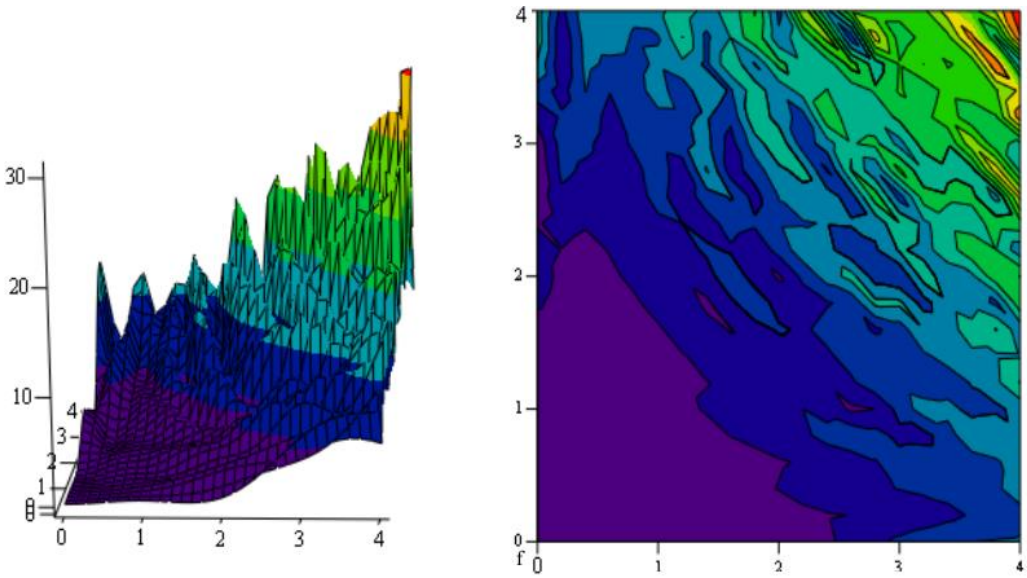


Рис. 9.21. Приклад функції з додатковим шумом.

8. Для деяких функцій схеми малого порядку відводять популяцію до локального оптимуму. Таку характеристику функції називають оманливістю (*deception*).

Приклад функції з багатьма локальними оптимумами це функція Шекеля (рис. 9.22):

$$\frac{1}{I(x_1, x_2)} = \frac{1}{K} + \sum_{j=1}^{25} \frac{1}{c_j + \sum_{i=1}^{2} (x_i - a_{ij})^6};$$

$$K = 500;\ c_j = j;\ \ x_1, x_2 \in [-65{,}65];\ \ \min = I(-32, 32) \approx 1.$$

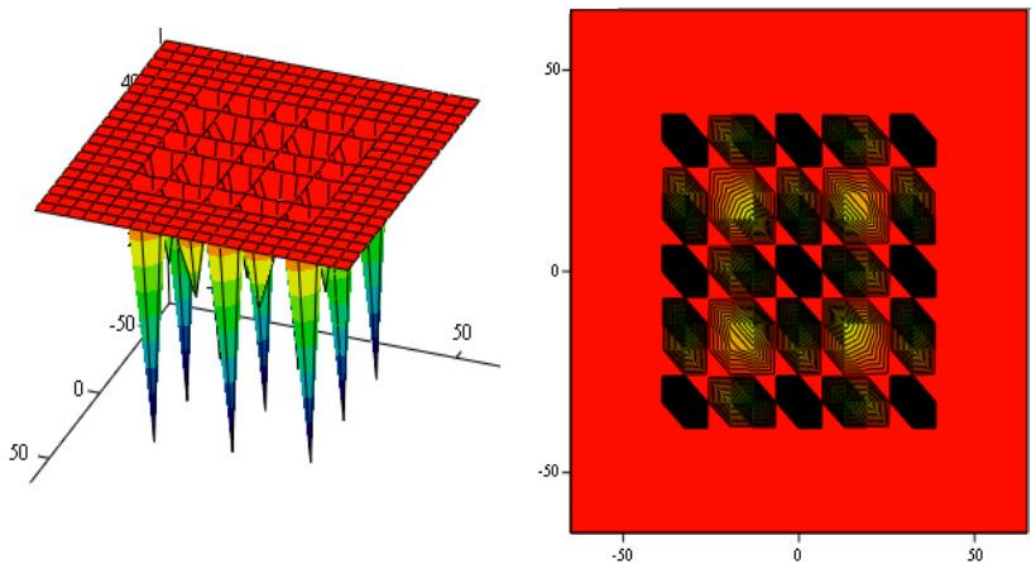


Рис. 9.22. Оманлива характеристична функція Шекеля.

З проведеного аналізу можна дійти висновку, що генетичні алгоритми є потужним обчислювальним засобом, який може застосовуватися у різноманітних оптимізаційних завданнях.

В даний час генетичні алгоритми широко використовуються для вирішення наступних завдань: пошук глобальних екстремумів багатопараметричних функцій; апроксимація функцій; завдання пошуку найкоротшого шляху; завдання розміщення; налаштування штучної нейронної мережі; ігрові стратегії; машинне навчання та інші.

Контрольні запитання:

1. Які класи задач можна вирішувати за допомогою генетичних алгоритмів?
2. Які основні поняття використовуються у генетичних алгоритмах і як вони взаємодіють між собою?
3. Які параметри генетичного алгоритму потрібно налаштувати для вирішення конкретної задачі?
4. Як визначити початкову популяцію для класичного генетичного алгоритму?
5. Як використовувати функцію пристосованості для оцінки якості кожної особини у популяції?
6. Які існують методи селекції хромосом у популяції?
7. Як застосування генетичних операторів до хромосом призводить до формування нової популяції?
8. Що являється головним фактором еволюції хромосом у популяції?
9. Як впливає ймовірність мутації на швидкість збіжності генетичного алгоритму?
10. Які переваги та недоліки притаманні генетичним алгоритмам?

РОЗДІЛ 10

МЕТОДИ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЗНАНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ НЕЧІТКИХ МНОЖИН ТИПУ 2

10.1. Основні визначення нечітких множин типу 2

Нечіткі множини, що розглядалися в попередніх лекціях, називаються нечіткими множинами типу 1. Вони характеризуються функціями приналежності, причому значення цієї функції для деякого елемента x називається ступенем приналежності цього елемента до нечіткої множини. У таких нечітких множин (типу 1) ступінь належності виражається дійсним числом, що приймає значення в інтервалі [0, 1]. У цьому розділі ми представимо іншу концепцію нечіткого опису невизначеності. Відповідно до цієї концепції ступінь приналежності не виражається числом, а має нечіткий характер. На рис. 10.1 представлена графічна ілюстрація нечітких множин A_1, ..., A_5 типу 1, а також відповідні їм нечіткі множини $\tilde{A}_1$, ..., $\tilde{A}_5$ типу 2.

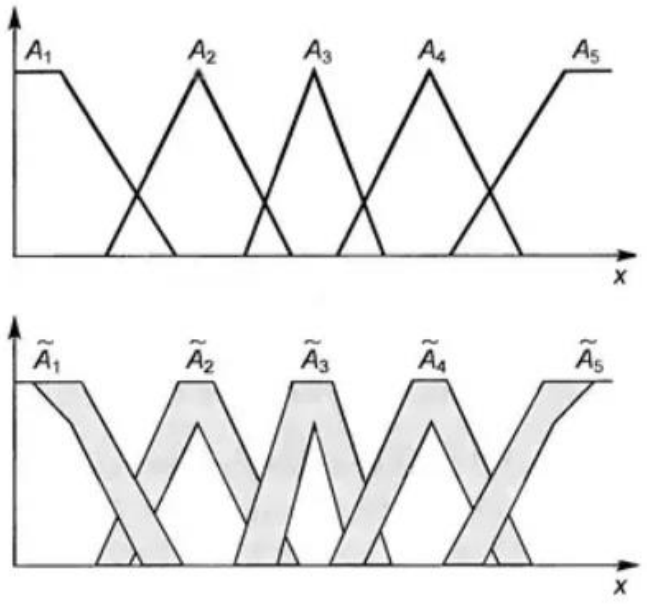


Рис. 10.1. Нечіткі множини типу 1 та типу 2.

Звернемо увагу, що у разі нечітких множин типу 2 ми не можемо говорити про однозначно визначене значення функції для довільного елемента *x*. Іншими словами, на противагу нечітким множинам типу 1 ступінь належності не є числом.

Нечіткою множиною $\tilde{A}$ типу 2, яка визначена на просторі рішень *X*, що позначається $\tilde{A} \subseteq X$, називається множина пар

$$\{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\},$$

де *x* – елемент нечіткої множини, а його ступінь приналежності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ це нечітка множина $\tilde{A}$ типу 1, яка визначена на інтервалі $J_x \subset [0, 1]$, тобто:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \int_{u \in J_x} \frac{f_x(u)}{u},$$

де f_x – **функція приналежності другого порядку**, а її значення $f_x(u)$ – **ступень приналежності другого порядку**, *u* – аргумент функції приналежності другого порядку. Інтервал J_x, представляє собою область визначення функції приналежності другого порядку f_x, що називається **основною приналежністю** елемента *x*.

Нечітку множину $\tilde{A}$ типу 2 у безперервному випадку можна записати таким чином:

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x},$$

або

$$\tilde{A} = \int \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} = \int_{x \in X} \frac{\int_{u \in J_x} \frac{f_x(u)}{u}}{x}, \; J_x \subseteq [0,1].$$

У дискретному випадку нечітку множину $\tilde{A}$ типу 2 можна представити наступним чином:

$$\tilde{A} = \sum_{x \in X} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}; \; \mu_{\tilde{A}}(x) = \sum_{u \in J_x} \frac{f_x(u)}{u}.$$

Приклад 10.1.

На рис. 10.2, *а* проілюстрований спосіб побудови нечіткої множини типу 2. Для елемента x_1, отримуємо інтервал J_{x_1} = [0,4; 0,7], що являє собою область визначення належності другого порядку f_{x_1}. На рис. 10.2 *б, в, г* показані можливі другорядні функції приналежності трикутного, інтервального, а також гаусівського типу з кінцевим носієм.

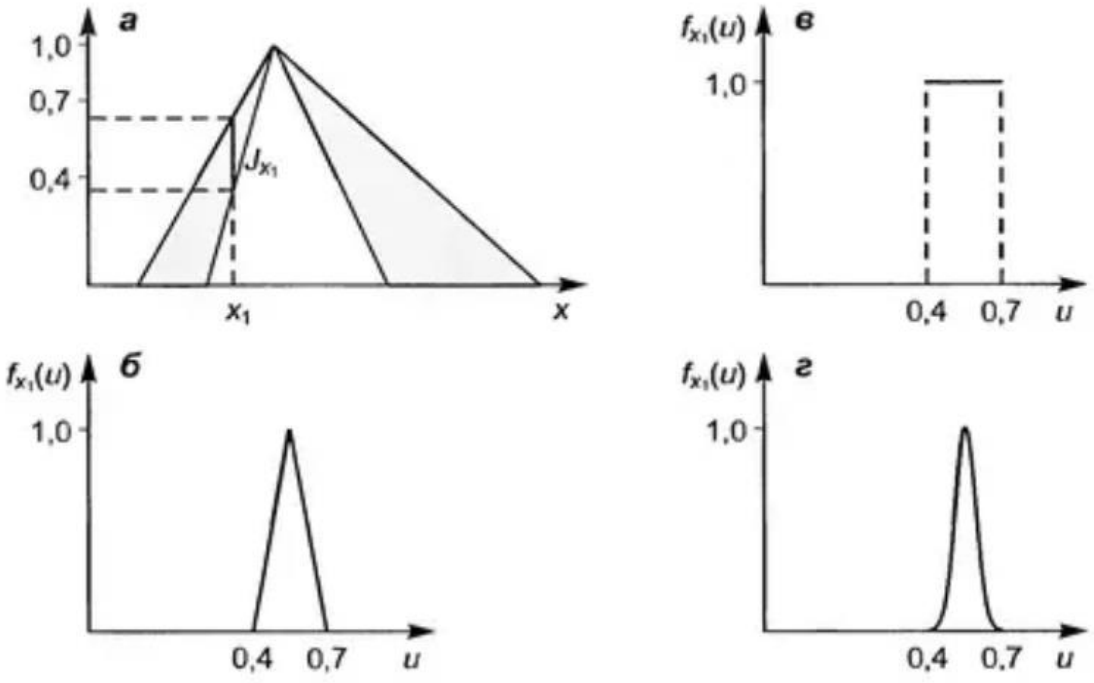


Рис. 10.2. Спосіб побудови нечіткої множини типу 2 для елемента x_1.

На рис. 10.3 наведено ту ж нечітку множину типу 2, однак на ньому показаний інший елемент x_2 і відповідний йому ступінь приналежності, що являє собою нечітку множину типу 1 (трикутного, інтервального, а також гаусівського типу з кінцевим носієм), визначене на інтервалі J_{x_2} = [0,1; 0,6].

Припустимо, що множина X дискретна і набуває R значень x_1,..., x_R, а інтервали J_x, відповідні цим значенням, також дискретні, причому кожен з них приймає M_i, значень, i = 1,..., R.

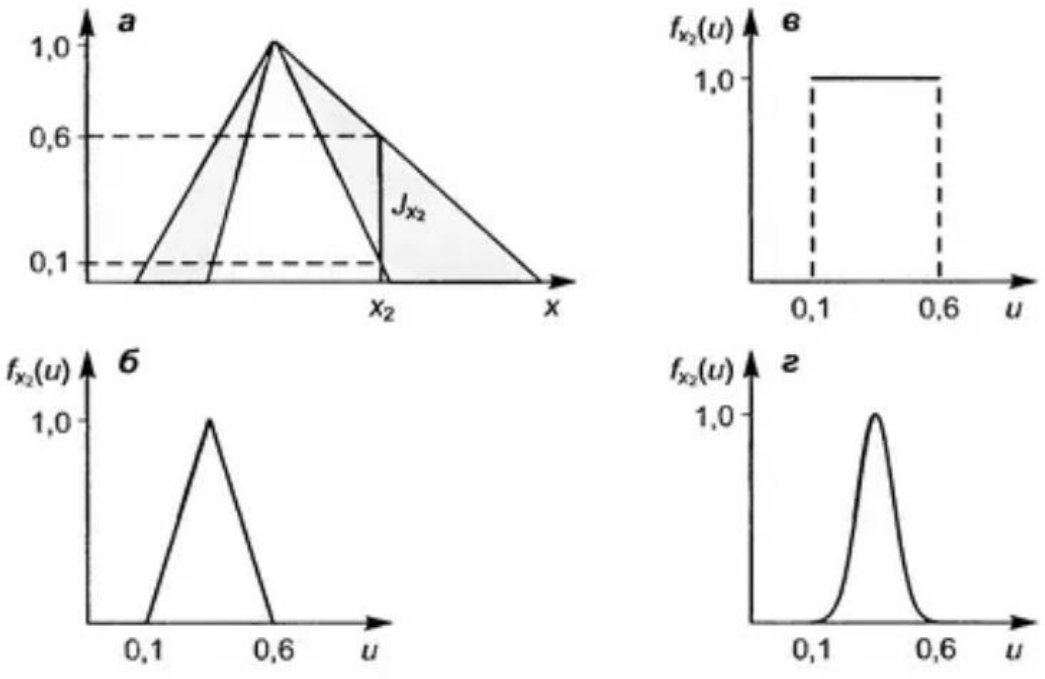


Рис. 10.3. Спосіб побудови нечіткої множини типу 2 для елемента x_2.

У цьому випадку нечітку множину можна записати у наступному вигляді:

$$\tilde{A} = \sum_{x \in X} \frac{\left[\sum_{u \in J_x} \frac{f_x(u)}{u}\right]}{x} = \sum_{i=1}^{R} \frac{\left[\sum_{u \in J_{x_i}} \frac{f_{x_i}(u)}{u}\right]}{x_i} =$$

$$= \frac{\left[\sum_{k=1}^{M_1} \frac{f_{x_1}(u_{1k})}{u_{1k}}\right]}{x_1} + \cdots + \frac{\left[\sum_{k=1}^{M_R} \frac{f_{x_R}(u_{Rk})}{u_{Rk}}\right]}{x_R}.$$

Нечітка ступінь приналежності може набувати дві характерні крайні форми нечіткої множини типу 1:

$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1/1$ означає повну приналежність елемента x до нечіткої множини $\tilde{A}$;

$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1/0$ означає відсутність приналежності елемента x до нечіткої множини $\tilde{A}$.

Приклад 10.2.

Припустимо, що $X = \{1, 2, 3\}$ та $J_{x_1} = \{0{,}2; 0{,}5; 0{,}7\}$, $J_{x_2} = \{0{,}5; 1\}$, $J_{x_3} = \{0{,}1; 0{,}3; 0{,}5\}$. Шляхом приписування кожному елементу множин J_{x_1}, J_{x_2},

J_{x_3} відповідних ступенів приналежності другого порядку можна визначити наступну нечітку множину типу 2:

$$\tilde{A} = (0{,}5/\mathbf{0{,}2} + 1/\mathbf{0{,}5} + 0{,}5/\mathbf{0{,}7})/1 + (0{,}5/\mathbf{0{,}5} + 1/\mathbf{1})/2 +$$
$$+ (0{,}5/\mathbf{0{,}1} + 1/\mathbf{0{,}3} + 0{,}5/\mathbf{0{,}5})/3.$$

Припустимо, кожна функція приналежності другого порядку f_x,. нечіткої множини типу 2 приймає значення 1 тільки для одного елемента $u \in J_x$. У цьому множина сум елементів *u* утворює так звану **функцію головної приналежності,** тобто:

$$\mu_{A_g}(x) = \int_{x \in X} \frac{u}{x}, \text{ де } f_x(u) = 1.$$

Функція головної приналежності визначає відповідну нечітку множину типу 1, що позначається A_g.

Приклад 10.3.

Розглянемо нечітку множину типу 2 з прикладу 2 задану виразом

$$\tilde{A} = (0{,}5/0{,}2 + 1/\mathbf{0{,}5} + 0{,}5/0{,}7)/\mathbf{1} + (0{,}5/0{,}5 + 1/\mathbf{1})/\mathbf{2} +$$
$$+ (0{,}5/0{,}1 + 1/\mathbf{0{,}3} + 0{,}5/0{,}5)/\mathbf{3}.$$

Відповідно до визначення функції головної приналежності можна побудувати таку нечітку множину A_g типу 1:

$$A_g = \mathbf{0{,}5}/1 + \mathbf{1}/2 + \mathbf{0{,}3}/3.$$

Слід невизначеності.

Нечітку множину типу 2 можна описати з використанням поняття сліду невизначеності.

Нехай $J_x \subset [0,1]$ позначає основну приналежність елемента *x*. **Слідом невизначеності *SN*** нечіткої множини типу 2, $\tilde{A} \subseteq X$, називається обмежена область, що складається з усіх точок основної приналежності елементів *x*, тобто:

$$SN(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} J_x.$$

Приклад 10.4.

Розглянемо сімейство функцій приналежності нечіткої множини типу 1, яке описується гаусівською функцією за умови, що стандартне відхилення σ змінюється в інтервалі $[\sigma_1, \sigma_2]$, тобто:

$$\mu_A(x) = N(m, \sigma; x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right], \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2].$$

Сімейство функцій приналежності утворює нечітку множину типу 2. Для повного опису цієї множини необхідно визначити функцію приналежності другого порядку для кожної точки x і відповідного інтервалу J_x. На рис. 10.4 представлений слід невизначеності аналізованої нечіткої множини типу 2.

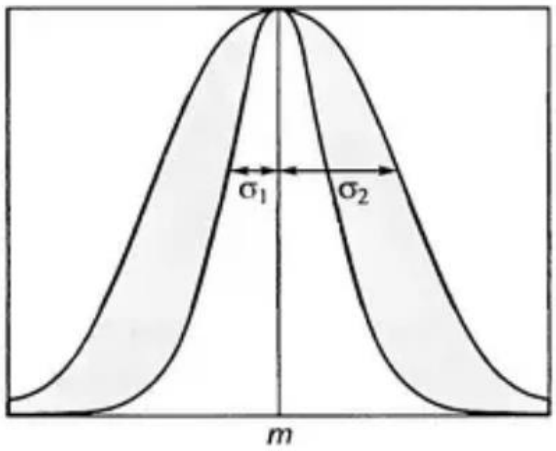


Рис. 10.4. Слід невизначеності нечіткої множини типу 2.

Приклад 10.5.

Розглянемо сімейство функцій приналежності нечіткої множини типу 1, що описується гаусівською функцією за умови, що стандартне відхилення m змінюється в інтервалі $m \in [m_1, m_2]$, тобто:

$$\mu_A(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right], m \in [m_1, m_2].$$

Сімейство функцій приналежності утворює нечітку множину типу 2, так само, як і в попередньому прикладі 10.4, для повного опису цієї множини необхідно визначити функцію приналежності другого порядку для кожної точки x і

відповідного інтервалу J_x. На рис. 10.5 представлений слід невизначеності аналізованої нечіткої множини типу 2.

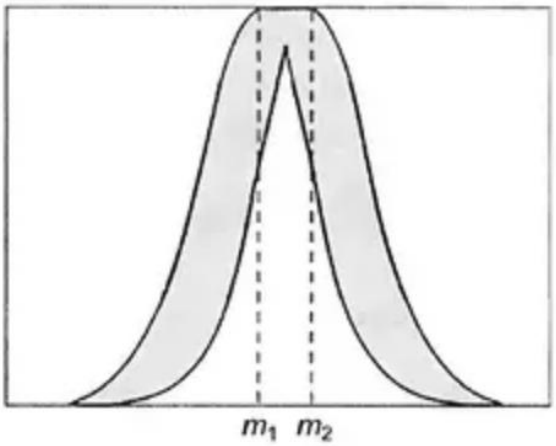


Рис. 10.5. Слід невизначеності нечіткої множини типу 2.

Припустимо, що $J_x = (\underline{J}_x, \bar{J}_x), x \in X$

Функцією верхньої приналежності (*FGP*) називається функція приналежності нечіткої множини типу 1, що розраховується по наступній формулі:

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) = FGP(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} \bar{J}_x, \quad \forall x \in X.$$

Функцією нижньої приналежності (*FDP*) називається функція приналежності нечіткої множини типу 1, що розраховується як

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = FDP(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} \underline{J}_x, \quad \forall x \in X.$$

Приклад 10.6.

Знайдемо слід невизначеності для нечіткої множини типу 2, що була розглянута у прикладі 10.4. Легко помітити, що функція верхньої приналежності приймає наступну форму: $\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) = N(m, \sigma_2, x)$, а функція нижньої приналежності задається виразом: $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = N(m, \sigma_1, x)$.

Для нечіткої множини типу 2, що була розглянута у прикладі 10.5 функція верхньої приналежності задається наступним виразом:

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} N(m_1, \sigma, x), \text{для } x < m_1, \\ 1, \text{для } m_1 \le x \le m_2, \\ N(m_2, \sigma, x), \text{для } x > m_2, \end{cases}$$

а функція нижньої приналежності приймає форму:

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} N(m_2, \sigma, x), \text{для } x \le \dfrac{m_1+m_2}{2}, \\ N(m_1, \sigma, x), \text{для } x > \dfrac{m_1+m_2}{2}. \end{cases}$$

Виділені нечіткі множини.

У нечітких множин типу 2 можна виділити так звані **виділені нечіткі множини** типу 1 і типу 2.

Виберемо з кожного інтервалу J_x, $x \in X$. за одним елементом $\theta \in J_x$. **Виділеною множиною типу 2** у множині $\tilde{A}$ називається множина $\tilde{A}_0$, яка визначається наступним чином:

$$\tilde{A}_0 = \frac{\int_{x \in X} \left[\dfrac{f_x(\theta)}{\theta} \right]}{x}, \quad \theta \in J_x \subseteq U = [0,1].$$

Очевидно, у множині $\tilde{A}$ існує нескінченна кількість виділених нечітких множин $\tilde{A}_0$. У дискретному випадку виділена множина $\tilde{A}_0$ визначається як

$$\tilde{A}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{R} \dfrac{f_{x_i}(\theta_i)}{\theta_i}}{x_i}, \quad \theta_i \in J_{x_i} \subseteq U = [0,1].$$

При цьому легко підрахувати, що у дискретній множині $\tilde{A}$ існує $\prod_{i=1}^{R} M_i$ виділених нечітких множин $\tilde{A}_0$.

Приклад 10.7.

Припустимо, що нечітка множина типу 2 має вигляд:

$\tilde{A}$ = (0,5/0,2 + 1/0,5 + 0,5/0,7)/2 + (0,3/0,5 + 1/1)/3 + (0,5/0,1 + 1/0,3 + 0,5/0,5)/4.

У цьому випадку можна записати 18 виділених множин $\tilde{A}_0$ типу 2:

$\tilde{A}_{0\,1}$ = (0,5/0,2)/2 + (0,3/0,5)/3 + (0,5/0,1)/4 $\tilde{A}_{0\,10}$ = (1/0,5)/2 + (1/1)/3 + (0,5/0,1)/4

$\tilde{A}_{0\,2}$ = (0,5/0,2)/2 + (0,3/0,5)/3 + (1/0,3)/4 $\tilde{A}_{0\,11}$ = (1/0,5)/2 + (1/1)/3 + (1/0,3)/4

$\tilde{A}_{0\,3}$ = (0,5/0,2)/2 + (0,3/0,5)/3 + (0,5/0,5)/4 $\tilde{A}_{0\,12}$ = (1/0,5)/2 + (1/1)/3 + (0,5/0,5)/4

$\tilde{A}_{0\,4}$ = (0,5/0,2)/2 + (1/1)/3 + (0,5/0,1)/4 $\tilde{A}_{0\,13}$ = (0,5/0,7)/2 + (0,3/0,5)/3 + (0,5/0,1)/4

$\tilde{A}_{0\,5}$ = (0,5/0,2)/2 + (1/1)/3 + (1/0,3)/4 $\tilde{A}_{0\,14}$ = (0,5/0,7)/2 + (0,3/0,5)/3 + (1/0,3)/4

$\tilde{A}_{0\,6}$ = (0,5/0,2)/2 + (1/1)/3 + (0,5/0,5)/4 $\tilde{A}_{0\,15}$ = (0,5/0,7)/2 + (0,3/0,5)/3 + (0,5/0,5)/4

$\tilde{A}_{0\,7}$ = (1/0,5)/2 + (0,3/0,5)/3 + (0,5/0,1)/4 $\tilde{A}_{0\,16}$ = (0,5/0,7)/2 + (1/1)/3 + (0,5/0,1)/4

$\tilde{A}_{0\,8}$ = (1/0,5)/2 + (0,3/0,5)/3 + (1/0,3)/4 $\tilde{A}_{0\,17}$ = (0,5/0,7)/2 + (1/1)/3 + (1/0,3)/4

$\tilde{A}_{0\,9}$ = (1/0,5)/2 + (0,3/0,5)/3 + (0,5/0,5)/4 $\tilde{A}_{0\,18}$ = (0,5/0,7)/2 + (1/1)/3 + (0,5/0,5)/4

З кожною виділеною множиною $\tilde{A}_0$ типу 2 пов'язано виділена нечітка множина типу 1, що позначається A_0.

Виділеною множиною типу 1 називається множина A_0, що визначається як:

$$A_0 = \frac{\int_{x \in X} \theta}{x}, \ \ \theta \in J_x \subseteq U = [0,1].$$

Існує нескінченна кількість виділених нечітких множин A_0. У дискретному випадку формула для їх пошуку має наступної вигляд:

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^{R} \theta_i}{x_i}, \ \ \theta_i \in J_{x_i} \subseteq U = [0,1].$$

Кількість всіх множин A_0 дорівнює $\prod_{i=1}^{R} M_i$.

Часним випадком виділеної множини типу 1 є нечітка множина A_g, яка визначена функцією головної приналежності. Також необхідно зазначити, що виділена нечітка множина A_0 втрачає всю інформацію про ступені приналежності

другого порядку. Тому на підставі сімейства виділених множин A_0 можна створити тільки слід невизначеності нечіткої множини типу 2, але не саму цю множину.

Приклад 10.8.

На рис. 10.6 представлені три різні виділені множини типу 1.

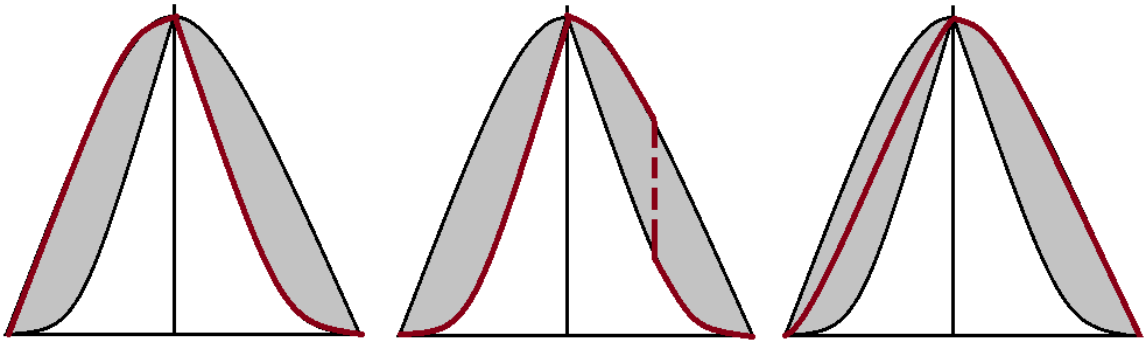


Рис. 10.6. Виділені нечіткі множини типу 1.

Приклад 10.9.

Розглянемо нечітку множину типу 2, що має вигляд

$$\tilde{A} = (0{,}6/03 + 1/0{,}7)/3 + (0{,}4/0{,}4 + 1/1)/5.$$

У множині $\tilde{A}$ можна виділити 4 виділені нечіткі множини A_0:

$A_0 = 0{,}3/3 + 0{,}4/5$; $A_0 = 0{,}3/3 + 1/5$; $A_0 = 0{,}7/3 + 0{,}4/5$; $A_0 = 0{,}7/3 + 1/5$.

10.2. Основні операції над нечіткими множинами типу 2

Принцип узагальнення дозволяє поширити операції з нечітких множин типу 1 на множини типу 2.

Розглянемо дві нечіткі множини типу 2, $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$, визначені як

$$\tilde{A} = \int_{x\in X} \frac{\int_{u\in J_x^u} \frac{f_x(u)}{u}}{x}; \quad \tilde{B} = \int_{x\in X} \frac{\int_{u\in J_x^v} \frac{g_x(v)}{v}}{x},$$

де $J_x^u \cdot J_x^u \subset [0,1]$.

1. Об'єднання (сума) множин $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ є нечіткою множиною типу 2, яка позначається $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ і визначається як:

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \int_{w\in J_x^w} \frac{h_x(w)}{w} = \phi\big(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\big) = \phi\left(\int_{u\in J_x^u} \frac{f_x(u)}{u}, \int_{v\in J_x^v} \frac{g_x(v)}{v}\right).$$

У цьому випадку функція узагальнення ϕ являє собою довільну *S*-кнорму, а її аргументи – вже не прості числа, а нечіткі множини типу 1 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ та $\mu_{\tilde{B}}(x)$ для $x \in X$.

У відповідності з принципом узагальнення:

$$\phi\left(\int_{u\in J_x^u} \frac{f_x(u)}{u}, \int_{v\in J_x^v} \frac{g_x(v)}{v}\right) = \int_{u\in J_x^u}\int_{v\in J_x^v} \frac{f_x(u) *^T g_x(v)}{\phi(u,v)}.$$

Після підстановки *S*-кнорми замість функцій ϕ сума нечітких наборів типу 2 визначається нечіткою функцією приналежності:

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \int_{u\in J_x^u}\int_{v\in J_x^v} \frac{f_x(u) *^T g_x(v)}{u *^S v}.$$

Представлена формула дозволяє розрахувати суму нечітких множин типу 2 для будь-якого значення *x*.

2. Перетин множин $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ є нечіткою множиною типу 2, яка позначається $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ і визначається як:

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \int_{w\in J_x^w} \frac{h_x(w)}{w} = \phi\big(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\big) = \phi\left(\int_{u\in J_x^u} \frac{f_x(u)}{u}, \int_{v\in J_x^v} \frac{g_x(v)}{v}\right).$$

причому функція ϕ може бути в цьому випадку довільною *T*-нормою. Аргументами функції ϕ незмінно залишаються нечіткі множини типу 1, тобто $\mu_{\tilde{A}}(x)$ та $\mu_{\tilde{B}}(x)$. Отже, перетин нечітких множин типу 2 визначається як:

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \int_{u\in J_x^u}\int_{v\in J_x^v} \frac{f_x(u) *^{T^*} g_x(v)}{u *^T v}.$$

У виразі T-норма, що агрегує приналежності другого порядку, позначена T^*, а її функціональну форму можна підібрати незалежно від узагальненої T-норми.

Приклад 10.10.

У цьому прикладі ми докладно проілюструємо спосіб розрахунку об'єднання та перетину нечітких множин типу 2. В якості T-норми використовуватимемо операцію «мінімум», а у якості S-кнорми – операцію «максимум». Розглянемо дві нечітких множини типу 2, $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$:

$$\tilde{A} = \frac{\left(\frac{0,5}{0,2} + \frac{1}{0,5} + \frac{0,5}{0,7}\right)}{1} + \frac{\left(\frac{0,5}{0,5} + \frac{1}{1}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{0,5}{0,1} + \frac{1}{0,3} + \frac{0,5}{0,5}\right)}{3};$$

$$\tilde{B} = \frac{\left(\frac{1}{0}\right)}{1} + \frac{\left(\frac{0,5}{0,5} + \frac{1}{0,8}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{1}{0,6} + \frac{0,5}{1}\right)}{3}.$$

Розрахунок об'єднання $\tilde{A} \cup \tilde{B}$:

Для $x = 1$ отримуємо:

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(1) = \frac{0,5 \wedge 1}{0,2 \vee 0} + \frac{1 \wedge 1}{0,5 \vee 0} + \frac{0,5 \wedge 1}{0,7 \vee 0} = \frac{0,5}{0,2} + \frac{1}{0,5} + \frac{0,5}{0,7}.$$

Для $x = 2$ отримуємо:

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(2) = \frac{0,5 \wedge 0,5}{0,5 \vee 0,5} + \frac{0,5 \wedge 1}{0,5 \vee 0,8} + \frac{\max(1 \wedge 0,5; 1 \wedge 1)}{1} = \frac{0,5}{0,5} + \frac{0,5}{0,8} + \frac{1}{1}.$$

Для $x = 3$ отримуємо:

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(3) = \frac{\max(0,5 \wedge 1; 1 \wedge 1; 0,5 \wedge 1)}{0,6} + \frac{\max(0,5 \wedge 0,5; 1 \wedge 0,5; 0,5 \wedge 0,5)}{1} =$$

$$= \frac{1}{0,6} + \frac{0,5}{1}.$$

Отже, об'єднання множин $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ дорівнює

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \frac{\left(\frac{0,5}{0,2} + \frac{1}{0,5} + \frac{0,5}{0,7}\right)}{1} + \frac{\left(\frac{0,5}{0,5} + \frac{0,5}{0,8} + \frac{1}{1}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{1}{0,6} + \frac{0,5}{1}\right)}{3}.$$

Розрахунок перетину $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ **:**

Для $x = 1$, $x = 2$ отримуємо:

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(1) = \frac{\max(0{,}5 \wedge 1; 1 \wedge 1; 0{,}5 \wedge 1)}{0} = \frac{1}{0}.$$

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(2) = \frac{\max(0{,}5 \wedge 0{,}5; 0{,}5 \wedge 1; 1 \wedge 0{,}5)}{0{,}5} + \frac{1 \wedge 1}{1 \wedge 0{,}8} = \frac{0{,}5}{0{,}5} + \frac{1}{0{,}8}.$$

3. Доповнення нечіткої множини типу 2 представляє собою нечітку множиною $\overline{\tilde{A}}$ типу 2 з нечіткою функцією приналежності, заданою виразом:

$$\mu_{\overline{\tilde{A}}}(x) = \phi(\mu_{\tilde{A}}(x)) = \int_{u\in J_x^u} \frac{f_x(u)}{1-u}.$$

Приклад 10.11.

Розглянемо нечітку множину $\tilde{A}$ типу 2, що описується як

$$\tilde{A} = (0{,}4/\mathbf{0{,}6} + 1/\mathbf{0{,}7})/9.$$

Відповідно до формули Доповнення нечіткої множини $\overline{\tilde{A}}$ типу 2 дорівнює

$$\overline{\tilde{A}} = (0{,}4/\mathbf{0{,}4}+1/\mathbf{0{,}3})/9.$$

4. Нечіткі відношення типу 2.

Спочатку дамо визначення декартового добутку нечітких множин типу 2. **Декартовим добутком *n* нечітких множин типу 2** $\tilde{A}_1 \subseteq X_1, \tilde{A}_2 \subseteq X_2, ..., \tilde{A}_n \subseteq X_n$ називається нечітка множина $\tilde{A} = \tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times ... \times \tilde{A}_n$, визначена на множині $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, причому функція приналежності множини $\tilde{A}$ задана виразом:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}_1\times\tilde{A}_2\times...\times\tilde{A}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \tilde{T}_{i=1}^{n}\mu_{\tilde{A}}(x_n),$$

де $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n$, а операція узагальненої T-норми описується залежністю:

$$\tilde{T}_{i=1}^{n}F_i = \int_{u_1\in J_1} \dots \int_{u_n\in J_n} \frac{\tilde{T}^{*}{}_{i=1}^{n} f_i(u_i)}{\tilde{T}_{i=1}^{n} u_i};$$

Бінарним нечітким відношенням $\tilde{R}$ типу 2 між двома непорожніми чіткими множинами X і Y називається нечітка множина типу 2, визначена на декартовому добутку $X \times Y$:

$$\tilde{R}(X,Y) = \int_{X\times Y} \frac{\mu_{\tilde{R}}(x,y)}{x,y},$$

причому $x \in X, y \in Y$, а ступінь приналежності пари (x, y) належить нечіткій множині $\tilde{R}$ яка є нечіткою множиною типу 1, що визначена на інтервалі з $J^{v}_{x,y} \in [0,1]$:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \int_{v\in J^{v}_{x,y}} \frac{r_{x,y}(v)}{v},$$

де $r_{x,y}(v)$ – ступінь приналежності другого порядку.

Приклад 10.12.

Нехай $X = \{3, 4\}$ та $Y = \{4, 5\}$. Формалізуємо неточне твердження «y майже дорівнює x». Спочатку визначимо відношення R типу 1 наступним чином:

$$R = \frac{0{,}8}{(3;4)} + \frac{0{,}6}{(3;5)} + \frac{1}{(4;\ 4)} + \frac{0{,}8}{(4;5)}.$$

Аналогічне нечітке відношення $\tilde{R}$ типу 2 може мати форму:

$$\tilde{R} = \frac{\left(\frac{0{,}6}{0{,}7} + \frac{1}{\mathbf{0,8}} + \frac{0{,}5}{0{,}6}\right)}{(3;4)} + \frac{\left(\frac{0{,}3}{0{,}5} + \frac{1}{\mathbf{0,6}} + \frac{0{,}4}{0{,}3}\right)}{(3;5)} + \frac{\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{\mathbf{1}} + \frac{1}{1}\right)}{(4;4)} + \frac{\left(\frac{0{,}6}{0{,}7} + \frac{1}{\mathbf{0,8}} + \frac{0{,}5}{0{,}6}\right)}{(4;5)}.$$

5. Пониження типу нечіткої множини.

Дефузифікація нечітких відносин типу 2 складається з двох етапів. Спочатку необхідно виконати так зване пониження типу, яке полягає в перетворенні нечіткої множини типу 2 в нечітку множину типу 1. Отримана в результаті нечітка множина типу 1, що називається **центроїдом**, може бути дефузифікована до чіткого значення. Продемонструємо спосіб отримання центроїду нечіткої множини типу 2.

Розглянемо нечітку множину A (типу 1), визначену на множині X. Припустимо, що множина X дискретизована і набуває R значень $x_1, \ldots, x_R$. Центроїд нечіткої множини A визначається як:

$$C_A = \frac{\sum_{k=1}^{R} x_k \mu_A(x_k)}{\sum_{k=1}^{R} \mu_A(x_k)}.$$

Побудуємо тепер центроїд нечіткої множини типу 2:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\},$$

який в результаті аналогічної дискретизації записується у вигляді:

$$\tilde{A} = \sum_{k=1}^{R} \left[\int_{u \in J_{x_k}} \frac{f_{x_k}(u)}{u} \right] / x_k.$$

Застосування принципу узагальнення отримаємо:

$$C_{\tilde{A}} = \int_{\theta_1 \in J_{x_1}} \ldots \int_{\theta_R \in J_{x_R}} [f_{x_1}(\theta_1) * \ldots * f_{x_R}(\theta_R)] / \frac{\sum_{k=1}^{R} x_k \theta_k}{\sum_{k=1}^{R} \theta_k}.$$

Очевидно, що центроїд $C_{\tilde{A}}$ є нечіткою множиною типу 1.

Зазначимо, що довільний вибір елементів $\theta_1 \in J_{x_1}, \ldots, \theta_R \in J_{x_R}$ і відповідних їм ступенів приналежності другого порядку $f_{x_1}(\theta_1), \ldots, f_{x_R}(\theta_R)$ утворюють виділену нечітку множину $\tilde{A}_0$ типу 2.

Приклад 10.13.

Нехай $X = \{2, 5\}$. Понизимо тип наступної нечіткої множини типу 2:

$$\tilde{A} = (0{,}6/0{,}4 + 1/0{,}8)/2 + (0{,}3/0{,}7 + 1/0{,}6)/5$$

Центроїд нечіткої множини типу 2, являє собою нечітку множину типу 1 у вигляді:

$$C_{\tilde{A}} = \frac{0{,}6 \times 0{,}3}{a_1} + \frac{0{,}6 \times 1}{a_2} + \frac{1 \times 0{,}3}{a_3} + \frac{1 \times 1}{a_4} = \frac{0{,}18}{a_1} + \frac{0{,}6}{a_2} + \frac{0{,}3}{a_3} + \frac{1}{a_4},$$

причому:

$$a_1 = \frac{2 \times 0{,}4 + 5 \times 0{,}7}{0{,}4 + 0{,}7} = \frac{43}{11}; \quad a_2 = \frac{2 \times 0{,}4 + 5 \times 0{,}6}{0{,}4 + 0{,}6} = 3{,}8;$$

$$a_3 = \frac{2 \times 0{,}8 + 5 \times 0{,}7}{0{,}8 + 0{,}7} = 3{,}4; \quad a_4 = \frac{2 \times 0{,}8 + 5 \times 0{,}6}{0{,}8 + 0{,}6} = \frac{23}{7}.$$

Приклад 10.14. Показано графічне відображення центроїдів нечітких множин типу 2 – слідів невизначеності (рис. 10.7), до яких буде здійснюватися пониження типу.

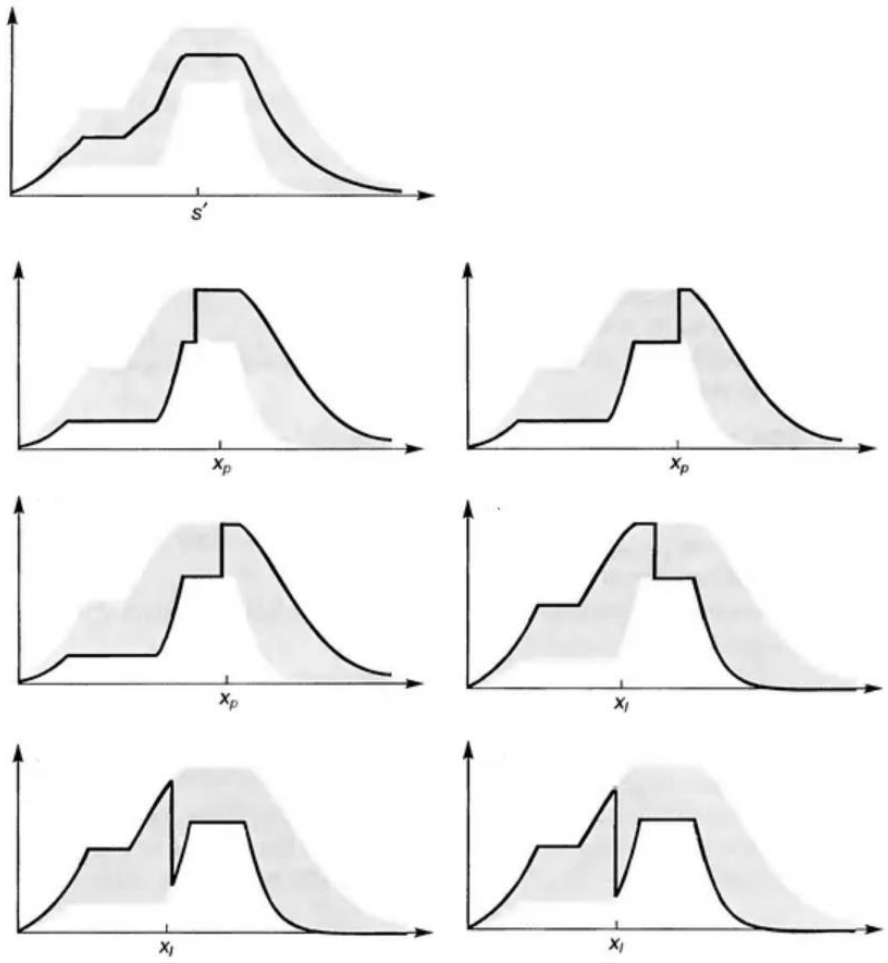


Рис. 10.7. Сліди невизначеності нечітких множин типу 2.

10.3. Системи нечіткого виводу типу 2

Розглянемо систему нечіткого виводу типу 2 з n вхідними змінними $x_i \in X_i \subset R$, $i = 1,..., n$ та скалярним виходом $y \in Y$. Блок-схема такої системи зображена на наступному рис. 10.8.

В структурі системи виділяються такі елементи: блок фузифікації типу 2; база правил, що описуються нечіткими відношеннями типу 2; механізм нечіткого виводу типу 2 та блок дефузифікації вихідної інформації. Дефузифікація виконується у два етапи: спочатку виконується пониження типу, завдяки чому результат виводу по відповідному правилу типу 2 зводиться до нечіткої множини типу 1, а потім здійснюється класична дефузифікація до чіткої множини.

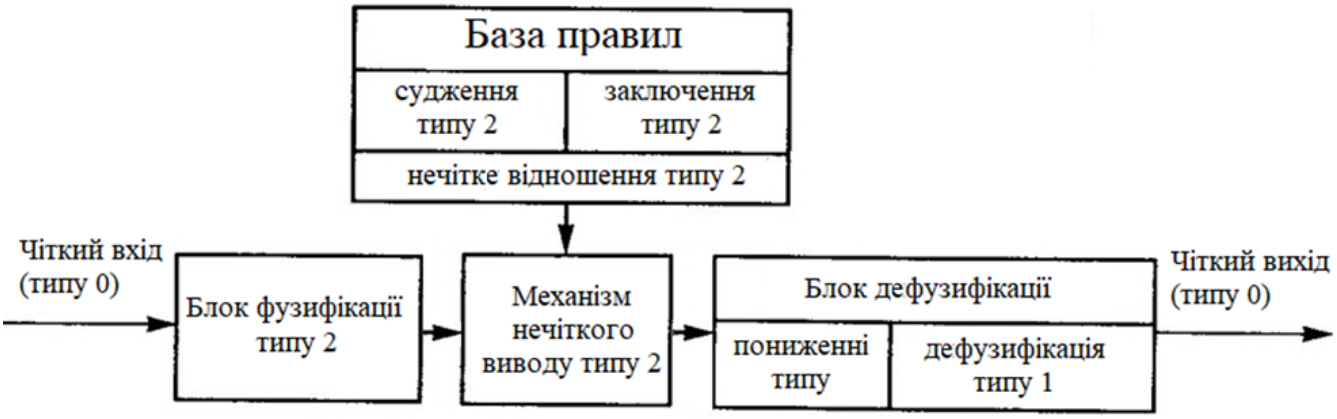


Рис. 10.8. Блок-схема системи нечіткого виводу типу 2.

Блок фузифікації.

Нехай $\bar{x} = (x_1,...,x_n)^T \in X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ являє собою вхідний сигнал системи нечіткого виведення. У нечітких системах типу 1 застосовується операція фузифікації типу сінглтон. Її аналогом у нечітких системах типу 2 вважається операція фузифікації типу "сінглтон - сінглтон", що визначається у вигляді:

$$\tilde{\mu}_{A'}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1}, \text{при } x = \overline{x}, \\ \frac{1}{0}, \text{при } x \neq \overline{x}. \end{cases}$$

У разі незалежності всіх вхідних змінних згадана операція набуває вигляду:

$$\tilde{\mu}_{A'}(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{1}, \text{при } x_i = \overline{x_i}, \\ \frac{1}{0}, \text{при } x_i \neq \overline{x_i}, \end{cases}$$

де $i = 1,..., n$.

В результаті такої фузифікації отримуємо n вхідних нечітких множин типу 2, що мають вигляд:

$$\tilde{A}_i' = \frac{1}{\overline{\overline{x_i}}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

де $\overline{x}_i$ – конкретне значення i-ї вхідної змінної.

Зазначимо, що можуть застосовуватися інші способи фузифікації вхідного сигналу. На рис. 10.9 зображено графічні інтерпретації цих методів: а) «сінглтон – сінглтон»; б) «сінглтон – інтервал»; в) «нонсінглтон – сінглтон»; г) «нонсінглтон – інтервал»; д) «нонсінглтон – трикутник»; е) «нонсінглтон – глусоїд».

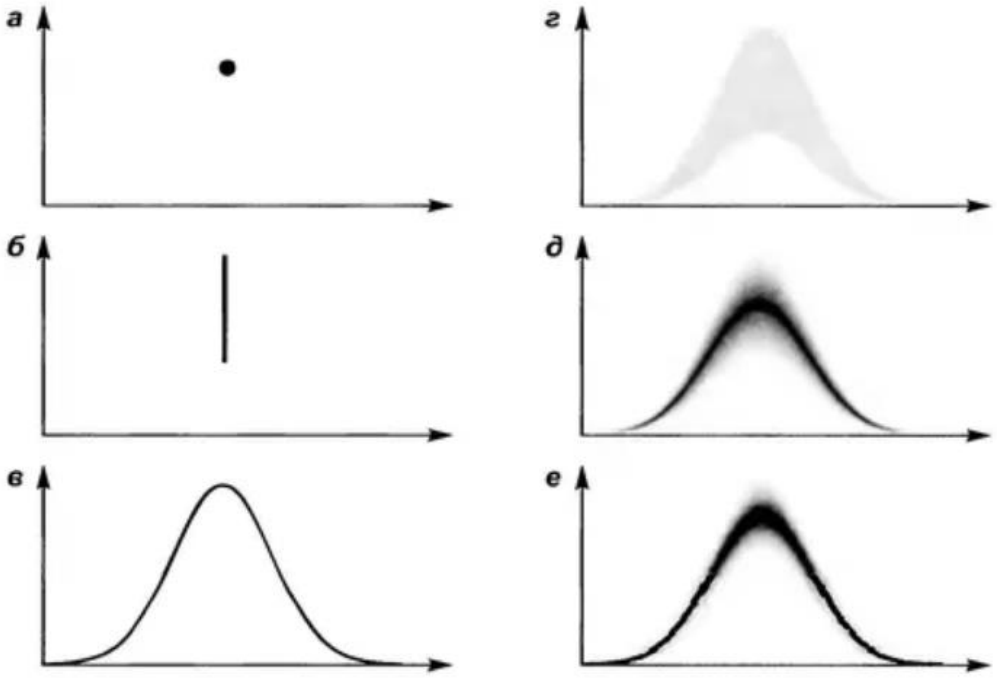


Рис. 10.9. Існуючі способи фузифікації вхідного сигналу.

Наприклад, фузифікація типу «сінглтон - інтервал» (рис. 10.9, *б*) означає, що функція приналежності другого порядку є інтервальною нечіткою множиною. Фузифікація типу «нонсінглтон - сінглтон» (рис. 10.9, *в*) означає, що функція приналежності другого порядку є нечіткою множиною типу «сінглтон», і в цьому

випадку фузифікація еквівалентна фузифікації типу «нонсінглтон» для нечітких множин типу «нонсінглтон - трикутник» означає, що функція приналежності другого порядку є трикутною нечіткою множиною, причому рівень затемнення відображає значення функції приналежності другого порядку (трикутної) для кожного елемента $u \in J_x$ (рис. 10.9, *д*).

База правил.

Лінгвістична модель складається з N правил виду

$$\tilde{R}^k: \text{ЯКЩО } x_1 \in \tilde{A}_1^k \text{ I ... I } x_n \in \tilde{A}_n^k \text{ ТОДІ } y \in \tilde{B}^k,\ k = 1, \ldots, N.$$

Позначимо $\tilde{A} = \tilde{A}^k = \tilde{A}_1^k \times \tilde{A}_2^k \times \ldots \times \tilde{A}_n^k$. Очевидно, що $\mu_{\tilde{A}^k}(x) = \tilde{T}_{i=1}^n \mu_{\tilde{A}_i^k}(\overline{x}_i)$.

Правило можна записати у формі імплікації $\tilde{A}^k \longrightarrow \tilde{B}^k, k = 1, \ldots, n$.

Блок виводу.

Спочатку побудуємо функцію приналежності

$$\mu_{\tilde{A}^k \longrightarrow \tilde{B}^k}(x, y).$$

Кожне k-е правило представляється у нечіткій системі за допомогою деякого нечіткого відношення типу 2

$$\tilde{R}^k(x, y) = \int_{X \times Y} \frac{\mu_{\tilde{R}^k}(x, y)}{(x, y)},$$

причому

$$\mu_{\tilde{R}^k}(x, y) = \int_{v \in V_{x,y}} \frac{r_{x,y}^k(v)}{v}.$$

Тому $\mu_{\tilde{A}^k \longrightarrow \tilde{B}^k}(x, y) = \mu_{\tilde{R}^k}(x, y)$.

За аналогією з системами типу 1 функції приналежності $\mu_{\tilde{A}^k \longrightarrow \tilde{B}^k}(x, y)$, будуються виходячи з відомих функцій приналежності $\mu_{\tilde{A}^k}(x)$ та $\mu_{\tilde{B}^k}(x)$. За допомогою оператора розширеної T-норми можна записати:

$$\mu_{\tilde{A}^k \longrightarrow \tilde{B}^k}(x, y) = \mu_{\tilde{A}^k}(x) *^{\tilde{T}} \mu_{\tilde{B}^k}(y).$$

Правила Мамдані і Ларсена, що застосовуються в системах типу 1, в розглянутій ситуації набувають вигляду:

• розширене правило Мамдані типу «мінімум»:

$$\mu_{\tilde{A}^k \to \tilde{B}^k}(x,y) = \int_{u \in J_x^u} \int_{v \in J_y^v} (f_x(u) *^T g_y(v) / \min(u,v);$$

• розширене правило типу «добуток» (Ларсен):

$$\mu_{\tilde{A}^k \to \tilde{B}^k}(x,y) = \int_{u \in J_x^u} \int_{v \in J_y^v} (f_x(u) *^T g_y(v) / u \cdot v;$$

На виході блоку виводу отримуємо нечітку множину типу 2 $\widetilde{\widetilde{B}}'^k$. Ця множина визначається агрегуванням вхідної нечіткої множини $\widetilde{\widetilde{A}}'$ і нечіткого відношення $\widetilde{\widetilde{R}}^k$, тобто:

$$\tilde{B}'^k = \tilde{A}' \circ \tilde{R}^k = \tilde{A}' \circ \left(\tilde{A}^k \longrightarrow \tilde{B}^k\right).$$

Будуємо функцію приналежності нечіткої множини $\widetilde{\widetilde{B}}'^k$

$$\mu_{\tilde{B}'^k}(y) = \mu_{\tilde{A}' \circ \tilde{R}^k}(y) = \tilde{S}_{x \in X}\left(\mu_{\tilde{A}'}(x) *^{\tilde{T}} \mu_{\tilde{R}^k}(x,y)\right) =$$

$$= \tilde{S}_{x \in X}\left(\mu_{\tilde{A}'}(x) *^{\tilde{T}} \mu_{\tilde{A}^k \to \tilde{B}^k}(x,y)\right).$$

При використанні дефузифікації типу «сінглтон – сінглтон» наведена формула набуває вигляду:

$$\mu_{\tilde{B}'^k}(y) = \mu_{\tilde{A}^k \to \tilde{B}^k}(\overline{x}, y).$$

Отримуємо:

$$\mu_{\tilde{B}'^k}(y) = \mu_{\tilde{A}_1^k \times \ldots \times \tilde{A}_n^k}(\overline{x}) *^{\tilde{T}} \mu_{\tilde{B}^k}(y) = \left(\tilde{T}_{i=1}^n \mu_{\tilde{A}_i^k}(\overline{x}_i)\right) *^{\tilde{T}} \mu_{\tilde{B}^k}(y).$$

Позначивши ступінь активації k-го правила наступним чином: $\tau_k = \tilde{T}_{i=1}^n \mu_{\tilde{A}_i^k}(\overline{x}_i)$.

У цьому випадку залежність

$$\mu_{\tilde{B}'^k}(y) = \mu_{\tilde{A}_1^k \times \ldots \times \tilde{A}_n^k}(\overline{x}) *^{\tilde{T}} \mu_{\tilde{B}^k}(y) = \left(\tilde{T}_{i=1}^n \mu_{\tilde{A}_i^k}(\overline{x}_i)\right) *^{\tilde{T}} \mu_{\tilde{B}^k}(y)$$

набуває вигляду $\mu_{\tilde{B}'^k}(y) = \tau_k *^{\tilde{T}} \mu_{\tilde{B}^k}(y)$.

Примітка. У разі нечітких множин типу 1 ступінь активації правила виражається дійсним числом, причому $\tau_k \in [0, 1]$. У разі нечітких множин типу 2 ступінь активації правила τ_k є нечіткою множиною типу 1.

Після отримання результатів виведення $\tilde{\tilde{B}}'^k$ для всіх N правил виконуємо агрегування з використанням оператора розширеної S-кнорми:

$$\mu_{\tilde{B}'}(y) = \tilde{S}_{k=1}^{N} \mu_{\tilde{B}'^k}(y).$$

Приклад 10.15.

На рис.10.10 показаний спосіб визначення ступеня активації системи типу 2 із двома правилами. В якості T-норми прийнято операцію «мінімум», тому

$$\underline{\tau}_k = \min[\underline{\mu}_{\tilde{A}_1^k}(\overline{x}_1), \underline{\mu}_{\tilde{A}_2^k}(\overline{x}_2)];$$

$$\overline{\tau}_k = \min[\overline{\mu}_{\tilde{A}_1^k}(\overline{x}_1), \overline{\mu}_{\tilde{A}_2^k}(\overline{x}_2)],$$

для $k = 1, 2$.

Як зазначалося раніше, ступені активації є нечіткими множинами типу 1.

На рис.10.10 продемонстровано засіб визначення ступеня активації інтервальної нечіткої системи типу 2 з фузифікацією типу «сінглтон - сінглтон».

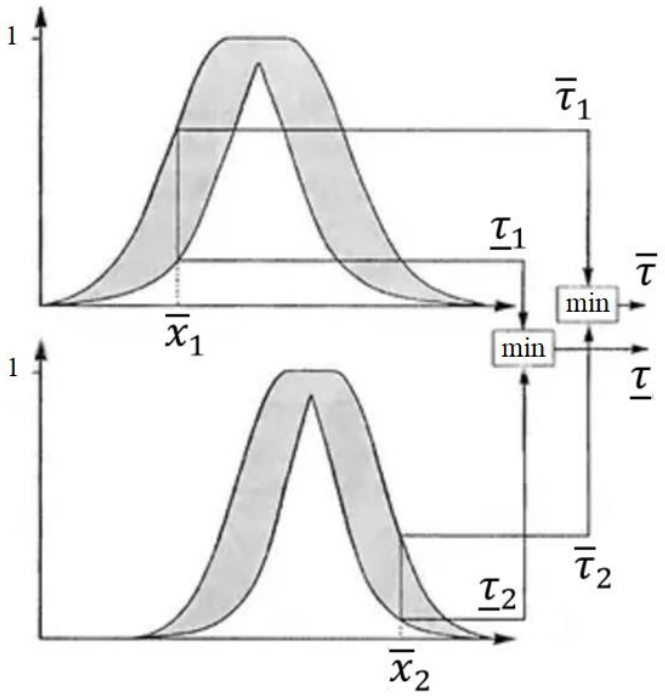


Рис. 10.10. Визначення активації системи нечіткого виведення типу 2.

Приклад 10.16. На рис. 10.11 показані вихідні нечіткі множини типу 2 $\widetilde{B}^1$ і $\widetilde{B}^2$, а також нечіткі множини (затемнені) $\widetilde{B}'^1$ і $\widetilde{B}'^2$, що є результатом виводу.

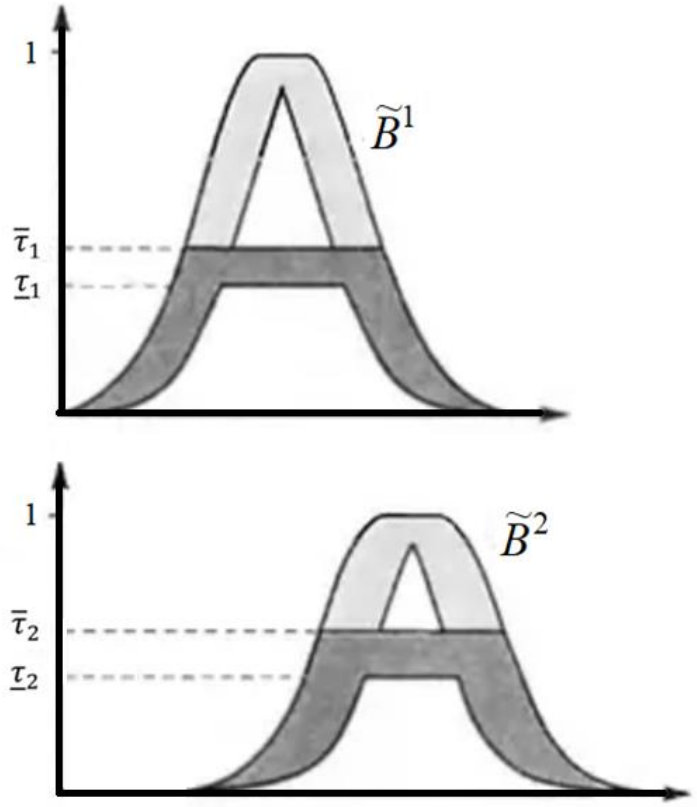


Рис. 10.11. Вихідний результат роботи системи нечіткого виведення типу 2.

На рис. 10.12 представлена нечітка множина (затемнена) $\widetilde{B}'$, що являє собою результат агрегування нечітких множин $\widetilde{B}'^1$ і $\widetilde{B}'^2$.

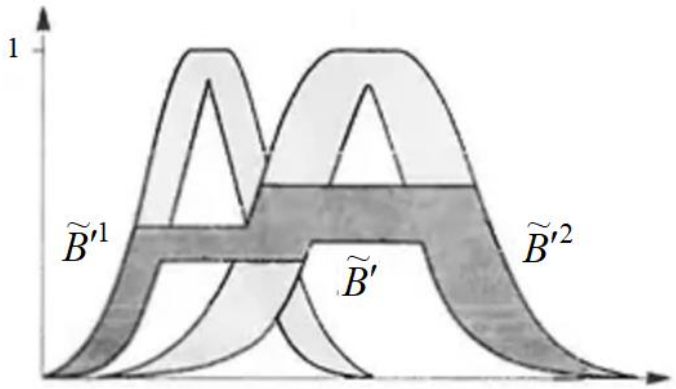


Рис. 10.12. Результат агрегування нечітких множин по кожному з правил.

Для побудови цієї множини ми використовували дві операції:

$$\max(\min\left[\overline{\tau}_1, \overline{\mu}_{\tilde{B}^1}(y)\right], \min\left[\overline{\tau}_2, \overline{\mu}_{\tilde{B}^2}(y)\right]);$$

$$\max(\min\left[\underline{\tau}_1, \underline{\mu}_{\tilde{B}^1}(y)\right], \min\left[\underline{\tau}_2, \underline{\mu}_{\tilde{B}^2}(y)\right]).$$

На рис. 10.13 представлений спосіб визначення ступеня активації інтервальної нечіткої системи типу 2 з фузифікацією типу «нонсінглтон – сінглтон».

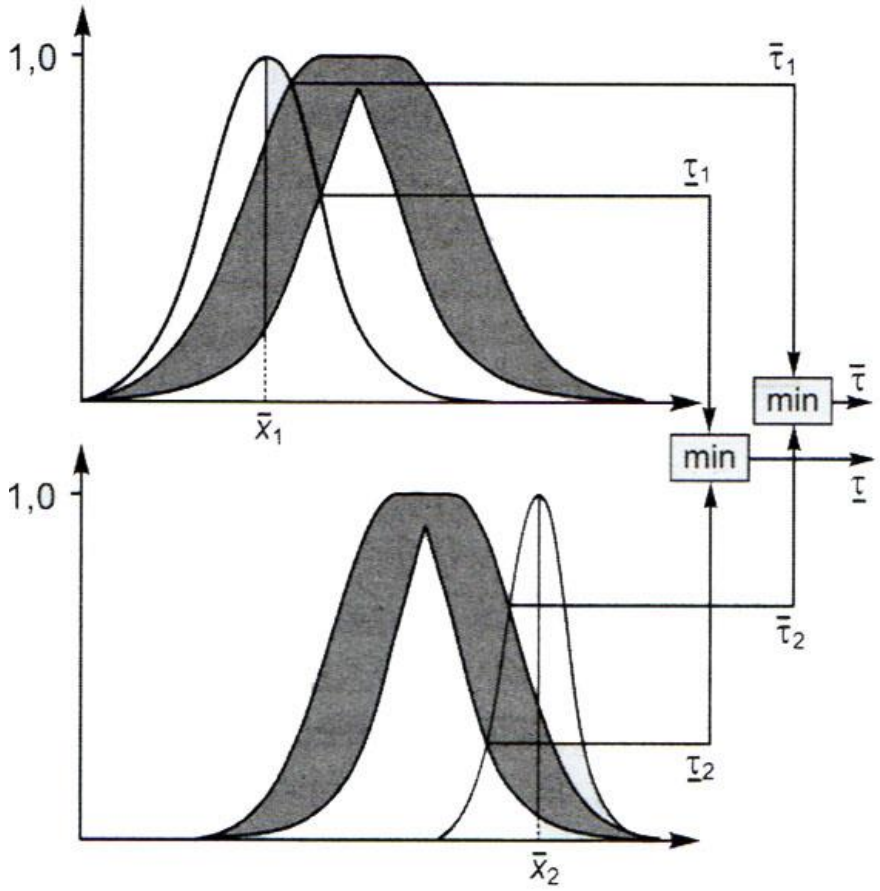


Рис. 10.13. Визначення активації інтервальної системи нечіткого виводу типу 2.

На рис.10.14 представлений спосіб визначення ступеня активації інтервальної нечіткої системи типу 2 з фузифікацією типу 2 «нонсінглтон – інтервал».

У прикладі 10.16 наведено результати, отримані для інтервальних нечітких систем типу 2 із застосуванням фузифікації типу «сінглтон». Ці результати можна узагальнити на випадок, коли у якості вхідного сигналу виступає нечітка множина

типу 1 (фузифікація типу «нонсінглтон – сінглтон») або інтервальна нечітка множина типу 2 (фузифікація типу 2 «нонсінглтон – інтервал»). На наведених рис. 10.13 та рис. 10.14 представлені способи визначення ступеня активації, що ілюструє обидва випадки.

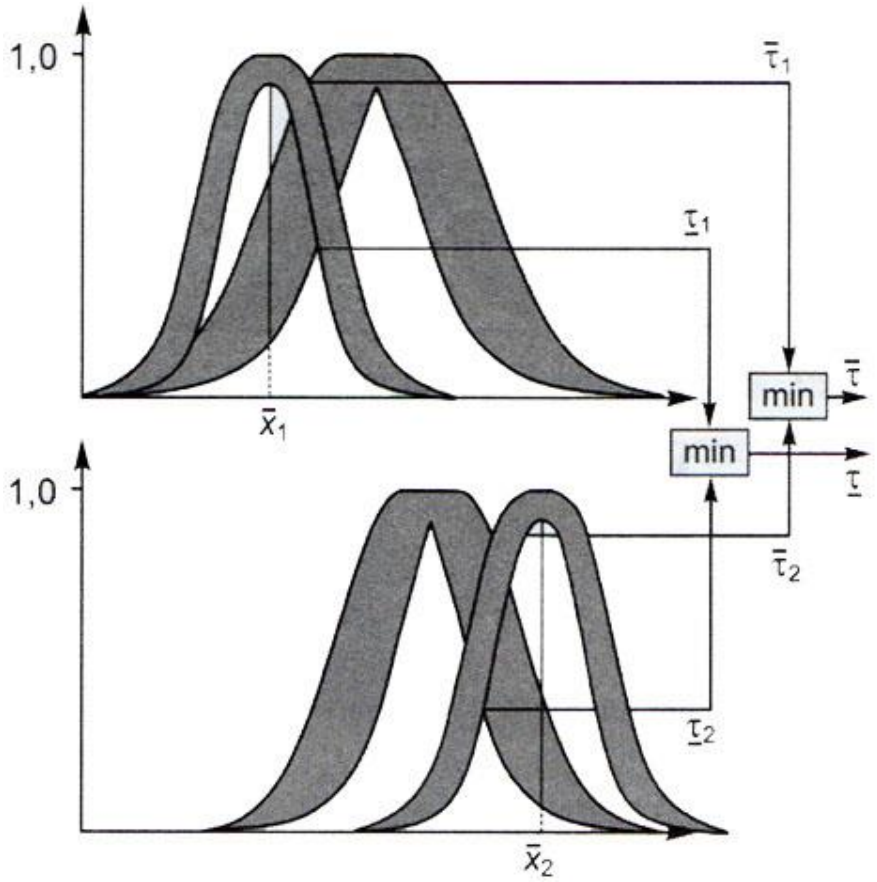


Рис. 10.14. Визначення активації інтервальної системи нечіткого виводу типу 2 з фузифікацією типу 2.

Поняття нечіткої множини типу 2 ввів Лотфі Заде. Він також визначив операції об’єднання та перетину нечітких множин типу 2 з використанням принципу узагальнення. Основні поняття, що характеризують нечіткі множини типу 2, тобто функції та ступеня приналежності другого порядку, функції головної, верхньої та нижньої приналежності, а також поняття виділених нечітких множин та сліду невизначеності, успішно ввів у світову літературу Мендель; Методи

виведення із застосуванням інтервальних нечітких множин типу 2 першим описав Гожалчани (*Gorzalczany*). Основні операції на нечітких множинах типу 2 запропонували Дюбуа та Прайд, а також Карнік та Мендель. Інтервальні нечіткі множини вищих порядків досліджував Хісдал (*Hisdal*). Ітераційний алгоритм зниження типу інтервальних нечітких множин типу 2, сформульований Карніком і Менделем, дозволив створити інтервальні системи нечіткої логіки типу 2. Першими такі структури представили Карнік, Мендель і Ліанг. Аналізу відмінностей між інтервальними системами виведення та системами типу 1 присвячені роботи Старчсвського (*Starczcwski*). Цікавий метод зниження типу запропонували Ву та Мендель. Інтервальні системи типу 2 застосовувалися для прогнозування хаотичних рядів. Абсолютно нова структура системи нечіткого виводу типу 2 з трикутною функцією приналежності другого порядку була представлена Старчевським.

Контрольні запитання:

1. В чому принципова різниця між нечіткими множинами типу 1 та типу 2?
2. Що таке слід невизначеності та як з його допомогою можна описати нечітку множину типу 2?
3. Чим відрізняються функції верхньої та нижньої приналежності при описі нечіткої множини типу 2?
4. Які особливості застосування операцій об’єднання, перетину та доповнення для нечітких множин типу 2?
5. Для чого використовується метод пониження типу для нечітких множин типу 2?
6. Які компоненти входять до типової структури системи нечіткого виводу типу 2 та в чому її відмінності від систем нечіткого виводу типу 1?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Fuzzy Information Processing // *Kelly Cohen, Nicholas Ernest, Barnabas Bede, Vladik Kreinovich* //·Springer, 2023. 358 p.
2. Recent Trends on Type-2 Fuzzy Logic Systems: Theory, Methodology and Applications / *Anupam Kumar, Oscar Castillo* // Springer International Publishing, 2023. 265 p.
3. Fuzzy Logic Applications in Computer Science and Mathematics / *Ashok Kumar Shaw, Biswadip Basu Mallik, Dac-Nhuong Le, Gunjan Mukherjee, Rahul Kar* // Wiley, 2023. 304 p.
4. Genetic Algorithms / *Jose M. Moyano, José Luna, Sebastian Ventura* // IntechOpen, 2022. 176 p.
5. Computational Methods Using MATLAB / *P.K. Thiruvikraman* // IOP Publishing, 2022. 300 p.
6. Learning Genetic Algorithms with Python. Empower the Performance of Machine Learning and AI Models with the Capabilities of a Powerful Search Algorithm / *Ivan Gridin* // BPB publications, 2021. 270 p.
7. Introduction to Fuzzy Logic / *James K. Peckol* // Wiley, 2021. 304 p.
8. Genetic Algorithms in Elixir / *Sean Moriarity* //·Pragmatic Bookshelf, 2021. 244 p.
9. DNA Computing Based Genetic Algorithm. Applications in Industrial Process Modeling and Control / *Jili Tao, Ridong Zhang, Yong Zhu* //·Springer Nature Singapore, 2021. 274 p.
10. Fuzzy Logic / *Constantin Volosencu, Marco Antonio Aceves-Fernandez* // IntechOpen, 2020. 184 p.
11. Fuzzy Sets, Fuzzy Logic and Their Applications / *Michael Gr. Voskoglou* // MDPI AG, 2020. 366 p.

12. Hands-On Genetic Algorithms with Python. Applying Genetic Algorithms to Solve Real-world Deep Learning and Artificial Intelligence Problems / *Eyal Wirsansky* // Packt Publishing, 2020. 346 p.

13. Genetic Algorithms and Machine Learning for Programmers. Create AI Models and Evolve Solutions / *Frances Buontempo* //·Pragmatic Bookshelf, 2019. 218 p.

14. Practical Handbook of Genetic Algorithms. Complex Coding Systems, Volume III / *Lance D. Chambers* // CRC Press, 2019. 592 p.

15. Deep Neuro-Fuzzy Systems with Python. With Case Studies and Applications from the Industry / *Himanshu Singh, Yunis Ahmad Lone* // Apress, 2019. 260 p.

16. Fuzzy Logic Based in Optimization Methods and Control Systems and Its Applications / *Ali Sadollah* // IntechOpen, 2018. 96 p.

17. Type-2 Fuzzy Logic and Systems. Dedicated to Professor Jerry Mendel for His Pioneering Contribution / *Hani Hagras, Oscar Castillo, Robert John* // Springer International Publishing, 2018. 148 p.

18. Fuzzy Logic: Theory and Applications / *Lukas Brooks* // Larsen & Keller education, 2017. 336 p.

19. Fuzzy Logic. A Practical Approach / *F. Martin McNeill, Ellen Thro* //·Elsevier Science, 2014. 312 p.

20. Introduction To Type-2 Fuzzy Logic Control. Theory and Applications / *Jerry Mendel, Hani Hagras, Woei-Wan Tan, William W. Melek, Hao Ying* // Wiley, 2014. 376 p.

21. Fuzzy Logic. Implementation and Applications / *D. M. Mlynek, Daniel J. Mlynek, Marek J. Patyra* // B.G. Teubner GmbH, 2012. 317 p.

22. An Introduction to Many-Valued and Fuzzy Logic / *Semantics Algebras and Derivation Systems* // Cambridge University Press, 2008. 329 p.

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1

Вступ до нечіткої логіки. Основні визначення та властивості «м'яких обчислень» 3

1.1. Історичний розвиток «м'яких обчислень», «обчислювального інтелекту» та «нечіткої логіки» 3

1.2. Основні визначення та властивості «м'яких обчислень» 12

1.2.1. Класи невизначеності 12

1.2.2. Теорія неточних (грубих) множин 14

1.2.3. Імовірність, неточність, нечіткість та їх відмінності 16

Контрольні запитання 17

РОЗДІЛ 2

Методи представлення знань з використанням нечітких множин типу 1 19

2.1. Основні характеристики, поняття та визначення теорії нечітких множин 19

2.1.1. Символьний опис нечітких множин. 19

2.1.2. Основні характеристики нечітких множин. 22

2.1.3. Методи побудови функцій приналежності нечітких множин 28

2.2. Класи функцій приналежності 29

2.3. Багатовимірні функції приналежності 36

Контрольні запитання 38

РОЗДІЛ 3

Операції з нечіткими множинами типу 1 39

3.1. Логічні операції з нечіткими множинами 39

3.1.1. Включення 39

3.1.2. Рівність 40

3.1.3. Перетин 41

3.1.4. Об'єднання 42

3.1.5. Декомпозиція 43

3.1.6. Доповнення 45
3.1.7. Різниця 47
3.1.8. Диз'юнктивна сума 47
3.1.9. Властивості операцій об'єднання та перетину 50
3.2. Арифметичні операції з нечіткими множинами 51
3.2.1. Алгебраїчний добуток 51
3.2.2. Алгебраїчна сума 51
3.2.3. Взведення у ступінь 52
3.2.4. Множення на число 54
3.2.5. Випукла комбінація нечітких множин 54
3.2.6. Декартовий (прямий) добуток нечітких множин 54
3.3. Оператор збільшення нечіткості 55
Контрольні запитання 56
РОЗДІЛ 4
Принцип узагальнення та лінгвістичні змінні.
Нечіткі числа та операції над ними 58
4.1. Принцип узагальнення для нечітких множин 58
4.2. Нечіткі числа 62
4.2.1. Визначення нечітких чисел 62
4.2.2. Операції над нечіткими числами 64
4.2.2.1. Бінарні арифметичні операції над нечіткими числами 64
4.2.2.2. Унарні арифметичні операції над нечіткими числами 66
4.2.3. Нечіткі числа (*L*-*R*)-типу 67
4.3. Лінгвістичні змінні 71
4.3.1. Визначення нечіткої та лінгвістичної змінної 71
4.3.2. Лінгвістичні змінні істинності 75
4.3.3. Значення істинності «Невідомо» та «Невизначено» 77
Контрольні запитання 78

РОЗДІЛ 5

Нечіткі відношення їх властивості та операції над ними 80
5.1. Основні визначення нечітких відношень..... 80
5.2. Операції над нечіткими відношеннями..... 86
5.2.1. Об'єднання двох нечітких відношень R_1 та R_2..... 86
5.2.2. Перетин двох нечітких відношень R_1 та R_2..... 88
5.2.3. Доповнення нечітких відношень 90
5.2.4. Алгебраїчний добуток двох відношень 90
5.2.5. Алгебраїчна сума двох відношень..... 90
5.2.6. Диз'юнктивна сума двох відношень..... 91
5.2.7. Звичайне відношення, найближче до нечіткого. 91
5.2.8. Відношення включення 91
5.2.9. Композиція двох нечітких відношень ((*max-min*)-композиція)..... 92
5.2.10. Зворотне відношення 97
5.2.11. Звичайна підмножина α-рівня нечіткого відношення..... 97
5.2.12. Нечіткі підмножини послідовно обумовлюють одне одного 97
5.3. Властивості нечітких відношень 98
5.4. Принцип декомпозиції нечітких відношень..... 100
5.5. Транзитивне замикання нечітких відношень 102
5.6. Проекції нечітких відношень..... 104
Контрольні запитання 107

РОЗДІЛ 6

Базові відомості про трикутні (тріангулярні) норми.
Теорія наближених міркувань..... 109
6.1. Визначення тріангулярних норм (*T*-норм) та кнорм (*S*-кнорм)..... 109
6.1.1. Тріангулярна (трикутна) норма (*T*-норма)..... 110
6.1.2. Тріангулярна (трикутна) кнорма (*S*-кнорма)..... 112
6.1.3. Структури гіперплощин деяких існуючих *T*-норми і *S*-кнорм..... 113

6.1.4. Тріангулярні норми та кнорми для N аргументів. 119
6.2. Параметризовані тріангулярні функції 120
6.3. Операції нечіткої множини самої із собою та її доповненою множиною 122
6.3.1. Кон'юнкція (перетин) нечіткої множини самої із собою. 122
6.3.2. Диз'юнкція (об’єднання) нечіткої множини самої із собою 123
6.3.3. Кон'юнкція (перетин) нечіткої множини з її доповненою множиною. 124
6.3.4. Диз'юнкція (об’єднання) нечіткої множини з її доповненою множиною ... 125
6.4. Наближені міркування 125
6.4.1. Композиційне правило виводу. 125
6.4.2. Композиційне правило виводу по Заде 128
6.4.3. Правило модус поненс як окремий випадок композиційного правила виведення 131
Контрольні запитання 132
РОЗДІЛ 7
Системи та алгоритми нечіткого виводу 134
7.1. Структура та опис функціонування систем нечіткого виводу 134
7.2. Алгоритми нечіткого виводу 152
7.2.1. Алгоритм нечіткого виводу Мамдані 152
7.2.2. Алгоритм нечіткого виводу Ларсена 159
7.2.3. Алгоритм нечіткого виводу Цукамото 161
7.2.4. Алгоритм нечіткого виводу Такагі-Сугено 162
7.2.5. Спрощений алгоритм нечіткого виводу 167
Контрольні запитання 169
РОЗДІЛ 8
Нечітка кластеризація 170
8.1. Введення у нечітку кластеризацію 170
8.2. Нечіткий кластерний аналіз 174

8.3. Алгоритми нечіткої кластеризації 176
8.3.1. Кластеризація алгоритмом *c*-середніх (*FCM*) 176
8.3.1.1. Чітка кластеризація алгоритмом *c*-середніх 176
8.3.1.2. Базовий алгоритм нечітких *c*-середніх 178
8.3.1.3. Узагальнення алгоритму нечітких *c*-середніх 183
8.3.2. Алгоритм кластеризації з можливостями (*PCM*) 186
8.3.3. Кластеризація методом пікового групування (гірський алгоритм) 191
8.4. Синтез нечітких правил за результатами кластеризації 194
Контрольні запитання 197
РОЗДІЛ 9
Генетичні алгоритми 198
9.1. Основні поняття генетичних алгоритмів 198
9.2. Класичний генетичний алгоритм 203
9.3. Схеми хромосом 216
9.4. Теорема схем 221
9.5. Переваги та недоліки генетичних алгоритмів 223
Контрольні запитання 231
РОЗДІЛ 10
Методи представлення знань з використанням нечітких множин типу 2 232
10.1. Основні визначення нечітких множин типу 2 232
10.2. Основні операції над нечіткими множинами типу 2 241
10.3. Системи нечіткого виводу типу 2 247
Контрольні запитання 256
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 257

Навчальне видання

ЗАКОВОРОТНИЙ Олександр Юрійович
ОРЛОВА Тетяна Олександрівна
ГРИНЬОВ Денис Валерійович

ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ІНТЕЛЕКТ

Навчальний посібник
для студентів денної та заочної форм навчання зі спеціальностей:
123 «Комп’ютерна інженерія» та
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

Роботу до видання рекомендував проф. В. Д. Дмитрієнко
Відповідальний за випуск проф. С. Ю. Леонов
В авторській редакції

План 2024 р. , п. 17

Підп. до друку 15.02.2024. Гарнітура Times New Roman. Обл.-вид. арк. 9,8.

Видавничий центр НТУ «ХПІ»
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.

Електронне видання