МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

І. О. Костюков, Б. І. Кубрик, О. Ю. Кропачек, С. А. Литвиненко,
О. В. Лавріненко

ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО, ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО ТА ТРИФАЗНОГО ЖИВЛЕННЯ

Навчально-методичний посібник
для студентів електротехнічних та комп’ютерних спеціальностей

Харків 2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

І. О. Костюков, Б. І. Кубрик, О. Ю. Кропачек, С. А. Литвиненко,
О. В. Лавріненко

ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО, ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО ТА ТРИФАЗНОГО ЖИВЛЕННЯ

Навчально-методичний посібник
для студентів електротехнічних та комп’ютерних спеціальностей

Затверджено
редакційно-видавничою
радою НТУ «ХПІ»,
протокол № 1 від 15.02.2024 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2025

УДК 621.3(075) + 621.3.011.71(075)

Л 59

Рецензенти:

А. В. Кипенський, д-р техн. наук, директор ННІ СГТ, НТУ «ХПІ»;
В. Ю. Кучерук, д-р техн. наук, проф. кафедри інформаційних технологій, Уманський національний університете садівництва

Л 59 Лінійні електричні кола постійного, однофазного синусоїдного та трифазного живлення: навчально-методичний посібник для студентів електротехнічних та комп'ютерних спеціальностей / І. О. Костюков, Б. І. Кубрик, О. Ю. Кропачек, С. А. Литвиненко, О. В. Лавріненко. – Харків : НТУ «ХПІ», 2025. – 160 с.

ISBN 978-617-05-0530-9

Посібник містить базові теоретичні матеріали та матеріали для їх практичного застосування з тем «Лінійні електричні кола постійного струму», «Лінійні електричні кола однофазного синусоїдального струму», «Трифазні електричні кола» та «Лінійні електричні кола несинусоїдального струму» дисциплін «Теоретичні основи електротехніки», «Теорія електричних і магнітних кіл», «Теорія електричних та електронних кіл», «Теорія електричних кіл», «Теорія електромагнітних кіл», «Основи електротехніки та електроніки», «Електротехніка». Викладено та проілюстровано великою кількістю прикладів основні принципи розрахунків простих і складних кіл в усталених режимах.

Призначено для студентів електротехнічних та комп'ютерних спеціальностей.

Іл. 181. Табл. 1. Бібліогр. 19 назв.

УДК 621.3(075) + 621.3.011.71(075)

ISBN 978-617-05-0530-9

© Костюков І. О., Кубрик Б. І.,
Кропачек О. Ю., Литвиненко С. А.,
Лавріненко О. В., 2025
© НТУ «ХПІ», 2025

ЗМІСТ

Вступ 5
1. Лінійні електричні кола постійного струму 7
1.1.Електричне коло та його елементи 9
1.2.Основні закони електричних кіл 16
1.3.Прості електричні кола. Розрахунок еквівалентних опорів 18
1.4.Закон Ома. Закони Кірхгофа. Баланс потужності 26
1.5.Метод контурних струмів 34
1.6.Метод вузлових потенціалів 41
1.7.Теорема про еквівалентний генератор (теорема Тевенена) 49
1.8.Запитання для самоконтролю 60
2. Лінійні електричні кола змінного струму 61
2.1.Зображення синусоїдальних функцій векторами 64
2.2.Параметри кіл гармонійного струму 66
2.3.Закон Ома в колах синусоїдного струму 70
2.4.Метод комплексних амплітуд (символічний метод) 86
2.5.Активні і реактивні складові струму і напруги 95
2.6.Резонанс напруг і струмів 99
2.7.Кола зі взаємною індуктивністю 113
2.8.Запитання для самоконтролю 123
3. Розрахунок трифазних електричних кіл 125
3.1.Системи напруг і струмів в трифазних колах 125
3.2.Типи з’єднання трифазних кіл 127
3.3.Векторні діаграми трифазних кіл 128
3.4.Визначення потужності в трифазних колах 131
3.5.Запитання для самоконтролю 151
4. Лінійні кола несинусоїдального струму 152
4.1.Принципи розрахунку кіл несинусоїдального струму 152
4.2.Приклади розрахунку кіл несинусоїдального струму 154
4.3.Запитання для самоконтролю 162
Список джерел інформації 162

ВСТУП

Теорія електричних кіл та споріднені з нею дисципліни [1-3, 6, 12, 13] вивчають електрофізичні явища в технічних системах, які використовуються для виробництва, передачі та розподілення електричної енергії, а також для розповсюдження та обробки інформації. Ці навчальні дисципліни є теоретичною базою для підготовки спеціалістів електротехнічного та інформаційного профілів.

Успішне опанування цими дисциплінами неможливе без практичних навичок, які формуються під час розв’язання конкретних задач, в тому числі на практичних заняттях. Такий підхід забезпечує більш якісне і глибоке вивчення теоретичного матеріалу, що в свою чергу служить кращому засвоєнню студентами основних законів теорії електричних кіл, необхідних для розуміння принципу роботи електротехнічних та електронних пристроїв, які вивчаються у подальших спеціальних курсах [4, 5, 7, 8].

З урахуванням умов воєнного стану і переходу навчального процесу на дистанційну форму основною метою цього посібника є надання допомоги студентам в їх самостійній роботі. В зв’язку з цим у посібнику до великої кількості задач різного рівня складності надаються докладний хід розв’язання та детальні пояснення.

Структурно посібник складений з чотирьох розділів, які охоплюють практично всю першу частину курсу «Теорія електричних кіл» та йому подібних.

В першому розділі на великій кількості прикладів показано використання основних законів та методів аналізу кіл постійного струму, на яких базуються практичні розрахунки кіл різноманітного призначення.

Другий розділ присвячений колам однофазного гармонійного струму. В ньому надаються численні приклади розрахунку кіл різної складності методом комплексних амплітуд. Детально розглянуті резонансні явища та кола з індуктивними зв'язками. Розв'язання задач цього розділу супроводжується побудовою векторних діаграм.

У третьому розділі приведені приклади розв'язання задач з аналізу трифазних кіл з різними схемами з'єднання навантаження в симетричному та несиметричному режимах. Розв'язання супроводжуються побудовою топографічних діаграм.

Четвертий розділ присвячений аналізу кіл з несинусоїдальними періодичними струмами та напругами.

До кожного розділу надається основний теоретичний матеріал та задачі для самостійної роботи.

Навчальний посібник за обсягом та змістом повністю відповідає навчальним програмам з дисциплін «Теоретичні основи електротехніки», «Теорія електричних і магнітних кіл», «Теорія електричних та електронних кіл», «Теорія електричних кіл», «Теорія електромагнітних кіл», «Основи електротехніки та електроніки», «Електротехніка» для підготовки фахівців за спеціальностями 123, 133, 141, 171, 172, 174, 175, 176, 273.

1. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

В теорії електричних кіл (ТЕК) на відміну від теорії електромагнітних полів (ТЕП) електричні процеси розглядають в обмеженій області простору за допомогою алгебраїчних та звичайних диференціальних рівнянь [1, 3, 6, 7, 9, 12, 16]. При цьому використовують інтегральні величини, які не залежать від точки спостереження, простір не враховується, а процеси розглядаються тільки в часі.

Інтегральні величини – скалярні і тому дають сумарну кількісну оцінку явища. Використання інтегральних понять (величин) дозволяє суттєво спростити розрахунки електричних процесів з довільною похибкою. Розглянемо основні інтегральні величини електричного кола, які використовують в теорії електричних кіл: електричний струм, напруга , ЕРС та потужність. Електричний струм – це явище спрямованого руху заряджених частинок. Кількісною мірою електричного струму є сила струму I – скалярна фізична величина, яка визначається як швидкість зміни заряду в часі:

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt},$$

де q – заряд.

Струм, сила якого і напрямок не змінюються в часі, називають постійним. Для такого струму:

$$I = \frac{q}{t},$$

де q – сумарний заряд, який проходить за час t через поперечний переріз провідника.

Одиниця вимірювання сили струму – ампер, [А] = [Кл/с].

Електрична напруга – це скалярна величина, яка характеризує електричне поле вздовж заданого шляху a-b. Вона визначається як лінійний

інтеграл від напруженості електричного поля $\vec{E}$ уздовж цього шляху a-b або різницею потенціалів φ між двох точок a і b:

$$u_{ab} = \int_a^b \overline{E}\,\overline{dl} = \varphi_a - \varphi_b.$$

З іншого боку напругу u_{ab} можна виразити через енергію W і дати їй таке визначення: напруга – це кількість енергії, яка витрачається на переміщення одиничного заряду q із однієї точки електричного поля в іншу:

$$u_{ab} = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{dW}{dq}.$$

У потенціальному електричному полі напруга між двома точками не залежить від шляху, яким переміщається заряд з однієї точки в іншу, і чисельно дорівнює різниці потенціалів цих точок. Одиниця вимірювання напруги – вольт, [В].

Електрорушійна сила (ЕРС) є роботою сторонніх сил, що зумовлюють рух зарядів. Ці сторонні сили, на відміну від кулонових, не з'єднують різнойменні заряди, а їх роз'єднують і підтримують різницю потенціалів на затискачах. ЕРС чисельно дорівнює роботі сторонніх (неелектричних) сил, яку необхідно виконати для переміщення одиничного позитивного заряду всередині джерела від затискача з меншим потенціалом до затискача з більшим потенціалом і визначається інтегралом:

$$e_{ab} = \int_a^b \overline{E}_{\text{ст}}\,\overline{dl}.$$

ЕРС, як і напругу, вимірюють у вольтах, [В].

Потужність – це швидкість зміни енергії в часі:

$$p = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}.$$

Напруга, струм, ЕРС є величинами скалярними, але перед початком розрахунку їм треба задати умовно позитивні напрямки.

1.1. Електричне коло та його елементи

У кожному реальному електромагнітному пристрої можна одночасно спостерігати такі фізичні процеси: генерацію електричної енергії в джерелах за рахунок перетворення інших видів енергії в електричну, перетворення електричної енергії в інші види у споживачах, накопичення енергії в об'ємах магнітного та електричного полів. Ці фізичні процеси, які у тому чи іншому поєднанні властиві всім складним пристроям, протікають одночасно і пов'язані між собою законом збереження енергії. В розрахунках реальний об'єкт представляється схемою заміщення, яка складається із сукупності ідеальних схемних елементів.

Кожний ідеальний елемент схеми відображає на схемі заміщення один із вище наведених фізичних процесів. До складу ідеальних елементів схеми входять два активних елемента (ідеальне джерело ЕРС та ідеальне джерело струму) і три пасивних елементи (ідеальний резистор *R*, ідеальна котушка індуктивності *L*, ідеальний конденсатор *C*).

Таким чином електричним коло – це адекватна модель електромагнітних пристроїв, призначених для генерації, передачі, розподілу та перетворення електричної енергії, процеси в яких розглядаються тільки в часі за допомогою інтегральних величин: ЕРС, струм, напруга, опір, індуктивність та ємність.

Елементи схем заміщення

За кількістю затискачів (полюсів), за допомогою яких один елемент з'єднується з іншими, розрізняють двополюсні, чотириполюсні та багатополюсні елементи. Двополюсники мають два затискачі. До них відносять джерела електричної енергії, резистори, котушки індуктивності та конденсатори. Джерела електричної енергії – це активні двополюсники, а елементи *R, L, C* – пасивні.

Кожний елемент електричного кола може бути охарактеризований з якісного та кількісного боку. З якісного боку елемент характеризується його

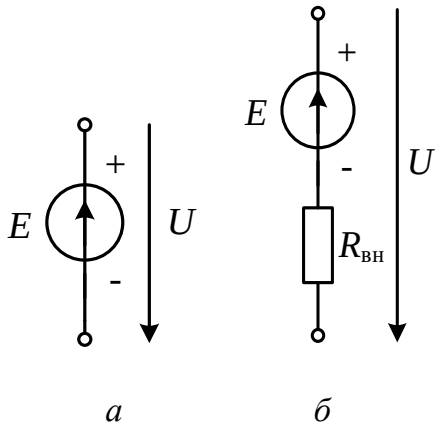
фізичними властивостями, які визначають призначення та функції елемента. З кількісного боку кожний елемент кола характеризується своїм параметром. Параметр – це кількісна характеристика певної властивості, яка може мати різні числові значення.

Розрізняють лінійні та нелінійні елементи. Лінійні елементи – це елементи, параметри яких не залежать від струму та напруги на них. Всі лінійні елементи мають лінійні вольт-амперні, вебер-амперні та кулон-амперні характеристики. Ці елементи описуються лінійними диференціальними або алгебраїчними рівняннями. Електричне коло, яке складається виключно хз лінійних елементів, називається лінійним.

Якщо параметри елемента не є функціями просторових координат, то цей елемент відносять до елементів із зосередженими параметрами. Інакше елемент відносять до елементів з розподіленими параметрами. Більш детально класифікація елементів кіл наведена в [6]. В подальшому будемо розглядати лінійні електричні кола із зосередженими параметрами.

Джерела електричної енергії

В теорії кіл розрізняють два типи ідеалізованих джерел електричної енергії: ідеальне джерело ЕРС та ідеальне джерело струму.



а *б*

Рисунок 1.1

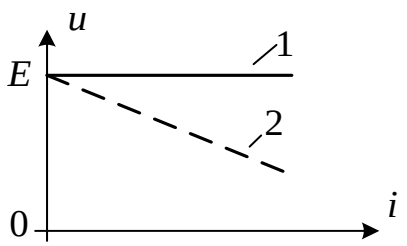


Рисунок 1.2

У ідеальному джерелі ЕРС опір нескінченно малий і тому напруга на затискачах джерела за зміни навантаження не змінюється.

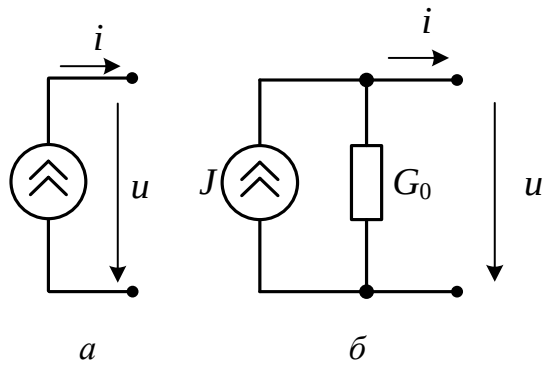


Рисунок 1.3

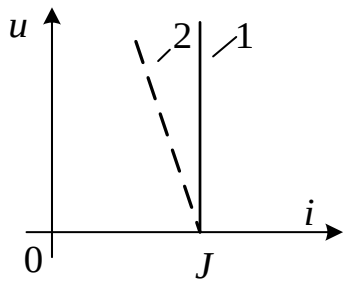


Рисунок 1.4

Пасивні елементи електричних кіл

Резистивний елемент або ідеальний резистор – це такий елемент кола, в якому відбувається процес перетворення електромагнітної енергії в інші види енергії. Кількісно визначається відношенням миттєвих значень напруги і струму:

$$R = \frac{u(t)}{i(t)}.$$

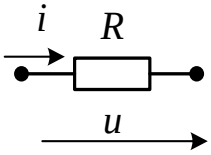


Рисунок 1.5

Опір R – це параметр резистивного елемента. Одиниця вимірювання опору – ом [Ом], а його розмірність – [В/А].

Величина, зворотна опору, називається провідністю:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{i(t)}{u(t)}.$$

Одиниця вимірювання провідності – сименс [См], розмірність провідності – [А/В].

Миттєва потужність, яка надходить до резистивного елемента:

$$p_R(t) = u(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) = G u^2(t).$$

Електрична енергія, яка надійшла в опір R і перетворилась в ньому в інші види енергії за час $\Delta t = t_1 - t_2$:

$$W_R = \int_{t_1}^{t} p_R(t)dt = \int_{t_1}^{t} Ri^2 dt = \int_{t_1}^{t} Gu^2 dt.$$

Якщо струм постійний $i(t) = I = \text{const}$, тоді:

$$W_R = RI^2 t.$$

Останнє рівняння – це математичний запис закону Джоуля-Ленца в інтегральній формі.

Індуктивність як ідеальний схемний елемент електричного кола з якісного боку характеризується здатністю запасати енергію магнітного поля. Індуктивність, як параметр, визначається співвідношенням:

$$L = \frac{\Psi}{i_L}.$$

де i_L – струм через індуктивність;

Ψ – потокозчеплення самоіндукції.

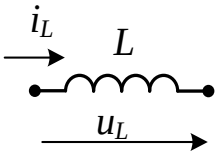


Рисунок 1.6

Відповідно до закону електромагнітної індукції ЕРС самоіндукції за $L = \text{const}$:

$$e_L = -L\frac{di_L(t)}{dt}.$$

Позитивний напрямок напруги на індуктивності u_L збігається з позитивним напрямком струму в ній i_L і протилежний до напрямку ЕРС самоіндукції, тобто $u_L = -e_L$.

Тоді напруга на індуктивності:

$$u_L = L\frac{di_L(t)}{dt} = -e_L.$$

Струм в індуктивному елементі в даний момент часу:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L(t)dt.$$

Миттєва потужність, що надходить в індуктивний елемент в довільний момент часу:

$$p_L(t) = u_L(t)i_L(t) = Li_L\frac{di_L}{dt}.$$

Енергія, яка накопичена в індуктивному елементі за довільний момент часу *t*:

$$W_L = \int_{-\infty}^{t} p_L(t)dt = L\int_0^t i_L di_L = \frac{Li_L^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}.$$

Одиниця вимірювання індуктивності – генрі [Гн], а потокозчеплення – вебер [Вб]. Розмірність вебера – [Тл·м^2], а генрі – [Вб/А].

Ємнісним елементом називають ідеалізований елемент електричного кола, в якому накопичується енергія електричного поля. Ємність як параметр визначається співвідношенням:

$$C = \frac{q}{u_C},$$

де q – заряд, накопичений в ємнісному елементі,

u_C – напруга на затискачах ємнісного елемента.

Одиниця вимірювання ємності – фарад [Ф]. Розмірність фарада – [Кл/В].

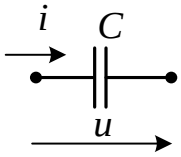


Рисунок 1.7

Струм в ємності визначається швидкістю зміни заряду:

$$i_C = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt}.$$

Напруга на ємності:

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(t)\,dt.$$

В момент $t = 0$ початкове значення напруги на ємності:

$$u_C(0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i_C(t)\,dt.$$

Тоді напруга на ємності в певний момент часу визначатиметься так:

$$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)\,dt.$$

Миттєва потужність, що надходить в ємнісний елемент:

$$p_C(t) = u_C(t)i_C(t) = Cu_C(t)\frac{du_C(t)}{dt}.$$

Якщо знаки напруги на ємнісному елементі u_C і похідної $\frac{du_C(t)}{dt}$ збігаються, то миттєва потужність позитивна. В цьому випадку енергія надходить в ємність. Якщо знаки напруги u_C і її похідної $\frac{du_C(t)}{dt}$ не збігаються, то миттєва потужність p_C від'ємна. Це означає, що ємність віддає енергію в коло або розряджається.

Слід зауважити, що в колах постійного струму явище самоіндукції відсутнє і тому напруга на індуктивності дорівнює нулю.

$$u_L = L\frac{di_L(t)}{dt} = 0.$$

Ділянка кола, де була індуктивність, буде закорочена, тобто буде мати нульовий опір.

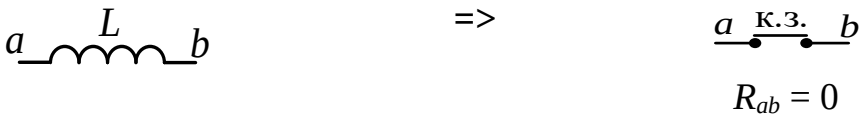


Рисунок 1.8

В ємності постійний струм не тече, оскільки

$$i_C = C\frac{du_C(t)}{dt} = 0.$$

Тому в колах постійного струму ємність матиме необмежений опір (рис.1.9).

Рисунок 1.9

Таким чином, кола постійного струму будуть складатися із двох активних елементів (джерело ЕРС і джерело струму) і резисторів.

Електричні схеми. Основні поняття

При розрахунках процесів в електричному колі його заміняють моделлю або схемою заміщення у вигляді графічного зображення, яке називають електричною схемою. Електрична схема – це графічне зображення електричного кола, на якому умовними позначками показано з яких елементів складається коло і в який спосіб ці елементи з'єднані між собою. Структурні особливості електричного кола характеризують такі топологічні поняття як гілка, вузол, контур. Гілка – це ділянка кола, елементи якої з'єднані послідовно, і по якій протікає один і той самий струм (рис. 1.10, *а*, *б*). Вузол – це місце розгалуження на схемі, де з'єднані не менше трьох гілок (рис. 1.10, *в*). Контур – це будь-який замкнений шлях, який проходить по гілках (рис. 1.10, *г*). Незалежний контур – це контур, який відрізняється від інших хоча б однією гілкою. При обході контуру початкова та кінцева точки збігаються. Контур може містити розрив. Тоді в розрахунках цей розрив враховується як напруга між затискачами розриву.

Коло, в якому відсутні розгалуження, називають одноконтурним. Багатоконтурне коло містить розгалуження і характеризується кількістю незалежних контурів (див. рис. 1.10, *г*).

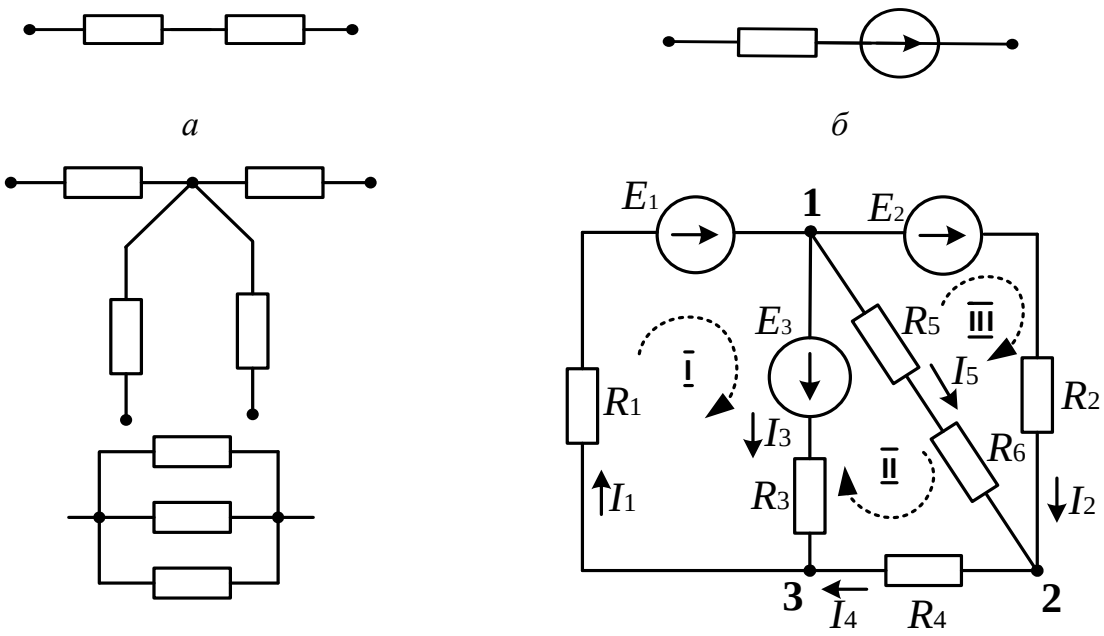


Рисунок 1.10

1.2. Основні закони електричних кіл

Для розрахунку і аналізу електричних кіл використовуються закон Ома і закони Кірхгофа., які складають основу теорії лінійних електричних кіл.

Закон Ома для постійного струму:

$$U = RI$$

або

$$I = \frac{U}{R} = UG,$$

а для змінного струму:

$$u(t) = Ri(t)$$

або

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = u(t)G.$$

В ідеальному резисторі струм прямо пропорційний напрузі та зворотно пропорційний його опору.

Перший закон Кірхгофа формулюється відносно вузла електричного кола: алгебраїчна сума струмів гілок, які сходяться у вузлі електричного кола,

дорівнює нулю. Цей закон витікає з принципу неперервності електричного струму:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$$

або

$$\sum_{k=1}^{n} i_k(t) = 0.$$

Перед складанням цих рівнянь треба задати умовно позитивні напрямки струмів у гілках. Струми, які спрямовані до вузла, вважають від'ємними, а ті, що спрямовані від вузла – додатними.

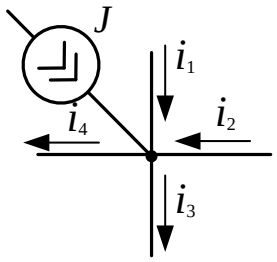


Рисунок 1.11

Для вузла на рис. 1.11 отримаємо таке рівняння:

$$-i_1 - i_2 + i_3 + i_4 - J = 0.$$

Другий закон Кірхгофа стосується контуру і має два формулювання.

Алгебраїчна сума падінь напруг в контурі дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС цього контуру:

$$\sum_{k=1}^{m} U_k = \sum_{k=1}^{l} E_k$$

або

$$\sum_{k=1}^{m} u_k(t) = \sum_{k=1}^{l} e_k(t).$$

Якщо розглядати напруги на джерелах ЕРС, які мають протилежні до ЕРС знаки, то алгебраїчна сума напруг на гілках в контурі дорівнюватиме нулю:

$$\sum_{k=1}^{m} U_k = 0$$

або

$$\sum_{k=1}^{m} u_k(t) = 0.$$

Для складання рівнянь за другим законом Кірхгофа довільно обирається напрям обходу контуру (за годинниковою стрілкою або проти). Напруга і ЕРС, які збігаються з напрямком обходу контуру, записують зі знаком плюс, а ті, що не збігаються – зі знаком мінус.

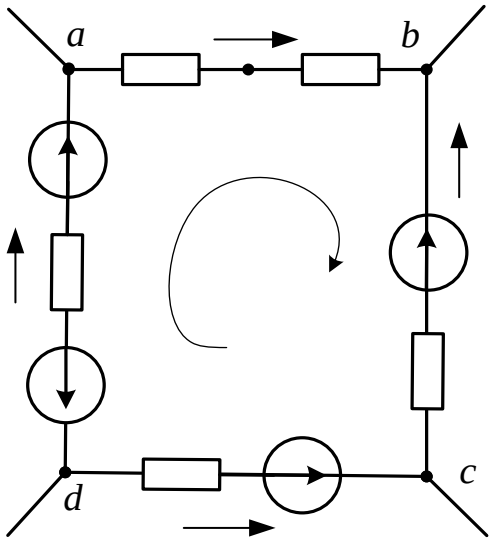


Рисунок 1.12

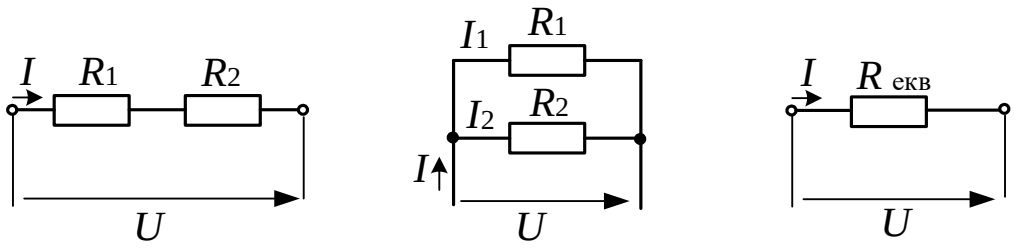
Для контуру на рис. 1.12 отримаємо таке рівняння:

$$u_{ab} - u_{cb} - u_{dc} + u_{da} = 0.$$

1.3. Прості електричні кола. Розрахунок еквівалентних опорів

Послідовним називається таке з'єднання елементів, за якого через них проходить один і той самий струм (рис.1.13, *а*).

Паралельним називається з'єднання, за якого елементи приєднані до спільної пари вузлів (рис.1.13, *б*).



а *б* *в*

Рисунок 1.13

Змішаним називається комбінація послідовних і паралельних з’єднань елементів.

За допомогою заміни послідовних і паралельних з’єднань опорів еквівалентними опорами виконується розрахунок простих електричних кіл. Еквівалентними називають такі перетворення, за яких струми і напруги в неперетвореній частині кола залишаються незмінними. Після таких перетворень можемо представити з’єднання елементів еквівалентним опором $R_{\text{екв}}$ (рис. 1.13, *в*).

За послідовного з’єднання (рис.1.13, *а*):

$$R_{\text{екв}} = R_1 + R_2.$$

Струм визначаємо за законом Ома:

$$I = \frac{U}{R_{\text{екв}}}.$$

Загальна формула для визначення $R_{\text{екв}}$ послідовного з’єднання:

$$R_{\text{екв}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n.$$

За паралельного з’єднання двох гілок (рис.1.13, *б*):

$$\frac{1}{R_{\text{екв}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

$$R_{\text{екв}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Загальний струм та струми в паралельних гілках визначаємо за законом Ома:

$$I = \frac{U}{R_{\text{екв}}}, \qquad I_1 = \frac{U}{R_1}, \qquad I_2 = \frac{U}{R_2}.$$

Загальна формула для визначення $R_{екв}$ паралельного з'єднання:

$$\frac{1}{R_{екв}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}.$$

Задача 1

Дано: напруга U, опори резисторів R_1, R_2, R_3.

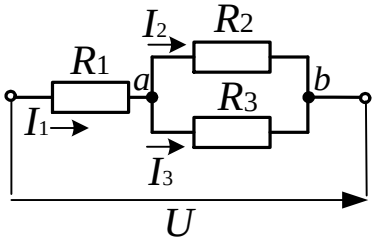


Рисунок 1.14

Визначити струми I_1, I_2, I_3.

Розв'язання

Еквівалентний опір:

$$R_{екв} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = R_1 + R_{23}.$$

За законом Ома для замкненого кола:

$$I_1 = \frac{U}{R_{екв}}.$$

За законом Ома для ділянки a – b:

$$U_{ab} = I_1 R_{23},$$

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2} = I_1 \frac{R_{23}}{R_2} = I_1 \frac{R_2 R_3}{(R_2 + R_3) R_2} = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3}.$$

Отримана формула називається *дільником струмів.*

Струм в одній з двох паралельних гілок дорівнює струму до розгалуження, помноженому на опір протилежної паралельної гілки, і поділеному на суму опорів паралельних гілок.

Для струму I_3 ця формула має вигляд:

$$I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}.$$

Формули для струмів I_2, I_3 можуть бути застосовані за будь-яких значень R_2, R_3.

Якщо опір $R_2 = 0$, то в гілці 2 виникає коротке замикання (к.з.), а схема має вигляд:

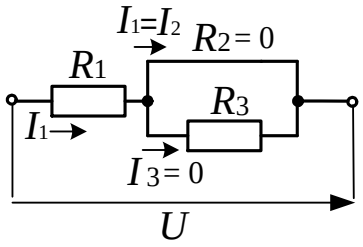


Рисунок 1.15

Зі схеми видно, що струм $I_2 = I_1$, а $I_3 = 0$, оскільки струм I_1 не буде розгалужуватися, а весь піде в ту гілку, яка не має опору.

З використанням дільника струмів маємо:

$$I_2 = I_1 \frac{R_3}{0+R_3} = I_1, \quad I_3 = I_1 \frac{0}{0+R_3} = 0.$$

Якщо опір $R_2 = \infty$, то в гілці 2 виникає холостий хід (х.х.), а схема має вигляд:

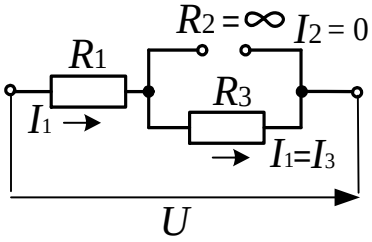


Рисунок 1.16

Зі схеми видно, що струм $I_2 = 0$, а $I_3 = I_1$, оскільки струм I_1 не буде розгалужуватися, а весь піде в ту гілку, яка не має розриву. Отже, гілки 1 і 3 з'єднані послідовно:

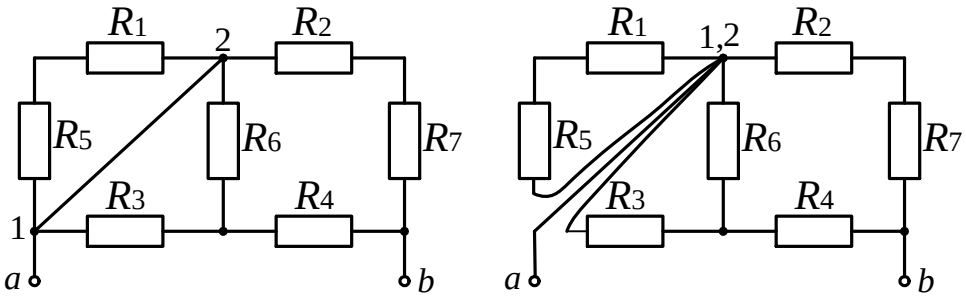
$$I_1 = I_3 = \frac{U}{R_1 + R_3}, I_2 = 0.$$

З використанням дільника струмів маємо:

$$I_3 = I_1 \frac{\infty}{\infty + R_3} = I_1, I_2 = I_1 \frac{R_3}{\infty + R_3} = 0\,.$$

Задача 2

Визначити еквівалентний опір кола на рис. 1.17 відносно точок *a*, *b*.



а *б*

Рисунок 1.17

Розв'язання

В схемі є гілка з нульовим опором. Напруга на цій гілці теж дорівнює нулю: $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = R \cdot I = 0 \cdot I = 0$, отже і потенціали точок 1 та 2 однакові. Точки однакового потенціалу можна об'єднати. Електрично це – один вузол. Тоді схему можна представити так, як показано на рис. 1.6:

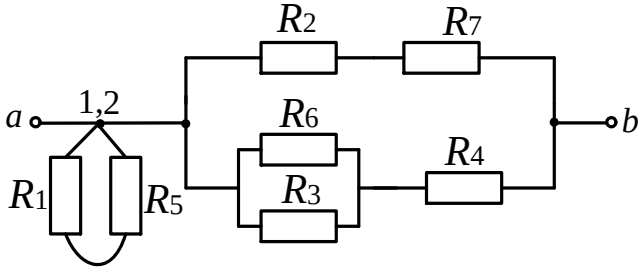


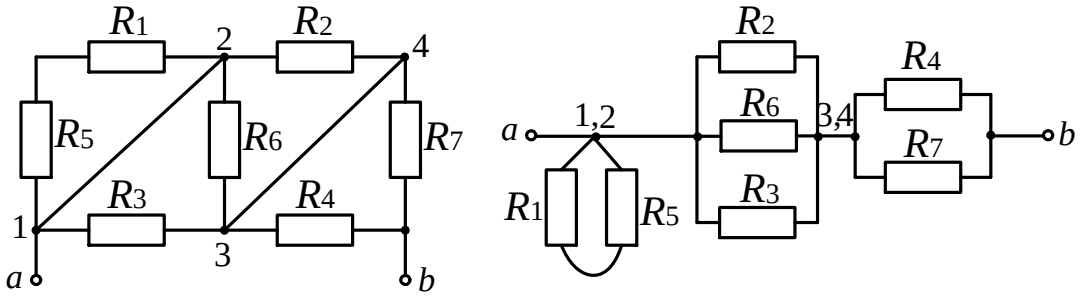
Рисунок 1.18

$$R_{27} = R_2 + R_7, \qquad R_{36} = \frac{R_3 R_6}{R_3 + R_6}, \qquad R_{364} = R_{36} + R_4,$$

$$R_{ab} = \frac{R_{27} R_{364}}{R_{27} + R_{364}} = \frac{(R_2 + R_7)\left(\frac{R_3 R_6}{R_3 + R_6} + R_4\right)}{R_2 + R_7 + \frac{R_3 R_6}{R_3 + R_6} + R_4}.$$

Задача 3

В колі, наведеному на рис. 1.19, *а*, визначити еквівалентний опір відносно точок *a, b*.



а *б*

Рисунок 1.19

Розв’язання

Для гілок з нульовим опором такі самі міркування, як в попередній задачі.

Після перетворювань отримали схему, яка представлена на рис.1.19, *б*:

$$\frac{1}{R_{236}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} = \frac{R_3R_6 + R_2R_6 + R_2R_3}{R_2R_3R_6}, \quad R_{47} = \frac{R_4R_7}{R_4+R_7},$$

$$R_{47} = \frac{R_4R_7}{R_4+R_7},$$

$$R_{ab} = R_{236} + R_{47} = \frac{R_2R_3R_6}{R_3R_6 + R_2R_6 + R_2R_3} + \frac{R_4R_7}{R_4+R_7}.$$

Задача 4

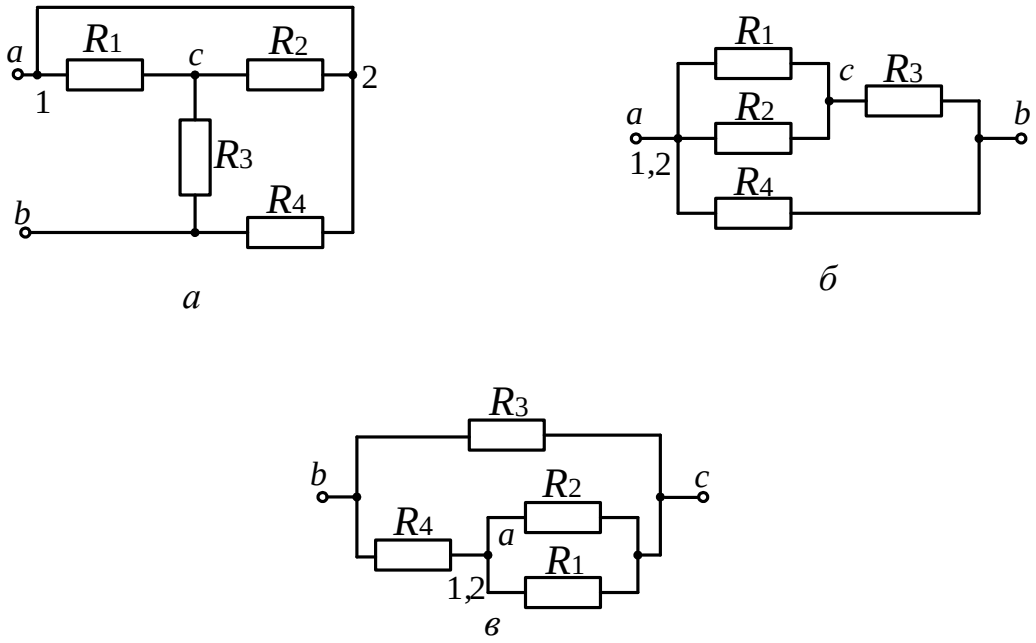


Рисунок 1.20

Дано: параметри кола на рис. 1.20, *а*:

$R_1 = R_2 = R_4 = 4$ Ом, $R_3 = 2$ Ом.

Визначити еквівалентний опір R_{ab} відносно точок *a*, *b* та опір R_{bc} відносно точок *b*, *c*.

Розв'язання

$$R_{ab} = \frac{R_4\left(R_3 + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)}{R_4+R_3+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}} = \frac{4\left(2+\frac{4\cdot 4}{4+4}\right)}{4+2+\frac{4\cdot 4}{4+4}} = 2 \text{ Ом}.$$

$$R_{bc} = \frac{R_3\left(R_4 + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)}{R_4+R_3+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}} = \frac{2(4+2)}{2+4+2} = 1{,}5 \text{ Ом}.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Визначити еквівалентний опір R_{ab} відносно точок a, b та опір R_{cd} відносно точок c, d.

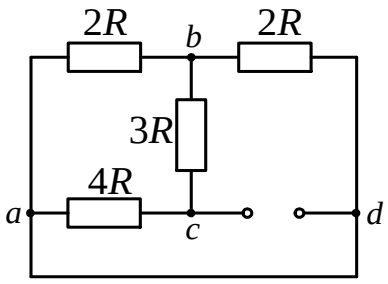


Рисунок 1.21

Відповідь: $R_{cd} = 2R$, $R_{ab} = (7/8)R$.

2. Визначити еквівалентний опір R_{ab} відносно точок a, b та опір R_{dl} відносно точок d, l.

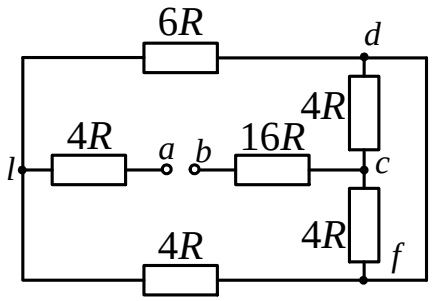


Рисунок 1.22

Відповідь: $R_{dl} = 2{,}4R$, $R_{ab} = 24{,}4R$.

3. Визначити еквівалентний опір R_{ab} відносно точок a, b.

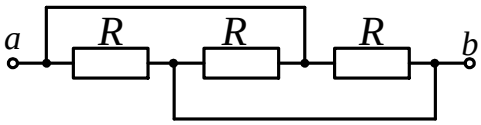


Рисунок 1.23

Відповідь: $R_{ab} = R/3$.

4. Визначити еквівалентний опір R_{ab} відносно точок a, b.

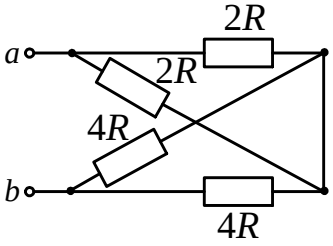


Рисунок 1.24

Відповідь: $R_{ab} = 3R$.

1.4. Закон Ома. Закони Кірхгофа. Баланс потужності

Для правильного визначення залежності між струмом I, ЕРС E та напругою U треба обрати позитивний координатний напрямок (умовно), який позначається стрілкою. Це напрямок, відносно якого будуть орієнтовані I, E та U.

Закон Ома є виразом закону збереження енергії.

Для пасивної ділянки з опором R:

$$RI = U;$$

для активної ділянки електричного кола (рис. 1.25):

$$RI = U + E.$$

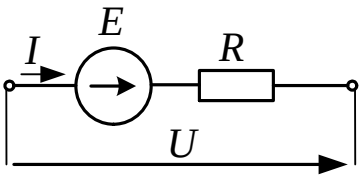


Рисунок 1.25

Баланс потужності ділянки можна отримати множенням правої і лівої частини виразу закону Ома на величину струму I:

$$RI^2 = UI+EI,$$

$$P_{\text{спож}} = P_{\text{вир}} + P_{\text{обм}}.$$

$P_{\text{спож}} = RI^2$ – потужність процесу виділення тепла, тобто спожита потужність. Вона завжди позитивна, оскільки процес перетворення електричної енергії в теплову є незворотнім.

$P_{\text{обм}} = UI$ – потужність, якою обмінюються ділянки кола. Якщо U та I на ділянці мають однаковий напрямок, то ця потужність буде додатною, тобто надходить на цю ділянку, інакше – потужність від'ємна, тобто переноситься з цієї ділянки на інші ділянки кола.

$P_{\text{вир}} = EI$ – потужність, що генерується сторонніми ЕРС. Якщо E та I збігаються за напрямком, то потужність буде додатною, тобто енергія сторонніх сил перетворюється в електричну енергію (режим генератора),

інакше потужність буде від’ємною, тобто електрична енергія перетворюється в інші види (двигун).

Задача 1

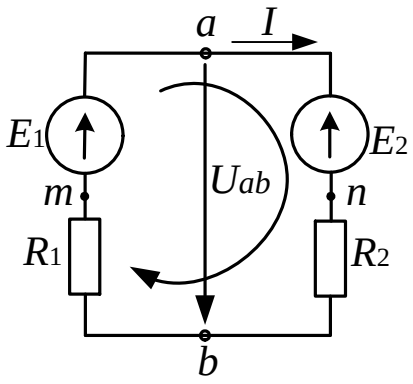


Рисунок 1.26

Дано:

$E_1 = 120$ В, $E_2 = 40$ В, $R_1 = 12$ Ом, $R_2 = 8$ Ом.

Визначити струм I, напругу U_{ab}, скласти баланс потужності.

Розв’язання

За законом Ома для замкнутого контуру *anbma* визначимо струм I, за законом Ома для ділянки кола визначимо напругу U_{ab}.

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = \frac{120 - 40}{12 + 8} = 4 \text{ А}.$$

anba:

$R_2I = U_{ab} - E_2$, $U_{ab} = R_2I + E_2 = 8 \cdot 4 + 40 = 72$ В.

bmab:

$R_1I = -U_{ab} + E_1$, $U_{ab} = E_1 - R_1I = 120 - 12 \cdot 4 = 72$ В.

Баланс потужності для ділянок.

anb:

$P_{\text{спож2}} = P_{\text{вир2}} + P_{\text{обм2}}$; $R_2I^2 = U_{ab}I - E_2I$; $8 \cdot 4^2 = 72 \cdot 4 - 40 \cdot 4$; $128 = 288 - 160$ (Вт).

bma:

$P_{\text{спож1}} = P_{\text{вир1}} + P_{\text{обм1}}$; $R_1I^2 = -U_{ab}I + E_1 I$; $12 \cdot 4^2 = -72 \cdot 4 + 120 \cdot 4$;

$192 = -288 + 480$ (Вт).

Складемо баланс потужності:

$$\sum P_{\text{вир}} = \sum P_{\text{спож}}, \qquad 320 \text{ Вт} = 320 \text{ Вт}.$$

Джерело E_1 працює в режимі генератора, а джерело E_2 – в режимі двигуна. Потужність з ділянки *bma* переноситься на ділянку *anb*.

Задача 2

Дано:

E_1 = 20 В, R_1 = 1 Ом, $R_2 = R_н$ = 2 Ом, E_2' = 25 В, E_2'' = 40/3 В, E_2''' = 10 В.

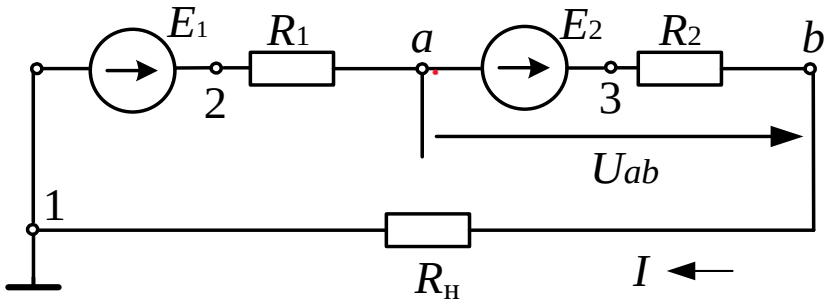


Рисунок 1.27

Визначити: струм I, напругу U_{ab}, скласти баланс потужності для E_2''' = 10 В, побудувати потенціальну діаграму для E_2 = 25 В.

Розв'язання

Два реальних джерела живлення, схеми яких складаються з ЕРС E_1 та E_2 і внутрішніх опорів R_1 та R_2, увімкнені послідовно. До них послідовно приєднаний споживач – резистор $R_н$. Потужності, які є в цьому колі: $P_{розс1} = R_1I^2$, $P_{розс2} = R_2I^2$ – потужності, які розсіюються на внутрішніх опорах джерел; $P_{вир1} = E_1I$, $P_{вир2} = E_2I$ – потужності, які виробляються джерелами; $P_{обм2} = U_{ab}I$ – потужність обміну ділянки *ab*.

E_2' = 25 В: джерело виробляє 225 Вт, на ділянці *ab* витрачається 162 Вт і переноситься на іншу ділянку 63 Вт.

E_2'' = 40/3 В: потужність вироблена повністю витрачається на ділянці *ab*. З цієї ділянки потужність не переноситься на іншу, і з іншої на ділянку *ab* потужність не надходить.

E_2''' = 10 В: джерело виробляє 60 Вт, на ділянці *ab* витрачається 72 Вт, отже з іншої ділянки на цю надходить 12 Вт.

$I = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2 + R_н}.$	$R_2 I = U_{ab} + E_2,$ $U_{ab} = R_2 I - E_2.$	$R_2 I^2 = U_{ab} I + E_2 I,$ $P_{розс2} = P_{обм2} + P_{вир2}.$
$I' = \frac{20 + 25}{5} = 9$ А,	$U'_{ab} = 18 - 25 = -7$ В.	$162 = -63 + 225$ Вт,
$I'' = \frac{20 + \frac{40}{3}}{5} = \frac{20}{3}$ А,	$U''_{ab} = \frac{40}{3} - \frac{40}{3} = 0$ В.	$\frac{800}{9} = 0 + \frac{800}{9}$ Вт,
$I''' = \frac{20 + 10}{5} = 6$ А.	$U'''_{ab} = 12 - 10 = 2$ В.	$72 = 12 + 60$ Вт.

Побудова потенціальної діаграми.

Потенціал – скалярна функція, яка визначається з точністю до довільної постійної величини. Прикладом скалярного поля є поле температур. За нуль за шкалою Цельсія прийнята температура танення льоду, за шкалою Кельвіна – абсолютний нуль –273°С. Таким чином температура може задаватися з точністю до довільної постійної. В електротехніці за нуль прийнятий потенціал Землі або великих мас.

E_2' = 25 В, I' = 9 А, $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = -E_1$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = E_1$.

$\varphi_a = \varphi_2 - I'R_1 = 20 - 9 = 11$ В.

$\varphi_3 = \varphi_a + E_2' = 11+25 = 36$ В.

$\varphi_b = \varphi_3 - I'R_2 = 36 - 18 = 18$ В.

$\varphi_1 = \varphi_b - I'R_н = 18 - 18 = 0$ В.

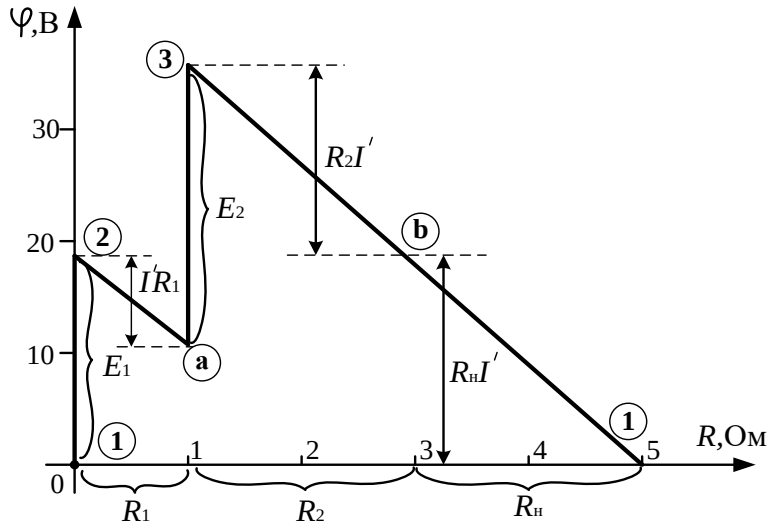


Рисунок 1.28

Перший закон Кірхгофа: алгебраїчна сума струмів у вузлі електричного кола дорівнює нулю.

Струми, орієнтовані від вузла, враховуються зі знаком «плюс», до вузла – зі знаком «мінус».

Кількість незалежних рівнянь К1 = в – 1, в – кількість вузлів в колі.

Другий закон Кірхгофа: алгебраїчна сума падінь напруги в будь-якому замкненому контурі електричного кола дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС в цьому контурі

ЕРС, що збігаються з напрямком обходу контуру, враховуються в рівнянні зі знаком «плюс»; ЕРС, що не збігаються з напрямком обходу контуру, – зі знаком «мінус». Аналогічно для падінь напруги: якщо струм у даному опорі контуру збігається з напрямком обходу контуру, падіння напруги на ньому беруть зі знаком «плюс», а якщо ні, то – зі знаком «мінус». Напрямок обходу контуру та напрямки струмів гілок обирають довільно. По гілках з джерелами струму контури проводити не рекомендується.

Кількість незалежних рівнянь за другим законом Кірхгофа визначається виразом К2 = г – $г_J$ – К1, де г – загальна кількість гілок в колі, $г_J$ – кількість гілок, що містять джерела струму. Незалежний контур відрізняється від інших хоча б однією гілкою.

Задача 3

Дано:

E_1 = 15 В, E_2 = 70 В, E_3 = 5 В, R_1 = 6 Ом, R_2 = 5 Ом, R_3 = 10 Ом, R_4 = 2,5 Ом, R_5 = 10 Ом, R_6 = 5 Ом.

Визначити струми, скласти баланс потужності.

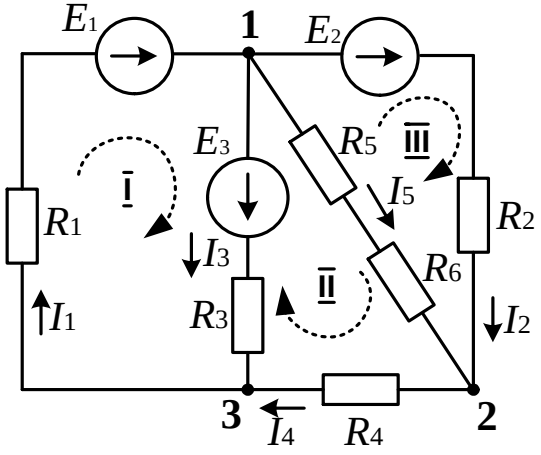


Рисунок 1.29

Розв'язання

Кількість вузлів в колі: в = 3. Загальна кількість гілок в колі: г = 5.

Кількість гілок, що містять джерела струму: $г_J$ = 0.

Опір послідовного з'єднання R_5 та R_6 визначимо наступним чином:

$R_5' = R_5 + R_6$ = 15 Ом.

Кількість рівнянь за першим законом Кірхгофа:

К1 = в – 1 = 2.

Кількість рівнянь за другим законом Кірхгофа (кількість незалежних контурів):

К2 = г – $г_J$ – К1 = 5 – 2 = 3.

За першим законом Кірхгофа:

для вузла 1

$$-I_1 + I_2 + I_3 + I_5 = 0;$$

для вузла 2

$$-I_2 - I_5 + I_4 = 0;$$

За другим законом Кірхгофа:

для контуру 1

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 = E_1 + E_3;$$

для контуру 2

$$R_5' I_5 + R_4 I_4 - R_3 I_3 = -E_3;$$

для контуру 3

$$R_2 I_2 - R_5' I_5 = E_2.$$

Отримуємо систему рівнянь за законами Кірхгофа:

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + I_3 + I_5 = 0; \\ -I_2 - I_5 + I_4 = 0; \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 = E_1 + E_3; \\ R_5' I_5 + R_4 I_4 - R_3 I_3 = -E_3; \\ R_2 I_2 - R_5' I_5 = E_2. \end{cases}$$

Система рівнянь в матричному вигляді:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & R_4 & R_5' \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & -R_5' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E_1 + E_3 \\ -E_3 \\ E_2 \end{vmatrix}.$$

Розв’язавши систему рівнянь, отримаємо значення струмів:

I_1 = 5 А, I_2 = 8 А, I_3 = –1 А, I_4 = 6 А, I_6 = –2 А.

Перевірка балансу потужностей.

$$\sum P_{\text{вир}} = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 =$$

$$= 15 \cdot 5 + 70 \cdot 8 + 5 \cdot (-1) = 75 + 560 - 5 = 630 \text{ Вт},$$

$$\sum P_{\text{спож}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R'_5 =$$

$$= 5^2 \cdot 6 + 8^2 \cdot 5 + 1^2 \cdot 10 + 6^2 \cdot 2{,}5 + 2^2 \cdot 15 =$$

$$= 150 + 320 + 10 + 90 + 60 = 630 \text{ Вт}.$$

$$\sum P_{\text{вир}} = \sum P_{\text{спож}}.$$

630 Вт = 630 Вт – баланс потужностей виконується.

Задача 4

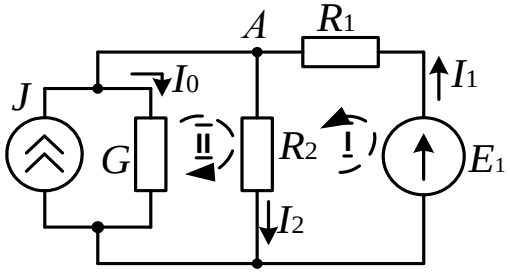


Рисунок 1.30

Дано: E_1 = 230 В, J = 80мА, G =5·10^{-5} См, R_1=1 кОм, R_2=2 кОм.

Визначити струми у гілках кола.

Розв’язання

К1 = в – 1 = 1, К2 = г – г$_J$ – К1 = 4 – 2 + 1 – 1= 2.

За першим законом Кірхгофа:

для вузла А

$$-J + I_0 + I_2 - I_1 = 0.$$

Обираємо 2 незалежних контури, які не містять джерел струму.

Для контуру 1 за другим законом Кірхгофа:

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 = E_1;$$

для контуру 2:

$$R_2 I_2 - \frac{I_0}{G} = 0.$$

Отримуємо систему рівнянь за законами Кірхгофа:

$$-J + I_0 + I_2 - I_1 = 0.$$

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 = E_1;$$

$$R_2 I_2 - \frac{I_0}{G} = 0.$$

Розв’язавши систему рівнянь, отримаємо струми:

I = 100 мА , I_1 = 30 мА, I_0 = 10 мА.

Задачі для самостійної роботи

1.

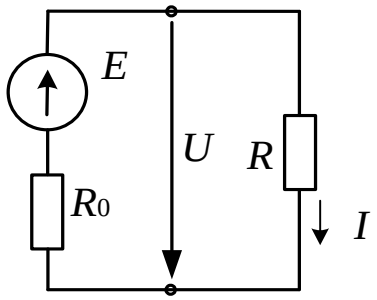


Рисунок 1.31

Дано: E = 12 В, R_0=1 Ом, R=5 Ом. Визначити: струм I, напругу U, вироблену потужність $P_{вир}$, спожиту потужність $P_{спож}$.

2. Скласти систему рівнянь за законами Кірхгофа.

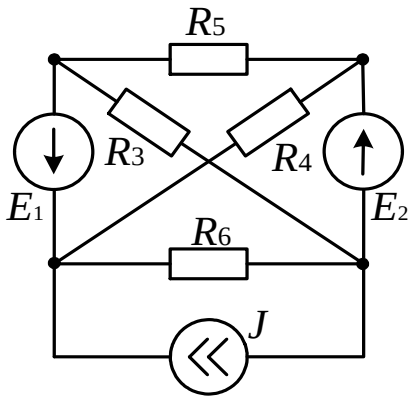


Рисунок 1.32

1.5. Метод контурних струмів

Складним колом називається коло, яке не може бути зведене ні до послідовних, ні до паралельних, ні до змішаних з'єднань. Складність розрахунку таких кіл полягає у необхідності одночасного розв'язання (г – г$_J$) лінійних алгебраїчних рівнянь [11, 15, 18].

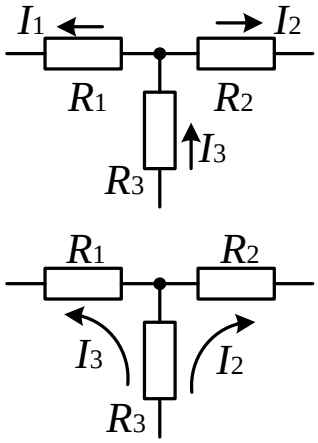


Рисунок 1.33

Якщо розглянути вузол деякого електричного кола (рис.1.33) з опорами гілок R_1, R_2, R_3 та струмами I_1, I_2, I_3, то для цього вузла за першим законом Кірхгофа можна записати $I_3 = I_1 + I_2$. Але цей вузол можна представити також у вигляді вузла з двома контурними струмами. При цьому очевидно, що струми в резисторах R_1 та R_2, дорівнюють контурним, а в гілці з резистором R_3 – сума цих контурних струмів, тобто $I_3 = I_1 + I_2$.

Таким чином, якщо за незалежні змінні прийняти контурні струми, то задача зводиться до розв'язання К2 = г – г$_J$ – К1 = г – г$_J$ – (в – 1) рівнянь. Кількість цих невідомих контурних струмів має відповідати кількості незалежних контурів, які не проходять по гілках з джерелами струму. В той же час слід обрати г$_J$ незалежних контурів (контурних струмів) так, щоб кожен з них проходив через одне джерело струму (ці контурні струми можна вважати заданими і вони дорівнюють струму джерела струму).

Порядок розрахунку кола методом контурних струмів

1. Обрати довільно напрямки обходу незалежних контурів. Ці напрямки використовуються для контурних струмів.
2. Виразити кожен струм гілки, як алгебраїчну суму тих контурних струмів, які протікають по цій гілці.
3. Записати систему рівнянь порядку К2 виду

$$\begin{cases} I_{(1)}R_{11} + I_{(2)}R_{12} + \ldots + I_{(n)}R_{1n} + I_{(n+1)}R_{1(n+1)} = E_{(1)}; \\ I_{(1)}R_{21} + I_{(2)}R_{22} + \ldots + I_{(n)}R_{2n} + I_{(n+1)}R_{2(n+1)} = E_{(2)}; \\ \ldots \\ I_{(1)}R_{n1} + I_{(2)}R_{n2} + \ldots + I_{(n)}R_{nn} + I_{(n+1)}R_{n(n+1)} = E_{(n)}, \end{cases}$$

де $I_{(1)}, I_{(2)}, \ldots I_{(n)}$ – невідомі контурні струми,

$I_{(n+1)} = J$ – відомий контурний струм.

4. Зі схеми визначаються:

R_{kk} – власні опори контурів, як сума опорів гілок відповідного контуру. Вони завжди додатні.

$R_{kl} = R_{lk}$ – взаємні опори контурів, як сума опорів гілок, які входять одночасно до обох контурів.

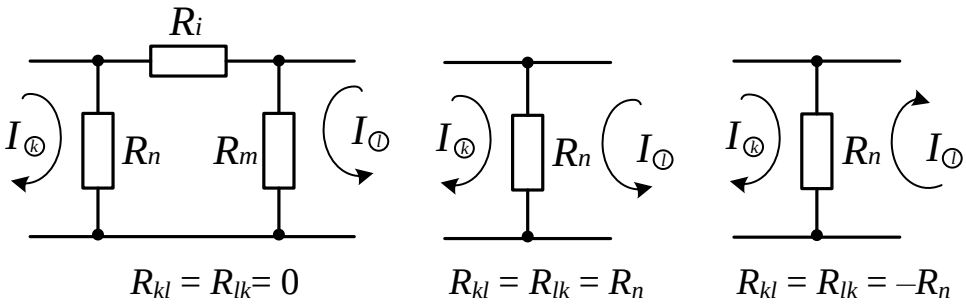


Рисунок 1.34

$E_{(k)}$ – алгебраїчна сума ЕРС k-го контуру.

6. Розв’язати систему рівнянь та отримати значення контурних струмів.

7. Визначити струми гілок використовуючи п. 2 **по вихідній схемі** враховуючи вплив струму джерела струму (лише на ті гілки, по яких замикався шлях відомого контурного струму J).

Задача 1

$E_1 = 15$ В, $E_2 = 70$ В, $E_3 = 5$ В, $R_1 = 6$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 2{,}5$ Ом, $R_5 = 10$ Ом, $R_6 = 5$ Ом.

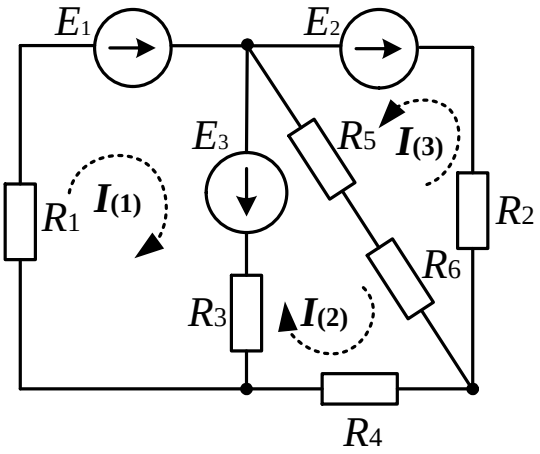


Рисунок 1.35

Визначити струми методом контурних струмів.

Розв’язання

Кількість невідомих контурних струмів (кількість рівнянь):

К2 = г – г$_J$ – (в – 1) = 5 – 3 + 1 = 3.

$$\begin{cases} I_{(1)}R_{11} + I_{(2)}R_{12} + I_{(3)}R_{13} = E_{(1)}; \\ I_{(1)}R_{21} + I_{(2)}R_{22} + I_{(3)}R_{23} = E_{(2)}; \\ I_{(1)}R_{31} + I_{(2)}R_{32} + I_{(3)}R_{33} = E_{(3)}. \end{cases}$$

Послідовне з’єднання R_5 та R_6 запишемо наступним чином:

$R_5' = R_5 + R_6$.

Власні опори:

$R_{11} = R_1 + R_3 = 16$ Ом,

$R_{22} = R_3 + R_4 + R_5' = 27{,}5$ Ом,

$R_{33} = R_2 + R_5' = 20$ Ом.

Взаємні опори:

$R_{12} = R_{21} = -R_3 = -10$ Ом,

$R_{23} = R_{32} = R_5' = 15$ Ом,

$R_{13} = R_{31} = 0$ Ом.

Контурні ЕРС:

$E_{(1)} = E_1 + E_3 = 20$ В,

$E_{(2)} = -E_3 = -5$ В,

$E_{(3)} = -E_2 = -70$ В.

Підставляємо знайдені коефіцієнти в систему рівнянь:

$$\begin{cases} 16 \cdot I_{(1)} - 10 \cdot I_{(2)} + 0 \cdot I_{(3)} = 20; \\ -10 \cdot I_{(1)} + 27{,}5 \cdot I_{(2)}R_{22} + 15 \cdot I_{(3)} = -5; \\ 0 \cdot I_{(1)} + 15 \cdot I_{(2)} + 20 \cdot I_{(3)} = -70. \end{cases}$$

Розв’язуємо систему рівнянь за допомогою правила Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16 & -10 & 0 \\ -10 & 27{,}5 & 15 \\ 0 & 15 & 20 \end{vmatrix} = 16 \cdot (-15 \cdot 15 + 27{,}5 \cdot 20) + 10(-10 \cdot 20) = 3200;$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -5 & 27{,}5 & 15 \\ -70 & 15 & 20 \end{vmatrix} = 20 \cdot (27{,}5 \cdot 20 - 15 \cdot 15) + 10(-100 + 1050) =$$

$$= 16000;$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 16 & 20 & 0 \\ -10 & -5 & 15 \\ 0 & -70 & 20 \end{vmatrix} = 16 \cdot (-100 + 1050) - 20(-200) = 19200;$$

$$\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 16 & -10 & 20 \\ -10 & 27{,}5 & -5 \\ 0 & 15 & -70 \end{vmatrix} = 16 \cdot (-27{,}5 \cdot 70 + 75) + 10(700 - 300) = -25600.$$

$I_{(1)} = \Delta_{11}/\Delta = 1600/3200 = 5$ А,

$I_{(2)} = \Delta_{22}/\Delta = 19200/3200 = 6$ А,

$I_{(3)} = \Delta_{33}/\Delta = -25600/3200 = -8$ А.

Струми в гілках визначимо як алгебраїчну суму тих контурних струмів, які протікають у відповідній гілці:

$I_1 = I_{(1)} = 5$ А, $I_2 = -I_{(2)} = -6$ А, $I_3 = I_{(1)} - I_{(2)} = 5 - 6 = -1$ А, $I_4 = I_{(2)} = 6$ А, $I_5 = I_{(2)} + I_{(3)} = 6 - 8 = -2$ А.

Задача 2

Дано: $E_1 = 3$ В, $E_2 = 3$ В, $E_3 = 4$ В, $E_4 = 6$ В, $J = 7$ А, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 2$ Ом, $R_4 = 2$ Ом, $R_5 = 1$ Ом, $R_6 = 1$ Ом.

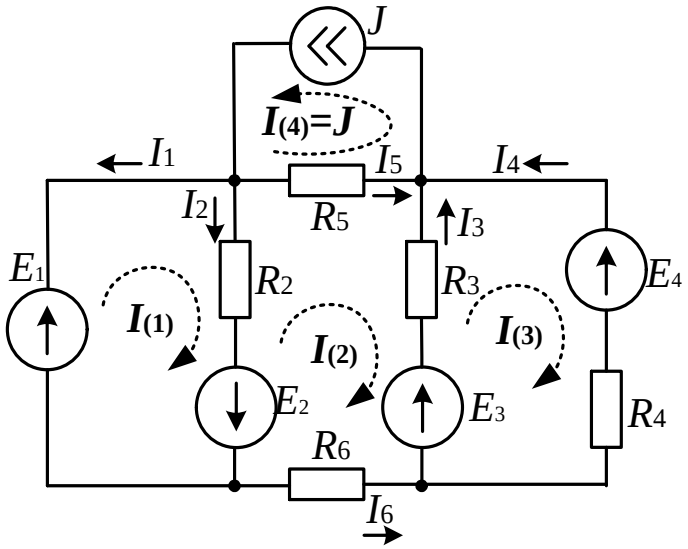


Рисунок 1.36

Визначити струми методом контурних струмів.

Розв’язання

Кількість невідомих контурних струмів (кількість рівнянь):

К2 = г – г$_J$ – (в – 1) = 7 – 4 + 1 – 1= 3. В системі рівнянь має бути 3 рівняння і в кожному рівнянні має бути 4 доданки (крім невідомих контурних струмів має бути врахований відомий контурний струм $I_{(4)} = J$):

$$\begin{cases} I_{(1)}R_{11} + I_{(2)}R_{12} + I_{(3)}R_{13} + I_{(4)}R_{14} = E_{(1)}; \\ I_{(1)}R_{21} + I_{(2)}R_{22} + I_{(3)}R_{23} + I_{(4)}R_{24} = E_{(2)}; \\ I_{(1)}R_{31} + I_{(2)}R_{32} + I_{(3)}R_{33} + I_{(4)}R_{34} = E_{(3)}. \end{cases}$$

Власні опори: Взаємні опори: Контурні ЕРС:

$R_{11} = R_2 = 4$ Ом, $R_{12} = R_{21} = -R_2 = -4$ Ом, $E_{11} = E_1 + E_2 = 6$ В,

$R_{22} = R_2 + R_3 + R_5 + R_6 = 8$ Ом, $R_{23} = R_{32} = -R_3 = -2$ Ом, $E_{22} = -E_2 - E_3 = -7$ В,

$R_{33} = R_3 + R_4 = 4$ Ом, $R_{13} = R_{31} = 0$ Ом, $E_{33} = -E_4 + E_3 = -2$ В.

$R_{24} = R_{42} = R_5 = 1$ Ом, $JR_{24} = 7$ В.

$R_{14} = R_{41} = 0$ Ом,

$R_{34} = 0$ Ом,

$$\begin{cases} 4I_{(1)} - 4I_{(2)} + 0 \cdot I_{(3)} + 7 \cdot 0 = 6; \\ -4I_{(1)} + 8I_{(2)} - 2I_{(3)} + 7 \cdot 1 = -7; \\ 0 \cdot I_{(1)} - 2I_{(2)} + 4I_{(3)} + 7 \cdot 0 = -2. \end{cases}$$

Розв’язавши систему рівнянь, отримаємо контурні струми:

$I_{(1)} = -1{,}5$ А, $I_{(2)} = -3$ А, $I_{(3)} = -2$ А.

Струми гілок визначимо як алгебраїчну суму тих контурних струмів, які протікають у відповідній гілці:

$I_1 = -I_{(1)} = -(-1{,}5) = 1{,}5$ А,

$I_2 = I_{(1)} - I_{(2)} = -1{,}5 - (-3) = 1{,}5$ А,

$I_3 = I_{(3)} - I_{(2)} = -2 - (-3) = 1$ А,

$I_4 = -I_{(3)} = -(-2) = 2$ А,

$I_5 = I_{(2)} + J = -3 + 7 = 4$ А,

$I_6 = -I_{(2)} = -(-3) = 3$ А.

Задача 3. (Варіант РГР)

Дано:

$J = 10$ А; $E_1 = 30$ В; $E_2 = 12$ В; $E_3 = 16$ В; $R_1 = 1$ Ом; $R_2 = 4$ Ом; $R_3 = 1$ Ом; $R_4 = 2$ Ом; $R_5 = 4$ Ом; $R_6 = 4$ Ом; $R_7 = 3$ Ом.

Визначити струми методом контурних струмів.

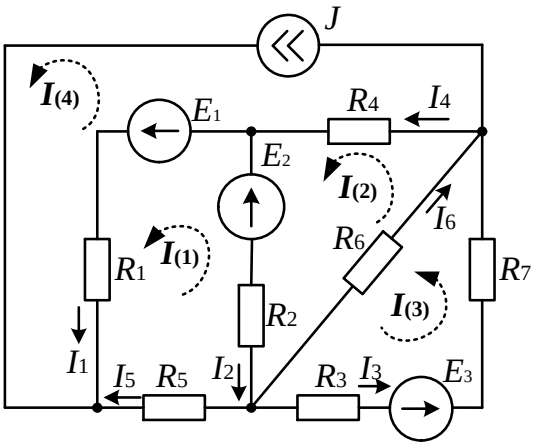


Рисунок 1.37

Розв’язання

Кількість невідомих контурних струмів (кількість рівнянь):

К2 = г – г$_J$ – (в – 1) = 7 – 4 + 1 – 1= 3. В системі рівнянь має бути 3 рівняння і в кожному рівнянні має бути 4 доданки (крім невідомих контурних струмів має бути врахований відомий контурний струм $I_{(4)} = J$):

$$\begin{cases} I_{(1)}R_{11} + I_{(2)}R_{12} + I_{(3)}R_{13} + I_{(4)}R_{14} = E_{(1)}; \\ I_{(1)}R_{21} + I_{(2)}R_{22} + I_{(3)}R_{23} + I_{(4)}R_{24} = E_{(2)}; \\ I_{(1)}R_{31} + I_{(2)}R_{32} + I_{(3)}R_{33} + I_{(4)}R_{34} = E_{(3)}. \end{cases}$$

Власні опори:

$R_{11} = R_1 + R_2 + R_5 = 9$ Ом,

$R_{22} = R_2 + R_4 + R_6 =$

$= 10$ Ом,

$R_{33} = R_3 + R_6 + R_7 = 8$ Ом,

Загальні опори:

$R_{12} = R_{21} = -R_2 = -4$ Ом,

$R_{23} = R_{32} = -R_6 = -4$ Ом,

$R_{13} = R_{31} = 0$ Ом,

$R_{24} = R_{42} = -R_4 = -2$ Ом,

$R_{14} = R_{41} = -R_1 = -1$ Ом,

$R_{43} = R_{34} = 0$ Ом,

Контурні ЕРС:

$E_{(1)} = E_1 + E_2 = 42$ В,

$E_{(2)} = -E_2 = -12$ В,

$E_{(3)} = E_3 = 16$ В.

$$\begin{cases} 9 \cdot I_{(1)} - 4 \cdot I_{(2)} + 0 \cdot I_{(3)} - 1 \cdot 10 = 42; \\ -4 \cdot I_{(1)} + 10 \cdot I_{(2)} - 4 \cdot I_{(3)} - 2 \cdot 10 = -12; \\ 0 \cdot I_{(1)} - 4 \cdot I_{(2)} + 8 \cdot I_{(3)} + 0 \cdot 10 = 16. \end{cases}$$

Розв’язавши систему рівнянь, отримаємо контурні струми:

$I_{(1)} = 8{,}6$ А, $I_{(2)} = 6{,}27$ А, $I_{(3)} = 5{,}15$ А.

Струми гілок визначимо як алгебраїчну суму тих контурних струмів, які протікають у відповідній гілці:

$I_1 = I_{(1)} - I_{(4)} = 8{,}6 - 10 = -1{,}4$А;

$I_2 = I_{(2)} - I_{(1)} = -2{,}33$ А,

$I_3 = I_{(3)} = 5{,}15$ А,

$I_4 = I_{(2)} - I_{(4)} = -3{,}73$ А,

$I_5 = -I_{(1)} = -8{,}6$ А,

$I_6 = I_{(2)} - I_{(3)} = 1{,}12$ А.

1.6. Метод вузлових потенціалів

Якщо за незалежні змінні взяти потенціали вузлів, то необхідність у складанні контурних рівнянь зникає, оскільки різниці потенціалів однозначно залежать від струмів гілок та кількість вузлових рівнянь дорівнює кількості напруг між затискачами гілок. Тут варто звернути увагу на той факт, що струми у гілках залежать не від абсолютної величини потенціалів, а від їхньої різниці. Потенціал визначається з точністю до довільного постійного значення, тобто величина потенціалу залежить від того, яку точку ми беремо за фіксовану (базову). Тому потенціал одного з вузлів може бути довільно заданим, наприклад дорівнювати нулю, а число незалежних рівнянь завжди має бути на 1 менше від кількості вузлів (в) і дорівнювати К1 = в – 1.

Порядок розрахунку

1. Присвоїти довільно вузлам схеми порядкові номери.
2. Один вузол обирається за базовий і його потенціал вважається нульовим. Йому треба присвоїти найбільший номер.

   Відносно цього вузла визначаються потенціали решти вузлів. Для цього треба виконати такі дії:
3. Скласти систему рівнянь порядку n=К1 виду

$$\begin{cases} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \cdots + \varphi_n G_{1n} = J_{в1}; \\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \cdots + \varphi_n G_{2n} = J_{в2}; \\ \varphi_1 G_{n1} + \varphi_2 G_{n2} + \cdots + \varphi_n G_{nn} = J_{вn}. \end{cases}$$

4. Зі схеми визначити коефіцієнти при невідомих потенціалах вузлів:

   Власні провідності вузлів G_{ii} – сума провідностей гілок, приєднаних до цього вузла. Завжди позитивні.

   Взаємні провідності вузлів G_{ij} – сума провідностей гілок, приєднаних безпосередньо між цими двома вузлами. Завжди негативні.

   Вузлові джерела струму $J_{вi}$ – алгебраїчна сума струмів джерел струму, враховуючи еквівалентно перетворені з джерел напруги, приєднаних до цього вузла. Правило знаків – струми, що входять до вузла – позитивні, ті, що виходять з вузла – негативні.
5. Розв'язанням цієї системи є значення потенціалів вузлів.
6. Струми гілок визначаються за законом Ома:

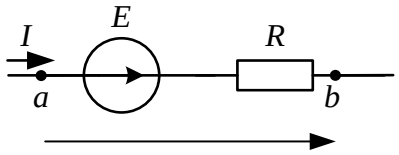


Рисунок 1.38

$$\varphi_a - \varphi_b = U_{ab};$$

$$U_{ab} + E = IR;$$

$$\frac{\varphi_a - \varphi_b + E}{R} = I.$$

Особливий випадок розрахунку виникає в разі наявності в гілці кола ідеального джерела напруги.

В цьому випадку слід за базовий вузол прийняти той, до якого приєднаний негативний затискач ідеального джерела, і присвоїти йому найстарший номер. Вузол, до якого приєднано позитивний затискач ідеального джерела, має попередній номер, а його потенціал дорівнюватиме величині ідеальної ЕРС. Відповідно, кількість рівнянь зменшується на 1.

$$\begin{cases} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \cdots + \varphi_n G_{1n} = I_{1в}; \\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \cdots + \varphi_n G_{2n} = I_{2в}; \\ \ldots \\ \varphi_1 G_{(n-1)1} + \varphi_2 G_{(n-1)2} + \cdots + \varphi_n G_{(n-1)n} = I_{(n-1)в}. \end{cases}$$

Струм в гілці з ідеальним ЕРС визначається не за законом Ома, а за першим законом Кірхгофа.

Задача 1

Дано*:*

E_1 = 3 В, E_2 = 3 В, E_3 = 4 В, E_4 = 6 В, J = 7 А, R_2 = 4 Ом, R_3 = 2 Ом, R_4 = 2 Ом, R_5 = 1 Ом, R_6 = 1 Ом.

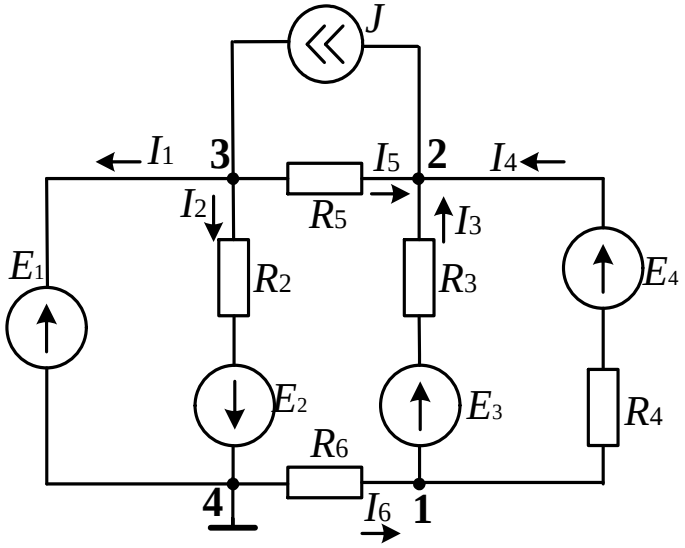


Рисунок 1.39

Визначити струми методом вузлових потенціалів.

Розв’язання

Кількість рівнянь (кількість невідомих потенціалів):

К1 = в – 1 = 4 – 1 = 3.

В колі наявна гілка з ідеальним джерелом напруги E_1. Приймемо $\varphi_4 = 0$, тоді $\varphi_3 = E_1$ = 3 В. Це означає, що кількість невідомих потенціалів зменшується на 1. Відповідно, кількість рівнянь також зменшується на 1.

Система рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = J_{в1}; \\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \varphi_3 G_{23} = J_{в2}. \end{cases}$$

Власні провідності вузлів G_{ii} – сума провідностей гілок, приєднаних до цього вузла. Завжди додатні.

$G_{11} = G_3 + G_4 + G_6 = 1/R_3 + 1/R_4 + 1/R_6 = 1/2 + 1/2 + 1/1 = 2$ См;

$G_{22} = G_3 + G_4 + G_5 = 1/R_3 + 1/R_4 + 1/R_5 = 1/2 + 1/2 + 1/1 = 2$ См.

Взаємні провідності вузлів G_{ij} – сума провідностей гілок, приєднаних безпосередньо між вузлами i та j. Завжди від'ємні.

$G_{12} = G_{21} = –(G_3 + G_4) = –(1/R_3 + 1/R_4) = –(1/2 + 1/2) = –1$ См;

$G_{13} = G_{31} = 0$ См; $G_{23} = –G_5 = –1/R_5 = –1$ См.

Вузлове джерело струму $J_{вk}$– це алгебраїчна сума приєднаних до k-ого вузла джерел струму, враховуючи і ті, які еквівалентно перетворені з джерел напруги.

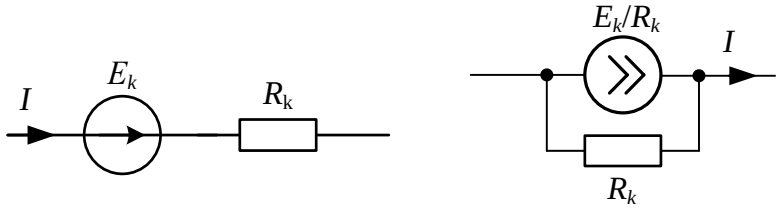


Рисунок 1.40

Правило знаків: джерела, що орієнтовані до вузла – додатні, ті, що орієнтовані від вузла – від'ємні:

$J_{в1} = –E_3G_3 – E_4G_4 = –4/2 – 6/2 = –5$ А;

$J_{в2} = E_3G_3 + E_4G_4 – J = 4/2 + 6/2 – 7 = –2$ А.

Система рівнянь:

$$\begin{cases} 2\varphi_1 - 1\varphi_2 = -5; \\ -1\varphi_1 + 2\varphi_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо невідомі потенціали вузлів: $\varphi_1 = –3$ В, $\varphi_2 = –1$ В.

Струми гілок визначають за узагальненим законом Ома:

$$I_2 = \frac{\varphi_3 + E_2}{R_2} = \frac{3 + 3}{4} = 1{,}5 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_3}{R_3} = \frac{-3 - (-1) + 4}{2} = 1 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_4}{R_4} = \frac{-3 - (-1) + 6}{2} = 2 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R_5} = \frac{3 - (-1)}{1} = 4 \text{ А};$$

$$I_6 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{R_6} = \frac{0 - (-3)}{1} = 3 \text{ А};$$

Струм в гілці з ідеальним джерелом напруги визначається за першим законом Кірхгофа (для вузла 4): $I_1 = -I_2 + I_6 = -1{,}5 + 3 = 1{,}5$ А.

Задача 2

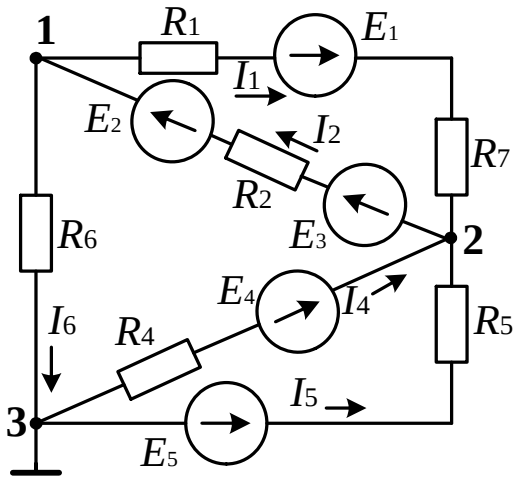


Рисунок 1.41

Дано:

$E_1 = 2$ В, $E_2 = 4$ В, $E_3 = -12$ В, $E_4 = 19$ В, $E_5 = 12$ В, $R_1 = 0{,}5$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_4 = 2$ Ом, $R_5 = 3$ Ом, $R_6 = 10$ Ом, $R_7 = 1$ Ом.

Визначити струми методом вузлових потенціалів.

Розв’язання

Кількість рівнянь (кількість невідомих потенціалів):

К1 = в – 1 = 3 – 1 = 2.

Система рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} = J_{в1}; \\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} = J_{в2}. \end{cases}$$

Власні провідності:

$G_{11} = G_6 + G_{17} + G_2 = 1/R_6 + 1/(R_1 + R_7) + 1/R_2 = 1/10 + 1/1{,}5 + 1/3 = 1{,}1$ См;

$G_{22} = G_{17} + G_2 + G_4 + G_5 = 1/(R_1 + R_7) + 1/R_2 + 1/R_4 + 1/R_5 = 1/1{,}5 + 1/3 +$

$+ 1/2 + 1/3 = 11/6$ См.

Взаємні провідності:

$G_{12} = G_{21} = -(G_2 + G_{17}) = -(1/R_2 + 1/(R_1 + R_7) = -1$ См.

Вузлові джерела струму:

$J_{в1} = (E_2 + E_3)/R_2 - E_1/(R_1 + R_7) = -4$ А;

$J_{в2} = E_5/R_5 + E_4/R_4 - (E_2 + E_3)/R_2 + E_1/(R_1 + R_7) = 17{,}5$ А.

Система рівнянь:

$$\begin{cases} 1{,}1\varphi_1 - 1\varphi_2 = -4; \\ -1\varphi_1 + \dfrac{11}{6}\varphi_2 = 17{,}5. \end{cases}$$

Потенціали вузлів:

$\varphi_1 = 10$ В, $\varphi_2 = 15$ В.

Струми гілок:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_1}{R_1 + R_7} = \frac{10 - 15 + 2}{0{,}5 + 1} = -2 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_2 + E_3}{R_2} = \frac{15 - 10 + 4 - 12}{3} = -1 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_4}{R_4} = \frac{0 - 15 + 19}{2} = 2 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_5}{R_5} = \frac{0 - 15 + 12}{3} = 1 \text{ А};$$

$$I_6 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_6} = \frac{10}{10} = 1 \text{ А}.$$

Задача 3. Варіант РГР

Дано: $J = 10$ А; $E_1 = 30$ В; $E_2 = 12$ В; $E_3 = 16$ В; $R_1 = 1$ Ом; $R_2 = 4$ Ом; $R_3 = 1$ Ом; $R_4 = 2$ Ом; $R_5 = 4$ Ом; $R_6 = 4$ Ом; $R_7 = 3$ Ом.

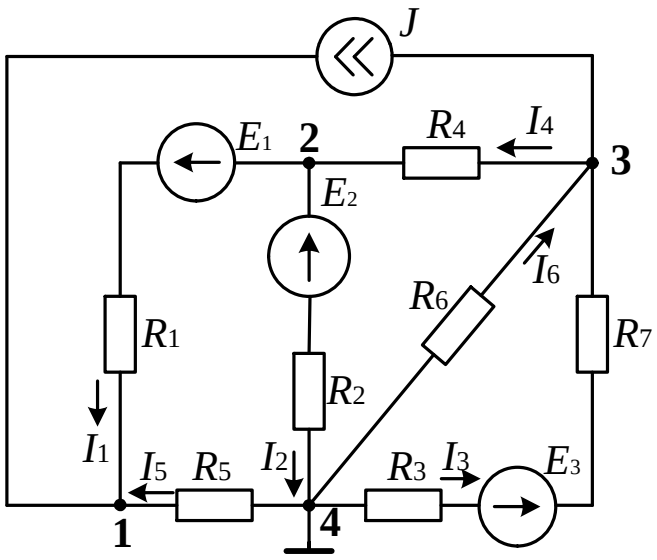


Рисунок 1.42

Визначити струми методом вузлових потенціалів.

Розв’язання

Кількість рівнянь (кількість невідомих потенціалів): К1 = в – 1 = 4 – 1 = 3.

Система рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = J_{в1}; \\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \varphi_3 G_{23} = J_{в2}; \\ \varphi_1 G_{31} + \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} = J_{в3}. \end{cases}$$

Власні провідності:

$G_{11} = 1/R_1 + 1/R_5 = 1{,}25$ См; $G_{22} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_4 = 1{,}75$ См;

$G_{33} = 1/R_4 + 1/(R_3 + R_7) + 1/R_6 = 1$ См.

Взаємні провідності:

$G_{12} = G_{21} = -1/R_1 = -1$ См; $G_{23} = G_{32} = -1/R_4 = -0{,}5$ См; $G_{13} = G_{31} = 0$ См.

Вузлові джерела струму:

$J_{в1} = J + E_1/R_1 = 40$ А; $J_{в2} = E_2/R_2 - E_1/R_1 = -27$ А; $J_{в3} = E_3/(R_3 + R_7) = -6$ А.

Система рівнянь:

$$\begin{cases} 1{,}25\varphi_1 - \varphi_2 - 0\varphi_3 = 40; \\ -1\varphi_1 + 1{,}75\varphi_2 - 0{,}5\varphi_3 = -27; \\ 0\varphi_1 - 0{,}5\varphi_2 + \varphi_3 = -6. \end{cases}$$

Розв’язавши систему рівнянь, отримали потенціали вузлів:

φ_1 = 34,4 В, φ_2 = 2,92 В, φ_3 = 4,58 В.

Струми гілок:

$$I_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_1}{R_1} = -1{,}47 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_4 - E_2}{R_2} = -2{,}27 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_4 - \varphi_3 + E_3}{R_3 + R_7} = 5{,}14 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R_4} = -3{,}74 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{R_5} = -8{,}6 \text{ А};$$

$$I_6 = \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{R_6} = 1{,}14 \text{ А}.$$

Задачі для самостійної роботи

Обрати метод розв’язання і скласти систему рівнянь в загальному вигляді.

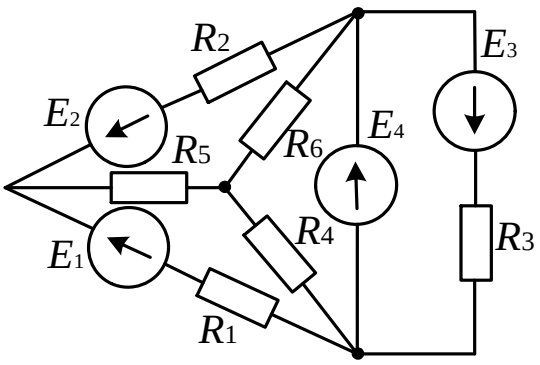


Рисунок 1.43

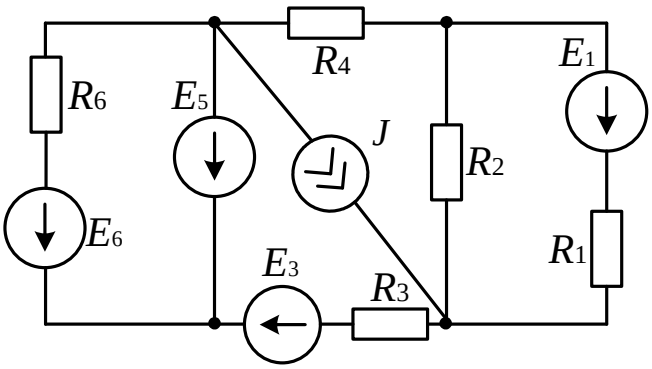
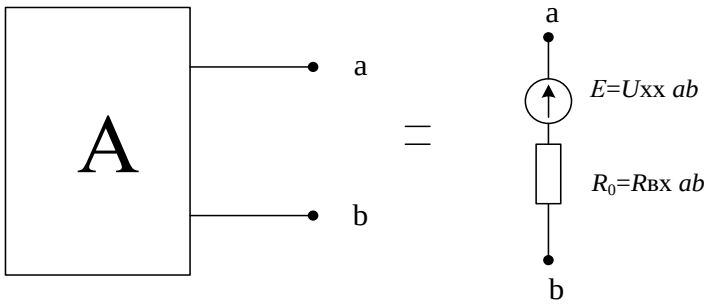


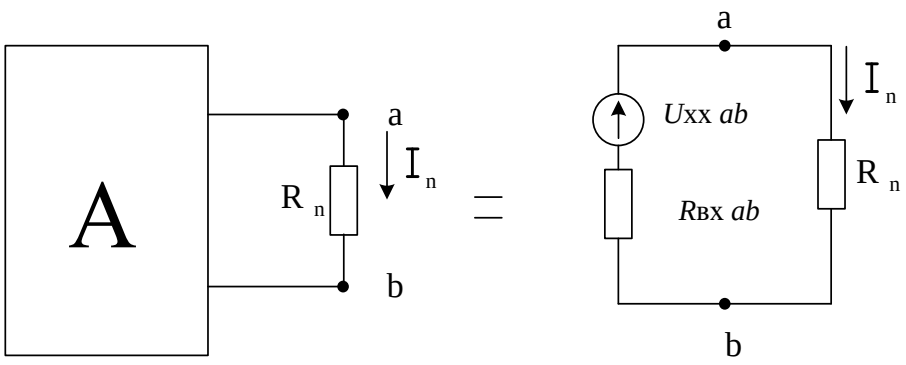
Рисунок 1.44

1.7. Теорема про еквівалентний генератор (теорема Тевенена)

Сенс теореми про еквівалентний генератор полягає в тому, що по відношенню до виділеної гілки з опором R_{ab} вся решта складного кола, що містить джерела ЕРС, може бути замінена одним еквівалентним генератором з ЕРС $E_г$ та внутрішнім опором $R_г$, які визначаються через параметри активного двополюсника, оскільки ЕРС $E_г$ дорівнює напрузі холостого ходу U_0, а внутрішній опір $R_г$ дорівнює його вхідному опору. За законом Ома: $I_{ab} = U_0/(R_г + R_{ab})$.



а



б

Рисунок 1.45

Напруга холостого ходу визначається на обриві гілки, яка розглядається, а внутрішній опір генератора визначається як еквівалентний опір всього кола відносно точок обриву за умови, що всі джерела ЕРС закорочені, а джерела струму розімкнені.

Задача 1

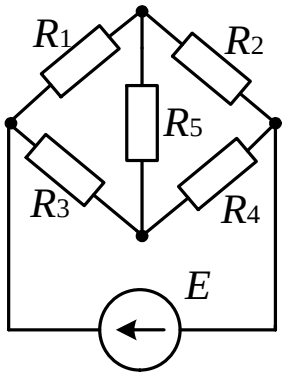


Рисунок 1.46

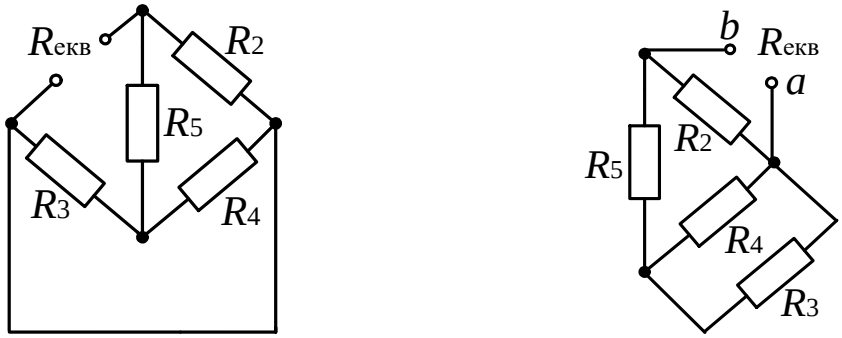
Дано: E = 10 В; R_1 = 20 Ом; R_2 = 40 Ом; R_3 = 30 Ом; R_4 = 10 Ом; R_5 = 50 Ом.

Визначити струм I_1 за теоремою Тевенена.

Розв’язання

Згідно з теоремою Тевенена:

$$I_1 = \frac{U_0}{R_1 + R_{\text{екв}}}.$$



а *б*

Рисунок 1.47

Вхідний опір активного двополюсника:

$$R_{\text{екв}} = \frac{R_2\left(R_5 + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}\right)}{R_2 + R_5 + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}} = 23{,}6 \text{ Ом}.$$

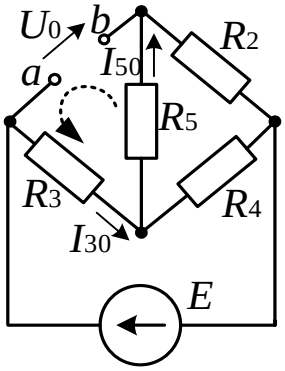


Рисунок 1.48

За 2-м законом Кірхгофа:

$$-U_0 + I_{30}R_3 + I_{50}R_5 = 0;$$

Напруга холостого ходу:

$$U_0 = I_{30}R_3 + I_{50}R_5;$$

Струми холостого ходу:

$$I_{30} = \frac{E}{R_3 + \frac{(R_2 + R_5)R_4}{R_2 + R_5 + R_4}} = 0{,}256 \text{ А};$$

$$I_{50} = I_{30}\frac{R_4}{R_2 + R_5 + R_4} = 0{,}0256 \text{ А}.$$

Тоді:

$$U_0 = 0{,}256 \cdot 30 + 0{,}0256 \cdot 50 = 8{,}96 \text{ В}.$$

$$I_1 = \frac{8{,}96}{20 + 23{,}6} = 0{,}206 \text{ А}.$$

Під час визначення напруги холостого ходу виникає необхідність у додатковому розрахунку струмів в колі в режимі холостого ходу. Ці струми можна визначати за ***методом накладання***: струм у гілці будь-якого складного лінійного кола створюється всіма джерелами енергії незалежно один від одного. При розв'язанні задач необхідно скласти схеми з окремими джерелами, виконавши в них розрахунки відповідних часткових струмів, а загальні струми, що створені всіма джерелами, визначити як алгебраїчну суму часткових струмів.

Задача 2

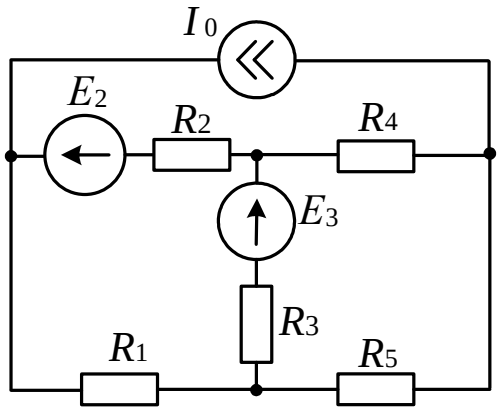


Рисунок 1.49

Дано: E_3 = 1 В; I_0 = 2 А; E_2 = 6 В; $R_2 = R_4 = R_5$ = 2 Ом; R_1 = 3 Ом, R_3 = 1 Ом.

Визначити струм I_3 за теоремою Тевенена.

Розв'язання

Згідно з теоремою Тевенена:

$$I_3 = \frac{U_0}{R_3 + R_{\text{екв}}}.$$

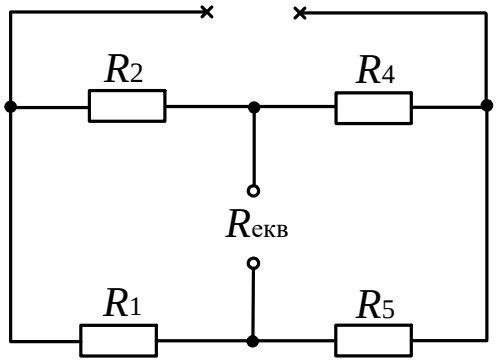


Рисунок 1.50

Вхідний опір активного двополюсника:

$$R_{\text{екв}} = \frac{(R_1 + R_2)(R_4 + R_5)}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5} = \frac{20}{9}\ \text{Ом}.$$

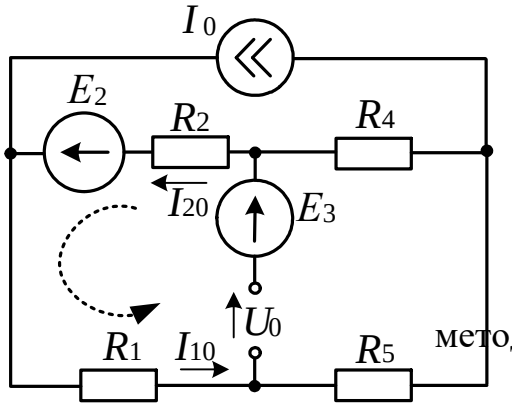


Рисунок 1.51

За 2-м законом Кірхгофа:

$$U_0 + I_{20}R_2 + I_{10}R_1 = E_2 + E_3.$$

Напруга холостого ходу:

$$U_0 = E_2 + E_3 - I_{20}R_2 - I_{10}R_1.$$

Визначаємо струми холостого ходу за методом накладання:

$$I_{20} = I'_{20} + I''_{20};$$

$$I_{10} = I'_{10} + I''_{10}.$$

Від джерела E_2 (за законом Ома):

$$I'_{20} = I'_{10} = \frac{E_2}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5} = \frac{2}{3} \text{ А.}$$

Від джерела I_0 (за формулою дільника струмів):

$$I''_{20} = -I_0 \frac{R_1 + R_5}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5} = -\frac{10}{9} \text{ В;}$$

$$I''_{10} = I_0 + I''_{20} = 2 - \frac{10}{9} = \frac{8}{9} \text{ А.}$$

Підставляємо знайдені значення у формули та обчислюємо струми холостого ходу, напругу холостого ходу та струм за умовою задачі.

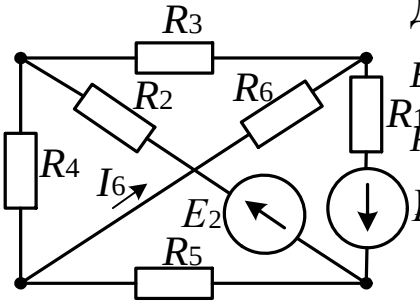
$$I_{20} = I'_{20} + I''_{20} = \frac{2}{3} - \frac{10}{9} = -\frac{4}{9} \text{ А;}$$

$$I_{10} = I'_{10} + I''_{10} = \frac{2}{3} + \frac{8}{9} = \frac{14}{9} \text{ А;}$$

$$U_0 = 6 + 1 - \left(-\frac{4}{9}\right) \cdot 2 - 3 \cdot \frac{14}{9} = \frac{29}{9} \text{В;}$$

$$I_3 = \frac{\frac{29}{9}}{1 + \frac{20}{9}} = \frac{29}{29} = 1 \text{ А.}$$

Задача 3



Дано:

$E_1 = 8$ В; $E_2 = 16$ В;

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 3$ Ом, $R_6 = 2$ Ом.

Визначити струм I_6 за теоремою Тевенена.

Рисунок 1.52

Розв’язання

Згідно з теоремою Тевенена:

$$I_6 = \frac{U_0}{R_6 + R_{\text{екв}}}.$$

Розраховуючи $R_{екв}$, робимо перетворення «трикутник –зірка» за відомими формулами перетворення.

Формули перетворення:

$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

$$R_{12} = R_{13} = R_{23} = 1 \text{ Ом};$$

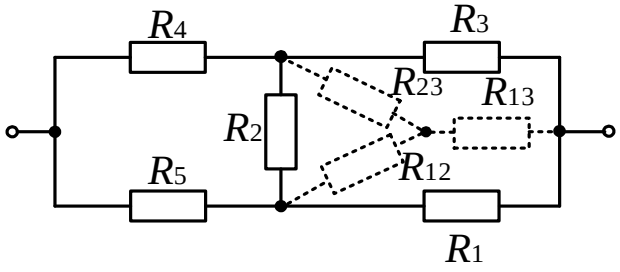


Рисунок 1.53

Вхідний опір активного двополюсника:

$$R_{\text{екв}} = \frac{(R_4 + R_{23})(R_5 + R_{12})}{R_4 + R_{23} + R_5 + R_{12}} +$$

$$+R_{13} == \frac{4 \cdot 4}{8} + 1 = 3 \text{ Ом}.$$

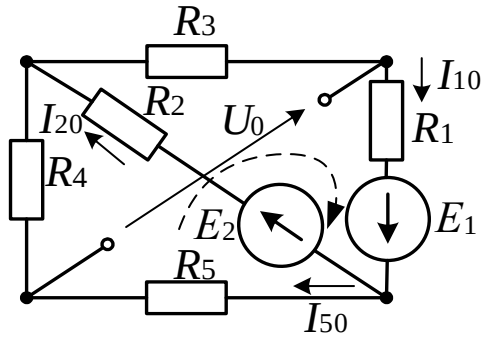


Рисунок 1.54

За 2-м законом Кірхгофа:

$$I_{10}R_1 + I_{50}R_5 + U_0 = E_1.$$

Напруга холостого ходу:

$$U_0 = E_1 - I_{10}R_1 - I_{50}R_5.$$

Визначаємо струми холостого ходу за методом накладання:

$$I_{10} = I'_{10} + I''_{10};\ I_{50} = I'_{50} + I''_{50}.$$

Від джерела E_1:

$$I'_{10} = \frac{E_1}{R_1 + R_3 + \frac{R_2(R_4 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5}} = \frac{8}{6 + \frac{3 \cdot 6}{9}} = 1 \text{ А};$$

$$I'_{50} = I'_{10}\frac{R_2}{R_2+R_4+R_5} = \frac{1}{3}\text{A}.$$

Від джерела E_2:

$$I''_{20} = \frac{E_2}{R_2 + \frac{(R_1+R_3)(R_4+R_5)}{R_1+R_3+R_4+R_5}} = \frac{16}{3+\frac{6\cdot 6}{12}} = \frac{8}{3}\text{ A};$$

$$I''_{10} = \frac{I''_{20}}{2} = \frac{4}{3}\text{ A};\ I''_{50} = -\frac{I''_{20}}{2} = -\frac{4}{3}\text{ A}.$$

Підставляємо знайдені значення у формули та обчислюємо струми холостого ходу, напругу холостого ходу та струм за умовою задачі.

$$I_{10} = I'_{10} + I''_{10} = \frac{7}{3}\text{ A}, I_{50} = I'_{50} + I''_{50} = -1\text{ A};$$

$$U_0 = 8 - \frac{7}{3}\cdot 3 - (-1)\cdot 3 = 4\text{ В};$$

$$I_6 = \frac{4}{2+3} = 0{,}8\text{ A}.$$

Задача 4. (Варіант РГР)

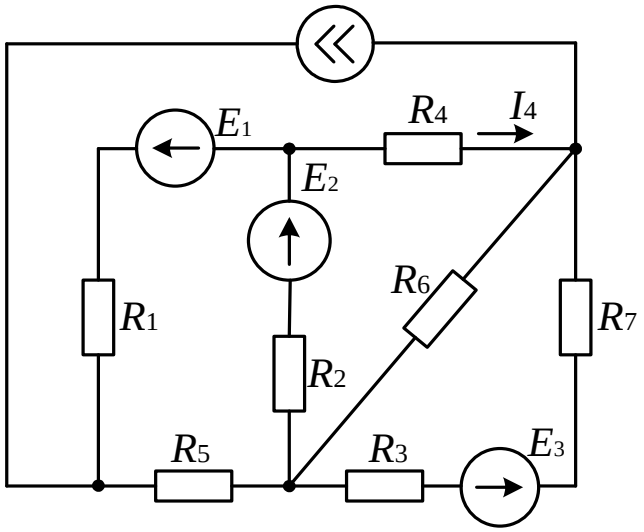


Рисунок 1.55

Дано: J = 10 А; E_1 = 30 В; E_2 = 12 В; E_3 = 16 В; R_1 = 1 Ом; R_2 = 4 Ом; R_3 = 1 Ом; R_4 = 2 Ом; R_5 = 4 Ом; R_6 = 4 Ом; R_7 = 3 Ом.

Визначити I_4 за теоремою Тевенена.

Розв'язання

$$I_4 = \frac{U_0}{R_4 + R_{\text{екв}}}.$$

$$R_{\text{екв}} = \frac{R_2(R_1+R_5)}{R_2+R_1+R_5} + \frac{R_6(R_3+R_7)}{R_6+R_3+R_7} = \frac{4(1+4)}{4+1+4} + \frac{4(1+3)}{4+1+3} = 4{,}22\text{ Ом};$$

$$I_{20}R_2 - I_{60}R_6 + U_0 = E_2;$$

$$U_0 = E_2 - I_{20}R_2 + I_{60}R_6.$$

Струми від E_1 та E_2:

$$I'_{20} = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2 + R_5} = 4{,}67 \text{ А};\ I'_{60} = 0.$$

Струми від J:

$$I''_{20} = \frac{JR_5}{R_1 + R_2 + R_5} = 4{,}45 \text{ А};\ I''_{60} = J\frac{(R_3 + R_7)}{R_6 + R_3 + R_7} = 5 \text{ А}.$$

Струми від E_3:

$$I'''_{60} = \frac{E_3}{R_6 + R_3 + R_7} = 2 \text{ А};\ I'''_{20} = 0.$$

За спільної дії всіх джерел струми:

$$I_6 = I''_{60} - I'''_{60} = 3 \text{ А};\ U_0 = 12 + 3 \cdot 4 - 0{,}12 \cdot 4 = 23{,}52 \text{ В};$$

$$I_4 = \frac{23{,}52}{2 + 4{,}22} = 3{,}77 \text{ А}.$$

Баланс потужностей:

$$\sum P_{\text{вир}} = \sum P_{\text{спож}}.$$

$$\sum P_{\text{вир}} = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 + JU_{13} = 454 \text{ Вт}:$$

$$\sum P_{\text{спож}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 (R_3 + R_7) + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = 458 \text{ Вт}.$$

$$454 \text{ Вт} \approx 458 \text{ Вт}.$$

Тут $U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3$, де φ_1 та φ_3 – потенціали вузлів, до яких приєднана гілка з джерелом струму J, які були обчислені в розрахунку МВП.

Задачі для самостійної роботи

1.

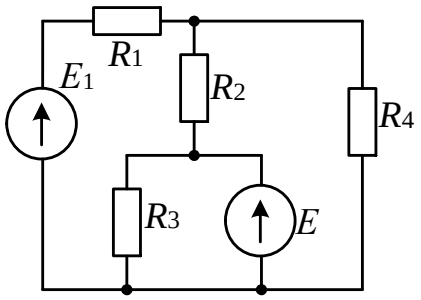


Рисунок 1.56

Дано: E_1 = 120 В; E = 125 В;

R_1 = 40 Ом; R_2 = 36 Ом;

$R_3 = R_4$ = 60 Ом.

Визначити I_4 за теоремою Тевенена.

Відповідь: I_4= 2,75 А.

2.

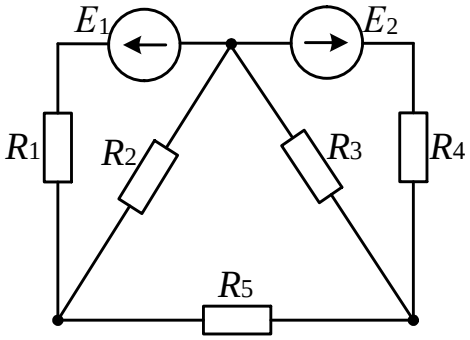


Рисунок 1.57

Дано: $E_1 = 5$ В; $E_2 = 7$ В;

$R_1 = 7{,}5$ Ом; $R_2 = 2$ Ом;

$R_3 = 25$ Ом; $R_4 = 2{,}5$ Ом;

$R_5 = 5$ Ом

Визначити I_5 за теоремою Тевенена.

Відповідь: $I_5 = 0{,}6$ А.

3.

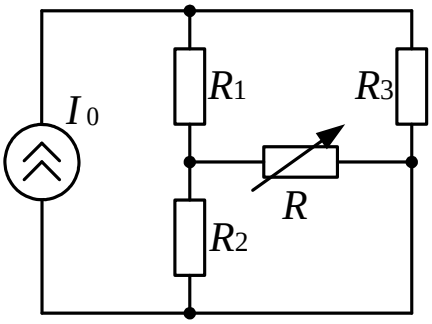


Рисунок 1.58

Дано: $J = 10$ А; $R_1 = 1$ кОм;

$R_2 = 5$ кОм; $R_3 = 4$ кОм;

$R_4 = 2$ Ом; $R_5 = 4$ Ом;

$R_6 = 4$ Ом; $R_7 = 3$ Ом.

Визначити залежність кожного зі струмів від напруги U на змінному опорі R.

Відповідь: $I = 8\cdot10^{-3} - 4\cdot10^{-4}U$; $I_1 = 8\cdot10^{-3} - 2\cdot10^{-4}U$; $I_2 = 2\cdot10^{-4}U$; $I_3 = 2\cdot10^{-3} + 2\cdot10^{-4}U$.

4.

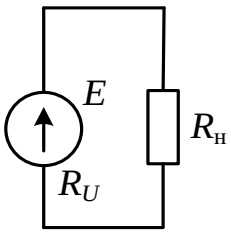


Рисунок 1.59

Дано: $E = 12$ В, $R_U = 1$ Ом, Rн = 5 Ом.

Визначити струм I, напругу джерела U, падіння напруги на джерелі, потужність, що генерується джерелом P_U, потужність, що надходить споживачу P, потужність втрат на джерелі ΔP.

5. Акумуляторна батарея заряджається від генератора. Намалювати схему кола. Визначити величину ЕРС генератора $E_г$ за умови, що зарядний

струм $I = 5$ А, ЕРС батареї $E_A = 130$ В, внутрішні опори $R_г = 1$ Ом, $R_A = 5$ Ом. Визначити потужність генератора.

6. До якої величини слід зменшити величини ЕРС генератора та зарядного струму в колі задачі 5, щоб потужність генератора була 400 Вт за незмінних значень E_A, $R_г$, R_A?

7.

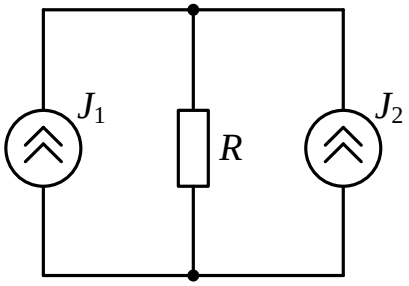


Рисунок 1.60

Два ідеальних джерела струму приєднані до опору $R = 10$ Ом. Струми джерел дорівнюють $J_1 = 5$А, $J_2 = 2$ А.

а) Визначити напругу на опорі та потужність, що він споживає.

б) Визначити ті ж величини за зміни напрямку одного з джерел.

8.

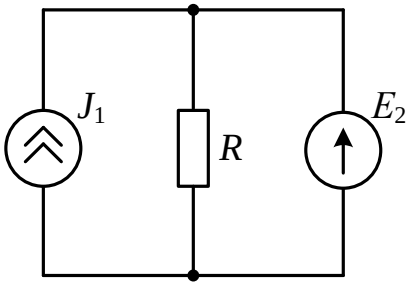


Рисунок 1.61

Ідеальні джерела струму $J_1 = 5$А та напруги E_2 приєднані до опору $R = 10$ Ом.

Визначити напругу на опорі струми та потужності гілок для значення $E_2 = 80$ В, $E_2 = 40$ В.

9. Розв’язати задачу 8 за умови, що E_2 спрямована вниз.

10. Коло складається з послідовно з’єднаних джерела ЕРС, джерела струму та опору $R = 10$ Ом. Струм джерела $J = 5$ А. Визначити напруги на ділянках кола та потужності, що віддаються джерелами, за трьох різних значень ЕРС: а) 40 В; б) 50 В; в) 60 В. Джерела вважати ідеальними.

11. У приміщенні увімкнені 5 ламп: 2 лампи номінальною потужністю по 75 Вт та 3 лампи – по 40 Вт. Визначити загальний споживаний струм та опори ламп за напруги в мережі, яка дорівнює номінальній напрузі ламп 220 В.

12.

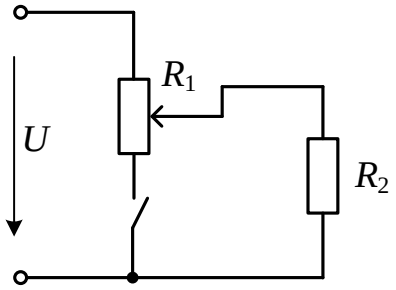


Рисунок 1.62

Реостат, опір якого дорівнює R_1, за допомогою рубильника можна увімкнути або послідовно зі споживачем R_2, або як дільник напруг. В яких межах можна регулювати напругу на споживачі U_2 в обох випадках? Знайти числові значення, якщо U = 240 В, R_1 = 80 Ом, R_2 = 40 Ом.

13.

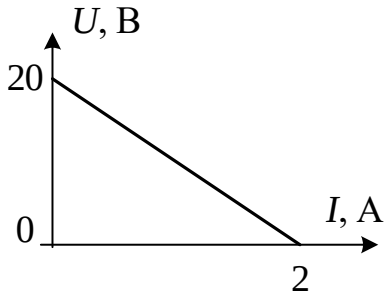


Рисунок 1.63

Дана зовнішня характеристика генератора. В номінальному режимі генератор віддає в зовнішнє коло потужність 10 Вт. Знайти на характеристиці точку номінального режиму. Визначити дані еквівалентних схем генератора: а) з джерелом ЕРС; б) з джерелом струму.

14. Дані два джерела ЕРС з параметрами: E_1 = 10 В, R_1 = 0,1 Ом, E_2 = 12 В, R_2 = 0,125 Ом.

Визначити параметри джерела ЕРС, еквівалентного:

а) послідовно з’єднаним даним двом джерелам;

б) паралельно з’єднаним джерелам.

Обидва з’єднання – узгоджені.

Накреслити зовнішні характеристики всіх джерел.

1.8. Запитання для самоконтролю

Дайте визначення електричного кола.

Дайте визначення пасивних елементів електричного кола.

Дайте визначення активних елементів електричного кола.

Які основні види з’єднань пасивних елементів можливі в електричних колах, запишіть їх характеристики.

Сформулюйте та запишіть закон Ома для пасивної ділянки.

Сформулюйте та запишіть закон Ома для активної ділянки.

Сформулюйте та запишіть вираз балансу потужностей для замкненого електричного кола. Поясніть усі складові отриманого виразу.

Сформулюйте та запишіть перший закон Кірхгофа.

Сформулюйте та запишіть другий закон Кірхгофа.

Дайте визначення складного електричного кола.

Чому дорівнює число незалежних рівнянь записаних за двома законами Кірхгофа у складному електричному колі.

Сформулюйте та запишіть послідовність розрахунку складного кола методом контурних струмів.

Сформулюйте та запишіть послідовність розрахунку складного кола методом вузлових потенціалів.

Сформулюйте та запишіть послідовність розрахунку складного кола за теоремою про еквівалентний генератор.

2. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ЗМІННОГО СТРУМУ

Струми, напруги та ЕРС, які змінюються у часі за величиною та напрямком, називаються змінними [1, 3, 6, 8, 10, 13, 16]. Найширше застосовують струми, напруги та ЕРС, що змінюються за гармонійним законом:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \sin(\omega t + \psi_i); \\ u(t) &= U_m \sin(\omega t + \psi_u); \\ e(t) &= E_m \sin(\omega t + \psi_e), \end{aligned} \qquad (2.1)$$

де $i(t)$, $u(t)$, $e(t)$ – миттєві значення струму, напруги та ЕРС;

I_m, U_m, E_m – амплітуди (найбільші за абсолютним значенням) значення гармонійної функції;

$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ – кутова частота (швидкість зміни кута в часі), [ω] = рад/с=град/с,

f – циклічна частота, $[f] = 1/\text{с} = \text{с}^{-1}$, $T = 1/f$ – період гармонійної функції, [T] = с.

Аргумент синусоїдальної електричної функції ($\omega t + \psi$) називають фазовим кутом або фазою. Він визначає стадію зміни синусоїдальної величини. З плином часу фаза збільшується і при її збільшенні на 2π починається новий цикл.

Початкова фаза ψ визначає значення синусоїдальної функції в початковий момент часу при $t = 0$. Значення початкової фази ψ визначається величиною зсуву фази синусоїди відносно початку координат, який обчислюється як абсциса точки переходу негативної півхвилі в позитивну. Якщо $\psi > 0$, то синусоїда зсунута ліворуч, а якщо $\psi < 0$, то праворуч (рис. 2.1).

При спільному розгляді двох гармонійних функцій однієї частоти різницю їхніх початкових фаз називають кутом зсуву фаз. Кут зсуву фаз між

напругою і струмом є важливою характеристикою електричного кола, яка визначається за формулою:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i. \qquad (2.2)$$

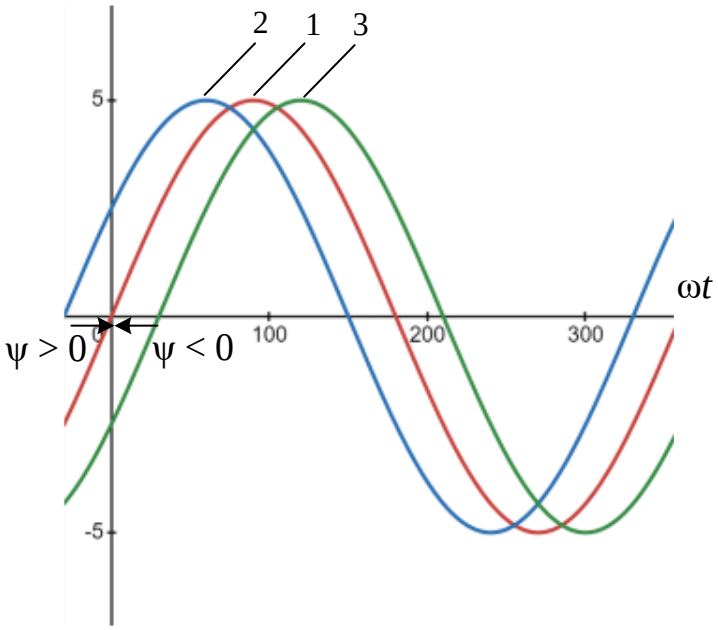


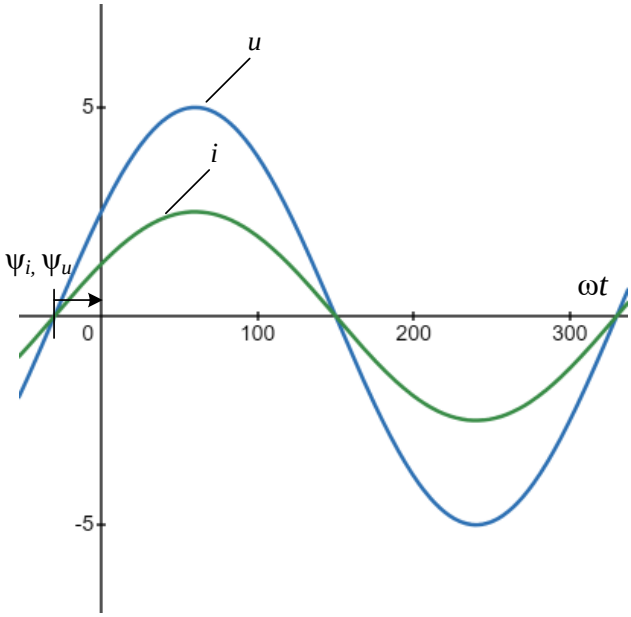
Рисунок 2.1

Якщо φ = 0, то напруга і струм збігаються за фазою (рис.2.2, *а*), якщо φ > 0, напруга випереджає струм (рис.2.2, *б*), а за φ < 0 навпаки, струм випереджає напругу (рис.2.2, *в*).

Синусоїдальна функція характеризується миттєвим, амплітудним, діючим та середнім значеннями.

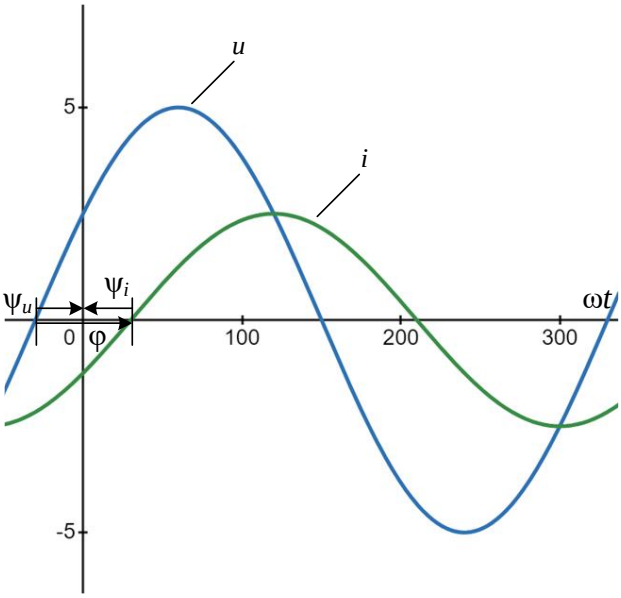
Діюче (ефективне) значення змінного струму, напруги, ЕРС визначається їх середньоквадратичними значеннями:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}\,, \qquad U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt}\,, \qquad E = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2 dt}\,. \qquad (2.3)$$



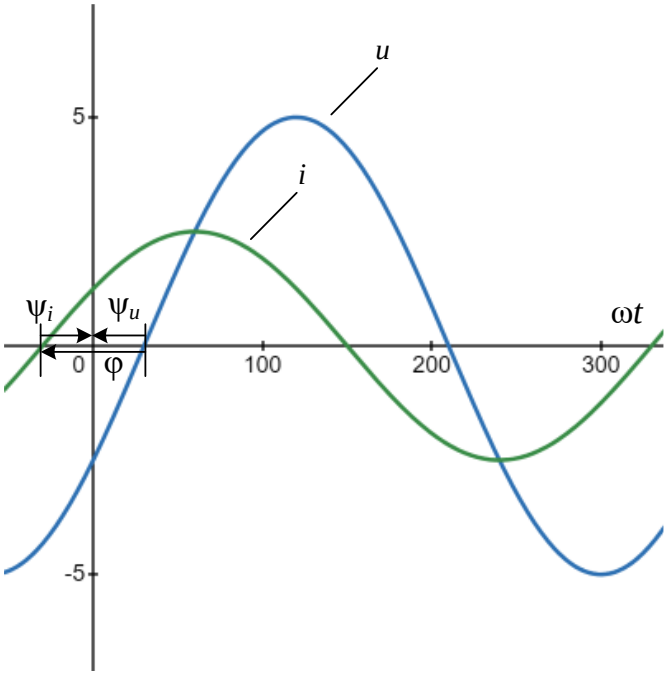
$\psi_u = \psi_{i.}$, $\varphi = 0$.

а



$\psi_u > \psi_{i.}$, $\varphi > 0$

б



$\psi_u < \psi_{i.}$, $\varphi < 0$.

в

Рисунок 2.2

Діюче значення характеризує теплову та енергетичну дію змінного струму. Діюче значення періодичного струму чисельно дорівнює такому

постійному струму I, який за час, що дорівнює періоду T, спричиняє виділення такої ж кількості тепла в провіднику з опором R, що і змінний струм.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_i)\, dt} = \int_0^T \frac{I_m^2}{T}\left[\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\,(\omega t + \psi_i)}{2}\right] dt =$$

$$= \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707 I_m. \qquad (2.4)$$

Середнє значення синусоїдальної величини визначається як її середнє значення за половину періоду, що відповідає позитивній півхвилі.

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{0{,}5T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t\, dt = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0{,}637 I_m. \qquad (2.5)$$

Для характеристики реальних періодичних кривих використовуються коефіцієнти амплітуди і форми. Коефіцієнт амплітуди: $K_{\text{а}} = I_{\text{m}}/I$, для синусоїдальних величин $K_{\text{а}} = \sqrt{2}$. Коефіцієнт форми: $K_{\text{ф}} = I/I_{ср}$, для синусоїдальних величин $K_{\text{ф}} = 1{,}11$.

2.1. Зображення синусоїдальних функцій векторами

Відомі деякі способи представлення синусоїдальних величин: аналітичний у вигляді тригонометричних функцій, у вигляді графіків зміни функцій в часі, у вигляді векторів, що обертаються, та у вигляді комплексних гармонійних функцій.

Аналітичне подання синусоїдальних функцій призводить в процесі розрахунків до громіздких тригонометричних виразів. У зв’язку з цим для аналізу кіл змінного струму ці функції представляють у вигляді векторів, що дозволяє перейти від операцій над тригонометричними функціями до операцій над векторами з використанням правил векторної алгебри. Такий підхід не тільки спрощує розрахунки, але й дозволяє отримати наочно уявлення про кількісні та фазові співвідношення електричних величин.

Довжина вектору відповідає амплітудному значенню A_m синусоїдальної величини; кут, під яким цей вектор розташований відносно позитивної піввісі абсцис, відповідає початковій фазі; миттєве значення цієї величини відповідає проекції вектору, який обертається проти годинникової стрілки в площині *XOY* з кутовою швидкістю ω, на вісь ординат.

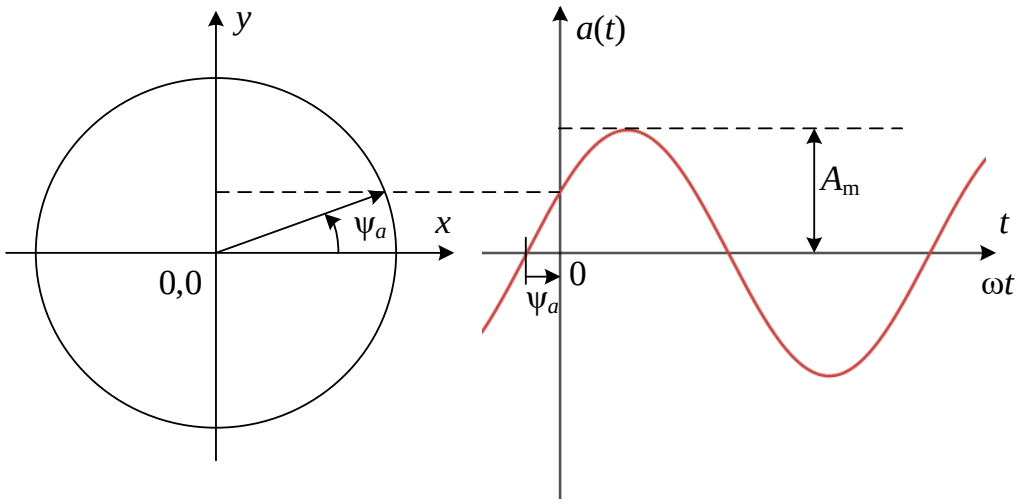


Рисунок 2.3

У момент $t = 0$ вектор $\overline{A}_m$ розташовується під кутом ψ_a до осі абсцис, і його проекція на вісь ординат дорівнює $A_m \sin \psi_a$, тобто миттєвому значенню функції $a(t)$ в момент $t = 0$.

Таким чином, проекція вектору, що обертається, на вісь ординат в кожний момент часу дає миттєве значення синусоїдальної функції часу.

У випадку, коли синусоїдальні функції мають однакову частоту ω, то відповідні їм вектори обертаються з однаковою швидкістю, і тому їхнє взаємне положення залишається незмінним. Це дозволяє зафіксувати положення векторів для моменту $t = 0$ і вважати систему векторів нерухомою.

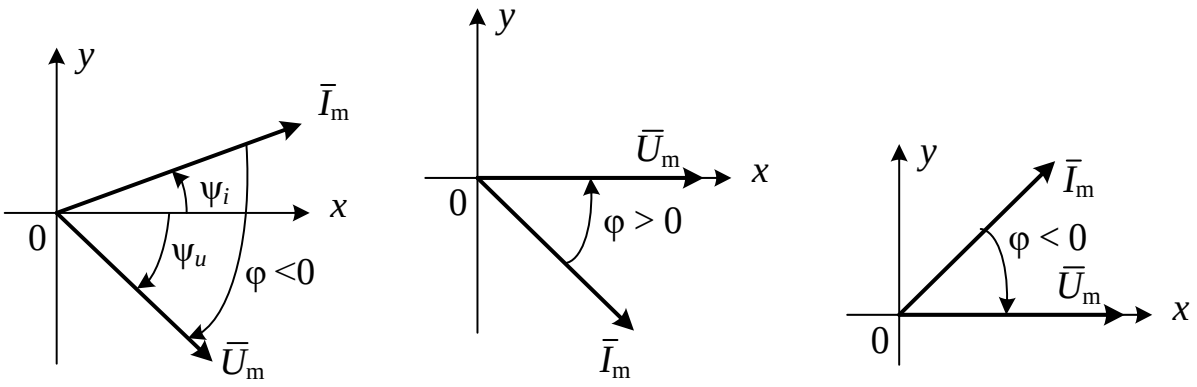


Рисунок 2.4

2.2. Параметри кіл гармонійного струму

В колах гармонійного струму напруги та струми змінюються в часі. Тому при аналізі таких кіл треба враховувати всі пасивні елементи: резистори *R*, індуктивності *L* та ємності *C*, які визначають режим роботи кола.

Коло змінного струму з резистором *R*

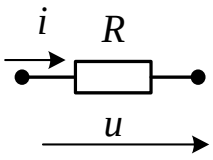


Рисунок 2.5

Якщо напруга на резисторі дорівнює

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

струм визначається за законом Ома:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m \sin(\omega t + \psi_u)}{R} = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

де амплітуда $I_m = U_m/R$, $\psi_i = \psi_u$ і тому $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$

Напруга на резисторі і струм через цей елемент збігаються за фазою, і тому кут зсуву фаз $\varphi = 0$.

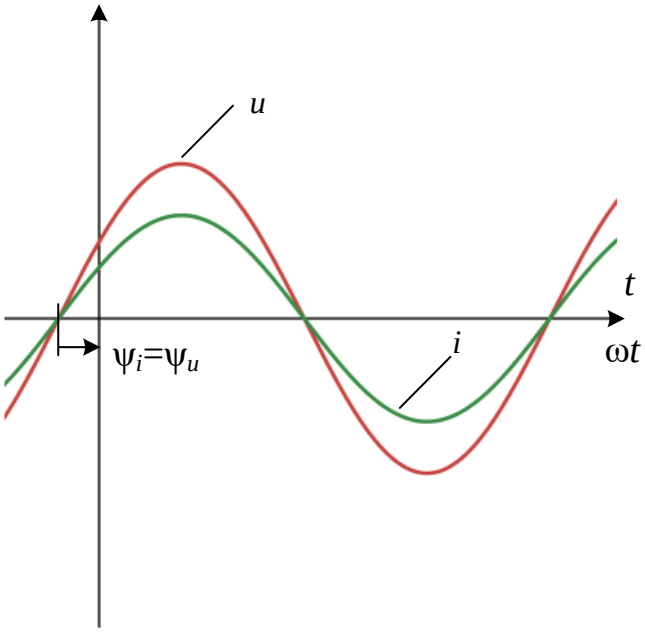


Рисунок 2.6

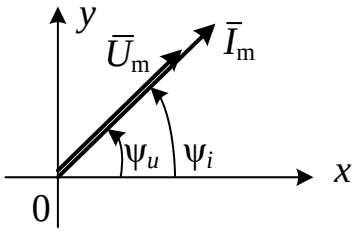


Рисунок 2.7

Для резистора закон Ома виконується для миттєвих, амплітудних і діючих значень:

$$i = \frac{u}{R};\ \ I_m = \frac{U_m}{R}; I = \frac{U}{R}.$$

Коло змінного струму з індуктивністю *L*

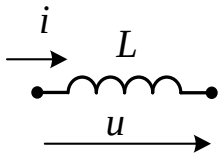


Рисунок 2.8

Зі зміною струму $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ в індуктивному елементі змінюється його потокозчеплення, що призводить до виникнення ЕРС самоіндукції:

$$e_L = -L\frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i) = -\omega L I_m \sin(\omega t + \psi_i + \pi/2).$$

ЕРС самоіндукції врівноважує напруга джерела живлення $u_L = -e_L$. Тому напругу на індуктивності можна виразити таким чином:

$$u_L = \omega L I_m \sin(\omega t + \psi_i + \pi/2) = U_{mL} \sin(\omega t + \psi_i + \pi/2), \qquad (2.6)$$

де $U_{mL} = \omega L I_m$, а величина ωL має розмірність Ом, і її називають індуктивним опором $X_L = \omega L$, $[X_L]$ = Ом.

Опір індуктивного елемента є лінійною функцією частоти (рис. 2.9).

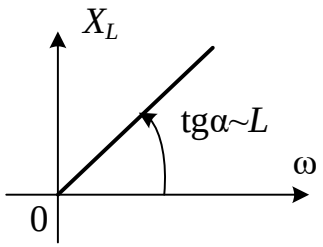


Рисунок 2.9

З аналізу виразу (2.6) маємо, що кут зсуву фаз напруги і струму в цьому елементі $\varphi = \psi_u - \psi_i = \pi/2$, тобто напруга на індуктивності випереджає струм за фазою на $\pi/2$.

Графіки функцій $u_L(t)$ та $i_L(t)$ наведені на рис. 2.10., а векторне зображення цих величин показано на рис. 2.11.

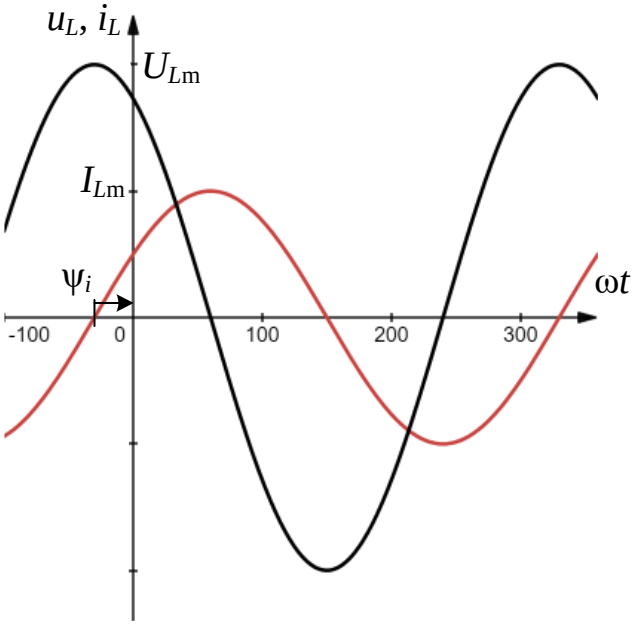


Рисунок 2.10

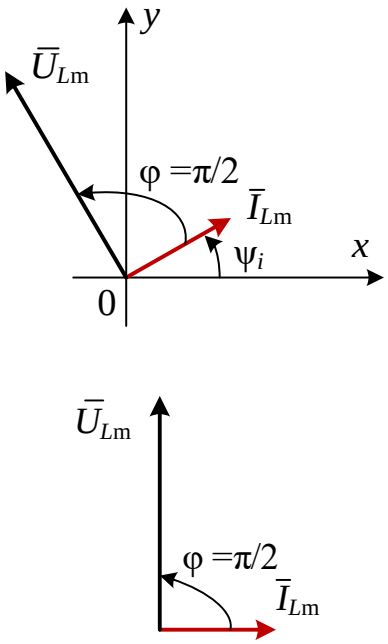


Рисунок 2.11

В колах змінного струму в індуктивностях виконується закон Ома для амплітудних та діючих значень, а для миттєвих значень не виконується, оскільки $\varphi \neq 0$.

Кола змінного струму з ємністю

Синусоїдальний струм $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, який проходить через ємність, пов'язаний з напругою рівнянням:

$$u_c = \frac{1}{C}\int idt = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t + \psi_i) =$$

$$= \frac{1}{\omega C} I_m \sin\left(\omega t + \psi_\text{i} - \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right), \qquad (2.7)$$

де амплітуди струму і напруги пов'язані виразом:

$$U_m = I_m \frac{1}{\omega C},$$

а початкові фази – співвідношенням:

$$\psi_u = \psi_i - \pi/2. \qquad (2.8)$$

Тому кут зсуву фаз в ємнісному елементі

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -\pi/2, \qquad (2.9)$$

тобто напруга відстає від струму за фазою на кут π/2.

Величина X_C називається ємнісним опором і є гіперболічною функцією частоти (рис. 2.13):

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \qquad (2.10)$$

Зворотна величина опору – ємнісна провідність:

$$B_C = \omega C. \qquad (2.11)$$

$$[X_C] = \text{Ом}, [B_C] = \frac{1}{\text{Ом}}.$$

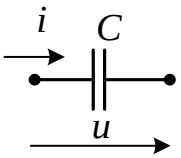


Рисунок 2.12

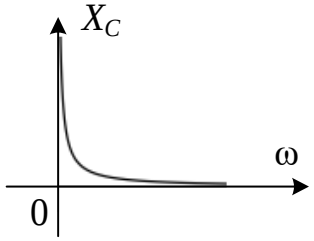


Рисунок 2.13

В колах змінного струму в ємностях виконується закон Ома для амплітудних та діючих значень напруги та струму:

$$U_m = I_m \frac{1}{\omega C}, \qquad \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \frac{1}{\omega C} \quad => \quad U = I \cdot \frac{1}{\omega C}.$$

Для миттєвих значень струму і напруги закон Омане виконується, оскільки $\varphi \neq 0$.

Часові залежності $u_C(t)$ та $i_C(t)$ наведені на рис. 2.14, а векторні зображення стуму і напруги – на рис. 2.15.

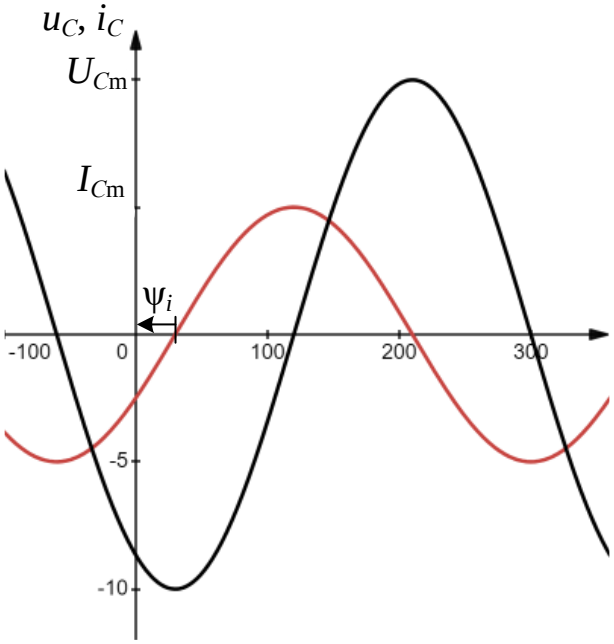


Рисунок 2.14

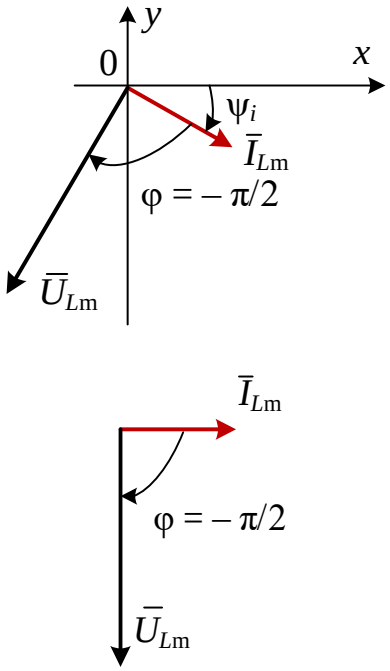


Рисунок 2.15

2.3. Закон Ома в колах синусоїдного струму

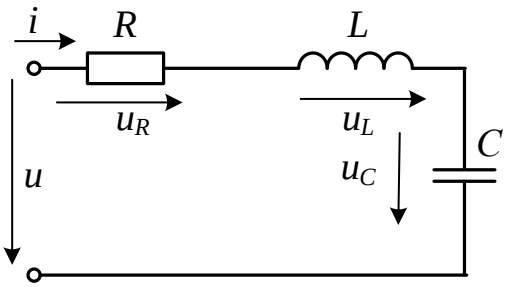


Рисунок 2.16

Розглянемо елементарне коло, що складається з послідовно з'єднаних елементів R, L, C. Відповідно до другого закону Кірхгофа загальна напруга на вхідних затискачах цього кола дорівнює алгебраїчній сумі напруг на всіх його елементах.

$$u = u_R + u_L + u_C \qquad (2.12)$$

Якщо напруга на вході кола є синусоїдальною функцією, то і струм в колі буде синусоїдальним:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

В цьому випадку рівняння (2.12) з урахуванням вище отриманих виразів можна записати так:

$$U_m \sin(\omega t + \psi_u) = RI_m \sin(\omega t + \psi_i) + \omega L I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\omega C} I_m \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right).$$

Виконаємо додавання напруг із застосуванням методу векторних діаграм. За базисний вектор приймемо вектор струму $\bar{I}_{\text{m}}$, оскільки струм є однаковим для всіх елементів кола. Відносно цього вектору відкладений вектор напруги на резисторі $\bar{U}_{\text{m}R} = R\bar{I}_{\text{m}}$ під кутом $\varphi = 0$, вектор напруги на індуктивності $\bar{U}_{\text{m}L} = \omega L\bar{I}_{\text{m}}$ під кутом $\varphi = \pi/2$ і вектор напруги на конденсаторі $\bar{I}_{\text{m}C} = \frac{1}{\omega C}\bar{I}_{\text{m}}$ під кутом $\varphi = -\pi/2$.

При побудові векторної діаграми приймемо, що $|\bar{U}_{\text{m}L}| > |\bar{U}_{\text{m}C}|$.

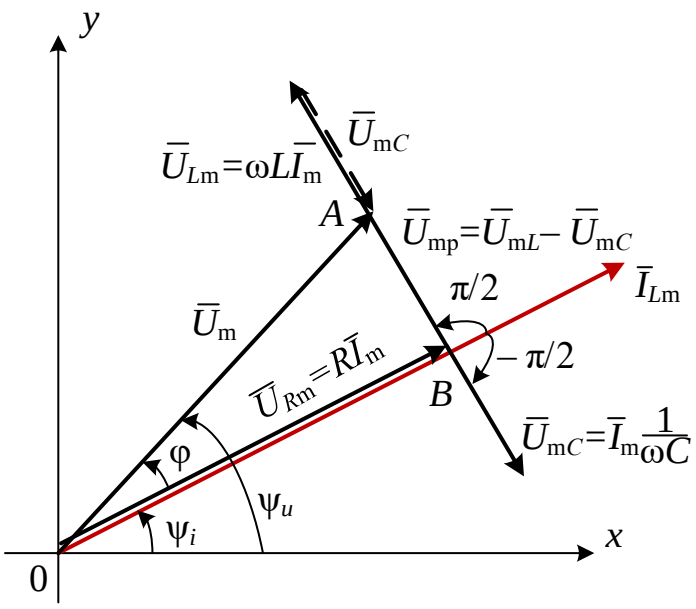


Рисунок 2.17

Вектор загальної напруги є гіпотенузою прямокутного трикутника ΔOAB. Катет, протилежний до кута AOB – це реактивна складова напруги:

$$U_{m\text{p}} = I_m\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

а прилежний – активна складова:

$$U_{m\text{a}} = I_m R.$$

Амплітуда загальної напруги визначається так:

$$U_m = \sqrt{(RI_m)^2 + \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m\right]^2} = I_m\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Звідси отримуємо закон Ома для амплітудних значень:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{U_m}{Z}, \qquad (2.13)$$

де $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ – реактивний опір;

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ – повний опір кола змінного струму.

Якщо праву і ліву частину рівняння (2.13) поділити на $\sqrt{2}$, то отримаємо вираз для закону Ома для діючих значень.

$$I = \frac{U}{Z}. \qquad (2.14)$$

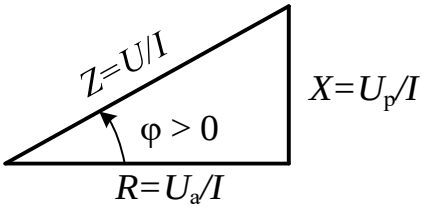
З цього ж прямокутного трикутника можна отримати співвідношення для розрахунку кута зсуву фаз між напругою і струмом:

$$\varphi = \text{arctg}\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m}{RI_m} = \text{arctg}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \text{arctg}\frac{X}{R}. \qquad (2.15)$$

Знаючи цей параметр і загальну напругу можна визначити активну та реактивну складові цієї напруги:

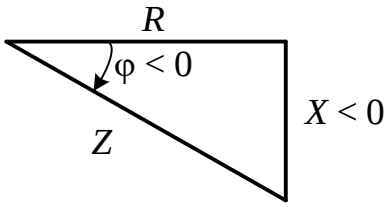
$$U_{ma} = U\cos\varphi, \quad U_{mp} = U\sin\varphi. \qquad (2.16)$$

Якщо розділити всі сторони цього трикутника (трикутника напруг) на струм *I*, то отримаємо трикутник опорів.



φ > 0, $X > 0$

Рисунок 2.18



φ < 0, $X < 0$

Рисунок 2.19

З наведених трикутників отримуємо важливі співвідношення:

$$\varphi = \text{arctg}\frac{X}{R}, \qquad R = Z\cos\varphi, \qquad X = Z\sin\varphi, \qquad Z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

Від трикутників опорів можна перейти до трикутників потужностей. Для цього треба помножити кожну сторону трикутника опорів на квадрат діючого значення струму I^2:

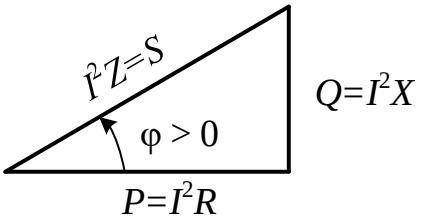


Рисунок 2.20

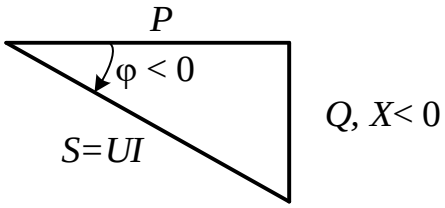


Рисунок 2.21

$$S = UI = ZI^2, \varphi = \text{arctg}\frac{Q}{P}.$$

$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$, – повна потужність, [S] = ВА,

$P = S\cos\varphi$ – активна потужність, [P] = Вт,

$Q = S\sin\varphi$ – реактивна потужність, [Q] = ВАр.

Повна та активна потужність завжди додатні, а реактивна може бути як додатною, так і від’ємною, в залежності від знаку кута зсуву фаз.

Задача 1

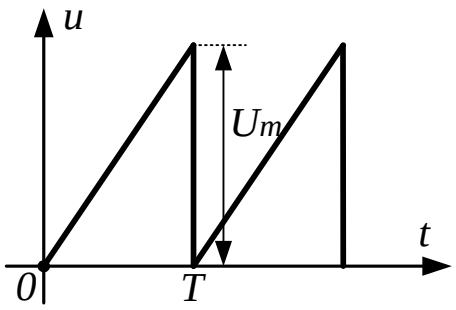


Рисунок 2.22

Для миттєвого значення напруги, що зображена на графіку, визначити діюче U та середнє $U_{\text{ср}}$ значення, а також коефіцієнти амплітуди K_a і форми $K_{\text{ф}}$. $u(t) = \frac{U_m}{T}t$.

Розв'язання

Діюче значення напруги:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{{U_m}^2}{T^2}t^2 dt} = U_m\sqrt{\frac{1}{T^3}\frac{t^3}{3}\Big|_0^T} = \frac{U_m}{\sqrt{3}}.$$

Середнє значення напруги:

$$U_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T u dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{U_m}{T}t dt = U_m\frac{1}{T^2}\frac{t^2}{2}\Big|_0^T = \frac{U_m}{2}.$$

Середнє значення напруги може бути обчислено наступним чином (враховуючи трикутну форму заданого сигналу):

$$U_{cp} = h = \frac{S_\Delta}{T} = \frac{U_m T}{2T} = \frac{U_m}{2}.$$

Коефіцієнт амплітуди і форми:

$$K_a = \frac{U_m}{U} = \sqrt{3},$$

$$K_{\text{ф}} = \frac{U}{U_{cp}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Задача 2

Для напруги, що змінюється синусоїдально, задані параметри: U = 220 В, f = 50 Гц. Для трьох значень початкової фази 0°, 30°, –45° записати закон зміни напруги, його величину в момент t = 0, побудувати часові і векторні діаграми.

Розв'язання

Закон зміни напруги має наступний вигляд: $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

Амплітуда напруги та кутова частота визначаються виразами:

$$U_m = \sqrt{2}U = 2 \cdot 220 = 311 \text{ В}, \qquad \omega = 2\pi f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 = 314 \frac{1}{\text{с}}.$$

$\psi_u = 0°$ $u(t) = 311 \sin(314t)$, В;

$u(0) = 0.$

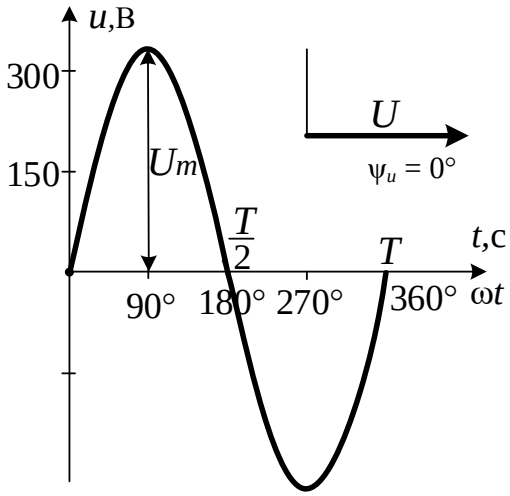


Рисунок 2.23

$\psi_u = 30°$ $u(t) = 311 \sin(314t + 30°)$, В;

$u(0) = 311 \sin(30°) = 155{,}5$ В.

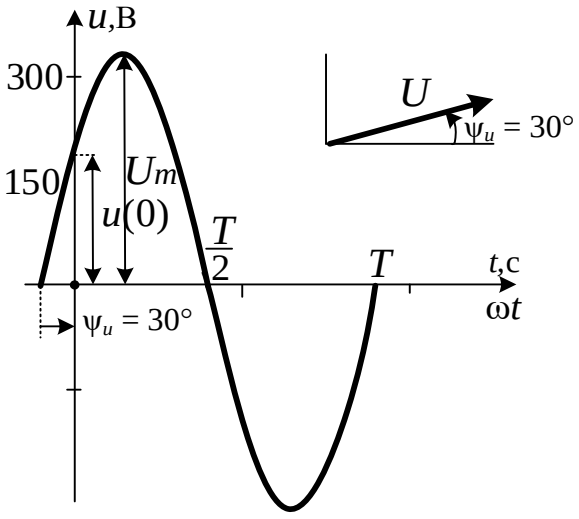


Рисунок 2.24

$\psi_u = -45°$ $u(t) = 311 \sin(314t - 45°)$, В;

$u(0) = 311 \sin(-45°) = -239$ В.

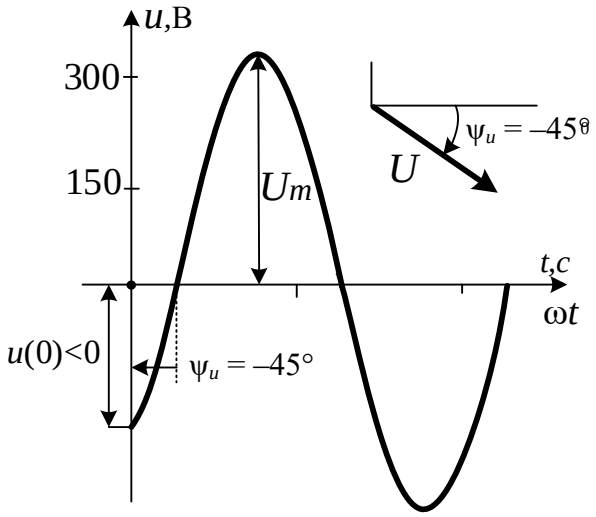


Рисунок 2.25

Задача 3

Задані напруга $u(t) = 250\sin(\omega t + 60°)$ В,

струм $i(t) = 0{,}5\sin(\omega t - 30°)$ А, кутова частота $\omega = 314$ рад/с .

Визначити зсув фази φ , діюче та середнє значення напруги *U*, струму *I*, частоту *f* і побудувати часову та векторну діаграми.

Розв'язання

Зсув фаз:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 60° - (-30°) = 90°.$$

Період:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}02 \text{ с.}$$

Частота:

$$f = \frac{1}{T} = 50 \text{ Гц.}$$

Діюче значення напруги:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \cdot 250 = 176{,}75 \text{ В.}$$

Діюче значення струму:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \cdot 0{,}5 = 0{,}353 \text{ А.}$$

Середнє значення напруги:

$$U_{\text{ср}} = \frac{2U_m}{\pi} = \frac{2 \cdot 250}{3{,}14} = 159 \text{ В}.$$

Середнє значення струму:

$$I_{\text{ср}} = \frac{2I_m}{\pi} = \frac{2 \cdot 0{,}5}{3{,}14} = 0{,}318 \text{ А}.$$

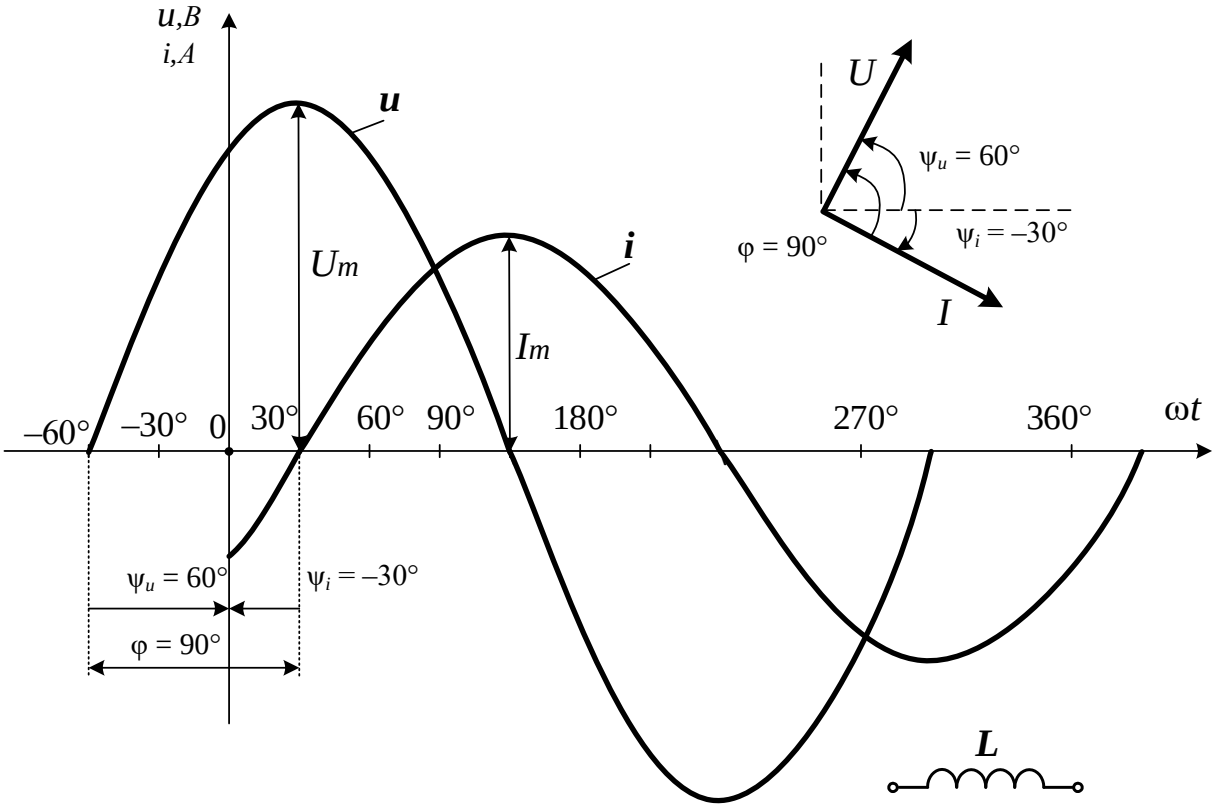


Рисунок 2.26

Задача 4

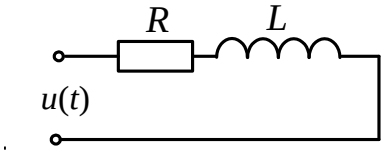


Рисунок 2.27

Дано: $u(t) = 100\sqrt{2}\sin\omega t$, В, $f = 50$ Гц, $R = 50$ Ом, $L = 0{,}1$ Гн.

Визначити зсув фази φ , повний опір Z, миттєві значення струму $i(t)$, напруги на резисторі $u_R(t)$, напруги на котушці $u_L(t)$, побудувати часову та векторну діаграми.

Розв'язання

Кутова частота:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot 3.14 \cdot 50 = 314 \text{ рад/с}.$$

Реактивний опір котушки індуктивності:

$$\omega L = 314 \cdot 0{,}1 = 31{,}4 \text{ Ом}.$$

Повний опір:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{50^2 + 31{,}4^2} = 59 \text{ Ом}.$$

Зсув фаз:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R} = \operatorname{arctg}\frac{31{,}4}{50} = 32{,}13°.$$

Струм змінюється за синусоїдним законом, тому його миттєве значення має вигляд:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Амплітудне значення струму за законом Ома:

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{100\sqrt{2}}{59} = 2{,}4 \text{ А}.$$

Визначаємо початкову фазу струму.

Оскільки $\psi_u = 0$, то $\varphi = \psi_u - \psi_i = -\psi_i$. Отже $\psi_i = -32{,}13°$.

Миттєве значення струму: $i(t) = 2{,}4 \sin(\omega t - 32{,}13°)$ А.

Миттєве значення напруги на резисторі:

$$u_R(t) = I_m R \sin(\omega t + \psi_i) =$$

$$= 2{,}4 \cdot 50 \sin(\omega t - 32{,}13°) = 120 \sin(\omega t - 32{,}13°) \text{ В}.$$

Миттєве значення напруги на котушці:

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i) =$$

$$= \omega L I_m \sin(\omega t + \psi_i + \pi/2) = 76{,}3 \sin(\omega t + 57{,}87°) \text{ В}.$$

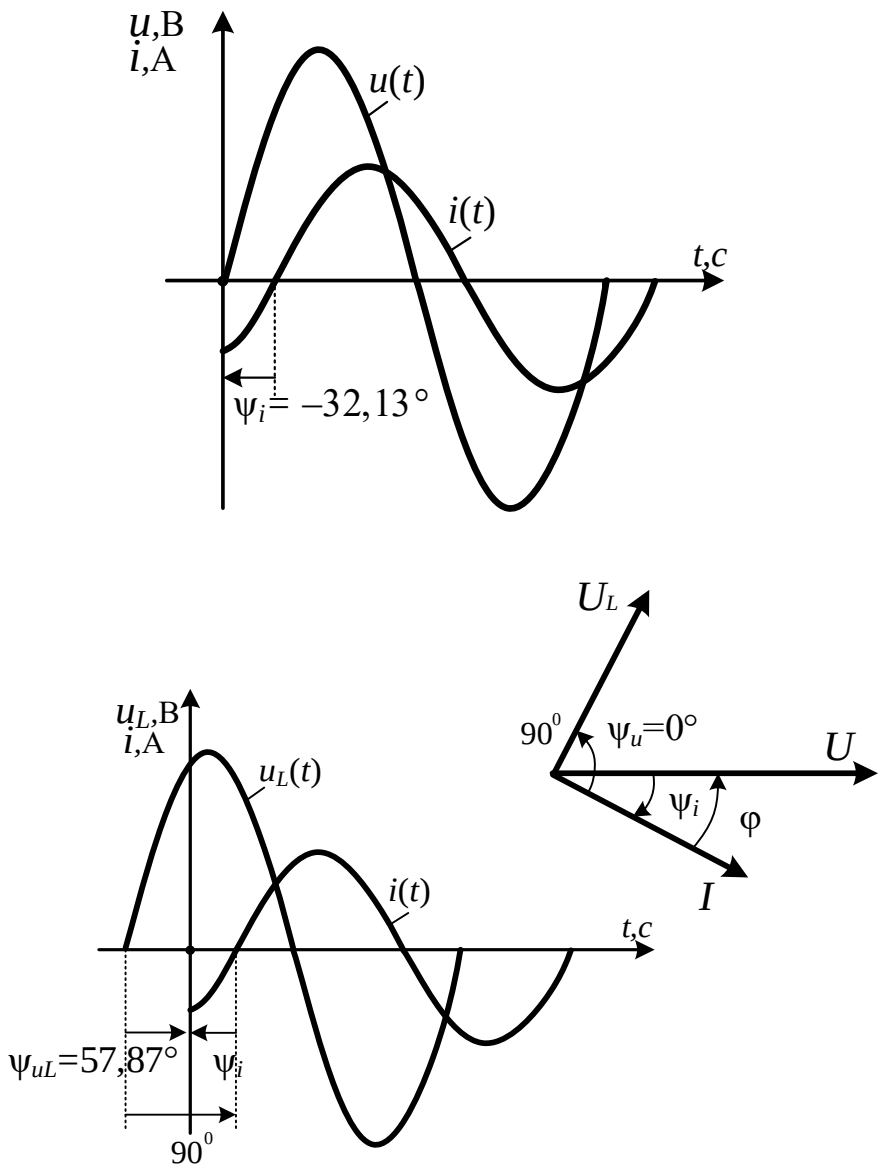


Рисунок 2.28

Задача 5

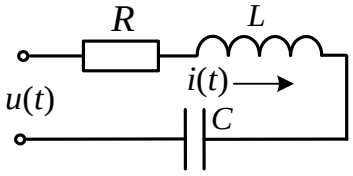


Рисунок 2.29

Дано:

$i(t) = 3\sqrt{2}\sin(200t - 90°)$ А;

$R = 40$ Ом; $L = 0{,}1$ Гн;

$C = 100$мкФ $= 100 \cdot 10^{-6}$ Ф.

Визначити повний опір Z, зсув фаз φ , миттєве значення напруги $u(t)$, діючі значення напруги на резисторі U_R, на котушці U_L і на конденсаторі U_C, побудувати векторну діаграму.

Розв'язання

Реактивні опори:

$$X_L = \omega L = 200 \cdot 0{,}1 = \ 20 \text{ Ом};$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{200 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = \ -50 \text{ Ом};$$

$$X = X_L + X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} = -30 \text{ Ом}.$$

Повний опір:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ Ом}.$$

Зсув фаз:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{X}{R} = \operatorname{arctg}\frac{-30}{40} = -36{,}83°.$$

Для визначення амплітудного значення прикладеної до кола напруги використовуємо закон Ома для амплітудних значень:

$$U_m = ZI_m = 50 \cdot 3\sqrt{2} = 150\sqrt{2} \text{ В}.$$

Початкова фаза напруги:

$$\psi_u = \psi_i + \varphi = -90° - 36{,}83° = -126{,}83°.$$

Миттєве значення напруги:

$$u(t) = 150\sqrt{2}\sin(200t - 126{,}83°) \text{ В}.$$

Діюче значення струму:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 3 \text{ А}.$$

Діючі значення напруг на резисторі, котушці індуктивності та конденсаторі визначаємо за законом Ома для діючих значень:

$$U_R = RI = 40 \cdot 3 = 120 \text{ В};$$

$$U_L = \omega LI = 20 \cdot 3 = 60 \text{ В};$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I = 50 \cdot 3 = 150 \text{ В}.$$

Діюче значення прикладеної до кола напруги можна визначити за формулою:

$$U = \sqrt{{U_R}^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{120^2 + (60 - 150)^2} = 150 \text{ В}.$$

Зсув фаз між струмом і напругою відповідно на резисторі, котушці індуктивності та конденсаторі:

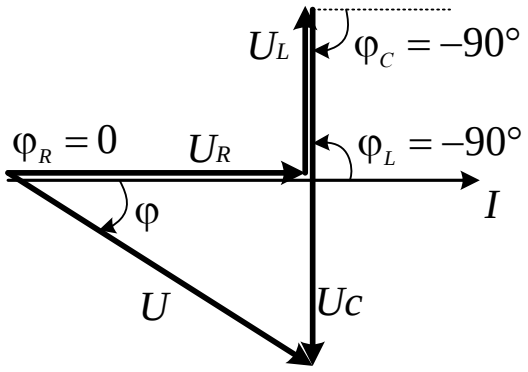


Рисунок 2.30

$$\varphi_R = \text{arctg}\frac{0}{R} = \text{arctg}\frac{0}{40} = 0;$$

$$\varphi_L = \text{arctg}\frac{\omega L}{0} = \frac{\pi}{2};$$

$$\varphi_C = \text{arctg}\frac{-\frac{1}{\omega C}}{0} = -\frac{\pi}{2}.$$

Задача 6

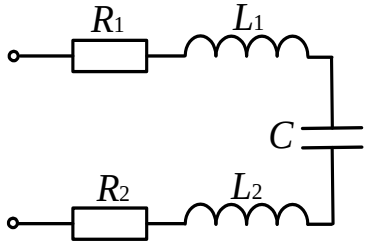


Рисунок 2.31

Дано:

$R_1 = 20$ Ом; $R_2 = 40$ Ом; $L_1 = 23{,}8$ мГн $= 23{,}8 \cdot 10^{-3}$Гн;

$L_2 = 11{,}9$ мГн $= 11{,}9 \cdot 10^{-3}$Гн; $C = 7{,}98$мкФ $= 7{,}98 \cdot 10^{-6}$ Ф.

$f = 200$ Гц, $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot 3.14 \cdot 200 = 1256$ рад/с.

Визначити повний опір Z, зсув фази φ, побудувати трикутник опорів і провідностей, еквівалентні послідовну і паралельну схеми.

Розв'язання

Визначаємо опори кола.

Реактивні індуктивні опори:

$$X_1 = \omega L_1 = 1256 \cdot 23{,}8 \cdot 10^{-3} = 30 \text{ Ом};$$

$$X_2 = \omega L_2 = 1256 \cdot 11{,}9 \cdot 10^{-3} = 15 \text{ Ом}.$$

Реактивний ємнісний опір:

$$X_3 = -\frac{1}{\omega C_3} = -\frac{1}{1256 \cdot 7{,}98 \cdot 10^{-6}} = \ -100 \text{ Ом}.$$

Активний опір кола:

$$R = R_1 + R_2 = 20 + 40 = 60 \text{ Ом}.$$

Повний опір кола:

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2 + X_3)^2} = \sqrt{60^2 + 55^2} = 81{,}2 \text{ Ом}.$$

Зсув фази:

$$\varphi = \text{arctg}\frac{X_1 + X_2 + X_3}{R_1 + R_2} = \text{arctg}\frac{55}{60} = -42{,}5°.$$

За обчисленими значеннями активного, реактивного та повного опорів кола будуємо трикутник опорів, на якому відображаємо зсув фаз.

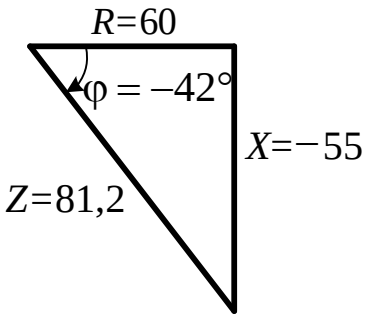


Рисунок 2.32

Визначаємо провідності кола. Активна провідність кола:

$$G = \frac{R}{Z^2} = \frac{60}{81{,}2^2} = 0{,}095 \text{ См}.$$

Реактивна провідність кола:

$$B = \frac{X}{Z^2} = \frac{-55}{81{,}2^2} = -0{,}0872 \text{ См}.$$

Повна провідність кола:

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{0{,}095^2 + 0{,}0872^{\,2}} = 0{,}01235 \text{ См}.$$

За обчисленими значеннями активної, реактивної та повної провідностей кола будуємо трикутник провідностей, на якому також відображаємо зсув фаз.

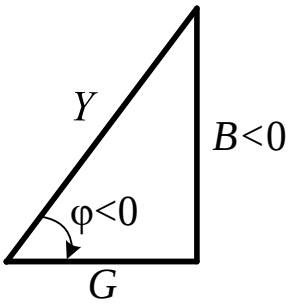


Рисунок 2.33

Еквівалентне послідовне коло можемо побудувати за допомогою розрахованих опорів. Воно має вигляд:

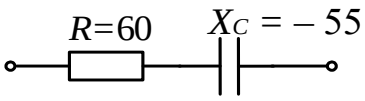


Рисунок 2.34

Еквівалентне паралельне коло можемо побудувати за допомогою розрахованих провідностей:

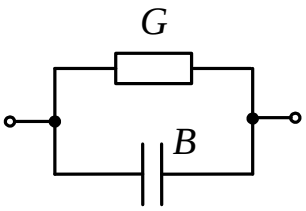


Рисунок 2.35

Задача 7

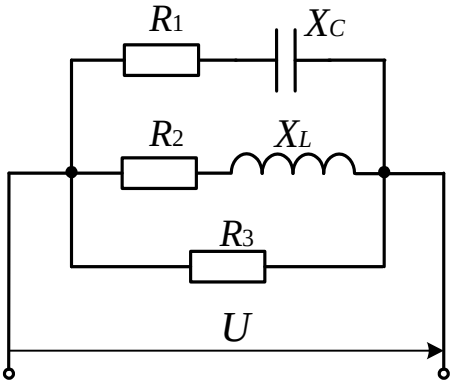


Рисунок 2.36

Дано:

$U = 100$ В; $R_1 = 3$ Ом; $X_C = -4$ Ом; $R_2 = 8$ Ом; $X_{L2} = 6$ Ом; $R_3 = 10$ Ом.

Визначити струми гілок I_1, I_2, I_3, I та побудувати векторну діаграму.

Розв'язання

Визначаємо провідності окремих гілок та всього кола.

Активна провідність першої гілки:

$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} = \frac{R_1}{R_1^2 + X_C^2} = \frac{3}{3^2 + 4^2} = \frac{3}{25} = 0{,}12 \text{ См}.$$

Реактивна провідність першої гілки:

$$B_1 = \frac{X_C}{Z_1^2} = \frac{X_C}{R_1^2 + X_C^2} = \frac{-4}{3^2 + 4^2} = \frac{-4}{25} = -0{,}16 \text{ См}.$$

Повна провідність першої гілки:

$$Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_1^2} = \sqrt{0{,}12^2 + 0{,}16^{\,2}} = 0{,}2 \text{ См}.$$

Провідності другої гілки:

$$G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2} = \frac{R_2}{R_2^2 + X_{L2}^2} = \frac{8}{8^2 + 6^2} = \frac{8}{100} = 0{,}08 \text{ См};$$

$$B_2 = \frac{X_{L2}}{Z_2^2} = \frac{X_{L2}}{R_1^2 + X_{L2}^2} = \frac{6}{8^2 + 6^2} = \frac{6}{100} = 0{,}06 \text{ См};$$

$$Y_2 = \sqrt{G_2^2 + B_2^2} = \sqrt{0{,}08^2 + 0{,}06^{\,2}} = 0{,}1 \text{ См}.$$

Провідність третьої гілки:

$$Y_3 = \frac{1}{R_3} = 0{,}01 \text{ См}.$$

Повна провідність кола:

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{(G_1 + G_2 + G_3)^2 + (B_1 + B_2)^2} = 0{,}316 \text{ См}.$$

Знаходимо діючи значення струмів в гілках та загальний струм в колі, використовуючи закон Ома для діючих значень.

$$I_1 = UY_1 = 100 \cdot 0{,}2 = 20 \text{ А};$$

$$I_2 = UY_2 = 100 \cdot 0{,}1 = 10 \text{ А};$$

$$I_3 = UY_3 = 100 \cdot 0{,}01 = 1 \text{ А};$$

$$I = UY = 100 \cdot 0{,}316 = 31{,}6 \text{ А}.$$

Кути зсуву фаз для кожної гілці знаходимо, використовуючи активні та реактивні провідності відповідних гілок:

$$\varphi_1 = \text{arctg}\frac{B_1}{G_1} = -53{,}17°;$$

$$\varphi_2 = \text{arctg}\frac{B_2}{G_2} = 36{,}83°;$$

$$\varphi_3 = 0.$$

Векторна діаграма:

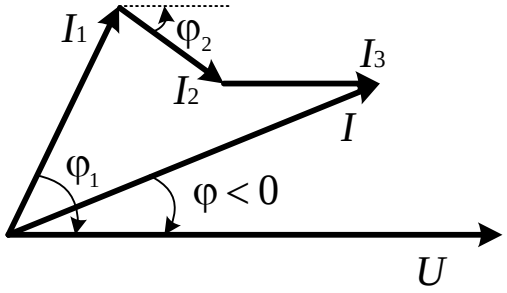


Рисунок 2.37

Задачі для самостійної роботи

1. Дано:

$$u(t) = 100\sin\left(157t + \frac{\pi}{10}\right) \text{ В};$$

$$i(t) = 5\sin\left(157t - \frac{\pi}{8}\right) \text{ А}.$$

Визначити зсув фази φ , період *T*, частоту *f* і побудувати часову та векторну діаграми.

2. Дано:

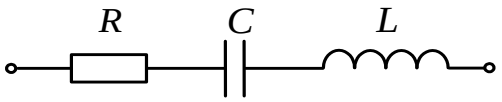


Рисунок 2.38

R=3 Ом; *L*=8 мГн; *C*=15 мкФ ;*U*=20 В; *f*=500 Гц.

Визначити струм, напругу на кожному елементі та потужність всього кола, побудувати векторну діаграму.

2.4. Метод комплексних амплітуд (символічний метод)

Символічний метод поєднує в собі простоту векторних діаграм з можливістю виконувати розрахунки з будь-якою заданою точністю. Може бути застосований, коли всі ЕРС та струми в колі є синусоїдними функціями часу однакової частоти. Цим синусоїдам ставляться у відповідність комплексні числа (комплексні амплітуди або комплекси діючих значень).

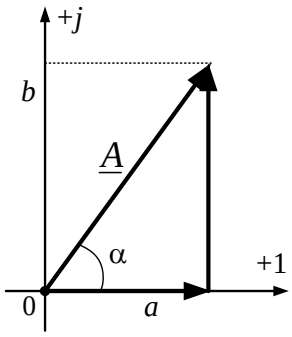


Рисунок 2.39

Комплексне число може бути подано в алгебраїчній, показниковій та тригонометричній формах. Відповідні формули переходу від одної форми до іншої:

$$\underline{A} = a + jb = \sqrt{a^2 + b^2}e^{j\text{arctg}\frac{b}{a}} = Ae^{j\alpha};$$

$$\underline{A} = Ae^{j\alpha} = A\cos\alpha + jA\sin\alpha = a + jb;$$

$$Ae^{j(\omega t+\alpha)} = A\cos(\omega t + \alpha) + jA\sin(\omega t + \alpha).$$

Миттєве значення синусоїдних струмів та напруг може бути представлено в комплексній площині так:

$$i = I_m\sin(\omega t + \psi_i) = \left[I_m e^{j(\omega t+\psi_i)}\right]_{im} = \left[I_\text{m} e^{j\psi_i}\cdot e^{j\omega t}\right]_{im} = \left[\underline{I}_m e^{j\omega t}\right]_{im};$$

$$u = U_m\sin(\omega t + \psi_u) = \left[U_m e^{j(\omega t+\psi_u)}\right]_{im} = \left[U_m e^{j\psi_u}\cdot e^{j\omega t}\right]_{im} = \left[\underline{U}_m e^{j\omega t}\right]_{im}.$$

$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$, $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$ – комплексні амплітуди струму і напруги,

$\underline{I} = Ie^{j\psi_i}$, $\underline{U} = Ue^{j\psi_u}$ – комплекси діючих значень струму і напруги.

Задача 1

Дано:

$u = 282\sin(5000t - 15°)$ В, $i = 2{,}82\sin(5000t + 15°)$ А.

Визначити: комплексні амплітуди напруги і струму $\underline{U}_\text{m}$, $\underline{I}_\text{m}$.

Розв'язання

В загальному вигляді комплексні амплітуди струму та напруги у показниковій формі мають вигляд:

$$\underline{I}_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{m}} e^{j\psi_i}, \qquad \underline{U}_{\mathrm{m}} = U_{\mathrm{m}} e^{j\psi_u}.$$

Амплітудні значення струму та напруги, а також значення початкових фаз можемо взяти з наданих миттєвих значень струму та напруги:

U_{m} = 282 В, ψ_u = –15°;

I_m = 2,82 А, ψ_i = 15°;

$\underline{U}_{\mathrm{m}} = 282e^{-j15^\circ}$В, $\underline{I}_{\mathrm{m}} = 2{,}82e^{j15^\circ}$ А.

Задача 2

Дано:

$$u = 282\sin(\omega t - 15^\circ)\ \text{В}, i = 50\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^\circ)\ \text{А}.$$

Визначити комплекси діючих значень напруги і струму, комплексний опір в алгебраїчній і показниковій формах.

Розв'язання

Комплекси діючих значень наруги та струму, використовуючи надані миттєві значення, можемо записати наступним чином:

$$\underline{U} = Ue^{j\psi_u} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}e^{j\psi_u} = \frac{282}{\sqrt{2}}e^{-j15^\circ} = 200e^{-j15^\circ}\text{В},$$

$$\underline{I} = Ie^{j\psi_i} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}e^{j\psi_i} = \frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{j30^\circ} = 50e^{j30^\circ}\ \text{А}.$$

В комплексах діючих значень напруги та струму модулями є діючі значення напруги та струму, які ми можемо отримати зі співвідношень між діючими та амплітудними значеннями для синусоїдних величин:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Представимо комплекси діючих значень напруги та струму в алгебраїчній формі, використовуючи формулу переходу від показникової

форми до алгебраїчної. Перетворення здійснюємо через тригонометричну форму:

$$\underline{U} = U(\cos\psi_u + j\sin\psi_u) = 200(\cos(-15°) + j\sin(-15°)) = 194 - j57 \text{ В},$$

$$\underline{I} = I(\cos\psi_i + j\sin\psi_i) = 50(\cos(30°) + j\sin(30°)) = 43{,}2 + j25 \text{ А}.$$

Комплексний опір знаходимо за законом Ома для комплексів діючих значень:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I}\, e^{j(\psi_u - \psi_i)} = Z\, e^{j\varphi} = \frac{200}{50} e^{j(-15°-30°)} = 4e^{-j45°} \text{Ом}.$$

Комплексний опір в алгебраїчній формі:

$$\underline{Z} = Z(\cos\varphi + j\sin\varphi) = 4(\cos(-45°) + j\sin(-45°)) = 2{,}82 - j2{,}82 \text{ Ом}.$$

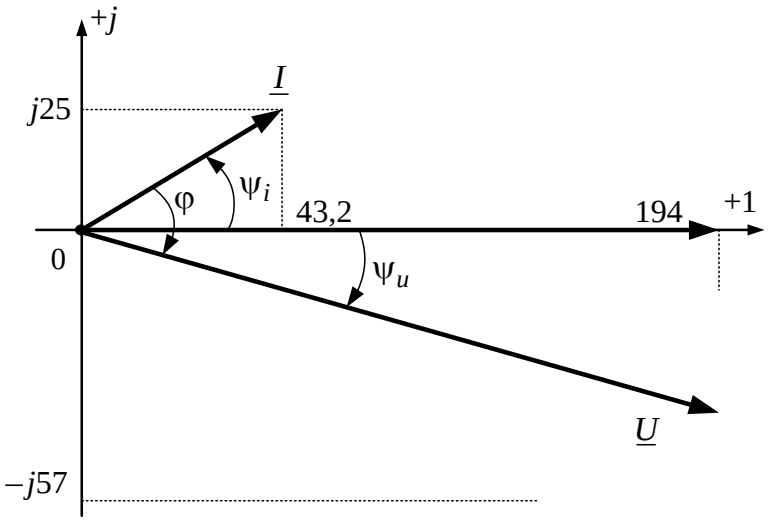


Рисунок 2.40

Задача 3

Дано:

$$\underline{Z} = 10 - j17{,}3 \text{ Ом};$$

$$\underline{U} = -191 + j111 \text{ В}.$$

Визначити: комплекс опору в показниковій формі, комплекси діючих значень напруги і струму $\underline{U}$, $\underline{I}$ та миттєве значення струму $i(t)$.

Розв'язання

Комплексний опір наданий в алгебраїчній формі. В цій формі він має дійсну та уявну частини, які дорівнюють активному та реактивному опорам

відповідно. Представимо комплексний опір в показниковій формі за допомогою формули переходу від алгебраїчної форми до показникової:

$$\underline{Z} = R + jX = \sqrt{R^2 + X^2}e^{j\text{arctg}\frac{X}{R}} = Z\,e^{j\varphi} = \sqrt{10^2 + (-17{,}3)^2}e^{j\text{arctg}\frac{-17{,}3}{10}} =$$
$$= 20e^{-j60^\circ}\ \text{Ом}.$$

Представимо комплекс діючого значення напруги у показниковій формі, також використовуючи формулу переходу. *Зверніть увагу на особливість розрахунку аргументу з від'ємною дійсною частиною:*

$$\underline{U} = \sqrt{(-191)^2 + 111^2}e^{j\left(\mathbf{180}^\circ + \text{arctg}\frac{111}{-191}\right)} = 220e^{j150^\circ}\ \text{В}.$$

Комплекс діючого значення струму визначаємо за законом Ома (для комплексів діючих значень):

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{220e^{j150^\circ}}{20e^{-j60^\circ}} = 11e^{j210^\circ}\ \text{А}.$$

Комплексну амплітуду струму визначаємо зі співвідношення між амплітудними та діючими значеннями синусоїдних величин:

$$\underline{I_m} = \underline{I}\sqrt{2} = 11\sqrt{2}e^{j210^\circ}\text{А}.$$

За отриманим значенням комплексної амплітуди струму записуємо його миттєве значення:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = 11\sqrt{2}\sin(\omega t + 210^\circ) = 11\sqrt{2}\sin(\omega t + 210^\circ)\ \text{А}.$$

Задача 4

Дано:

$$\underline{U} = j100\ \text{В},\quad \underline{I} = 16 + j12\ \text{А}.$$

Визначити комплекси діючих значень напруги $\underline{U}$ і струму $\underline{I}$ в показниковій формі, величину зсуву фази φ, комплекс повного опору $\underline{Z}$, активний R і реактивний X опори, повну S, активну P і реактивну Q потужності.

Розв’язання

Представимо комплекси діючих значень напруги та струму в показниковій формі:

$$\underline{U} = 0 + j100 = 100e^{j90^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{I} = 16 + j12 = \sqrt{16^2 + 12^2}e^{j\text{arctg}\frac{12}{16}} = 20e^{j36{,}8^\circ} \text{ А}.$$

Комплекс повного опору визначимо за законом Ома для комплексів діючих значень та перейдемо від його показникової форми до алгебраїчної:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{100e^{j90^\circ}}{20e^{j36{,}8^\circ}} = 5e^{j53{,}2^\circ} = Z\,e^{j\varphi} = 5(\cos 53{,}2^\circ + j\sin 53{,}2^\circ) =$$

$$= 3 + j4 = R + jX.$$

Відомо, що значення зсуву фази, активного та реактивного опорів можна визначити, розрахувавши комплексний повний опір та представивши його в алгебраїчній та показниковій формах:

$$\varphi = 53{,}2^\circ, \qquad R = 3 \text{ Ом}, \qquad X = 4 \text{ Ом}.$$

Обчислюючи комплексну повну потужність зверніть увагу на комплексно-спряжене значення струму, яке використовується у формулі:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \overset{*}{\underline{I}} = 100e^{j90^\circ} \cdot 20e^{-j36{,}8^\circ} = 2000e^{j53{,}2^\circ} = 2000(\cos 53{,}2^\circ + j\sin 53{,}2^\circ) =$$

$$= 1200 + j1600 = P + jQ \text{ ВА}.$$

З показникової форми комплексної повної потужності отримуємо модуль повної потужності *S*. З алгебраїчної форми запису отримуємо значення активної *P* та реактивної *Q* потужностей:

S = 2000 ВА, *P* = 1200 Вт, *Q* = 1600 ВАр.

Задача 5. (Варіант РГР)

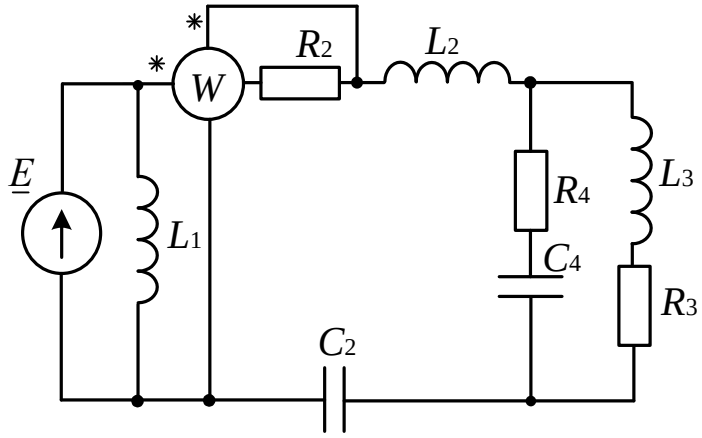


Рисунок 2.41

Дано:

E = 120 В, L_1 = 8 мГн, C_2 = 66,5 мкФ, C_4 = 100 мкФ, ψ_e = 30°, L_2 = 5.59 мГн, L_3 = 3,194 мГн, f = 200 Гц, R_2 = 1 Ом, R_3 = 3 Ом, R_4 = 6 Ом.

Визначити: струми, напруги, активні, реактивні і повні потужності, перевірити баланс потужностей, визначити покази ватметру, побудувати векторну діаграму.

Розв’язання

Кутова частота:

$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 200 = 1257$ с$^{-1}$.

Реактивні опори гілок:

$X_{L1} = \omega L_1 = 1257 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 10{,}06$ Ом;

$X_{L2} = \omega L_2 = 1257 \cdot 5{,}59 \cdot 10^{-3} = 7{,}03$ Ом;

$$X_{C2} = -\frac{1}{\omega C_2} = -\frac{1}{1257 \cdot 66{,}5 \cdot 10^{-6}} = -11{,}96 \text{ Ом};$$

$X_2 = X_{L2} + X_{C2} = 7{,}03 - 11{,}96 = -4{,}93$ Ом;

$X_{L3} = \omega L_3 = 1257 \cdot 3{,}194 = 4{,}01$ Ом;

$$X_{C4} = -\frac{1}{\omega C_4} = -\frac{1}{1257 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = -7{,}96 \text{ Ом}.$$

Комплекси повних опорів гілок:

$\underline{Z_1} = jX_{L_1} = j10{,}06 = 10{,}06e^{j90^o}$ Ом;

$\underline{Z_2} = R_2 + jX_2 = 1 - j4{,}93 = 5{,}03e^{-j78{,}5^o}$ Ом;

$\underline{Z_3} = R_3 + jX_{L3} = 3 + j4{,}01 = 5{,}01e^{j53{,}2^o}$ Ом;

$\underline{Z_4} = R_4 + jX_{C4} = 6 - j7{,}96 = 9{,}97e^{-j53^o}$ Ом.

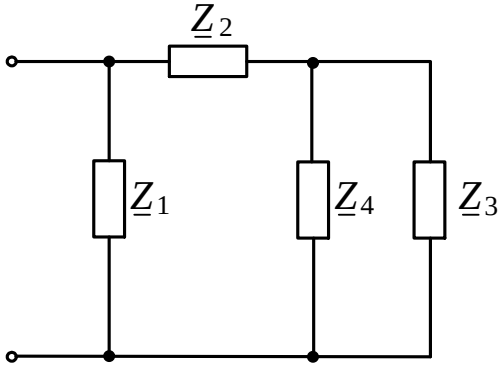


Рисунок 2.42

$$\underline{Z}_{34} = \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \frac{5{,}01e^{j53{,}2} \cdot 9{,}97e^{-j53}}{3 + j4{,}01 + 6 - j7{,}94} = \frac{49{,}95e^{j0{,}2}}{9 - j3{,}95} = \frac{49{,}95e^{j0{,}2}}{9{,}83e^{-j23{,}7}} = 5{,}08e^{j23{,}9}$$

$$= 4{,}64 + j2{,}06 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{234} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{34} = 1 - j4{,}93 + 4{,}64 + j2{,}06 = 5{,}64 - j2{,}87 = 6{,}33\, e^{-j27} \text{ Ом}.$$

Комплексна форма ЕРС:

$\underline{E} = Ee^{j\psi_E} = 120e^{j30^o}$ В.

Визначення струмів гілок:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1} = \frac{120e^{j30^o}}{10{,}06e^{j90^o}} = 11{,}93e^{-j60} = 5{,}96 - j10{,}33 \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{234}} = \frac{120e^{j30^o}}{6{,}33e^{-j27}} = 18{,}96e^{j57} = 10{,}32 + j15{,}9 \text{ А}.$$

Струм $\underline{I}_3$ визначається за формулою дільника струмів:

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_2 \cdot \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} =$$

$$= 18{,}96e^{j57^o} \cdot \frac{9{,}97e^{-j53^o}}{3 + j4{,}01 + 6 - j7{,}96} = 19{,}23e^{j27{,}7^o} = 17{,}03 + j8{,}94 \quad \text{А.}$$

Струми $\underline{I}_4$ та $\underline{I}$ визначаються за першим законом Кірхгофа:

$\underline{I}_4 = \underline{I}_2 - \underline{I}_3$ =10,32+j15,9 – 17,03 – j8,94= – 6,71+j6,96=9,67e $^{j134^\circ}$А;

$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ =5,96 – j10,33+10,32+j15,9=16,28+j5,57=17,21e$^{j18,9^\circ}$ А.

Напруги на окремих ділянках:

$\underline{U}_1 = \underline{E} = 120e^{j30^\circ} = 103{,}92 + j60$В;

$\underline{U}_{R2} = R_2 \cdot \underline{I}_2 = 1 \cdot 18{,}96e^{j57^\circ} = 18{,}96e^{j57^\circ} = 10{,}32 + j15{,}9$ В;

$\underline{U}_{C2} = jX_{C2} \cdot \underline{I}_2 = 5e^{-j90^\circ} \cdot 18{,}96e^{j57^\circ} = 9{,}48e^{j33^\circ} = 77{,}75 - j50{,}75$ В;

$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 = 5{,}03e^{-j78{,}5^\circ} \cdot 18{,}96e^{j57^\circ} = 95{,}37e^{-j21{,}5^\circ} = 88{,}73 - j34{,}95$ В;

$\underline{U}_{34} = \underline{Z}_{34} \cdot \underline{I}_2 = 5{,}08e^{j23{,}9^\circ} \cdot 18{,}96e^{j57^\circ} = 96{,}32e^{j80{,}9^\circ} = 15{,}23 + j95{,}11$ В.

Баланс потужностей.

Комплекс повної потужності, яку виробляє джерело:

$\underline{S}_{\text{вир}} = \underline{E} \cdot \overset{*}{\underline{I}} = P_{\text{вир}} + jQ_{\text{вир}} = 120e^{j30^\circ} \cdot 17{,}21e^{-j18{,}9^\circ} = 2065e^{j11{,}1^\circ} =$

$= 2026 + j398$ ВА

Обчислення активних і реактивних потужностей, спожитих гілками:

$P = I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 = 18{,}96^2 \cdot 1 + 19{,}23^2 \cdot 3 + 9{,}67^2 5$ =2029 Вт.

$Q = I_1^2 X_{L1} + I_2^2 X_2 + I_3^2 X_{L3} + I_4^2 X_{C4} =$

$= 11{,}93^2 \cdot 10{,}06 + 18{,}96^2 \cdot (-4{,}93) + 19{,}23^2 \cdot 4{,}01 +$

$+9{,}67^2(-7{,}96) = 398$ ВАр.

Баланс активних потужностей:

$P_{\text{вир}} = P_{\text{спож}}$; 2026 Вт $\approx$ 2029 Вт.

Баланс реактивних потужностей:

$Q_{\text{вир}} = Q_{\text{спож}}$; 398 ВАр = 398 ВАр.

Визначення показань ватметра.

$P_w = \mathrm{Re}\left[\underline{U}_w \overset{*}{\underline{I}}_w\right]$.

За другим законом Кірхгофа:

$\underline{U}_{L2} + \underline{U}_{34} - \underline{U}_w = 0$.

Звідси $\underline{U}_w = \underline{U}_{L2} + \underline{U}_{34} - \underline{U}_{C2} =$

$= (10{,}32 + j15{,}9) \cdot j7{,}03 + 15{,}23 + j95{,}11 - 77{,}75 + j50{,}75 = 92 + j43{,}55$ В.

Струм $\overset{*}{\underline{I}}_w$ відповідає струму, що протікає в другій гілці:

$$\overset{*}{\underline{I}}_w = \overset{*}{\underline{I}}_2 = 10{,}32 - j15{,}9 \text{ А}.$$

Показання ватметра:

$$P_w = \mathrm{Re}[(92 + j43{,}55) \cdot (10{,}32 - j15{,}9)] = 1620 \text{Вт}.$$

Перевірка: $P_3 + P_4 = I_3^2 R_3 + I_3^2 R_3 = 1100 + 550 = 1650 \approx P_w =$ 1620 Вт.

Для побудови векторної діаграми використовують обчислені діючі значення струмів і напруг (модулі комплексів діючих значень струмів і напруг), початкові фази струмів і напруг (аргументи комплексів діючих значень струмів і напруг) та різниці початкових фаз напруг і струмів (аргументи комплексних опорів відповідних гілок кола). Ці дані наведені в таблиці 2.1. Першим (опорним) вектором зручно обирати вектор напруги на паралельній ділянці. Від нього будують вектори струмів гілок цієї ділянки використовуючи відповідні кути зсуву фаз.

Таблиця 2.1 – Дані для векторної діаграми

Діючі значення та початкові фази напруг на окремих ділянках кола	Діючі значення та початкові фази струмів гілок кола	Різниця початкових фаз напруги і струму ділянки кола
U_1=E=120 В, ψ_u = 30°	I_1=11,93 А, ψ_{i1} = –60°	φ_1 =90°
U_2=95,37 В, ψ_{u2} = –21,5°	I_2=18,96 А, ψ_{i2} = 57°	φ_2 = –78,5°
U_{34}=96,32 В, ψ_{u34} = 80,9°	I_3=19,23 А, ψ_{i3} = 27,7°	φ_3 =53,2°
	I_4=9,67 А, ψ_{i4} = 134°	φ_4 = –53°
E=120 В	I=17,21 А, ψ_i = 18,9°	φ = 11,1°

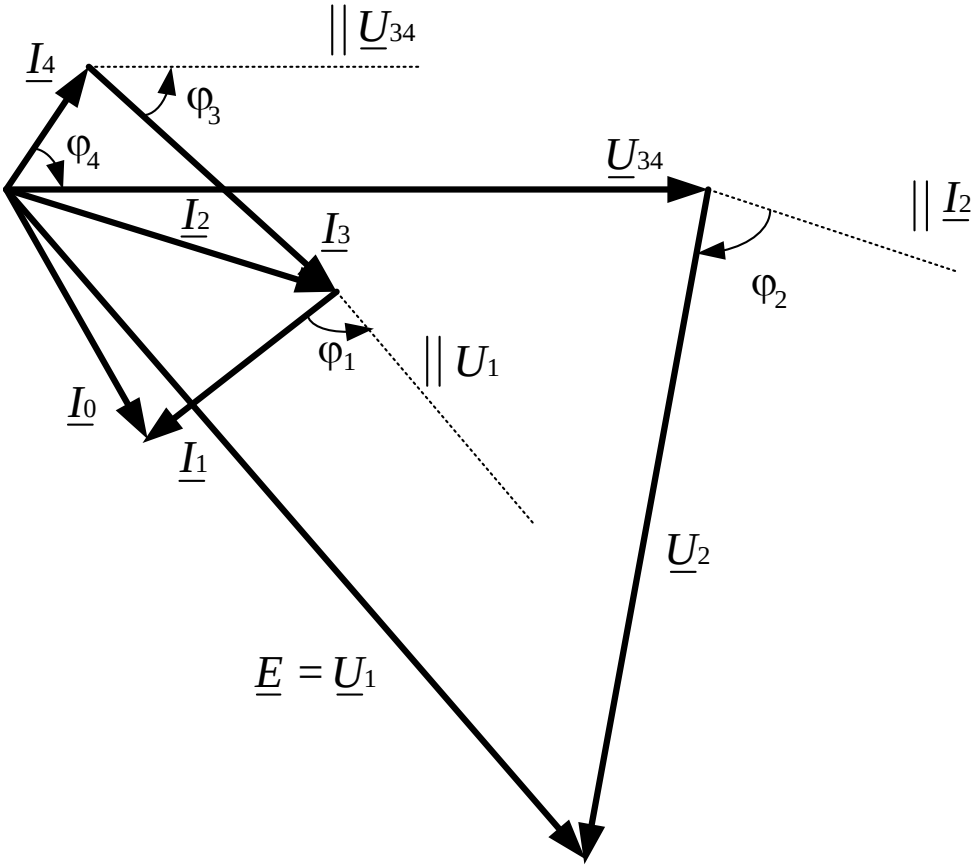


Рисунок 2.43

2.5. Активні і реактивні складові струму і напруги

Задача 1

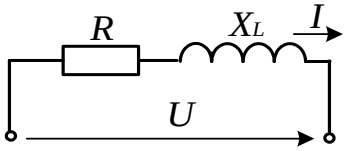


Рисунок 2.44

Дано:

$\underline{U} = 70{,}7 + j70{,}7 = 100e^{j45^\circ}$, $R = 30$ Ом,

$X_L = 40$ Ом.

Визначити миттєві значення u_a, u_p, i_a, i_p.

Розв’язання

Маючи активний та реактивний опори заданими, отримаємо комплекс повного опору в алгебраїчній та показниковій формах:

$$\underline{Z} = 30 + j40 = 50e^{j53{,}13^\circ}, \text{ Ом.}$$

За законом Ома:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{100e^{j40^\circ}}{50e^{j53,13^\circ}} = \frac{100}{50}e^{j(40^\circ - 53,13^\circ)} = 2e^{-j8,13^\circ}, \text{А}.$$

Зсув фаз визначаємо за формулою:

$$\varphi = (\psi_u - \psi_i) = 53,13^\circ, \text{ Ом}.$$

Знайдемо значення синуса і косинуса кута φ: sinφ = 0,8; cosφ = 0,6.

Діючі значення активних та реактивних складових струму та напруги:

$U_a = U\cos\varphi = 100 \cdot 0,6 = 60$ В;

$U_p = U\sin\varphi = 100 \cdot 0,8 = 80$ В;

$I_a = I\cos\varphi = 2 \cdot 0,6 = 1,2$ А;

$I_p = I\sin\varphi = 2 \cdot 0,8 = 1,6$ А.

Амплітудні значення активних та реактивних складових струмів та напруг отримуємо, враховуючи співвідношення між діючими та амплітудними значеннями синусоїдних величин.

Початкові фази активних та реактивних складових отримуємо так:

$\psi_{ua} = \psi_i$;

$\psi_{up} = \psi_i \pm 90^\circ$, якщо зсув фаз додатній ($\varphi > 0$), тоді $\psi_i + 90^\circ$, якщо зсув фаз від'ємний ($\varphi < 0$), тоді $\psi_i - 90^\circ$;

$\psi_{ia} = \psi_u$;

$\psi_{ip} = \psi_u - 90^\circ$– якщо $\varphi > 0$, тоді $\psi_u - 90^\circ$, якщо $\varphi < 0$, тоді $\psi_u + 90^\circ$.

$$u_a = U_{ma}\sin(\omega t + \psi_{ua}) = \sqrt{2}U_a\sin(\omega t + \psi_i) = \sqrt{2} \cdot 60\sin(\omega t - j8,13^\circ) \text{ В},$$

$$u_p = U_{mp}\sin(\omega t + \psi_{up}) = \sqrt{2}U_p\sin(\omega t + \psi_i + 90^\circ) = \sqrt{2} \cdot 80\sin(\omega t + j81,87^\circ) \text{ В},$$

$$i_a = I_{ma}\sin(\omega t + \psi_{ia}) = \sqrt{2}U_a\sin(\omega t + \psi_u) = \sqrt{2} \cdot 1,2\sin(\omega t + j45^\circ) \text{ А},$$

$$i_p. = I_{ma}\sin(\omega t + \psi_{ip}) = \sqrt{2}U_a\sin(\omega t + \psi_u - 90^\circ) = \sqrt{2} \cdot 1,6\sin(\omega t - j45^\circ) \text{ А}.$$

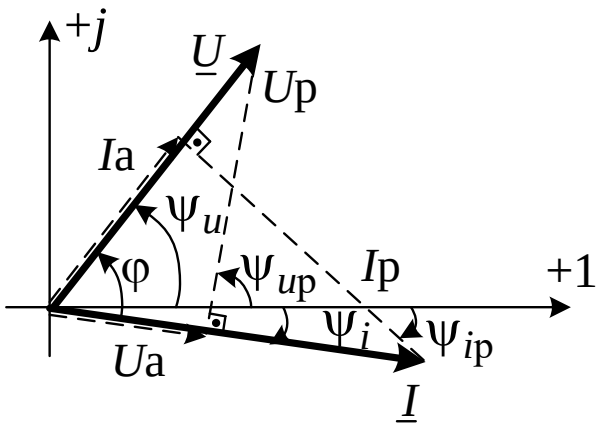


Рисунок 2.45

Задачі для самостійної роботи

1. Котушка з параметрами R = 6 Ом, L = 16 мГн приєднана до напруги

$$u(t) = 283\sin(500t) \text{ В}.$$

Знайти закон зміни струму в котушці. Побудувати графік напруги та струму та векторну діаграму. Знайти активну, реактивну та повну потужності. Записати комплекси напруги, струму та повної потужності.

2. Конденсатор і резистор з'єднані послідовно. Загальна напруга в колі змінюється за законом

$$u(t) = 141\sin(500t) \text{ В}.$$

Знайти закони зміни струму і напруги на конденсаторі та напруги на резисторі, якщо R = 200 Ом, C = 10 мкФ. Побудувати графіки напруг та струму та векторну діаграму.

Знайти активну, реактивну та повну потужності. Записати комплекси напруг на конденсаторі та на резисторі, струму та опору Z.

3. Коло з послідовно з'єднаних конденсатора і резистора споживає струм I = 0,5 А та потужність P = 10 Вт за напруги U = 220 В та частоти f = 50 Гц.

Визначити параметри кола R та C.

4. Котушка з параметрами R = 60 Ом, L = 23,9 мГн з'єднана послідовно з конденсатором, ємність якого C = 1 мкФ. Напруга на конденсаторі U_C = 200 В, частота f = 1000 Гц.

Визначити струм, напругу на котушці та загальну напругу, що прикладена до кола.

5. Котушка з параметрами R, L з'єднана послідовно з реостатом, опір якого R_1 = Ом.

На частоті f = Гц виміряні напруги всього кола та його ділянок:

U = 170 В, U1 = 100 В, Uк = 120 В. Визначити параметри котушки.

6. За відомих опорів ділянки кола визначити повний опір ділянки Z.

R=6 Ом, X_L=10 Ом, $|X_C|$ = – 2 Ом.

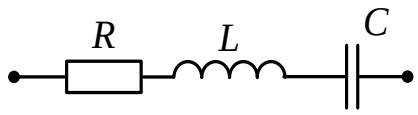


Рисунок 2.46

7. За відомих струмів першої, другої гілок та загального струму визначити струм третьої гілки I_3. I_1=6 А, I_2=7 А, I=10 А.

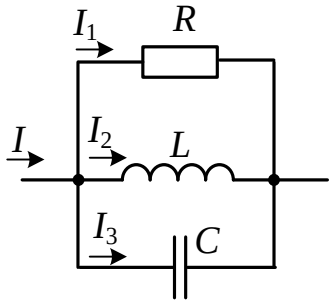


Рисунок 2.47

8. Знайти напругу на котушці індуктивності U_2, якщо напруга на резисторі U_1 = 3 В, а напруга на всій ділянці U = 10В.

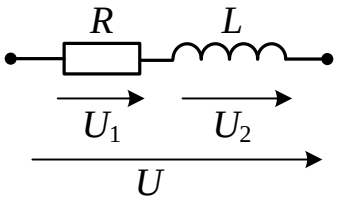


Рисунок 2.48

2.6. Резонанс напруг і струмів

В загальному випадку в колі постійного струму струм і напруга не збігаються за фазою через наявність реактивних елементів, але можливі випадки, коли в колі з реактивними елементами еквівалентний реактивний опір, і , відповідно, еквівалентна реактивна провідність дорівнюють нулю, а струм і напруга в колі збігаються за фазою, тобто коло загалом поводиться як чисто активне. В такому випадку мають місце резонансні явища. Розрізняють резонанс напруг в послідовному колі і резонанс струмів в паралельному колі.

В послідовному колі перевищення напруг на реактивних елементах над напругою вхідною (на затискачах кола) має місце за умови:

$$R < \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho,$$

де ω_0 – резонансна частота; ρ – характеристичний опір.

Відношення

$$Q = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{I_0 \omega_0 L}{I_0 R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\rho}{R}$$

визначає кратність перевищення напруги на затискачах індуктивного та ємнісного опорів над напругою на затискачах кола. Величину Q, що визначає резонансні властивості кола, називають добротністю контуру.

В паралельному контурі перевищення струмів на реактивних елементах кола з сумарним струмом відбувається за умови

$$\rho < \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma.$$

γ – хвильова провідність.

Відношення

$$Q = \frac{I_{C0}}{I} = \frac{I_{L0}}{I} = \frac{U\omega_0 C}{UG} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{\gamma}{G}$$

визначає кратність перевищення струму в реактивній котушці та в конденсаторі над сумарним струмом за резонансу. Величина Q є добротністю контуру. Величина, обернена до добротності, називається згасанням контуру.

Задача 2

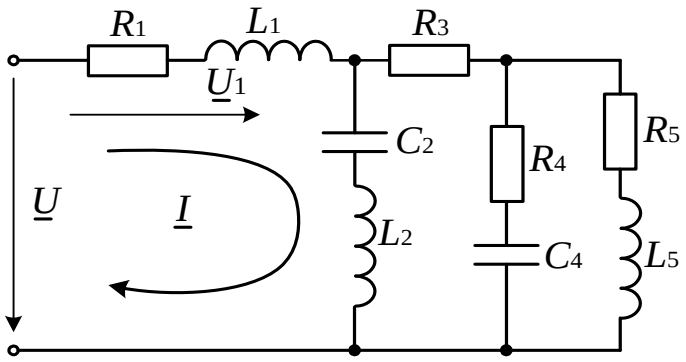


Рисунок 2.49

Визначити струми і напруги в колі, якщо відомо, що $U = 15$ В, $R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = 30$ Ом, $X_2 = 0$, $X_{L1} = X_{L2} = 30$ Ом, $X_4 = -30$ Ом, $X_5 = 30$ Ом; побудувати векторну діаграму.

Розв'язання

З умови задачі робимо висновок про наявність резонансу напруг в другій гілці (у тій гілці, де реактивний опір дорівнює нулю: $X_2 = 0$). Це означає, що опори котушки та конденсатора в цій гілці за величиною дорівнюють один одному ($X_{L2} = |X_{C2}|$). Враховуючи, що в цій гілці відсутній активний опір, повний опір цієї гілки дорівнює 0. Таким чином, друга гілка закорочує гілки 3, 4, 5, отже по них не будуть протікати струми. Тобто, струм в цьому колі один. Він протікає по першій і другій гілках та визначається за законом Ома:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}} = \frac{15}{30\sqrt{2}} = 0{,}25\sqrt{2}, \text{А}.$$

Зсув фаз між напругою живлення та струмом:

$$\varphi = \text{arctg}\,\frac{\omega L_1}{R_1} = 45°.$$

Напруга першої гілки за законом Ома для діючих значень:

$$U_1 = I\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2} = U = 15, \text{В}.$$

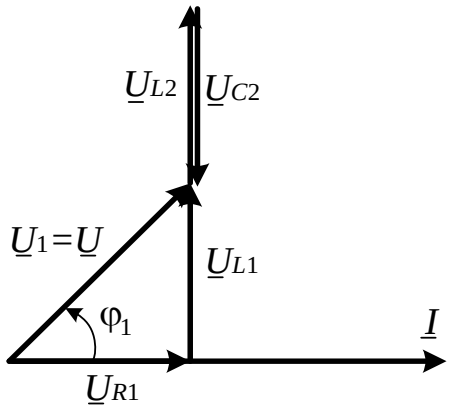


Рисунок 2.50

Напруги на елементах другої гілки (котушці L_2 та конденсаторі C_2) за законом Ома для діючих значень:

$$U_{L2} = I\omega L_2 = 0{,}25\sqrt{2} \cdot 30 = 7{,}5\sqrt{2}, \text{В},$$

$$U_{C2} = I\frac{1}{\omega C_2} = 0{,}25\sqrt{2} \cdot 30 = 7{,}5\sqrt{2}, \text{В}.$$

Задача 3

Визначити струми і напруги в колі, якщо відомо, що U = 30 В, $\frac{1}{\omega C_1}$ = 15 Ом, R_2 = 30 Ом, X_2 = 0, ωL_2 = 45 Ом, $\frac{1}{\omega C_3}$ = 30 Ом; побудувати векторну діаграму.

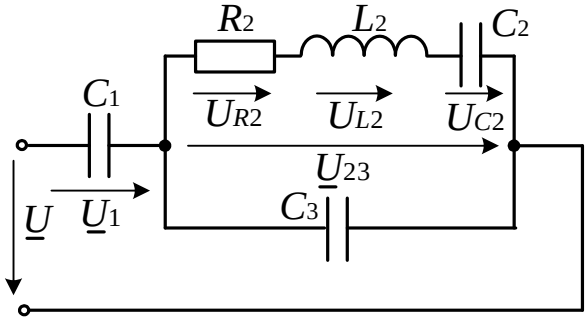


Рисунок 2.51

Розв'язання

Комплекси повних опорів:

$$\underline{Z}_1 = -j\frac{1}{\omega C_1} = -j15 = 15e^{-j90^\circ}\ \text{Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) = 30\ \text{Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = -j\frac{1}{\omega C_3} = -j30 = 30e^{-j90^\circ}\ \text{Ом}.$$

Еквівалентний комплексний опір кола:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} = -j15 + \frac{30\cdot 30e^{-j90^\circ}}{30-j30} = -j15 + \frac{30\cdot 30e^{-j90^\circ}}{30\sqrt{2}e^{-j45^\circ}} =$$

$$= -j15 + 15\sqrt{2}e^{-j45^\circ} = 15 - j30 = 15\sqrt{5}e^{-j63{,}43^\circ}, \text{Ом}.$$

Струм в першій гілці:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{30}{15\sqrt{5}e^{-j63{,}43^\circ}} = 0{,}4\sqrt{5}e^{j63{,}43^\circ}, \text{А}.$$

Струми в другій і третій гілках визначимо з використанням дільника струмів:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} = 0{,}4\sqrt{5}e^{j63{,}43^\circ}\frac{30e^{-j90^\circ}}{30\sqrt{2}e^{-j45^\circ}} = 0{,}4\sqrt{2{,}5}e^{j18{,}43^\circ},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} = 0{,}4\sqrt{5}e^{j63{,}43^\circ}\frac{30}{30\sqrt{2}e^{-j45^\circ}} = 0{,}4\sqrt{2{,}5}e^{j108{,}43^\circ}, \text{А}.$$

Напруги на окремих ділянках визначимо за законом Ома:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1\underline{Z}_1 = 0{,}4\sqrt{5}e^{j63{,}43^\circ}15e^{-j90^\circ} = 6\sqrt{5}e^{-j26{,}57^\circ}, \text{В},$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{I}_2\underline{Z}_2 = 0{,}4\sqrt{2{,}5}e^{j18{,}43^\circ}30 = 12\sqrt{5}e^{j18{,}43^\circ} = \underline{I}_3\underline{Z}_3 = \underline{I}_1\underline{Z}_{23}, \text{В}.$$

Векторна діаграма:

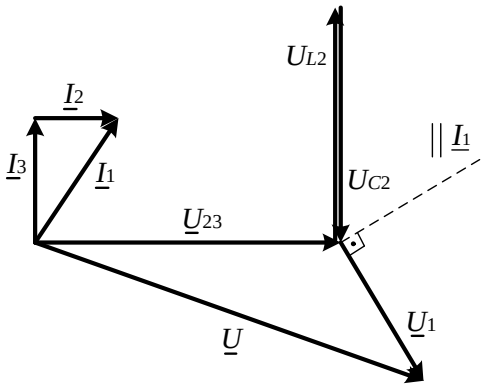


Рисунок 2.52

Задача 4

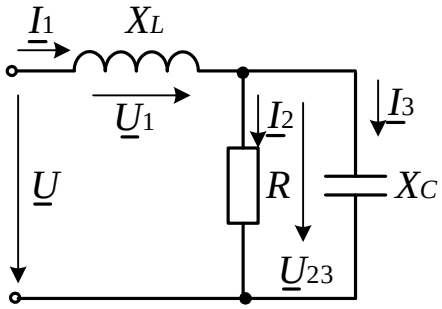


Рисунок 2.53

Дано:

X_L = 2 Ом, R = 4 Ом, X_C = –4 Ом, U = 10 В.

Визначити струми і напруги в колі, побудувати векторну діаграму.

Розв’язання

Еквівалентний комплексний опір кола:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3},$$

Опір паралельної ділянки:

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} = \frac{R\cdot(-jX_C)}{R-jX_C} = \frac{4\cdot(-j4)}{4-j4} = 2-j2 \text{ Ом}.$$

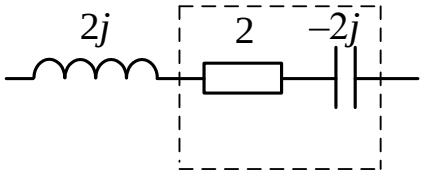


Рисунок 2.54

Остаточно, еквівалентний опір:

$$\underline{Z} = j2 + 2 - j2 = 2 \text{ Ом}.$$

Струм в першій гілці:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{10}{2} = 5 \text{ А}.$$

Струм в другій гілці визначимо з використанням дільника струмів:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 5 \frac{4e^{-j90^\circ}}{4\sqrt{2}e^{-j45^\circ}} = 2{,}5\sqrt{2}e^{-j45^\circ} = 2{,}5 - j2{,}5 \text{ А},$$

а струм в третій гілці визначимо за першим законом Кірхгофа:

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 5 - (2{,}5 - j2{,}5) = 2{,}5 + j2{,}5 = 2{,}5\sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ А}.$$

Напруги на окремих ділянках визначимо за законом Ома:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 = 5 \cdot 2e^{j90^\circ} = 10e^{j90^\circ},$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 = 2{,}5\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \cdot 4 = 10\sqrt{2}e^{-j45^\circ} = \underline{I}_3 \underline{Z}_3 = \underline{I}_1 \underline{Z}_{23}.$$

Векторна діаграма:

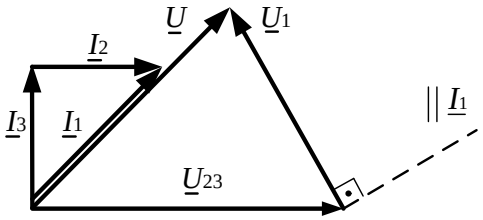


Рисунок 2.55

Задача 5

Визначити умову резонансу в колі та побудувати векторну діаграму.

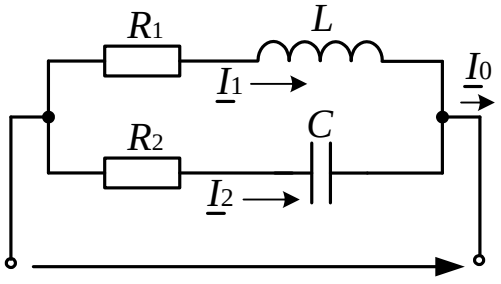


Рисунок 2.56

Розв’язання

Запишемо формули для струмів даного кола. Для струмів першої та другої гілки за законом Ома з використанням провідностей гілок:

$$\underline{I_1} = \underline{UY_1} = \underline{U}(G_1 - jB_1),$$

$$\underline{I_2} = \underline{UY_2} = \underline{U}(G_2 - jB_2).$$

Для загального струму за першим законом Кірхгофа:

$$\underline{I_0} = \underline{I_1} + \underline{I_2} = \underline{U}\left(\underline{Y_1} + \underline{Y_2}\right) = \underline{U}[(G_1 + G_2) - j(B_1 + B_2)] = \underline{U}[G - jB].$$

В цьому колі за виконання відповідної умови можливим є резонанс струмів, оскільки маємо паралельне з’єднання двох гілок, що містять реактивні елементи різних типів.

Відомо, що за наявності резонансного явища в колі загальні струм та напруга збігаються за фазою, тобто повний опір (повна провідність) в колі має чисто активний характер. Це означає, що умовою резонансу в даному колі є відсутність сумарної реактивної провідності:

$$B = B_1 + B_2 = 0.$$

Запишемо формули реактивних провідностей гілок з урахуванням елементів гілок:

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Цей вираз є умовою резонансу в даному колі.

Загальний струм при резонансі за законом Ома визначається:

$$\underline{I_0} = \underline{U}(G_1 + G_2).$$

Зсув фаз між загальним струмом та напругою:

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{0}{G_1 + G_2} = 0.$$

Зсув фаз між струмом першої гілки та напругою:

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R_1}.$$

Зсув фаз між струмом другої гілки та напругою:

$$\varphi_2 = \text{arctg}\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R_2} = -\text{arctg}\frac{1}{\omega C R_2}.$$

Векторна діаграма:

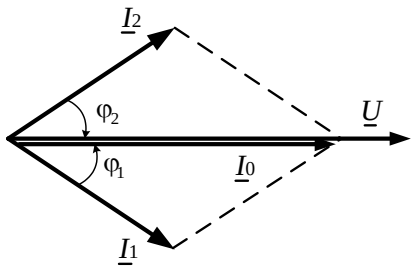


Рисунок 2.57

Задача 6

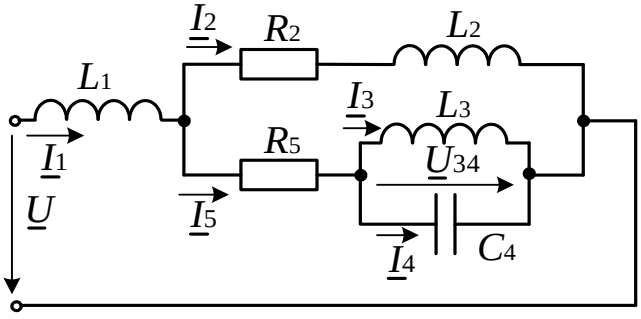


Рисунок 2.58

Дано:

U = 20 В, R_2 = 10 Ом, $\omega L_1 = \omega L_2 = \omega L_3 = R_5$ = 5 Ом.

За умови $B_{34} = 0$, визначити струми і напруги, побудувати векторну діаграму.

Розв'язання

Приймаємо початкову фазу напруги $\psi_u = 0$ та виконуємо розраховуємо в комплексній формі.

Згідно з умовою задачі маємо:

$$\omega L_3 = \frac{1}{\omega C_4},$$

що свідчить про наявність резонансу в колі. Оскільки котушка з індуктивністю L_3 та конденсатор з ємністю C_4 з'єднані паралельно та мають однакові опори і провідності, виникає резонанс струмів. До того ж, таке з'єднання при резонансі є ідеальним контуром (паралельні гілки не мають активних опорів) та його загальний опір Z_{34} нескінченно великий, що еквівалентно розриву. Струми, які

протікають по гілках 3 та 4, мають однакове за модулем значення, але знаходяться в протифазі, тобто компенсують один одного. Тому струм, який є їх сумою, дорівнює 0.

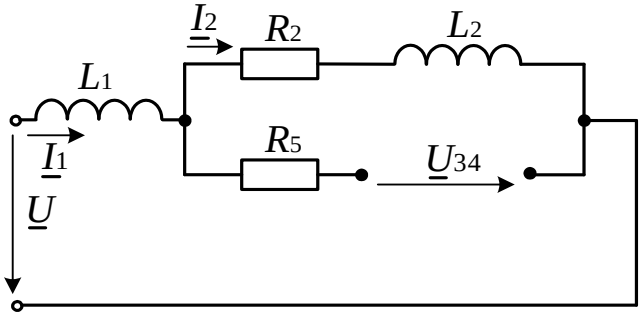


Рисунок 2.59

Отже:

$Z_{34} = \infty$; $I_5 = 0$, $I_5 R_5 = 0$.

Таким чином, загальний струм за законом Ома:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{j\omega L_1 + R_2 + j\omega L_2} = \frac{20}{j5 + 10 + j5} = \frac{20}{10\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = \sqrt{2}e^{-j45^\circ}, \text{А}.$$

Комплексні повні опори:

$\underline{Z}_1 = j\omega L_1 = j5 = 5e^{j90^\circ}$, Ом;

$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = 10 + j5 = 5\sqrt{5}e^{j26{,}56^\circ}$, Ом.

Напруги на окремих ділянках:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1\underline{Z}_1 = \sqrt{2}e^{-j45^\circ} \cdot 5e^{j90^\circ} = 5\sqrt{2}e^{j45^\circ}, \text{В},$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2\underline{Z}_2 = \sqrt{2}e^{-j45^\circ}(10 + j5) = \sqrt{2}e^{-j45^\circ}5\sqrt{5}e^{j26{,}56^\circ} = 5\sqrt{10}e^{-j18{,}44^\circ}$$

$$= \underline{U}_{34}, \text{В}.$$

Зверніть увагу, що напруга на ділянці 3-4, де виник резонанс струмів, дорівнює напрузі другої гілки.

Струми гілок 3 та 4 визначаємо за законом Ома:

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{34}}{j\omega L_3} = \frac{5\sqrt{10}e^{-j18{,}44^\circ}}{5e^{j90^\circ}} = \sqrt{10}e^{-j108{,}44^\circ}, \text{А},$$

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_{34}}{-j\dfrac{1}{\omega C_4}} = \frac{5\sqrt{10}e^{-j18{,}44^\circ}}{5e^{-j90^\circ}} = \sqrt{10}e^{j72{,}56^\circ}, \text{А}.$$

Зсуви фаз між струмами і напругами на окремих ділянках мають значення:

$\varphi_1 = 90°$, $\varphi_3 = 90°$, $\varphi_4 = -90°$,

На цих ділянках маємо по одному елементу, тому зсув фаз не складно одразу записати.

В гілці 2 зсув фази розраховуємо так:

$$\varphi_2 = \text{arctg}\frac{\omega L_2}{R_2} = \text{arctg}\frac{5}{10} = 26{,}56°.$$

Векторна діаграма:

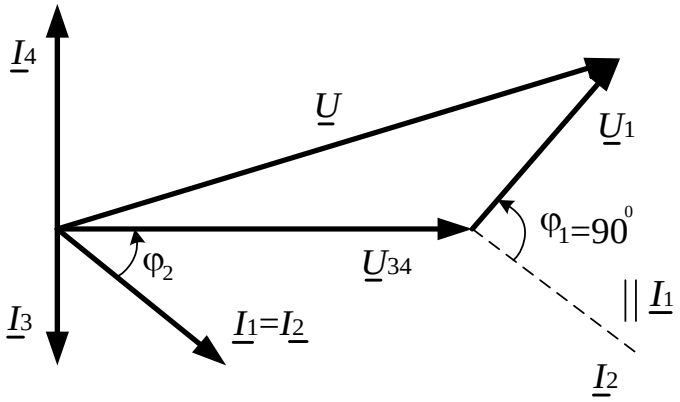


Рисунок 2.60

Задача 7

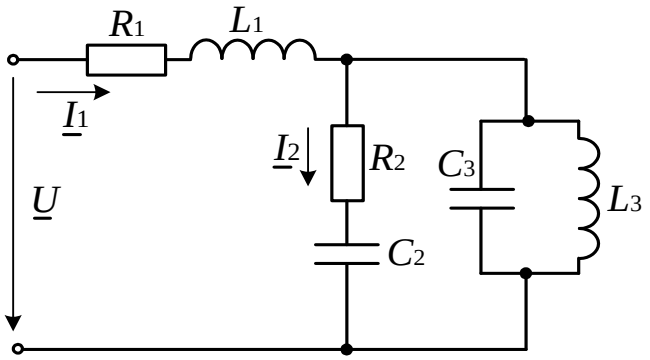


Рисунок 2.61

Дано:

U = 200 В, R_1 =R_2 = 50 Ом, L_1 =0,2 Гн, L_3 = 0,1 Гн, C_2 = 5 мкФ, C_3 = 10 мкФ.

За умови резонансу струмів визначити резонансну частоту та струми гілок.

Розв'язання

Умова резонансу струмів:

$$\omega L_3 = \frac{1}{\omega C_3}.$$

Звідси отримаємо резонансну частоту:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_3 C_3}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}1 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}} = 1000 \text{ с}^{-1}.$$

Саме на такій частоті відбувається резонанс струмів в цьому колі.

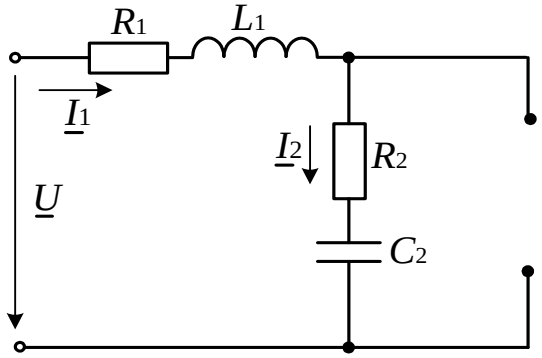


Рисунок 2.62

Комплекси повних опорів гілок 1 і 2:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = 50 + j200, \text{Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - j\frac{1}{\omega C_2} = 50 - j200, \text{Ом}.$$

Такий контур, який утворився на третій ділянці, працює в режимі резонансу струмів. Він є ідеальним та еквівалентний розриву. Тому загальний струм всього кола визначається за законом Ома так:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{200}{50 + j200 + 50 - j\dfrac{1}{1000 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}} =$$

$$= \frac{200}{100 + j(200 - 200)} = 2 \text{ А}.$$

Напруга на другій гілці дорівнює напрузі на третій ділянці:

$$\underline{U_2} = \underline{I_2}\underline{Z_2} = 2(50 - j200) = 100 - j400, \text{В}.$$

Струми в гілках третьої ділянки:

$$\underline{I_{L3}} = \frac{\underline{U_2}}{j\omega L_3} = \frac{100 - j400}{j100} = -j - 4 = -(j + 4), \text{А},$$

$$\underline{I_{C3}} = \frac{\underline{U_2}}{-j\dfrac{1}{\omega C_3}} = \frac{100 - j400}{-j100} = j + 4, \text{А}.$$

Векторна діаграма:

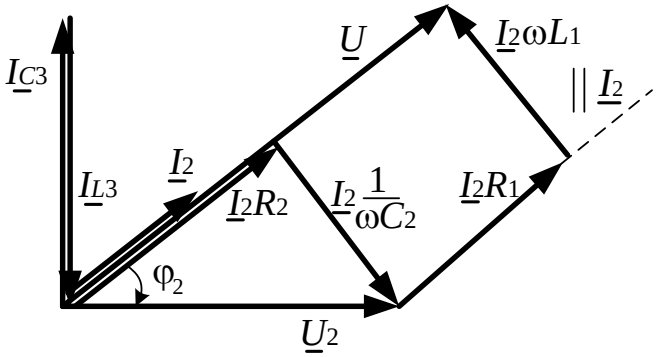


Рисунок 2.63

Задача 8

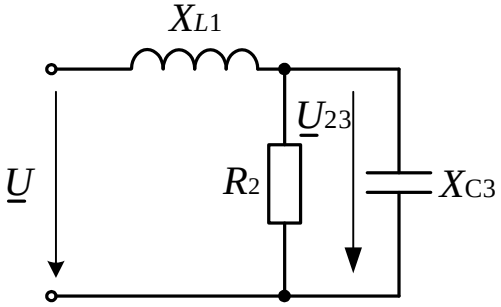


Рисунок 2.64

Дано:

$u_{23}(t) = 40\sqrt{2}\sin\omega t$, $X_{L1} = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $X_{C3} = -4$ Ом.

За умови резонансу напруг визначити струми і побудувати векторну діаграму.

Розв’язання.

$$\underline{Z_1} = j\omega L = j2 = 2e^{j90^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z_2} = R_2 = 4 \text{ Ом}.$$

$$\underline{Z_3} = -j\frac{1}{\omega C} = -j4 = 4e^{-j90^\circ} \text{ Ом}.$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} = j2 + \frac{4\cdot(-j4)}{4-j4} = j2 + 2 - j2 = 2 \text{ Ом}.$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_2} = \frac{40}{4} = 10 \text{ А},$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_3} = \frac{40}{-j4} = j10 \text{ А},$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 10 + j10 = 10\sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1\underline{Z}_1 = 10\sqrt{2}e^{j45^\circ}2e^{j90^\circ} = 20\sqrt{2}e^{j135^\circ} = -20 + j20 \text{ В},$$

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = -20 + j20 + 40 = 20 + j20 = 20\sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ В}.$$

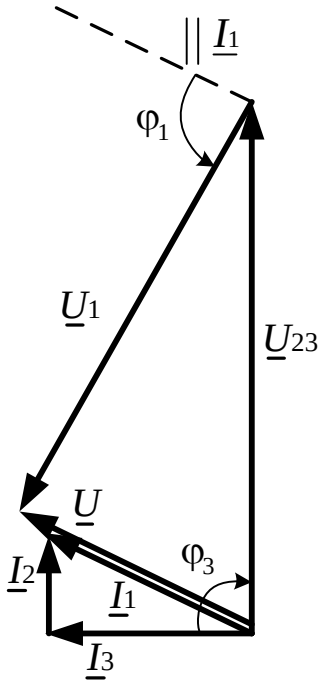


Рисунок 2.65

Задачі для самостійної роботи

1. Для послідовного коливального контуру з параметрами R = 2000 Ом, L = 0,01 Гн та C = 0,01 мкФ визначити кутову резонансну частоту та добротність. Побудувати в спільних осях графіки $I/I_р$, U_L/U, U_C/U в залежності від $\eta = \omega/\omega_0$. Визначити струм при резонансі $I_р$, а також напруги $U_{Lр}$ та $U_{Cр}$ якщо U = 10 В. Побудувати векторну діаграму.

2. Котушка з параметрами $R = 10$ Ом, $L = 1$ Гн і конденсатор, ємність котрого $C = 1$ мкФ, з'єднані перший раз послідовно, а другий – паралельно. Визначити, як зміниться при цьому резонансна частота та еквівалентний опір на резонансній частоті. Визначити всі струми за резонансу, прийнявши в обох випадках $U = 10$ В.

3. Котушка з параметрами $R = 100$ Ом, $L = 1$ мГн з'єднана паралельно з конденсатором змінної ємності. На коло подана напруга $U = 10$ В на частоті $\omega = 10^6$ рад/с. Знайти резонансне значення ємності $C_р$, добротність контуру та всі струми за резонансу.

4. За високих частот в індуктивних котушках доводиться враховувати міжвиткову ємність, яку в еквівалентній схемі зазвичай представляють зосередженою ємністю $C_е$, що увімкнута паралельно до котушки. Для визначення L та $C_е$, котушки до неї паралельно приєднаний конденсатор змінної ємності. За ємності цього конденсатора $C_1 = 10$ пФ резонанс струмів настав на частоті $f_1 = 6 \cdot 10^6$ Гц, а за ємності $C_2 = 20$ пФ резонанс струмів настав на частоті $f_2 = 5 \cdot 10^6$ Гц. Знайти L і $C_е$, котушки приймаючи для неї $Q>100$.

5.

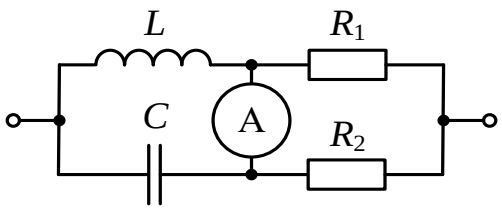


Рисунок 2.66

Визначити показання амперметру в колі на резонансній частоті. Напруга, прикладена до кола $U = 24$ В, $L = 40$ мГн, $C = 1$ мкФ. Опір амперметра вважати нульовим, опори R_1 та R_2 – довільні.

6.

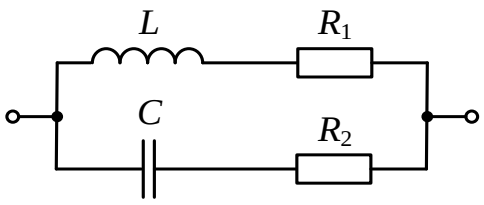


Рисунок 2.67

Визначити резонансні значення ємності кола, якщо $L = 1$ мГн, $R_1 = R_2 = 100$ Ом, $\omega = 10^6$ рад/с. Для обох випадків побудувати векторні діаграми, прийнявши $U = 100$ В.

7.

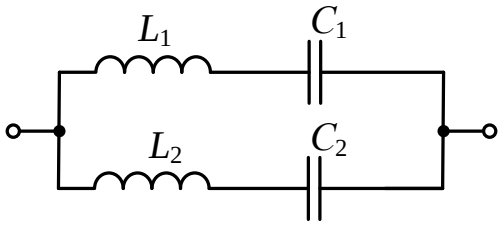


Рисунок 2.68

Визначити резонансні значення частот ω. Побудувати графіки залежностей реактивних опорів гілок X_1 та X_2 та реактивного опору всього кола від частоти ω. Дано: $L_1 = L_2 = 0{,}01$ Гн, $C_1 = 0{,}01$ мкФ, $C_2 = 0{,}04$ мкФ.

8.

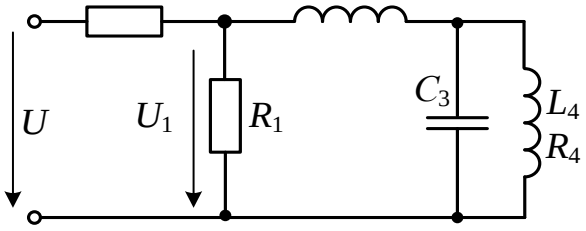


Рисунок 2.69

Дано: $R_1 = 14$ Ом, $X_2 = 16$ Ом, $X_3 = -20$ Ом, $R_4 = 30$ Ом, $X_4 = 30$ Ом. Яким має бути опір реостата R_0, щоб за напруги живлення $U = 120$ В напруга U_1 дорівнювало 100 В? Побудувати векторну діаграму.

2.7. Кола зі взаємною індуктивністю

Якщо зміна струму в одному з індуктивних елементів кола призводить до появи ЕРС в іншому індуктивному елементі кола, то ці два елементи індуктивно зв’язані, а ЕРС, яка виникає, називають ЕРС взаємоіндукції.

Зв’язок між взаємними потокозчепленнями двох індуктивно зв’язаних елементів характеризується взаємною індуктивністю *M,* яка є скалярною величиною, як і власна індуктивність елементів:

$$\Psi_{12} = Mi_2; \ \Psi_{21} = Mi_1,$$

де Ψ_{12} – потокозчеплення першого елемента, викликане струмом в другому елементі,

Ψ_{21}– потокозчеплення другого елемента, викликане струмом в першому елементі.

Позитивний напрямок струму і створеного ним магнітного потоку узгоджуються за правилом правого гвинта.

Якщо власний та взаємний магнітні потоки збігаються за напрямком, взаємно підсилюючи сумарний потік, такий індуктивний зв'язок називають узгодженим.

Якщо власний та взаємний магнітні потоки протилежні за напрямком, то такий індуктивний зв'язок називають зустрічним.

За узгодженого напрямку струмів у двох індуктивно зв'язаних котушках затискачі цих котушок, відносно яких струми спрямовані однаково, називають однойменними або однополярними. За зустрічного з'єднання котушок струми входять в різнойменні затискачі.

Задача 1

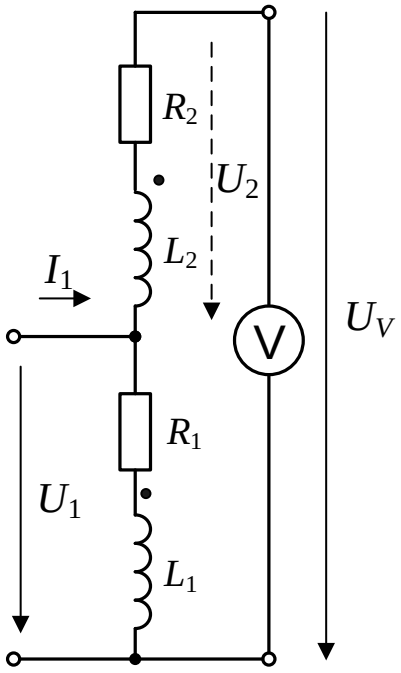


Рисунок 2.70

Дано:

$U_1 = 10$ В, $X_1 = X_2 = 4$ Ом, $R_1 = R_2 = 3$ Ом, $\omega M = 2$ Ом.

Визначити показання вольтметра (рис. 2.70) (режим холостого ходу автотрансформатора).

Розв'язання

Оскільки автотрансформатор працює в режимі холостого ходу, то на обмотці з індуктивністю L_2 присутня тільки ЕРС взаємоіндукції, до появи якої призводить струм, який протікає по обмотці з індуктивністю L_1.

За другим законом Кірхгофа визначаємо напругу на виході трансформатора, яку вимірює вольтметр:

$$\underline{U}_V = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 - j\omega M\underline{I}_1 = \underline{U}_1 - j\omega M\frac{\underline{U}_1}{R_1 + j\omega L_1} =$$

$$= 10 - j2\frac{10}{3 + j4} = 10 - j2(1{,}2 - j1{,}6) = 6{,}8 - \text{j}2{,}4 = 7{,}2e^{-j19{,}44^\circ}\text{ В}.$$

Таким чином, показ вольтметра:

$$U_V = 7{,}2\text{ В}.$$

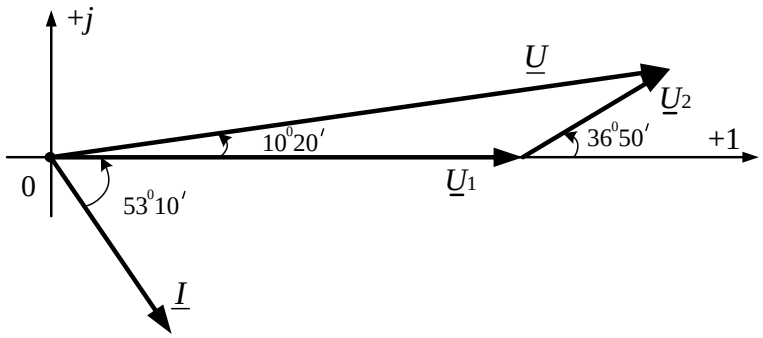


Рисунок 2.71

Задача 2

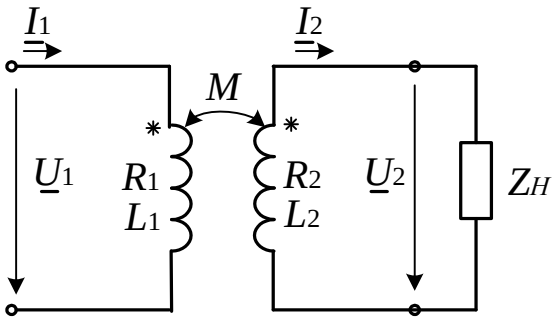


Рисунок 2.72

Повітряний трансформатор на первинній обмотці має напругу $U_1 = 100$ В, частота $\omega = 10^5$ с$^{-1}$, індуктивності $L_1 = 1$ мГн, $L_2 = 0{,}25$ мГн, $M = 0{,}4$ мГн, опори $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 2{,}5$ Ом, опір навантаження $Z_н = R_н = 10$ Ом.

Визначити ККД.

Розв’язання

Обчислюємо комплексні повні опори первинної та вторинної обмоток трансформатора:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = 10 + j100 = 101e^{j85^\circ}, \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = 2{,}5 + j25 = 25{,}2e^{j85^\circ}, \text{Ом}.$$

Обчислюємо комплекс повного опору вторинної обмотки з урахуванням опору навантаження:

$$\underline{Z}_{22} = R_2 + j\omega L_2 + R_{\text{н}} = 2{,}5 + j25 + 10 = 12{,}5 + j25 = 28e^{j64^\circ}, \text{Ом}.$$

Система рівнянь для повітряного трансформатора:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{I}_1(R_1 + j\omega L_1) - \underline{I}_2 j\omega M, \\ \underline{I}_1 j\omega M = \underline{I}_2(R_2 + j\omega L_2) + \underline{U}_2 \end{cases}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{\text{н}} = \underline{I}_2 R_{\text{н}},$$

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 - \underline{I}_2 \underline{Z}_M, \\ 0 = -\underline{I}_1 \underline{Z}_M + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2. \end{cases}$$

Виконаємо розрахунок системи рівнянь за правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & -\underline{Z}_M \\ -\underline{Z}_M & \underline{Z}_{22} \end{vmatrix} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_{22} - \left(\underline{Z}_M\right)^2 = 101e^{j85^\circ} 28e^{j64^\circ} - j^2 1600 =$$

$$= 2828e^{j149^\circ} + 1600 = -2424 + j1456 + 1600 = -824 + j1456 = 1673e^{j119^\circ},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \underline{U}_1 & -\underline{Z}_M \\ 0 & \underline{Z}_{22} \end{vmatrix} = 2800e^{j64^\circ},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{U}_1 \\ -\underline{Z}_M & 0 \end{vmatrix} = \underline{Z}_M \underline{U}_1 = j4000 = 4000e^{j90^\circ}.$$

Таким чином, струми первинної та вторинної обмоток знаходимо за формулами:

$$\underline{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2800e^{j64^\circ}}{1673e^{j119^\circ}} = 1{,}66e^{-j55^\circ}, \text{А};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4000e^{j90^\circ}}{1673e^{j119^\circ}} = 2{,}37e^{-j29^\circ}, \text{А}.$$

Напруга на навантаженні за законом Ома:

$$U_2 = I_2 R_{\text{н}} = 23{,}7 \text{ В}.$$

Потужність, яку споживає навантаження:

$$P_{\text{н}} = I_2^2 R_{\text{н}} = 2{,}37^2 \cdot 10 = 56 \text{ Вт}.$$

Загальна активна потужність, яка надходить від джерела на вхід первинної обмотки трансформатора:

$$P_1 = \text{Re}\left[\underline{U}_1 \dot{\underline{I}}_1\right] = U_1 I_1 \cos(-55^\circ) =$$

$$= 100 \cdot 1{,}66 \cdot 0{,}58 = 97 \text{ Вт.}$$

ККД трансформатора дорівнює:

$$\eta = \frac{P_{\text{н}}}{P_1} = 0{,}6.$$

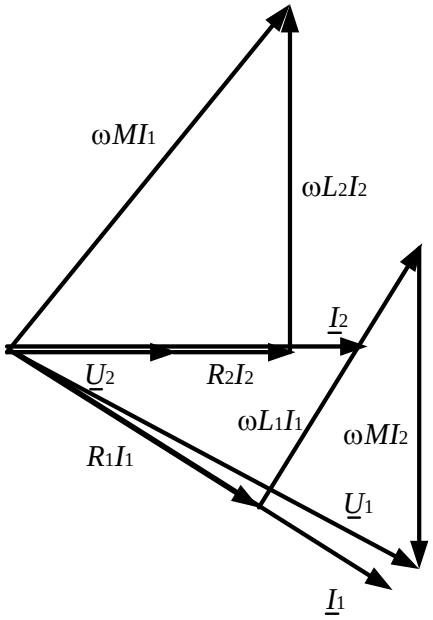


Рисунок 2.73

Задача 3.

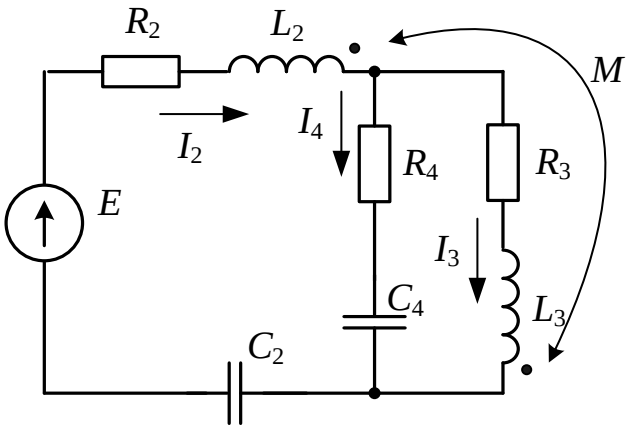


Рисунок 2.74

Дано:

E=120 В, L_1=8 мГн, C_2=66,5 мкФ, C_4=100 мкФ, ψ = 30°, L_2=5,59 мГн, L_3=3,194 мГн, f=200 Гц, R_2=1 Ом, R_3=3 Ом, R_4=6 Ом, ωM = 2 Ом.

Визначити струми, напруги на окремих гілках, перевірити баланс активних потужностей, потужностей, що передаються із однієї індуктивно зв'язаної гілки в іншу. Побудувати векторну діаграму.

Розв'язання

В комплексній формі складемо систему рівнянь за законами Кірхгофа:

$$\begin{cases} \underline{I}_2 = \underline{I}_3 + \underline{I}_4; \\ (R_2 + j\omega L_2 - j\dfrac{1}{\omega C_2})\underline{I}_2 + j\omega M\underline{I}_3 + (R_4 - j\dfrac{1}{\omega C_4})\underline{I}_4 = \underline{E}; \\ (R_3 + j\omega L_3)\underline{I}_3 + j\omega M\underline{I}_2 - (R_4 - j\dfrac{1}{\omega C_4})\underline{I}_4 = 0. \end{cases}$$

Застосуємо прийом розв'язки індуктивно зв'язаних елементів.

Якщо дві індуктивно зв'язані котушки приєднані до спільного вузла однойменними затискачами, то в схемі індуктивної розв'язки індуктивності котушок зменшуються на *M*, а в третю гілку приєднується елемент з індуктивністю +*M*.

Якщо дві індуктивно зв'язані котушки приєднані до спільного вузла різнойменними затискачами, то в схемі індуктивної розв'язки індуктивності котушок збільшуються на *M*, а в третю гілку приєднується елемент з індуктивністю –*M*.

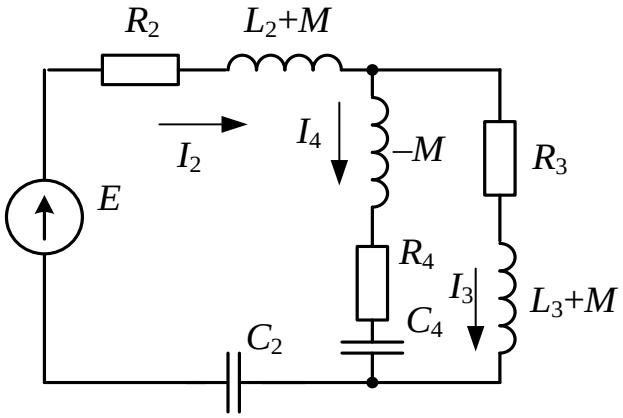


Рисунок 2.75

Обчислимо комплексні опори еквівалентної схеми:

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_2} + j\omega M = 1 - j5 + j2 = 1 - j3 = 3{,}16e^{-j71{,}56^\circ}\ \text{Ом},$$

$$\underline{Z_3} = R_3 + jX_{L3} + j\omega M = 3 + j4 + j2 = 3 + j6 = 6{,}7e^{j63{,}43^\circ}\text{Ом},$$

$$\underline{Z_4} = R_4 + jX_{C4} - j\omega M = 6 - j8 - j2 = 6 - j10 = 11{,}62e^{-j59^\circ}\ \text{Ом}.$$

$$\underline{Z_{34}} = \frac{\underline{Z_3} \cdot \underline{Z_4}}{\underline{Z_3} + \underline{Z_4}} = \frac{6{,}7e^{j63{,}43} \cdot 11{,}62e^{-j59^\circ}}{3 + j6 + 6 - j10} = 7{,}95e^{j28{,}3} = 7 + j3{,}8\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_{\text{екв}} = \underline{Z_2} + \underline{Z_{34}} = 1 - j3 + 7 + j3{,}8 = 8 + j0{,}8 = 8e^{j5{,}9}\ \text{Ом}.$$

Визначимо струми в усіх гілках:

$$\underline{I_2} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{\text{екв}}} = \frac{120e^{j30}}{8e^{j5{,}9}} = 15e^{j24{,}1} = 13{,}6 + j6{,}21\ \text{А},$$

$$\underline{I_3} = \underline{I_2}\frac{\underline{Z_4}}{\underline{Z_3} + \underline{Z_4}} = 15e^{j24{,}1}\frac{11{,}62e^{-j59}}{3 + j6 + 6 - j10} = 17{,}85e^{-j10{,}75} =$$

$$= 17{,}3 - j3{,}37\text{А};$$

$$\underline{I_4} = \underline{I_2}\frac{\underline{Z_3}}{\underline{Z_3} + \underline{Z_4}} = 15e^{j24{,}1}\frac{6{,}7e^{j63{,}43^\circ}}{3 + j6 + 6 - j10} = 10{,}255e^{j111{,}7} = -3{,}8 + j9{,}54\ \text{А}.$$

Визначимо напруги на окремих гілках.

$$\underline{U_2} = (R_2 + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_2})\underline{I_2} + j\omega M\underline{I_3} = (1 + j7 - j10)(13{,}6 + j6{,}21) +$$

$$+j2(17{,}3 - j3{,}37) = 51{,}1 - j27{,}4 = 57{,}5e^{-j27{,}8}\text{В};$$

$$\underline{U_3} = (R_3 + j\omega L_3)\underline{I_3} + j\omega M\underline{I_2} = (3 + j4)(17{,}3 - j3{,}37) + j2(13{,}6 + j6{,}21) =$$

$$= 53{,}3 + j86 = 101{,}6e^{j58{,}25}\ \text{В}.$$

$$\underline{U_4} = (R_4 - j\frac{1}{\omega C_4})\underline{I_4} = \underline{U_3}.$$

Перевіримо баланс активних потужностей.

Активна потужність, що надходить в коло від джерела:

$$P = \text{Re}\left(\underline{E} \cdot \underline{\dot{I}_2}\right) = \text{Re}\left(120e^{j30} \cdot 15e^{-j24{,}1}\right) = 1787\ \text{Вт}.$$

Потужність, яка витрачається на резисторах:

$$P_{\text{спож}} = \sum I_k^2 R_k = I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 = 15^2 \cdot 1 + 17{,}785^2 \cdot 3 + 10{,}255^2 \cdot 6 =$$

$$= 225 + 949 + 625 = 1799\ \text{Вт}.$$

$$P_{\text{дж}} = 1787 \approx P_{\text{спож}} = 1799 \text{ Вт}.$$

Активна потужність, що надходить від джерела в котушки:

$$P_2 = \text{Re}\left(\underline{U_2} \cdot \underline{\dot{I}_2}\right) = \text{Re}\left(57{,}5e^{-j27{,}8} \cdot 15e^{-j24{,}1}\right) = 534 \text{ Вт},$$

$$P_3 = \text{Re}\left(\underline{U_3} \cdot \underline{\dot{I}_3}\right) = \text{Re}\left(101{,}6e^{j58{,}25} \cdot 17{,}85e^{j10{,}75}\right) = 640 \text{ Вт}.$$

Внаслідок явища взаємної індуктивності відбувається перенесення потужності магнітним полем однієї котушки в іншу:

$$P_{2\to3} = P_2 - I_2^2 R_2 = 534 - 225 = 309 \text{ Вт}.$$

Друга котушка віддає в магнітне поле 309 Вт.

$$P_{3\to2} = P_3 - I_3^2 R_3 = 640 - 949 = -309 \text{ Вт}.$$

Третя котушка отримує з магнітного поля 309 Вт.

В результаті баланс між потужностями, що надходять від джерела, та тепловими втратами всередині котушок виконується:

$$P_2 + P_3 = 534 + 640 = 1174 = I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = 225 + 949 = 1174 \text{ Вт}.$$

Активні потужності, що переносяться магнітним полем, можна обчислити за формулами:

$$P_{2\to3} = \text{Re}\left(-j\omega M \cdot \underline{I_2} \cdot \underline{\dot{I}_3}\right) = \text{Re}\left(-2e^{j90} \cdot 15e^{j24{,}1} \cdot 17{,}85e^{j10{,}75}\right) = 309 \text{ Вт}.$$

$$P_{3\to2} = \text{Re}\left(-j\omega M \cdot \underline{I_3} \cdot \underline{\dot{I}_2}\right) = \text{Re}\left(-2e^{j90} \cdot 17{,}85e^{-j10{,}75} \cdot 15e^{-j24{,}1}\right) = -309 \text{ Вт}.$$

Векторна діаграма струмів і напруг кола показана на рис. 2.76.

Побудову діаграми слід починати з побудови векторів струмів. В комплексній площині відкладають вектори струмів: довжина якої дорівнює діючим значенням струмів в обраному масштабі, кути, під якими вектори розташовані в комплексній площині, дорівнюють кутам початкових фаз струмів і відкладаються від дійсної позитивної піввісі. Вектори напруг гілок будують як суму напруг на окремих елементах. Напруги на окремих елементах орієнтуються відносно відповідного струму в залежності від характеру елемента (в резисторі вектори напруги і струму спрямовані в однаковому напрямку, в котушці індуктивності вектор напруги випереджає струм на 90º, в конденсаторі вектор струму випереджає напругу на 90º).

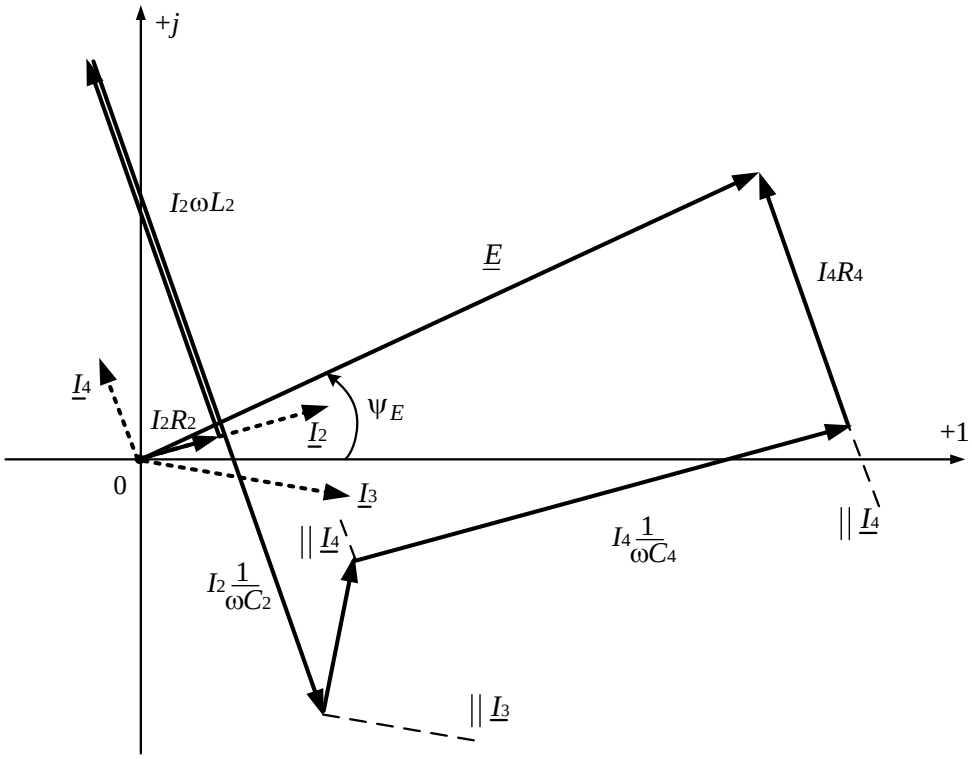


Рисунок 2.76

Задачі для самостійної роботи

1. До первинної обмотки повітряного трансформатора подана напруга $U_1 = 240$ В. Параметри трансформатора: $\underline{Z}_1 = 20 + j84$ Ом, $\underline{Z}_2 = 30 + j140$ Ом, $\underline{Z}_M = j40$ Ом.

Визначити напругу на навантаженні $\underline{Z}_н = 10 - j20$ Ом.

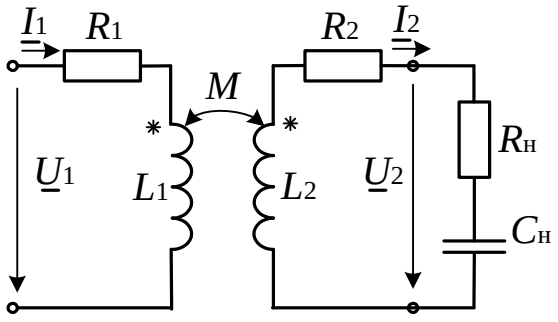


Рисунок 2.77

2. Вольтметр і амперметр в колі на рис. 2.78 показали $U = 88$ В, $I = 2{,}2$ А. Необхідно визначити ємність конденсатора C, якщо $R_1 = 9{,}5$ Ом, $\omega L_1 = 14{,}6$ Ом, $R_2 = 11{,}6$ Ом, $\omega L_2 = 17$ Ом, $\omega M = 3{,}2$ Ом, $f = 50$ Гц.

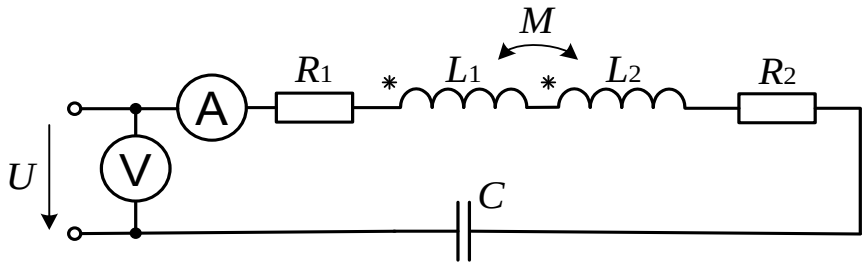


Рисунок 2.78

3. Визначити струми та напруги гілок в колі на рис. 2.79, якщо U = 120 В; R_1 = 10 Ом; X_{L1} = 15 Ом; X_{L2} = 12 Ом; R_3 = 6 Ом; X_{L3} = 9 Ом; X_{M} = 8 Ом.

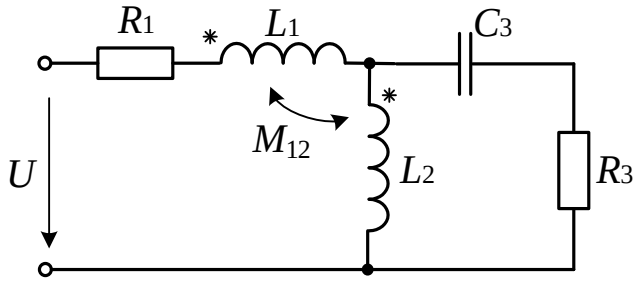


Рисунок 2.79

4. Визначити струми та напруги гілок кола на рис. 2.80, якщо U = 120 В; R_1 = 6 Ом; X_{L1} = 25,1 Ом; R_2 = 2 Ом; X_{L2} = 1,26 Ом; R_3 = 4 Ом; X_{L3} = 3,14 Ом; X_{M} = 4,52 Ом.

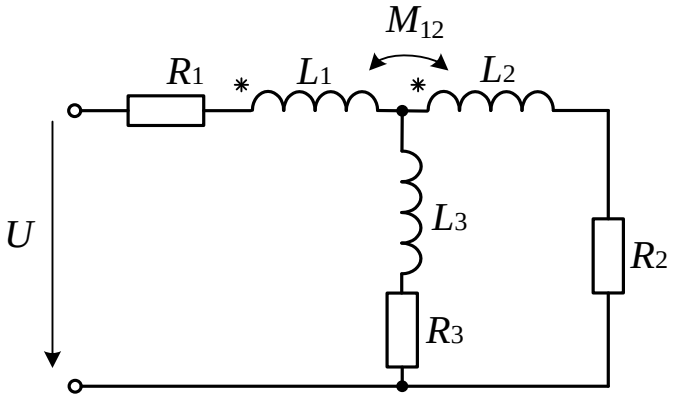


Рисунок 2.80

5. Визначте струми гілок кола на рис. 2.81, якщо U = 100 В; $X_{L1} = |X_{C1}|$ =10 Ом; $X_{L2} = R_2 = \omega M$ = 8 Ом.

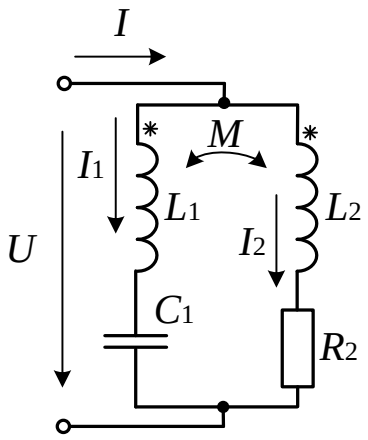


Рисунок 2.81

6. Параметри повітряного трансформатора на рис. 2.82: R_1 = 10 Ом; L_1 = 100 мкГн; R_2 = 40 Ом; L_2 = 400 мкГн; коефіцієнт зв'язку K = 0,1; f = 159 кГц.

Визначити струм первинної обмотки та напругу на її затискачах, якщо в режимі короткого замикання струм у вторинній обмотці I_2 = 0,1 мкА.

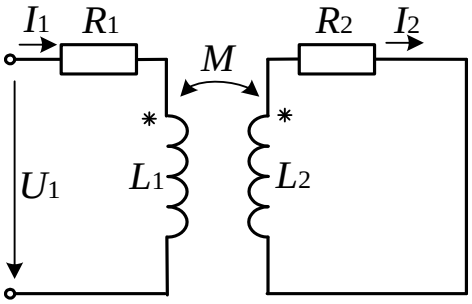


Рисунок 2.82

7. Повітряний трансформатор на рис. 2.83 навантажений опором $\underline{Z}_н = 10 + j10$ Ом. Визначити первинний та вторинний струми, якщо U = 500 В; R_1 = 15 Ом; X_{L1} = 62,8 Ом; X_{L2} = 94,2 Ом; R_2 = 10 Ом; X_M = 31,4 Ом.

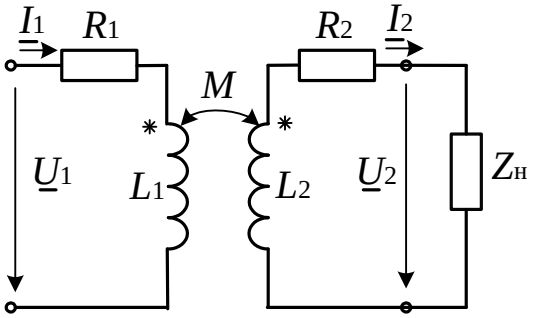


Рисунок 2.83

2.8. Запитання для самоконтролю

Дайте визначення періоду синусоїдальної функції.

Дайте визначення циклічної частоти синусоїдальної функції.

Дайте визначення початкової фази синусоїдальної функції.

Дайте визначення активного, реактивного і повного опорів кола, запишіть формули для їх визначення та взаємозв’язку.

Дайте визначення куту зсуву фаз φ між струмом і напругою. Від чого він залежить?

Сформулюйте та запишіть основні поняття методу комплексних амплітуд для розрахунку електричних кіл синусоїдального струму.

Поясніть послідовність побудови векторної діаграми для складного електричного кола синусоїдального струму.

Які елементи повинно мати коло, щоб у ньому був можливий резонанс?

Який характер має коло в режимі резонансу?

Дайте визначення добротності, смуги пропускання та характеристичного опору резонансного контуру.

Запишіть умову резонансу напруг.

Запишіть умову резонансу струмів.

Які електричні кола називаються індуктивно зв’язаними?

Дайте визначення узгодженого та зустрічного включення двох індуктивно зв’язаних котушок?

3. РОЗРАХУНОК ТРИФАЗНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

3.1. Системи напруг і струмів в трифазних колах

Трифазне електричне коло – це сукупність електричних кіл, в яких діють синусоїдальні ЕРС однієї частоти, які зсунуті одна відносно одної по фазі та створені загальним джерелом енергії [1-3, 6, 9].

Окремі електричні кола, які входять до складу трифазного електричного кола, називаються *фазами*. Кількість фаз у трифазного електричного кола $m = 3$.

Трифазне коло є окремим випадком багатофазного кола.

Кожна фаза трифазного кола має стандартну назву: фаза «*A*», фаза «*B*» та фаза «*C*».

Основні елементи трифазного кола: трифазний генератор, лінії електропередачі, приймачі (споживачі).

Сукупність ЕРС (напруг або струмів), які діють в трифазному колі, називається *трифазною системою ЕРС (напруг або струмів)*:

$$e_A = E_{A\mathrm{m}}\sin(\omega t + \psi_{e_A})$$

$$e_B = E_{B\mathrm{m}}\sin(\omega t + \psi_{e_B})$$

$$e_C = E_{C\mathrm{m}}\sin(\omega t + \psi_{e_C})$$

Трифазна система ЕРС (напруг або струмів), в якій ЕРС (напруги або струми) в окремих фазах дорівнюють один одному по амплітуді та відстають відносно один одного по фазі на однакові кути $2\pi/m$, називається *симетричною системою:*

$$E_{A\mathrm{m}} = E_{B\mathrm{m}} = E_{C\mathrm{m}} = E_{\mathrm{m}},$$

$$\psi_{e_B} - \psi_{e_A} = \psi_{e_C} - \psi_{e_B} = \psi_{e_A} - \psi_{e_C} = {}^{2\pi}\!/_{m} = {}^{2\pi}\!/_{3} = 120°.$$

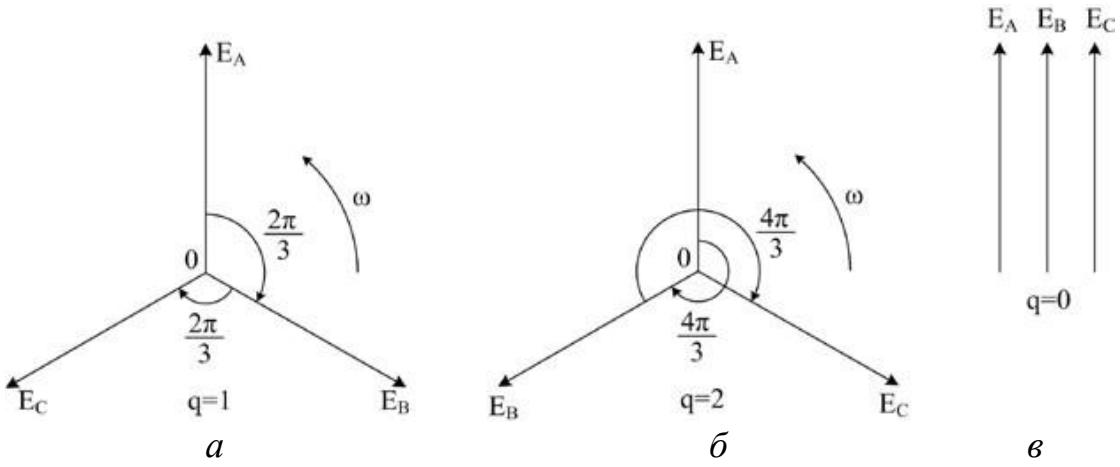
При невиконанні хоча би однієї з цих умов система називається *несиметричною.*

Кут зсуву фаз між величинами, які входять в симетричну систему ЕРС (напруг або струмів), взагалі дорівнює $q(2\pi/3)$.

При q = 1 отримуємо симетричну трифазну систему ЕРС (напруг або струмів), які зсунуті одне відносно одного за фазою на кут $2\pi/3 = 120^{\circ}$. В цьому випадку фази розташовані у часі у порядку *A-B-C*, який має назву *прямий порядок послідовності фаз*, а трифазна система має назву – *симетрична система прямої послідовності* (рис.3.1, *а*).

При q = 2 утворюється симетрична система величин з кутом зсуву фаз між ними $4\pi/3 = 240^{\circ}$, фази йдуть у порядку *A-C-B*, який має назву *зворотній порядок послідовності фаз*, а система – *симетрична система зворотної послідовності* (рис.3.1, *б*).

Якщо q = 0, то отримаємо *симетричну систему нульової послідовності*, в якій напруги всіх фаз співпадають (рис.3.1, *в*).



а *б* *в*

Рисунок 3.1

Комплекси діючих значень симетричної системи ЕРС:

$$\underline{E}_A = Ee^{j0^0} = E$$

$$\underline{E}_B = Ee^{-j120^0} = Ee^{j240^0}$$

$$\underline{E}_C = Ee^{j120^0} = Ee^{-j240^0}$$

Величина

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = e^{j120^0} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

називається *оператором повороту*. Звернемо увагу, що

$$a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = e^{j240^0} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$a^3 = e^{j2\pi} = 1,$$

$$1 + a + a^2 = 0.$$

Використовуючи оператор повороту, можна записати:

$$\underline{E}_A = E,\ \underline{E}_B = Ea^2,\ \underline{E}_C = Ea.$$

Напруги на затискачах окремих фаз генератору або приймача називаються *фазними напругами*, напруги між проводами лінії – *лінійними напругами.* Струми в фазах генератору або приймача називають *фазними струмами,* струми у проводах лінії – *лінійними струмами*.

3.2. Типи з'єднання трифазних кіл

За типом з'єднання трифазні кола можуть бути з'єднані «*зіркою»* або «*трикутником»*.

На рис. 3.2 зображене трифазне коло, в якому генератор та навантаження з'єднані «зіркою».

В цьому випадку

E_A, E_B, E_C – фазні ЕРС генератора;

U_{AO}, U_{BO}, U_{CO} – фазні напруги генератора;

$U_{aO'}$, $U_{bO'}$, $U_{cO'}$ – фазні напруги навантаження;

U_{AB}, U_{BC}, U_{CA} – лінійні напруги генератору (або лінійні напруги на початку лінії); U_{ab}, U_{bc}, U_{ca} – лінійні напруги навантаження (або у кінці лінії).

Струми I_A, I_B, I_C – фазні струми, вони ж є лінійними струмами трифазного кола при з'єднанні «зіркою»; I_N – струм у нейтральному проводі.

$U_{O'O}$ – напруга зсуву нейтралі, це напруга між нейтральними точками навантаження та генератора.

U_{Aa}, U_{Bb}, U_{Cc} – падіння напруг в лінійних проводах;

$Z_{Л}$ – опори лінійних проводів, які з'єднують генератор та навантаження;

Z_a, Z_b, Z_c – опори безпосередньо фаз.

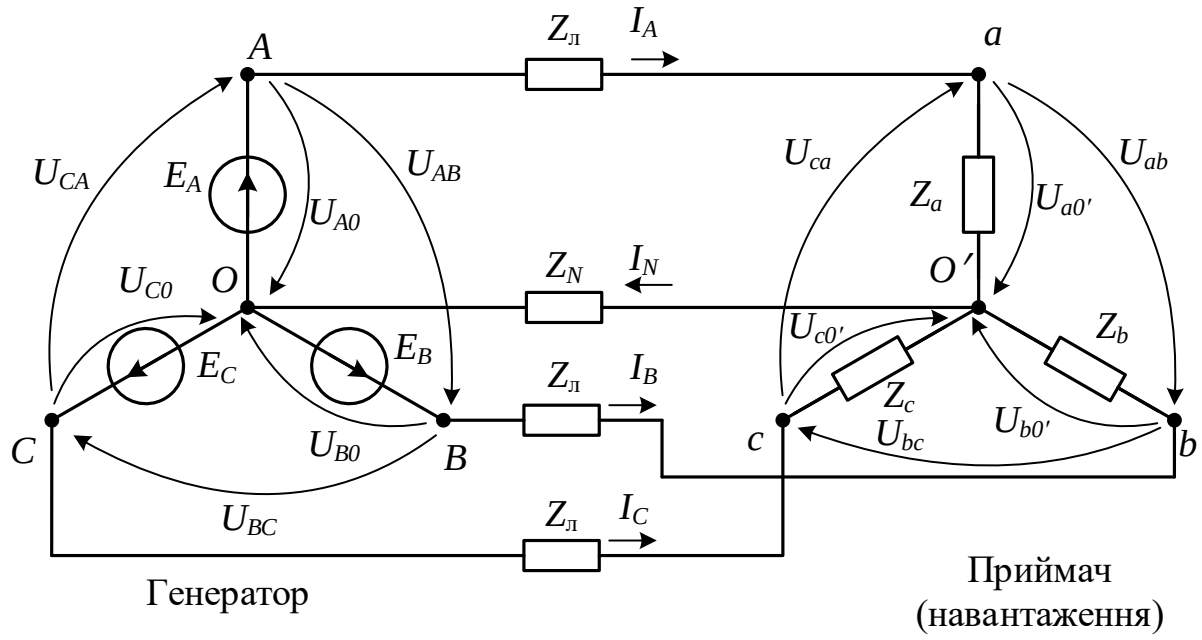


Рисунок 3.2

Навантаження називається *симетричним*, якщо $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c$. В іншому випадку навантаження називається *несиметричним.*

Напруга зміщення нейтралі визначається за формулою:

$$\underline{U}_{O'O} = \frac{\underline{U}_{AO}\underline{Y}_A + \underline{U}_{BO}\underline{Y}_B + \underline{U}_{CO}\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N},$$

де $\underline{Y}_A, \underline{Y}_B, \underline{Y}_C$ – провідності фаз;

$\underline{Y}_N$ – провідність нейтрального проводу.

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_Л + \underline{Z}_a},\ \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_Л + \underline{Z}_b},\ \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_Л + \underline{Z}_c}, \underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}\ .$$

3.3. Векторні діаграми трифазних кіл

В загальному вигляді векторно-топографічна діаграма для симетричного трифазного кола, в якому генератор та навантаження з'єднані *зіркою*, зображена на рис.3.3, векторно-топографічна для несиметричного трифазного кола, в якому генератор та навантаження з'єднані *зіркою* та наявний нейтральний провід з $\underline{Y}_N = 0$, зображена на рис.3.4.

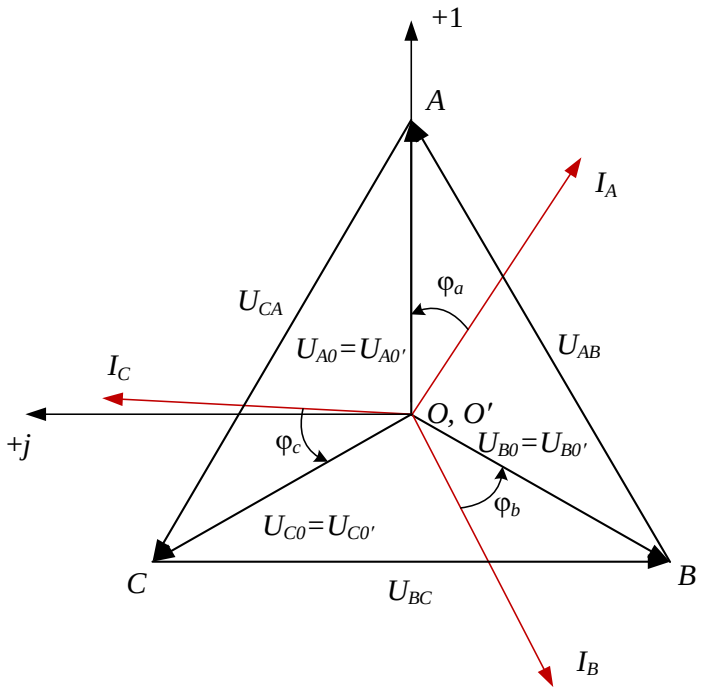


Рисунок 3.3

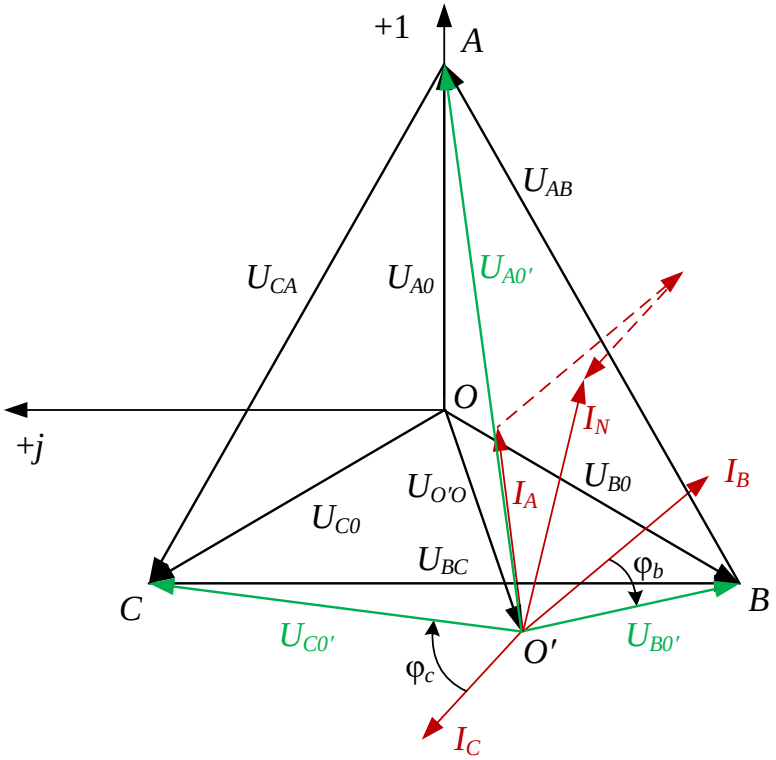


Рисунок 3.4

Трифазне коло, в якому навантаження з’єднано «*трикутником*» без опорів в лініях, зображене на рис. 3.5 та з опорами в лініях рис. 3.6. Таке

навантаження може живитись від генератора, який може бути з'єднаний як «*зіркою*», так і «*трикутником*». На рисунках 3.5 та 3.6 представлені трифазні кола, в яких генератор з'єднаний «*зіркою*».

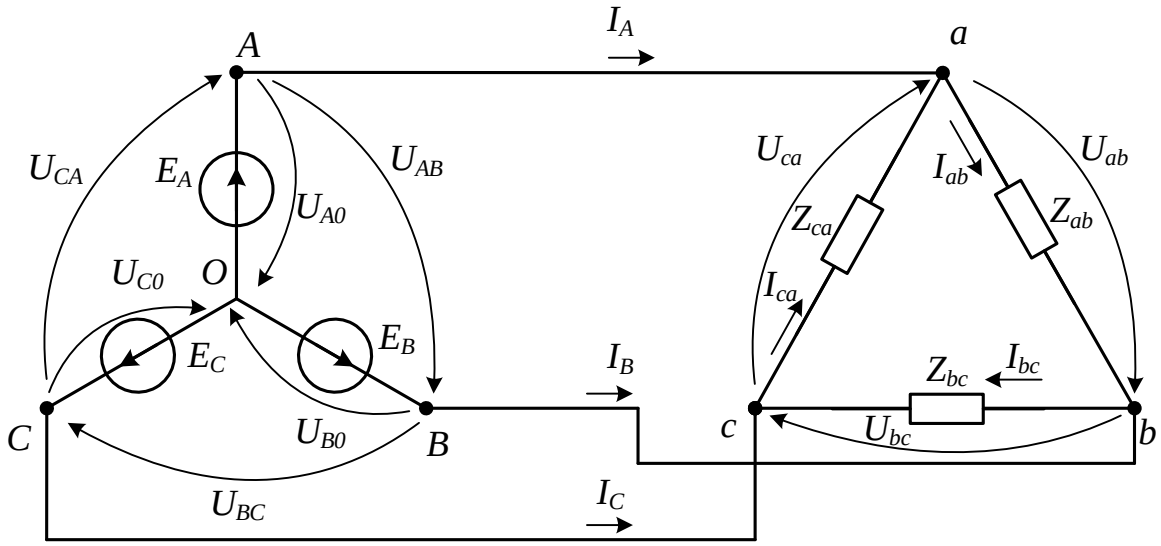


Рисунок 3.5

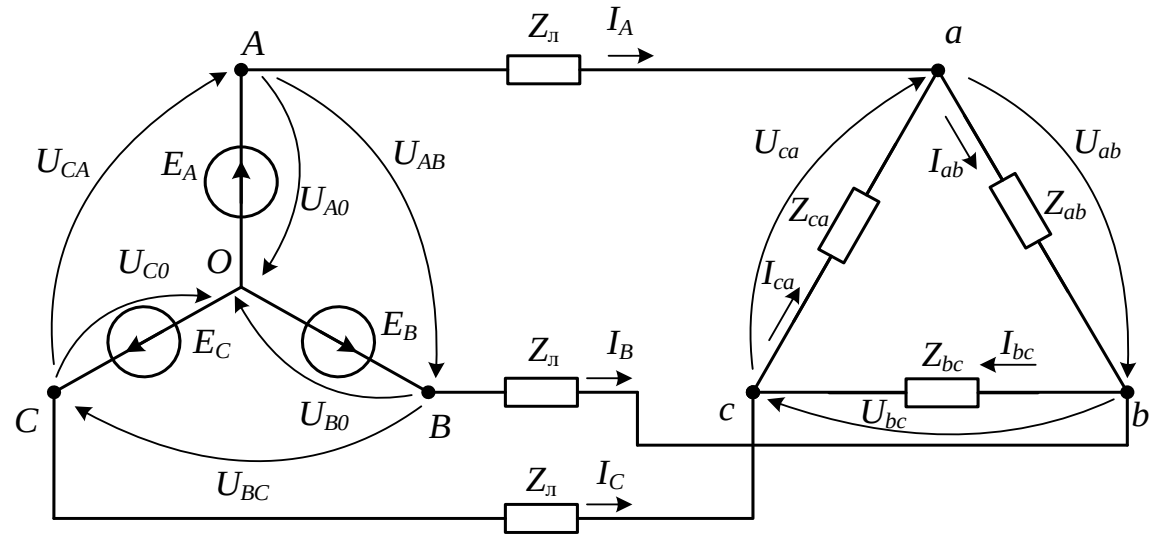


Рисунок 3.6

В цих колах Z_{ab}, Z_{bc}, Z_{ca} – фазні опори; U_{ab}, U_{bc}, U_{ca} – фазні напруги навантаження, вони ж є лінійними напругами в кінці ліній. Для трифазного кола без опорів в лініях вони ж є відповідними лінійними напругами U_{AB}, U_{BC}, U_{CA} на початку ліній; I_A, I_B, I_C – лінійні струми; I_{ab}, I_{bc}, I_{ca} – фазні струми навантаження.

Навантаження трифазного кола, яке з'єднане трикутником, називається *симетричним*, якщо $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca}$. В іншому випадку навантаження називається *несиметричним.*

В загальному вигляді векторно-топографічна діаграма для симетричного трифазного кола, в якому генератор з'єднаний «*зіркою*» та навантаження з'єднане «*трикутником*», та коло немає опорів в лініях, зображена на рис.3.7.

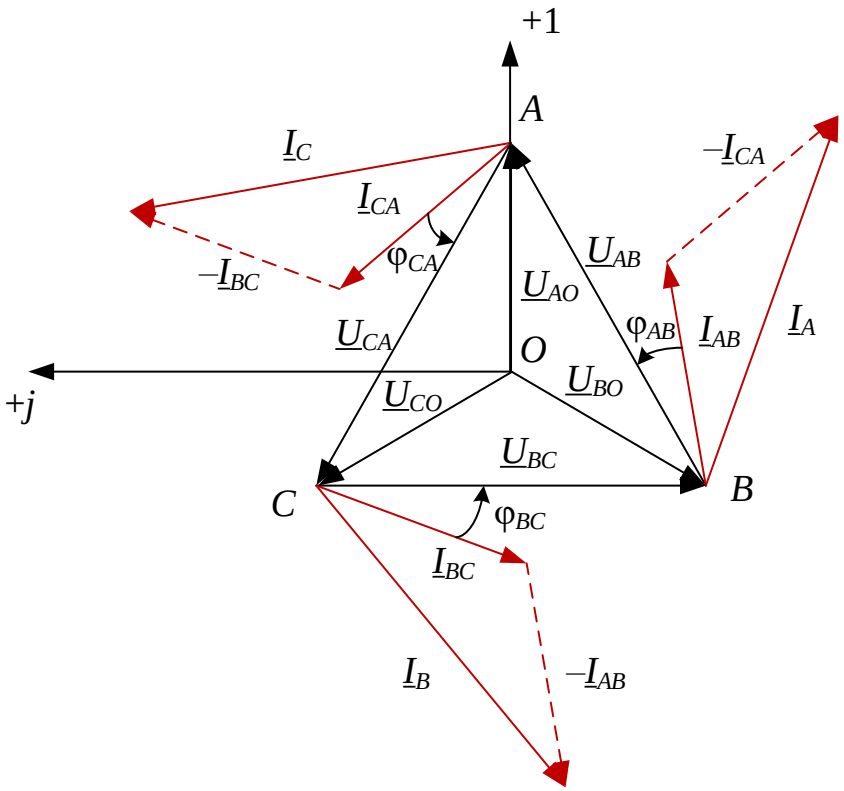


Рисунок 3.7

Якщо трифазне коло, в якому навантаження з'єднане «*трикутником*», має опори в лініях, тоді при розрахунку таке коло перетворюється з «трикутника» у «зірку», та розрахунок виконується вже для перетвореного кола.

3.4. Визначення потужності в трифазних колах

В трифазних колах, як і в однофазних, користуються поняттями активної, реактивної та повної потужностей.

Для симетричного трифазного кола:

$P = 3U_{\text{ф}}I_{\text{ф}}\cos\varphi = \sqrt{3}U_{\text{Л}}I_{\text{Л}}\cos\varphi$ - активна потужність;

$Q = 3U_{\text{ф}}I_{\text{ф}}\sin\varphi = \sqrt{3}U_{\text{Л}}I_{\text{Л}}\sin\varphi$ - реактивна потужність;

$S = 3U_{\text{ф}}I_{\text{ф}} = \sqrt{3}U_{\text{Л}}I_{\text{Л}}$ - повна потужність.

В формулах для потужностей $U_{\text{ф}}, I_{\text{ф}}$ – фазні величини; $U_{\text{Л}}, I_{\text{Л}}$ – лінійні величини; φ – кут зсуву фаз між фазною напругою та струмом.

Потужність будь-якого трифазного кола може бути виміряна трьома ватметрами, які включені на фазні напругу та струм кожної з трьох фаз. Розрахункова формула активної потужності трифазного кола з навантаженням, яке з'єднане «*зіркою»* з нейтральним проводом:

$$P = Re\left[\underline{U}_{AO}\overset{*}{\underline{I}}_{A}\right] + Re\left[\underline{U}_{BO}\overset{*}{\underline{I}}_{B}\right] + Re\left[\underline{U}_{CO}\overset{*}{\underline{I}}_{C}\right] = U_{AO}I_{A}cos\varphi_{A} + U_{BO}I_{B}cos\varphi_{B} + U_{CO}I_{C}cos\varphi_{C}$$

Якщо відсутній нейтральний провід, потужність трифазного кола може бути виміряна двома ватметрами (рис.3.8).

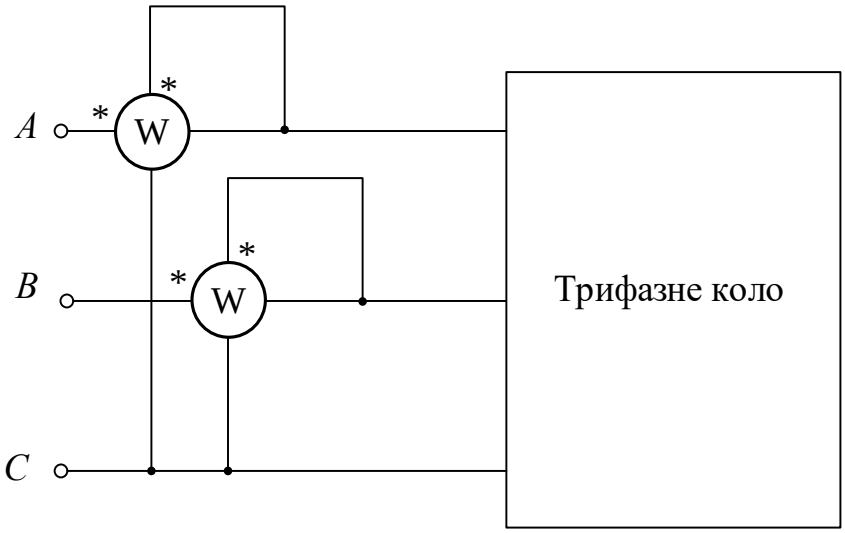


Рисунок 3.8

Активна потужність такого кола розраховується за формулою:

$P = P_1 + P_2 = \underline{U}_{AC}\underline{I}_{A}\cos(\underline{U}_{AC}\hat{}\underline{I}_{A}) + \underline{U}_{BC}\underline{I}_{B}\cos(\underline{U}_{BC}\hat{}\underline{I}_{B})$.

При симетричному навантаженні:

$$P_1 = U_{\text{Л}}I_{\text{Л}}\cos(\varphi + 30°),\ P_2 = U_{\text{Л}}I_{\text{Л}}\cos(\varphi - 30°),$$

де φ – кут між фазною напругою та струмом.

Задача 1

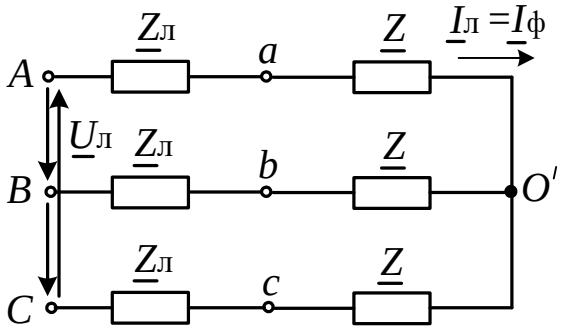


Рисунок 3.9

Дано:

$U_л$ = 5700 В, $\underline{Z}_л = 5 + j10$ Ом; $\underline{Z} = 35 + j20$ Ом.

Визначити: фазні напруги на навантаженні $U_{aO'}$, $U_{bO'}$,$U_{cO'}$, потужність навантаження $P_н$. Побудувати векторну діаграму.

Розв'язання

Генератор з'єднаний за схемою «зірка» та є симетричним. Тому, фазні напруги генератора однакові за модулем та пов'язані з лінійними напругами наступною формулою, за якою знаходимо їхні значення:

$$U_ф = \frac{U_л}{\sqrt{3}} = U_{AO} = U_{BO} = U_{CO} = \frac{5700}{\sqrt{3}} \text{ В}.$$

Навантаження з'єднане також «зіркою». Крім того, комплекси повних опорів в кожній лінії та в кожній з фаз навантаження однакові, що є ознакою симетричного навантаження. Опори лінії та фазні опори навантаження з'єднані послідовно, отже, результуючий опір в кожній фазі визначається за формулою:

$$\underline{Z}_ф = \underline{Z}_л + \underline{Z} = 40 + j30 = 50e^{j36{,}8^\circ} \text{ Ом}.$$

$$\varphi_ф = \text{arctg}\,\frac{30}{40} = 36{,}8°.$$

Оскільки маємо генератор та навантаження, які з'єднані симетричними «зірками», то таке коло не має зсуву нейтральної точки. Тобто, фазні напруги

генератора та всього навантаження (разом з лінією) у відповідних фазах співпадають.

Модулі фазних (і лінійних) струмів для фаз однакові. Обчислимо модуль фазного (лінійного) струму за законом Ома:

$$I_{\text{л}} = I_{\text{ф}} = \frac{U_{\text{ф}}}{Z_{\text{ф}}} = \frac{5700}{50\sqrt{3}} = 66 \text{ А}.$$

Комплексні повні опори кожної фази навантаження:

$$\underline{Z} = 35 + j20 = 40{,}4\, e^{j29{,}6^\circ} \text{ Ом}.$$

$$\varphi_{\text{н}} = \text{arctg}\, \frac{20}{35} = 29{,}6^\circ.$$

Модулі фазних напруг навантаження визначаємо за законом Ома:

$$U_{\text{фн}} = U_{aO} = U_{bO} = U_{cO} = I_{\text{ф}} Z = 66 \cdot 40{,}4 = 2660 \text{ В}.$$

Оскільки навантаження з'єднане симетричною «зіркою», то модулі лінійної та фазної напруг навантаження пов'язані формулою:

$$U_{\text{лн}} = U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = \sqrt{3} U_{\text{фн}} = 2660\sqrt{3} = 4600 \text{ В}.$$

Активна потужність, яку споживає навантаження, визначається:

$$P_{\text{н}} = 3 I_{\text{л}}^2 R_{\text{н}} = 3 U_{\text{фн}} I_{\text{ф}} \cos\varphi_{\text{н}} = 3 \cdot 35 \cdot 66^2 = 466000 \text{ Вт} = 466 \text{ кВт}.$$

Векторна діаграма.

В процесі побудови векторної діаграми слід враховувати кут зсуву фаз $\varphi_{\text{ф}}$ між фазними напругами на навантаженні з урахуванням опорів лінії $U_{\text{ф}}$ і струмами в фазах навантаження $I_{\text{ф}}$, а також кут $\varphi_{\text{н}}$ між фазними напругами на навантаженні $U_{\text{фн}}$ та струмом $I_{\text{ф}}$:

$$\varphi_{\text{ф}} = 36{,}8^\circ, \varphi_{\text{н}} = \text{arctg}\, \frac{20}{35} = 29{,}6^\circ.$$

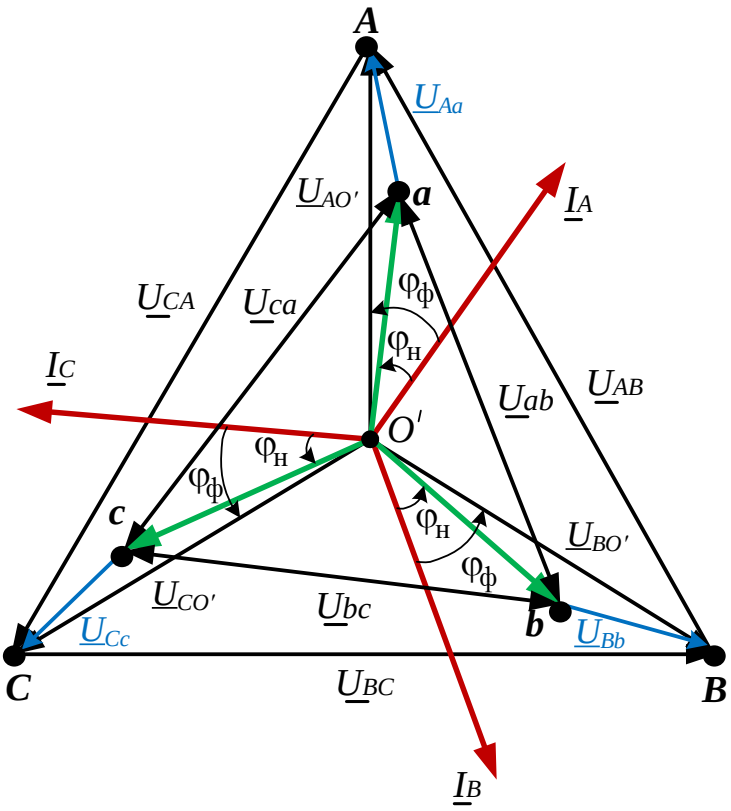


Рисунок 3.10

Задача 2

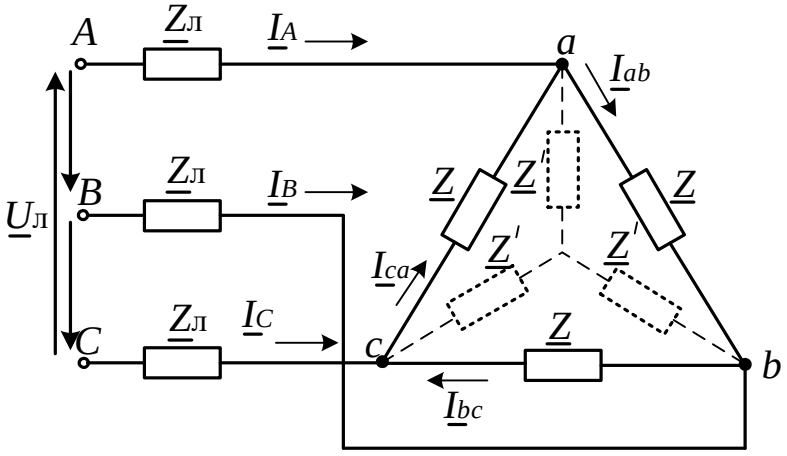


Рисунок 3.11

Дано:

$U_л$ = 380 В, $\underline{Z}_л = 1 + j$ Ом; $\underline{Z} = 12 + j6$ Ом.

Визначити: лінійні напруги на навантаженні U_{ab}, U_{bc}, U_{ca}, потужність навантаження $P_н$. Побудувати векторну діаграму.

Розв’язання

Трифазне коло має навантаження, з’єднане за схемою «трикутник», та має опори в лініях. «Трикутник» є симетричним. Для розрахунку цього кола потрібно перетворити «трикутник» на «зірку», а потім розрахунок зробити для отриманого еквівалентного з’єднання «зірка».

При перетворені «трикутника» на «зірку» опори еквівалентної «зірки» мають значення:

$$\underline{Z'} = \frac{12 + j6}{3} = 4 + j2 \text{ Ом}.$$

Маємо в навантаженні симетричну «зірку», у якої комплекси повних опорів фаз однакові та дорівнюють:

$$\underline{Z}_\text{ф} = \underline{Z}_\text{л} + \underline{Z'} = 5 + j3 = 5{,}82e^{j31^\circ} \text{ Ом}, \underline{Z}_\text{н} = \underline{Z} = 12 + j6 = 13{,}4e^{j26{,}5^\circ} \text{ Ом}.$$

$$\varphi_\text{ф} = \text{arctg}\,\frac{X_\text{ф}}{R_\text{ф}} = \text{arctg}\,\frac{3}{5} = 31^\circ,$$

$$\varphi_\text{н} = \varphi_{ab} = \varphi_{bc} = \varphi_{ca} = \text{arctg}\,\frac{X_\text{н}}{R_\text{н}} = \text{arctg}\,\frac{6}{12} = 26{,}5^\circ.$$

Фази з’єднані за схемою симетрична «зірка», тому модулі фазних та лінійних напруг знаходяться у співвідношенні:

$$U_\text{ф} = \frac{U_\text{л}}{\sqrt{3}} = U_\text{AO} = U_\text{BO} = U_\text{CO} = 220 \text{ В}.$$

Фазні (і лінійні) струми еквівалентної «зірки» є лінійними струмами кола за схемою «трикутник». Модулі лінійних струмів «трикутника» за законом Ома:

$$I_\text{л} = I_\text{A} = I_\text{B} = I_\text{C} = \frac{U_\text{ф}}{Z_\text{ф}} = \frac{220}{5{,}82} = 37{,}8 \text{ А}.$$

«Трикутник» навантаження є симетричним, тому модулі фазних струмів однакові та за співвідношеннями між модулями лінійних та фазних струмів визначаються таким чином:

$$I_\text{ф} = I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = \frac{I_\text{л}}{\sqrt{3}} = \frac{37{,}8}{\sqrt{3}} = 21{,}8 \text{ А}.$$

Модулі фазних напруг навантаження «трикутник» однакові, оскільки навантаження симетричне, та за законом Ома:

$$U_{\text{фн}} = U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = I_{\text{ф}} Z = 21{,}8 \cdot \sqrt{12^2 + 6^2} = 294 \text{ В}.$$

Активна потужність, яку споживає навантаження, визначається за формулою:

$$P_{\text{н}} = 3 U_{\text{фн}} I_{\text{ф}} \cos \varphi_{\text{н}} = 3 \cdot 294 \cdot 21{,}8^2 \cos 26{,}5° = 17200 \text{ Вт} = 17{,}2 \text{ кВт}.$$

Співвідношення між лінійними та фазними струмами «трикутника» за першим законом Кірхгофа:

$$\underline{I}_{\text{A}} = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca},$$

$$\underline{I}_{B} = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab},$$

$$\underline{I}_{C} = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}.$$

Векторна діаграма.

Кути зсуву фаз між фазними напругами на навантаженні і відповідними фазними струмами в навантаженні:

$$\varphi_{ab} = \varphi_{bc} = \varphi_{ca} = 26{,}5°.$$

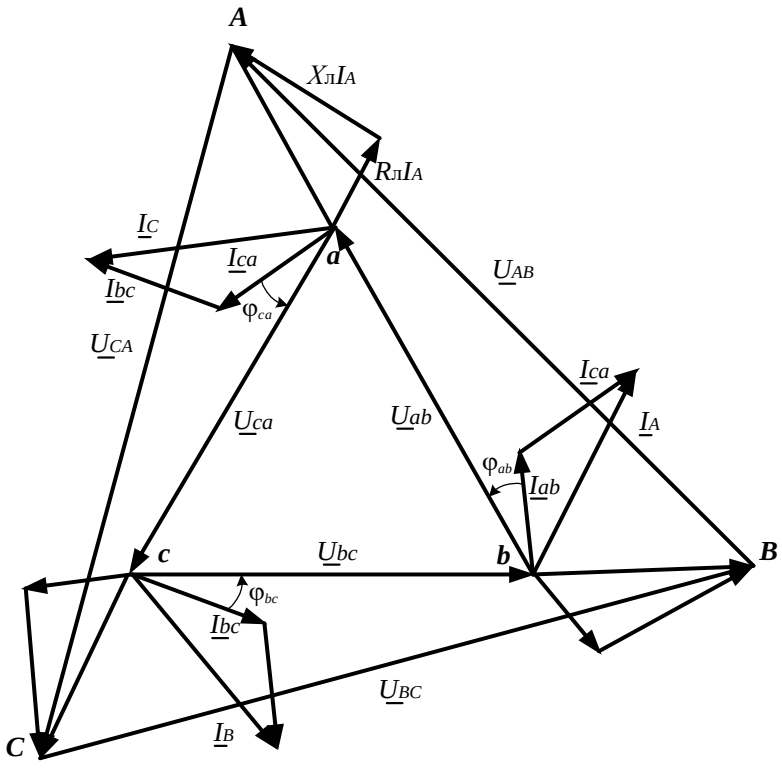


Рисунок 3.12

Задача 3

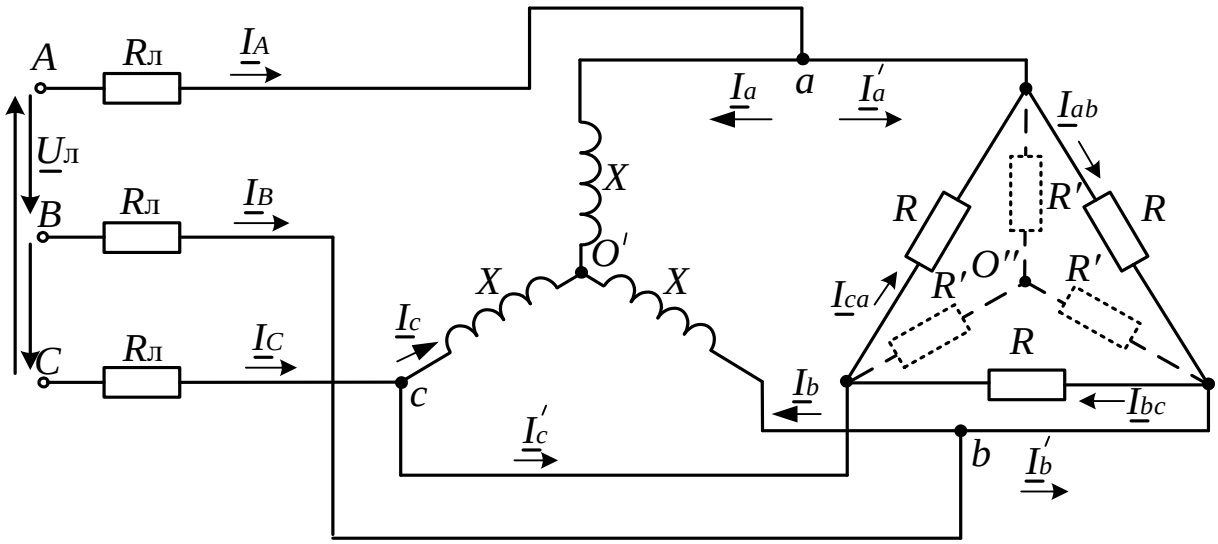


Рисунок 3.13

Дано:

$U_л$ = 120 В; R = 15 Ом; X = 5 Ом; $R_л$ = 1 Ом.

Визначити струми і напруги в колі, побудувати векторну діаграму.

Розв'язання

Виконаємо заміну «трикутника» опорів еквівалентною «зіркою», $R' = R/3 = 5$ Ом.

Нейтральна точка еквівалентної «зірки» $\boldsymbol{O'}$ та точка $\boldsymbol{O''}$ мають однаковий потенціал, тому дві «зірки» можна замінити однією еквівалентною, кожна фаза в якої складається з двох паралельних гілок. Комплексний опір фази еквівалентної «зірки» всього навантаження:

$$\underline{Z}_{\text{екв}} = \frac{\underline{Z}_x \underline{Z'}}{\underline{Z}_x + \underline{Z'}} = \frac{j5 \cdot 5}{j5 + 5} = 2{,}5 + j2{,}5 \text{ Ом}.$$

Комплексний опір фази еквівалентної зірки з урахуванням опору в лінії:

$$\underline{Z}_ф = \underline{Z}_л + \underline{Z}_{\text{екв}} = 1 + 2{,}5 + j2{,}5 = 3{,}5 + j2{,}5 = 4{,}3e^{j35{,}5^\circ} \text{ Ом}.$$

$$\varphi_ф = \text{arctg}\,\frac{X_ф}{R_ф} = \text{arctg}\,\frac{2{,}5}{3{,}5} = 35{,}5^\circ.$$

Еквівалентна «зірка» є симетричною.

Лінійні струми кола:

$$I_{\text{л}} = I_{\text{A}} = I_{\text{B}} = I_{\text{C}} = \frac{U_{\text{ф}}}{Z_{\text{ф}}} = \frac{120}{4{,}3\sqrt{3}} = 16{,}15 \text{ А}.$$

Фазні напруги еквівалентної «зірки»:

$$U_a = U_b = U_c = Z_{\text{екв}} I_{\text{л}} = 16{,}15\sqrt{2{,}5^2 + 2{,}5^2} = 57 \text{ В}.$$

Струми у фазах заданої «зірки»:

$$I_a = I_b = I_c = \frac{U_a}{X} = \frac{57}{5} = 11{,}4 \text{ А}.$$

Лінійні напруги «зірки» дорівнюють фазним напругам «трикутника»:

$$U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = U_{\text{фн}} = 57\sqrt{3} = 98{,}6 \text{ В}.$$

Фазні і лінійні струми трикутника:

$$I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_{\text{фн}} = \frac{U_{\text{фн}}}{R} = \frac{98{,}6}{15} = 6{,}58 \text{ А};$$

$$I'_a = I'_b = I'_c = I_{\text{фн}}\sqrt{3} = 6{,}58\sqrt{3} = 11{,}4 \text{ А}.$$

Векторна діаграма.

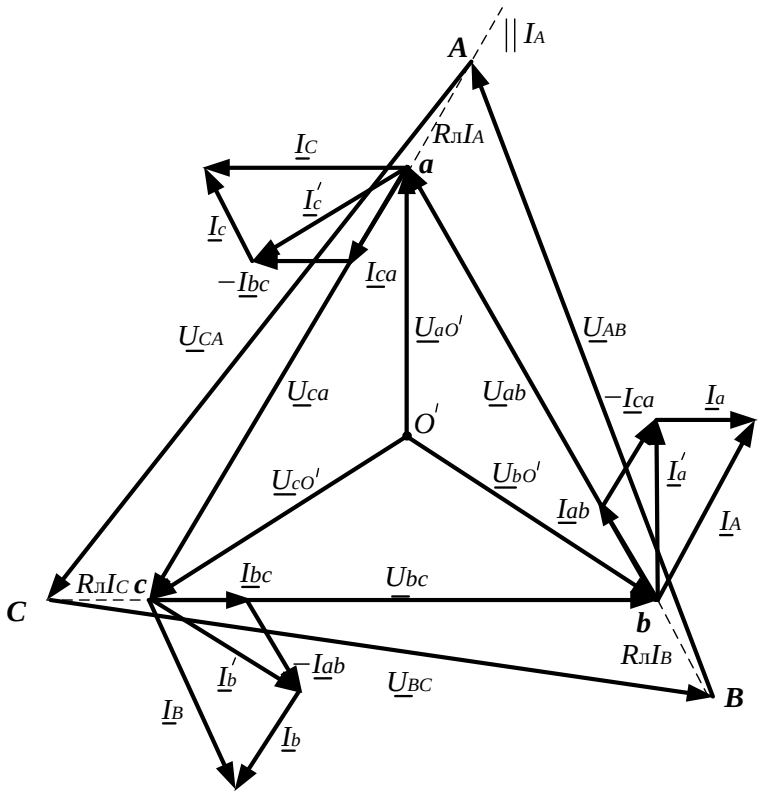


Рисунок 3.14

Задача 4

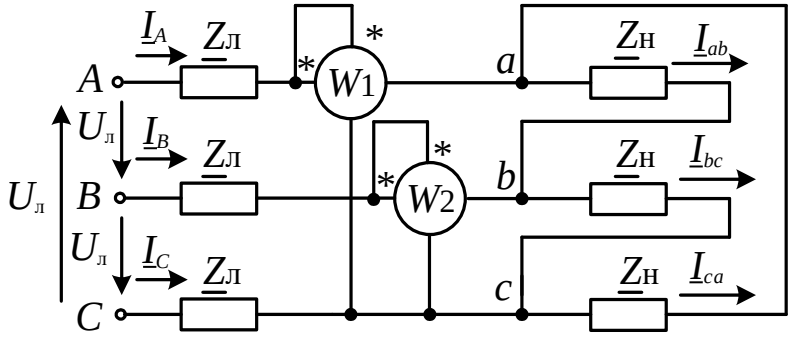


Рисунок 3.15

Дано:

$U_л$ = 220 В; $\underline{Z}_л$ = 5 + j10 Ом; $\underline{Z}_н$ = 75+ j45 Ом.

Визначити потужності ватметрів P_1, P_2, потужність навантаження $P_н$, активну потужність кола P. Побудувати векторну діаграму.

Розв'язання

$$P_1 = \mathrm{Re}\left[\underline{U}_{ac}\overset{*}{\underline{I}}_{\mathrm{A}}\right], P_2 = \mathrm{Re}\left[\underline{U}_{bc}\overset{*}{\underline{I}}_{B}\right].$$

Виконаємо заміну «трикутника» опорів еквівалентною «зіркою».

Після перетворення комплексні опори фаз еквівалентної «зірки» дорівнюють:

$$\underline{Z_н}' = 25 + j15 \text{ Ом}.$$

Фазні опори з урахуванням опору лінії:

$$\underline{Z}_ф = \underline{Z}_л + \underline{Z_н}' = 30 + j25 = 39{,}2e^{j39{,}8^\circ} \text{ Ом}.$$

$$\varphi_ф = \mathrm{arctg}\,\frac{X_ф}{R_ф} = \mathrm{arctg}\,\frac{25}{35} = 39{,}8°.$$

Фазні напруги генератора розраховуються за формулою:

$$U_ф = \frac{U_л}{\sqrt{3}} = U_{\mathrm{AO}} = U_{\mathrm{BO}} = U_{\mathrm{CO}} = 127 \text{ В}.$$

Комплекси фазних напруг генератора:

$$\underline{U}_{\mathrm{AO}} = U_{\mathrm{AO}} = 127 \text{ В};$$

$$\underline{U}_{BO} = U_{\mathrm{AO}}a^2 = 127e^{j240^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{C0} = U_{A0}a = 127e^{j120^\circ}\ \text{В},$$

де оператор повороту a має значення:

$$a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Лінійні струми:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{A0}}{\underline{Z}_\phi} = \frac{127}{39{,}2e^{j39{,}8^\circ}} = 3{,}24\, e^{-j39{,}8^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_A a^2 = 3{,}24\, e^{j(240^\circ - 39{,}8^\circ)} = 3{,}24\, e^{j200{,}2^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_A a = 3{,}24\, e^{j(120^\circ - 39{,}8^\circ)} = 3{,}24\, e^{j80{,}2^\circ}\ \text{А}.$$

Напруги на лінійних дротах, що мають опір $\underline{Z}_л = 5 + j10 = 11{,}2e^{j63{,}5^\circ}$Ом:

$$\underline{U}_{Aa} = \underline{I}_A \underline{Z}_л = 3{,}24\, e^{-j39{,}8^\circ} 11{,}2e^{j63{,}5^\circ} = 36{,}3e^{j23{,}7^\circ} = 33{,}2 + j14{,}5\ \text{В};$$

$$\underline{U}_{Bb} = \underline{I}_B \underline{Z}_л = \underline{U}_{Aa} a^2 = 36{,}3e^{j(240^\circ + 23{,}7^\circ)} = 36{,}3e^{j263{,}7^\circ} = -4 - j36\ \text{В};$$

$$\underline{U}_{Cc} = \underline{I}_C \underline{Z}_л = \underline{U}_{Aa} a = 36{,}3e^{j(120^\circ + 23{,}7^\circ)} = 36{,}3e^{j263{,}7^\circ} = -29{,}2 + j21{,}5\ \text{В}.$$

Фазні напруги на навантаженні еквівалентної «зірки»:

$$\underline{U}_{a0'} = \underline{U}_{A0} - \underline{U}_{Aa} = 127 - 33{,}2 - j14{,}5 = 93{,}8 - j14{,}5 = 95{,}3e^{-j8{,}75^\circ}\ \text{В};$$

$$\underline{U}_{b0'} = \underline{U}_{B0} - \underline{U}_{Bb} = 127(-0{,}5 - j0{,}867) - (-4 - j36) = -59{,}5 - j74 =$$

$$= 95{,}3e^{j231{,}25^\circ}\ \text{В};$$

$$\underline{U}_{c0'} = \underline{U}_{C0} - \underline{U}_{Cc} = 127(-0{,}5 + j0{,}867) - (-29{,}2 + j21{,}5\,) = -34{,}3 + j88{,}5 =$$

$$= 95{,}3e^{j111{,}25^\circ}\ \text{В}.$$

Напруги на ватметрах:

$$\underline{U}_{ac} = \underline{U}_{a0'} - \underline{U}_{c0'} = 93{,}8 - j14{,}5 - (-34{,}3 + j88{,}5) = 128{,}1 - j103 =$$

$$= 165e^{-j38{,}8^\circ}\ \text{В};$$

$$\underline{U}_{bc} = \underline{U}_{b0'} - \underline{U}_{c0'} = -59{,}5 - j74 - (-34{,}3 + j88{,}5) = -25{,}2 - j162{,}5 =$$

$$= 165e^{j261{,}2^\circ}\ \text{В}.$$

Показання ватметрів:

$$P_1 = \text{Re}\left[165e^{-j38{,}8^\circ} 3{,}24\, e^{j39{,}8^\circ}\right] = 165 \cdot 3{,}24 \cdot \cos 1^\circ = 534\ \text{Вт};$$

$$P_2 = \text{Re}\left[165e^{j261{,}2^\circ} 3{,}24\, e^{-j200{,}2^\circ}\right] = 165 \cdot 3{,}24 \cdot \cos 61^\circ = 260\ \text{Вт}.$$

Потужність навантаження:

$P_н = 534 + 260 = P_1 + P_2 = 764$ Вт.

Потужність всього кола:

$P = P_н + P_л = P_н + 3R_л I_л^2 = 794 + 3 \cdot 5 \cdot 3{,}24^2 = 953$ Вт.

Під час побудови векторної діаграми необхідно користуватись кутами зсуву фаз між фазними напругами та струмами $\varphi_н$ та між напругами в лінії та лінійними струмами $\varphi_л$:

$$\varphi_н = \operatorname{arctg}\frac{X_н}{R_н} = \operatorname{arctg}\frac{45}{75} = 31°, \qquad \varphi_л = \operatorname{arctg}\frac{X_л}{R_л} = \operatorname{arctg}\frac{10}{5} = 63{,}4°.$$

Для побудови векторної діаграми використовуються вирази для лінійних струмів, складені за першим законом Кірхгофа:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca},$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}.$$

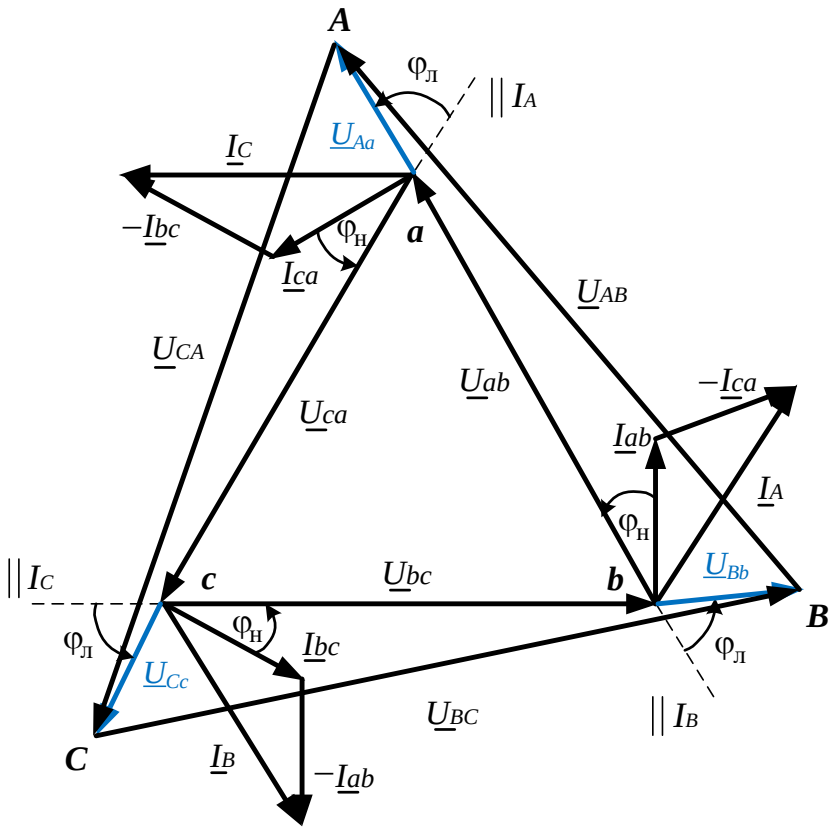


Рисунок 3.16

Задача 5

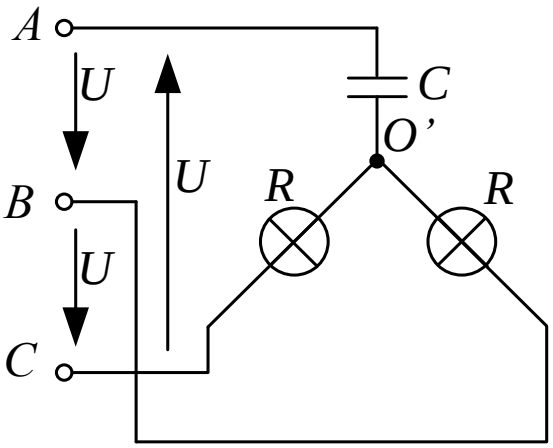


Рисунок 3.17

Дано: $X_C = R$; $U = 220$ В. Визначити, в якій фазі лампочка світитиме яскравіше. Побудувати векторну діаграму.

Розв’язання

Фазні напруги генератора:

$$\underline{U}_{A0} = \frac{U}{\sqrt{3}}; \underline{U}_{B0} = \frac{U}{\sqrt{3}}a^2; \underline{U}_{C0} = \frac{U}{\sqrt{3}}a.$$

Провідності фаз:

$$\underline{Y}_A = j\frac{1}{X_C} = j\omega C = j\frac{1}{R};\ \underline{Y}_B = \underline{Y}_C = \frac{1}{R};\ \underline{Y}_N = 0.$$

Напруга зсуву нейтралі:

$$\underline{U}_{0'0} = \frac{\underline{U}_{A0}\underline{Y}_A + \underline{U}_{B0}\underline{Y}_B + \underline{U}_{C0}\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} =$$

$$= \frac{\frac{U}{\sqrt{3}}\frac{1}{R}(j + a^2 + a)}{\frac{1}{R}(j + 1 + 1)} = \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot \frac{j-1}{j+2} = \frac{U}{\sqrt{3}}\frac{(j-1)(2-j)}{(2+j)(2-j)} =$$

$$= \frac{U}{\sqrt{3}}\frac{j2 - 2 + 1 + j}{5} = \frac{U}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{5} + j\frac{3}{5}\right) = -25{,}4 + j76{,}2 = 80{,}3e^{j108{,}5^\circ}\ \text{В}.$$

Напруги у фазах:

$$\underline{U}_{A0'} = \underline{U}_{A0} - \underline{U}_{0'0} = 127 - (-25{,}4 + j76{,}2) = 101{,}6 - j76{,}2 = 127e^{j37^\circ}\text{В};$$

$$\underline{U}_{B0'} = \underline{U}_{B0} - \underline{U}_{0'0} = 127\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (-25{,}4 + j76{,}2) = -38{,}1 - j186{,}2 =$$

$$= 190e^{j258{,}5^\circ}\text{В};$$

$$\underline{U}_{C0'} = \underline{U}_{C0} - \underline{U}_{0'0} = 127\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (-25{,}4 + j76{,}2) = -38{,}1 + j33{,}8 =$$

$$= 51e^{j138{,}5^\circ}\text{В}.$$

Отже, лампа у фазі *B*, тобто у тій фазі, що відстає по фазі від тої, в яку увімкнений конденсатор, буде світити яскравіше, оскільки $U_{BO'} > U_{CO'}$.

Векторна діаграма.

Першими будують вектори симетричної системи напруг генератора, позначають точку нейтралі генератора (т. *O*). Наступним кроком будують вектор напруги зсуву нейтралі, починаючи з т. *O*, таким чином визначається розташування точки нейтралі навантаження (т. *O'*). З'єднання точок *A*, *B*, *C* з точкою *O'* дозволяє отримати систему напруг навантаження.

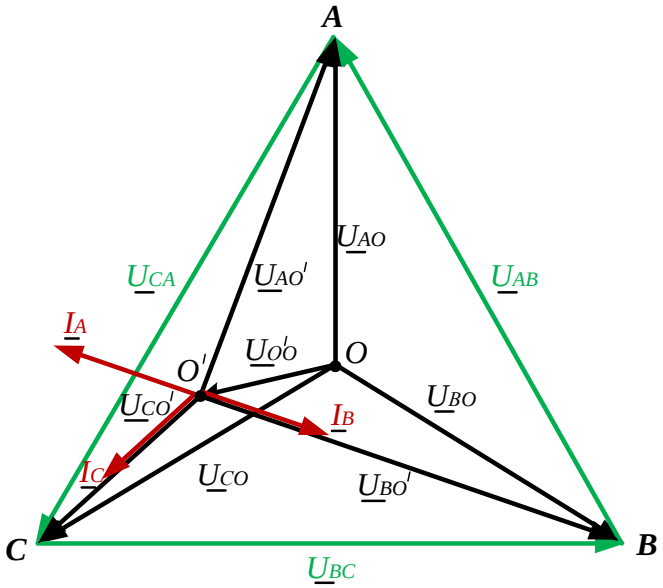


Рисунок 3.18

Задача 6

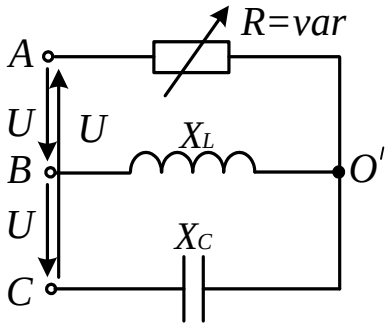


Рисунок 3.19

Дано:

$X_C = X_L$, R = var.

За заданої лінійної напруги U визначити геометричне місце кінців зсуву нейтралі.

Розв'язання

Фазні напруги генератора:

$$\underline{U}_{A0} = \frac{U}{\sqrt{3}}; \underline{U}_{B0} = \frac{U}{\sqrt{3}}a^2; \underline{U}_{C0} = \frac{U}{\sqrt{3}}a.$$

Провідності фаз:

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{R} = G;\ \underline{Y}_B = \frac{1}{jX_L} = -jB; \underline{Y}_C = \frac{1}{-jX_C} = jB.$$

Напруга зсуву нейтралі:

$$\underline{U}_{0'0} = \frac{\underline{U}_{A0}\underline{Y}_A + \underline{U}_{B0}\underline{Y}_B + \underline{U}_{C0}\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} = \frac{\underline{U}_{A0}(G - ja^2B + jaB)}{G - jB + jB} =$$

$$= \underline{U}_{A0}\left(1 + j\frac{B}{G}(a - a^2)\right) = \underline{U}_{A0}\left(1 - \frac{B}{G}\sqrt{3}\right).$$

Для $G = 0$ (х.х. фази A) $U_{0'0} \to \infty$. Обрив у фазі A неприпустимий, оскільки в цьому випадку виникає резонанс напруг у фазах B і C.

Для $G \to \infty$ (к.з. фази A) $U_{0'0} = U_{A0}$ (рис. 3.20).

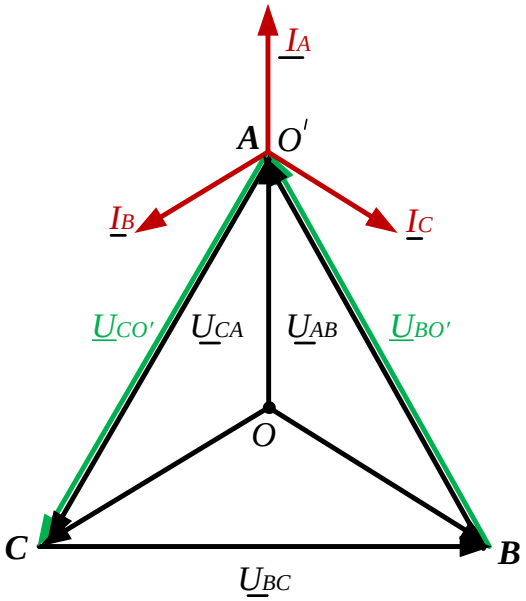


Рисунок 3.20

Для $G = B\sqrt{3}$ $U_{0'0} = 0$.

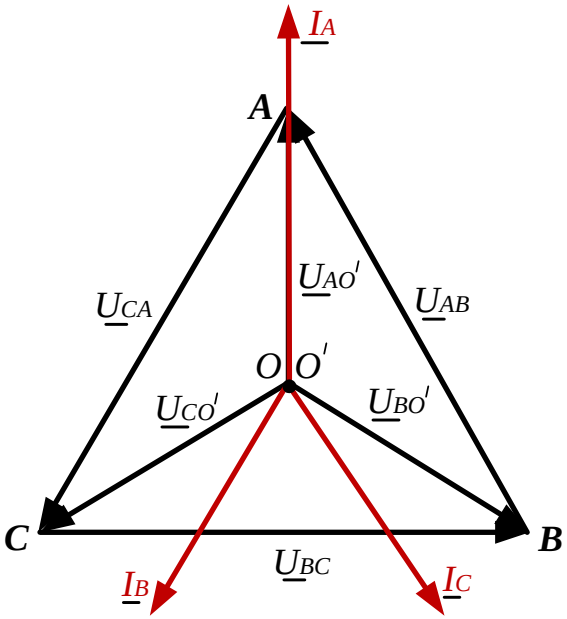


Рисунок 3.21

Для $G = B$ $U_{0'0} = \underline{U}_{A0}\left(1 - \sqrt{3}\right)$.

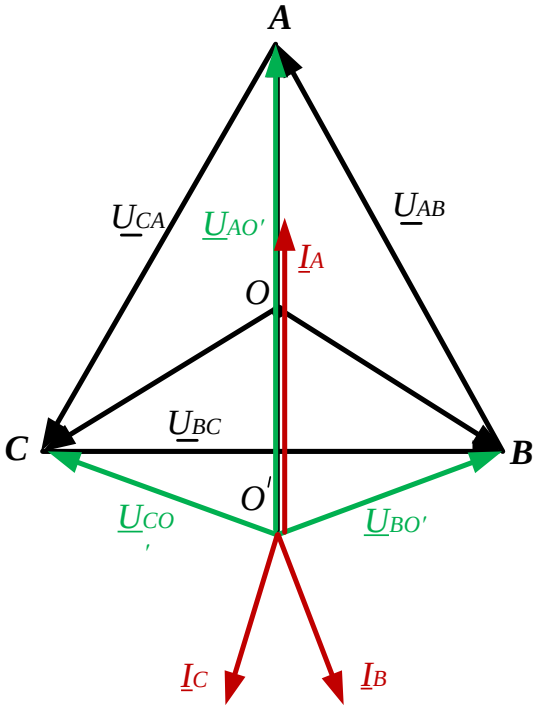


Рисунок 3.22

Задача 7

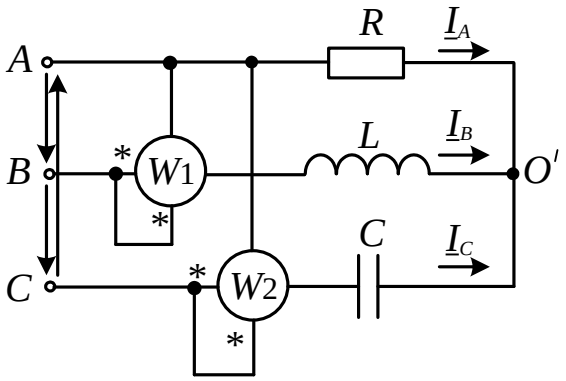


Рисунок 3.23

Дано: $X_C = X_L = R$.

Визначити показання ватметрів, які увімкнені за схемою двох ватметрів у фази В і С. Визначити потужність всього кола. Зсув нейтралі можна використати з попередньої задачі за умови $B = G$. $U_{0'0} = \underline{U}_{A0}\left(1 - \sqrt{3}\right)$.

Розв'язання

Показання ватметрів:

$$P_1 = \mathrm{Re}\left[\underline{U}_{BA}\overset{*}{\underline{I}}_B\right];$$

$$P_2 = \mathrm{Re}\left[\underline{U}_{CA}\overset{*}{\underline{I}}_C\right].$$

Фазні напруги на навантаженні з урахуванням величини напруги зсуву нейтралі:

$$\underline{U}_{A0'} = \underline{U}_{A0} - \underline{U}_{0'0} = \frac{U}{\sqrt{3}}\left(1 - 1 + \sqrt{3}\right) = U;$$

$$\underline{U}_{B0'} = \underline{U}_{B0} - \underline{U}_{0'0} = \frac{U}{\sqrt{3}}\left(a^2 - 1 + \sqrt{3}\right) = \frac{U}{\sqrt{3}}(0{,}23 - j0{,}867) = 0{,}517Ue^{-j75^\circ};$$

$$\underline{U}_{C0'} = \underline{U}_{C0} - \underline{U}_{0'0} = \frac{U}{\sqrt{3}}\left(a - 1 + \sqrt{3}\right) = \frac{U}{\sqrt{3}}(0{,}23 + j0{,}867) = 0{,}517Ue^{j75^\circ}.$$

Струми у фазах:

$$\underline{I}_A = \underline{U}_{A0'}\underline{Y}_A = \frac{U}{R};$$

$$\underline{I}_B = \underline{U}_{B0'}\underline{Y}_B = 0{,}517\frac{U}{R}e^{-j75^\circ}e^{-j90^\circ} = 0{,}517\frac{U}{R}e^{-j165^\circ};$$

$$\underline{I}_C = \underline{U}_{C0'}\underline{Y}_C = 0{,}517\frac{U}{R}e^{j75^\circ}e^{j90^\circ} = 0{,}517\frac{U}{R}e^{j165^\circ}.$$

Комплекси лінійних напруг:

$$\underline{U}_{BA} = Ue^{-j150^\circ}; \underline{U}_{CA} = Ue^{j150^\circ}.$$

Показання ватметрів:

$$P_1 = \left[\underline{U}_{BA}\overset{*}{\underline{I}}_B\right]_{re} = \left[Ue^{-j150^\circ}0{,}517\frac{U}{R}e^{j165^\circ}\right]_{re} = 0{,}517\frac{U^2}{R}\cos 15^\circ = 0{,}5\frac{U^2}{R};$$

$$P_2 = \left[\underline{U}_{CA}\overset{*}{\underline{I}}_C\right]_{re} = \left[Ue^{j150^\circ}0{,}517\frac{U}{R}e^{-j165^\circ}\right]_{re} = 0{,}5\frac{U^2}{R};$$

$$P = P_1 + P_2 = \frac{U^2}{R}.$$

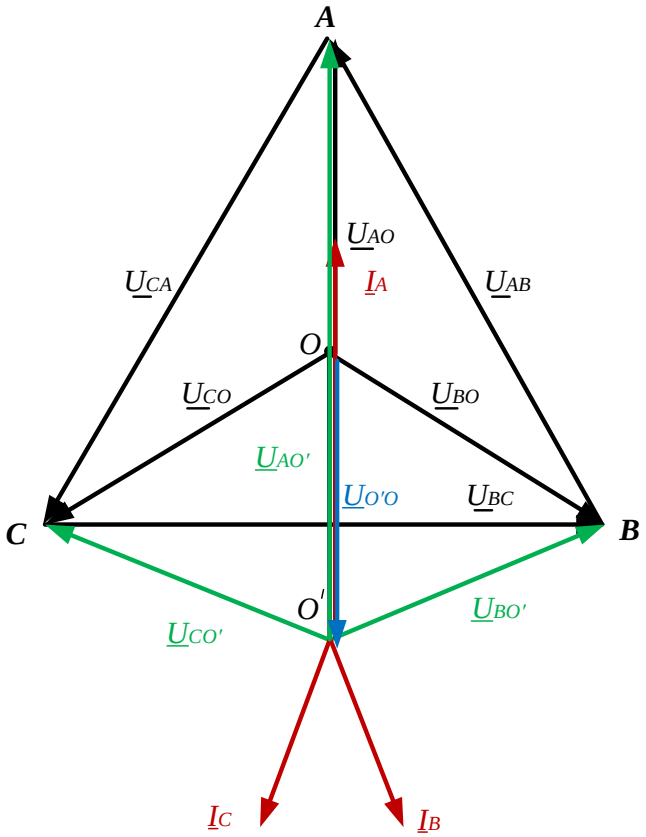


Рисунок 3.24

Задачі для самостійної роботи

1. В колі на рис. 3.25 до симетричного трифазного генератора з лінійною напругою $U_л = 380$ В приєднано несиметричне навантаження з опорами фаз $\underline{Z}_a = 12 - j16$ Ом; $\underline{Z}_b = 12 + j16$ Ом; $\underline{Z}_c = 16 - j12$ Ом.

Визначити струми фаз $\underline{I}_a$, $\underline{I}_b$, $\underline{I}_c$.

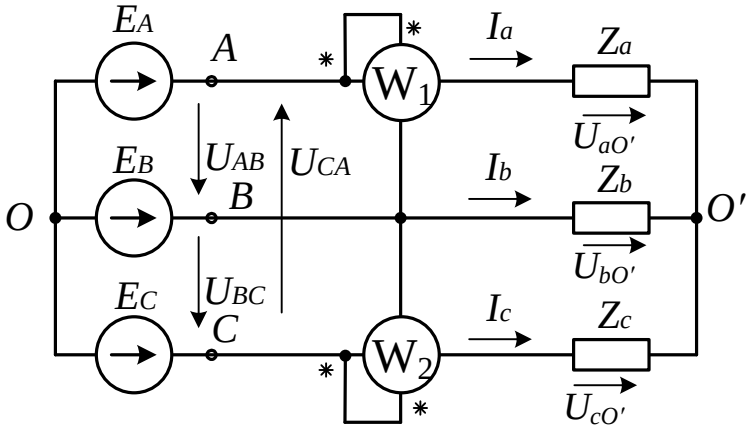


Рисунок 3.25

2. Визначити показання вольтметрів V_0 та V_a в колі на рис. 3.26, якщо фазна ЕРС симетричного трифазного генератора $E_ф = 220$ В, а опори фаз навантаження $\underline{Z}_a = \underline{Z}_c = 10$ Ом; $\underline{Z}_b = 5$ Ом.

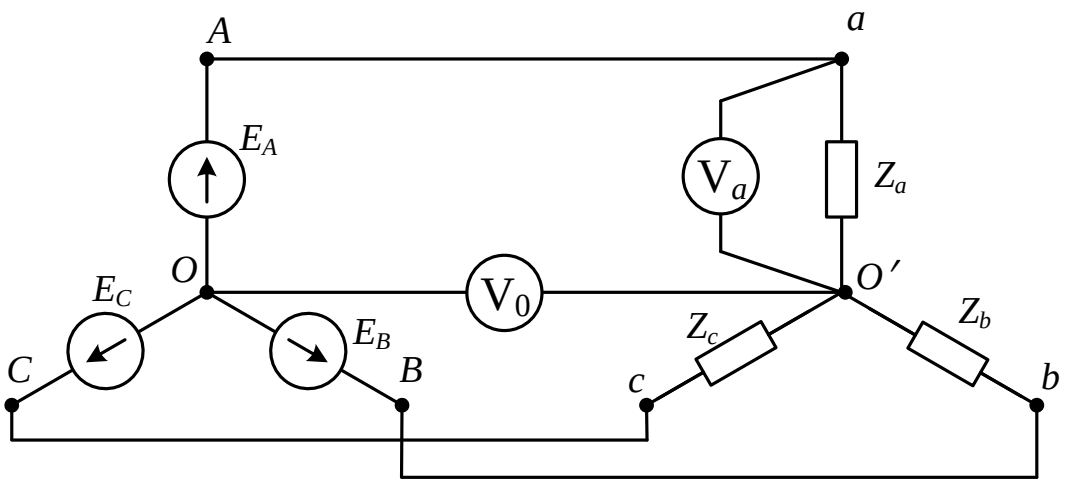


Рисунок 3.26

3. Визначити показання амперметра, увімкненого в нейтральний дріт, якщо фазна ЕРС симетричного трифазного генератора $E_ф$ = 220 В, а опори фаз дорівнюють: $\underline{Z}_a = j11$ Ом; $\underline{Z}_c = -j11$ Ом; $\underline{Z}_b = 11$ Ом.

4. В колі на рис. 3.27 до трифазного джерела енергії з лінійною напругою $U_л$ = 220 В приєднане несиметричне навантаження, з'єднане «трикутником». Визначити показання ватметра, якщо $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = 10 + j10$ Ом; $\underline{Z}_{ca} = 10 - j10$ Ом.

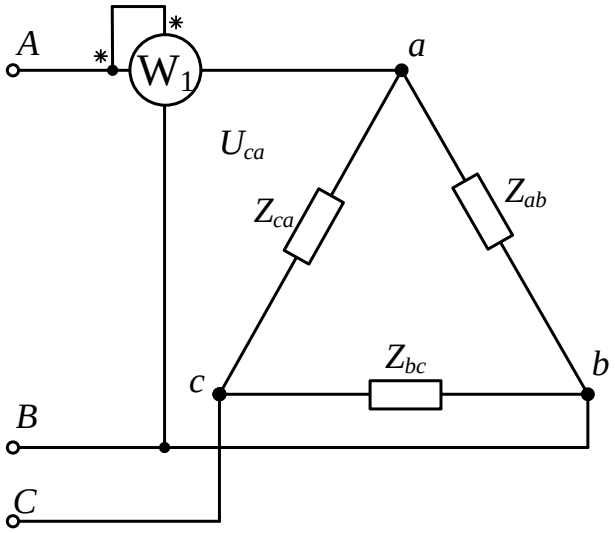


Рисунок 3.27

5. Лінійна напруга трифазного генератора, підключеного до навантаження, яке з'єднане зіркою з нейтральним дротом, дорівнює 220 В. У фазі *A* ввімкнені 30 однакових ламп, у фазі *B* – 20 ламп, у фазі *C* – 10 ламп (40 Вт, 127 В кожна).

Визначити:

1) струм в нейтральному дроті;

2) напругу на кожній групі ламп у випадку обриву нульового дроту.

3.5. Запитання для самоконтролю

Чому дорівнює сума миттєвих значень величин симетричної трифазної системи?

Чому дорівнює кут зсуву миттєвих значень величин симетричної трифазної системи, їх комплексів та векторів на векторній діаграмі?

Дайте визначення фазних величин трифазного кола?

Дайте визначення лінійних величин трифазного кола?

Сформулюйте та запишіть співвідношення між лінійними та фазними величинами при з’єднанні «зіркою».

Сформулюйте та запишіть співвідношення між лінійними та фазними величинами при з’єднанні «трикутником».

Як визначити активну потужність симетричного трифазного кола?

Сформулюйте особливості виміру потужності у колах трифазного струму.

Сформулюйте та запишіть вираз для визначення напруги зсуву нейтралі трифазного кола.

Дайте визначення крайніх несиметричних режимів роботи кіл трифазного струму та поясніть особливості їх розрахунку.

4. ЛІНІЙНІ КОЛА НЕСИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ

4.1. Принципи розрахунку кіл несинусоїдального струму

Несинусоїдальними періодичними ЕРС, струмами та напругами називають такі, які змінюються за періодичним законом [3, 10, 17]. На рис. 4.1 наведені приклади таких величин, які можна описати виразом:

$$f(t) = f(t + kT) = f(t + T),$$

де T – період, k= 0, 1, 2, 3, …

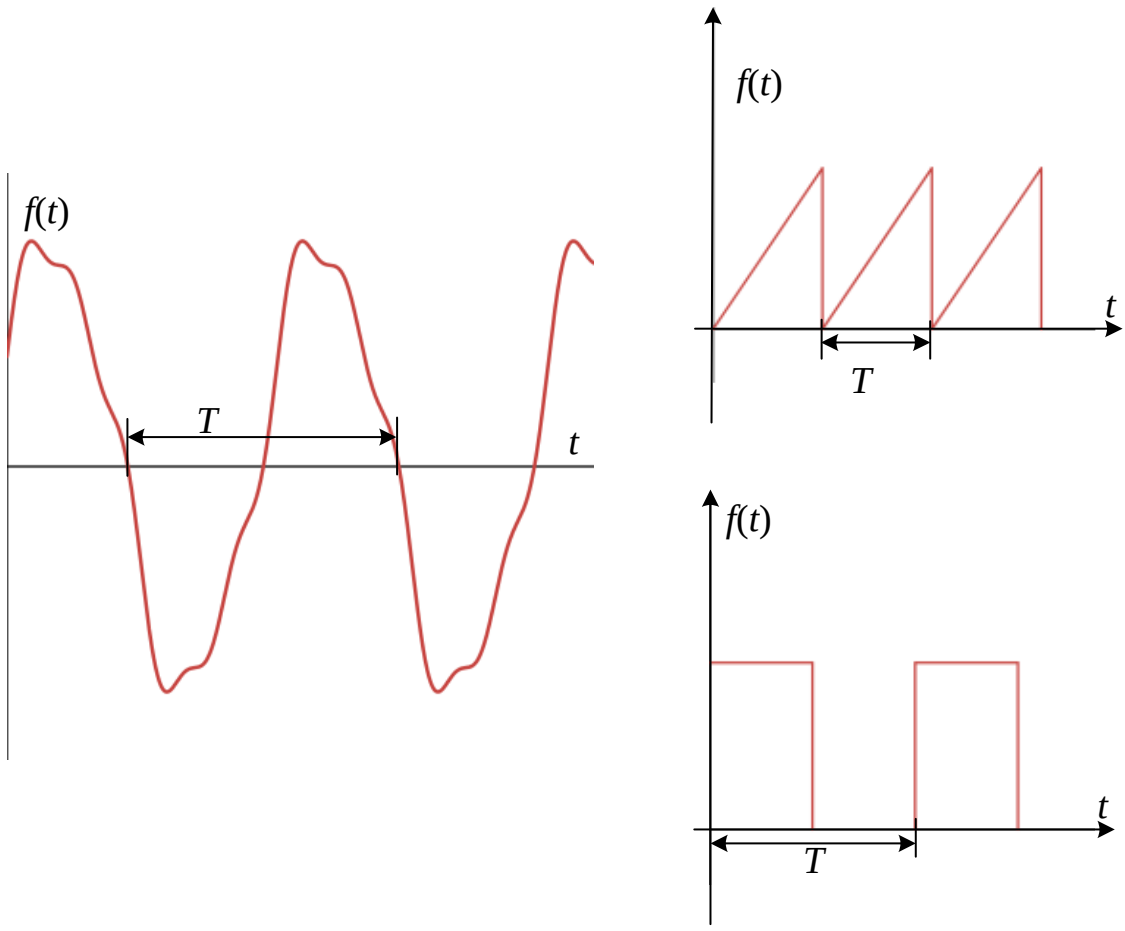


Рисунок 4.1

Для розрахунку лінійних електричних кіл за періодичного несинусоїдального впливу застосовують математичний апарат, розроблений Фур'є [14]. Несинусоїдальну функцію представляють у вигляді суми гармонійних функцій, використовуючи ряд Фур'є. Після цього виконують розрахунки кола для кожної окремої гармоніки напруги або струму, а

результуючу реакцію кола знаходять за допомогою методу накладання шляхом додавання реакцій для окремих гармонік.

Якщо періодична функція задовольняє умовам Діріхле, то її можна представити у вигляді ряду Фур'є таким чином:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[B_k \sin(k\omega t)] + \sum_{k=1}^{\infty}[C_k \cos(k\omega t)] =$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \psi_k),$$

де A_0 – постійна складова функції $f(t)$, яка дорівнює її середньому значенню за період:

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt, \qquad (4.1)$$

B_k, C_k – коефіцієнти ряду Фур'є, що відповідають амплітудам квадратурних складових, які обчислюються за виразами:

$$B_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt = A_{k\text{m}}\cos\psi_k, \qquad (4.2)$$

$$C_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\ \ dt = A_{k\text{m}}\sin\psi_k, \qquad (4.3)$$

$A_{k\text{m}}$ – амплітуда k-тої гармоніки:

$$A_{k\text{m}} = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}, \qquad (4.4)$$

ψ_k – початкова фаза k-тої гармоніки.

У розрахунках нескінченний ряд Фур'є обмежують деякою кількістю гармонік, беручі до уваги, що потужність кожної наступної гармоніки зменшується пропорційно квадрату її амплітуди. Для розрахунку лінійного кола від дії кожної гармоніки окремо використовують будь-які відомі методи з теорії кіл гармонійного струму. При цьому треба враховувати, що опори індуктивного та ємнісного елементів залежать від частоти:

$$X_{Lk} = k\omega L; \quad X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C}.$$

Після розрахунку кола для кожної гармоніки окремо миттєві значення струму або напруги додаються, а діюче значення напруги чи струму визначають як геометричну суму діючих значень окремих гармонік:

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum U_k^2}, \tag{4.5}$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum I_k^2}. \tag{4.6}$$

Активну потужність несинусоїдального струму визначають як суму потужностей окремих гармонік:

$$P = P_0 + \sum P_k, \tag{4.7}$$

де P_0 – потужність постійної складової, $P_0 = U_0 I_0$,

P_k – середня потужність k-тої гармоніки сигналу, $P_k = U_k I_k \cos\varphi_k$.

Повну потужність несинусоїдного струму визначають подібно до повної потужності синусоїдного струму:

$$S = UI. \tag{4.8}$$

Реактивна потужність визначається як сума реактивних потужностей окремих гармонік:

$$Q = \sum Q_k = \sum U_k I_k \sin\varphi_k. \tag{4.9}$$

4.2. Приклади розрахунку кіл несинусоїдального струму

Задача 1

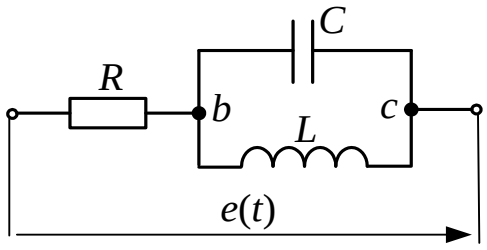


Рисунок 4.2

Визначити миттєві значення струмів і напруг в колі, якщо:

$e(t) = 100 + 80\sin(\omega t + 30°) + 60\sin(3\omega t + 20°) + 50\sin(5\omega t + 45°)$ В; $R = 3$ Ом; $\omega L = 3$ Ом; $1/\omega C = 27$ Ом.

Визначимо комплекс опору всього кола для першої, третьої та п'ятої гармонік:

$$\underline{Z}(k\omega) = R + \frac{jk\omega L\left(-j\frac{1}{k\omega C}\right)}{j\left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)}.$$

$$\underline{Z}(0) = R = 3 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}(\omega) = R + \frac{j\omega L\left(-j\frac{1}{\omega C}\right)}{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = 3 + \frac{j3(-j27)}{j(3-27)} = 3 + j3{,}38 = 4{,}5e^{j48{,}5°} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}(3\omega) = R + \frac{j3\omega L\left(-j\frac{1}{3\omega C}\right)}{j\left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C}\right)} = 3 + \frac{j9(-j9)}{j(9-9)} = \infty;$$

$$\underline{Z}(5\omega) = R + \frac{j5\omega L\left(-j\frac{1}{5\omega C}\right)}{j\left(5\omega L - \frac{1}{5\omega C}\right)} = 3 - j8{,}5 = 9e^{-j70{,}5°}.$$

Визначення складових струму у нерозгалуженій частині кола:

$$\underline{I}(0) = \frac{100}{3} = 33{,}3 \text{ А};$$

$$\underline{I}(\omega) = \frac{80e^{j30°}}{4{,}5e^{j48{,}5°}} = 17{,}8e^{-j18{,}5°} \text{ А};$$

$$\underline{I}(3\omega) = 0 \text{ А};$$

$$\underline{I}(5\omega) = \frac{50e^{j45°}}{9e^{-j70{,}5°}} = 5{,}55e^{j115{,}5°} \text{А}.$$

Миттєве значення струму:

$i(t) = 33{,}3 + 17{,}8\sin(\omega t - 18{,}5°) + 5{,}55\sin(5\omega t + 115{,}5°)$ А.

Задача 2

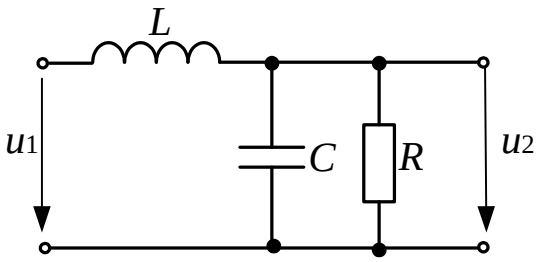


Рисунок 4.3

Для згладжування коливань напруги після випрямлювача ставлять фільтр низької частоти, на вхід якого подається напруга з ідеального 1) однопівперіодного, 2) двопівперіодного випрямлювача з амплітудою U_m = 1000 В.

Параметри кола: ωL = 20 Ом, 1/ωC = 10 Ом, R = 10 Ом.

Визначити напругу на виході фільтра, враховуючи три перші доданки розкладання кривої в ряд, визначити відношення постійної складової напруги до діючого значення на вході і виході.

Розв’язання

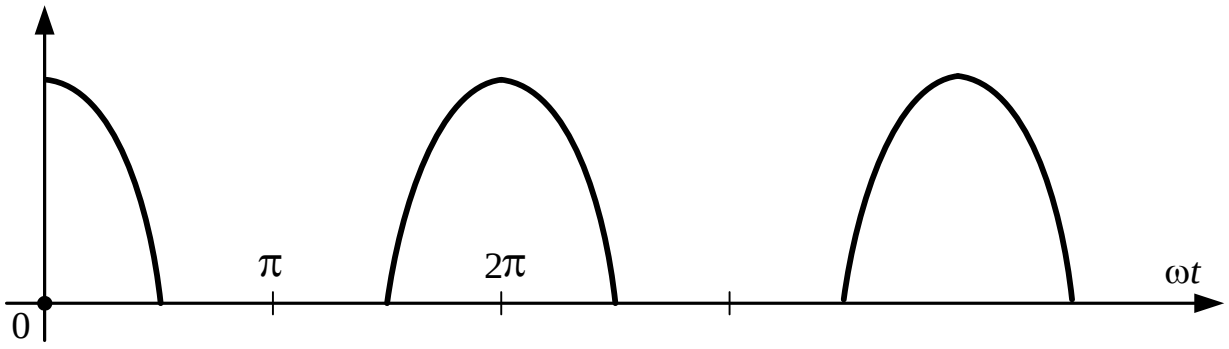


Рисунок 4.4

$$f(\omega t) = \frac{2A_m}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\cos\omega t + \frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t \ldots\right).$$

$$u'_1(t) = 318 + 500\cos\omega t + 212{,}2\cos 2\omega t =$$

$$= 318 + 500\sin(\omega t + 90°) + 212{,}2\sin(2\omega t + 90°), \text{В}.$$

$$U' = \sqrt{318^2 + \frac{500^2}{2} + \frac{212{,}2^2}{2}} = 499{,}5, \text{В}.$$

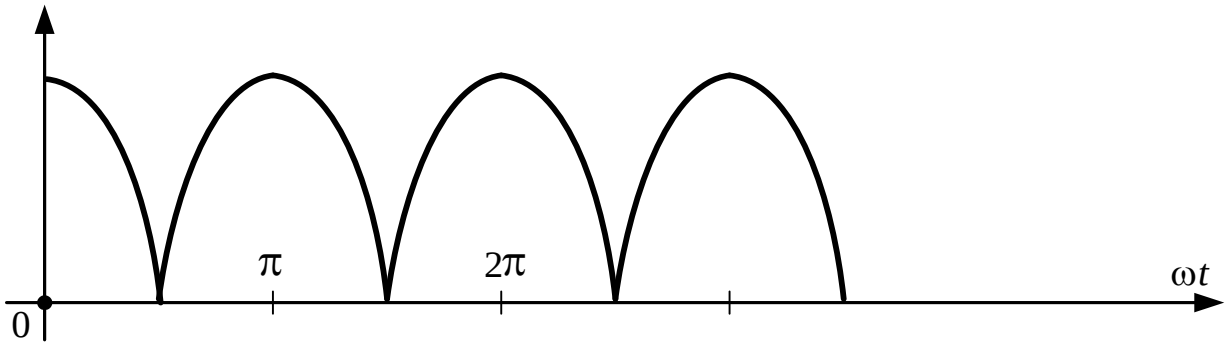


Рисунок 4.5

$$f(\omega t) = \frac{4A_m}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t - \cdots\right).$$

$$u''_1(t) = 636{,}6 + 424{,}4\cos 2\omega t - 84{,}88\cos 4\omega t =$$

$$= 636{,}6 + 424{,}4\sin(2\omega t + 90°) - 84{,}88\sin(4\omega t + 90°), \text{В}.$$

$$U'' = \sqrt{636{,}6^2 + \frac{424{,}4^2}{2} + \frac{84{,}88^2}{2}} = 706, \text{В}.$$

Визначимо комплекс повного опору всього кола для відповідних гармонік:

$$\underline{Z}(k\omega) = jk\omega L_1 + \frac{R\left(-j\frac{1}{k\omega C}\right)}{R - j\frac{1}{k\omega C}}.$$

$$\underline{Z}(0) = R = 10 \text{ Ом}.$$

$$\underline{Z}(\omega) = j\omega L_1 + \frac{R\left(-j\frac{1}{\omega C}\right)}{R - j\frac{1}{\omega C}} = j20 + \frac{j10(-j10)}{10 - j10} = j20 + \frac{10}{2e^{-j45°}} =$$

$$= j20 + 7{,}77e^{-j45°} = 5 + j15 = 15{,}8\, e^{j71{,}5°} \text{Ом};$$

$$\underline{Z}(2\omega) = j2\omega L_1 + \frac{R\left(-j\frac{1}{2\omega C}\right)}{R - j\frac{1}{2\omega C}} = j40 + \frac{j10(-j5)}{10 - j5} = j40 + 4{,}47e^{-j63{,}4^\circ} =$$

$$= 2 + j36 = 36{,}6e^{j86{,}8^\circ}\text{Ом};$$

$$\underline{Z}(4\omega) = j4\omega L_1 + \frac{R\left(-j\frac{1}{4\omega C}\right)}{R - j\frac{1}{4\omega C}} = j80 + \frac{j10(-j2{,}5)}{10 - j2{,}5} = j80 + 2{,}43e^{-j76^\circ} =$$

$$= 0{,}588 + j77{,}6 = 77{,}6e^{j89{,}6^\circ}\text{Ом}.$$

Визначимо напругу на виході за однопівперіодного випрямлювання:

$$U'_2(0) = 318\ \text{В},$$

$$U'_{2m}(\omega) = \frac{500e^{j90^\circ}}{15{,}8\ e^{j71{,}5^\circ}}\,7{,}77e^{-j45^\circ} = 224e^{-j26{,}6^\circ}\ \text{В},$$

$$U'_{2m}(2\omega) = \frac{212{,}2e^{j90^\circ}}{36{,}6e^{j86{,}8^\circ}}\,4{,}472e^{-j45^\circ} = 26{,}3e^{-j60{,}2^\circ}\ \text{В},$$

$$u'_2(t) = 318 + 224\sin(\omega t - 26{,}6^\circ) + 26{,}3\sin(2\omega t - 60{,}2^\circ), \text{В}.$$

$$U'_2 = \sqrt{318^2 + \left(\frac{224}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{26{,}3}{\sqrt{2}}\right)^2} = 356\ \text{В}.$$

Визначимо напругу на виході за двопівперіодного випрямлювання:

$$U''_2(0) = 636{,}6\ \text{В},$$

$$U''_{2m}(2\omega) = \frac{424{,}4e^{j90^\circ}}{36{,}06\ e^{j86{,}8^\circ}}\,4{,}472e^{-j63{,}4^\circ} = 52{,}63e^{-j160{,}2^\circ}\ \text{В},$$

$$U''_{2m}(4\omega) = \frac{84{,}88e^{j90^\circ}}{77{,}7e^{j89{,}6^\circ}}\,2{,}43e^{-j75{,}6^\circ} = 2{,}66e^{-j75.6^\circ}\ \text{В},$$

$$u''_2(t) = 636{,}6 + 52{,}63\sin(2\omega t - 62{,}2^\circ) - 2{,}66\sin(4\omega t - 75{,}6^\circ), \text{В}.$$

$$U''_2 = \sqrt{636{,}6^2 + \left(\frac{52{,}63}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2{,}66}{\sqrt{2}}\right)^2} = 638\ \text{В}.$$

Відношення постійної складової напруги до діючого значення на вході і виході за однопівперіодного випрямлювання:

$$\frac{U_0}{U_{\text{вх}}} = 0{,}636; \quad \frac{U_0}{U_{\text{вих}}} = 0{,}893;$$

за двопівперіодного випрямлювання:

$$\frac{U_0}{U_{\text{вх}}} = 0{,}901; \quad \frac{U_0}{U_{\text{вих}}} = 0{,}998.$$

За несинусоїдальних струмів у випадку резонансу струмів вхідний опір нескінченний, а у випадку резонансу напруг – нульовий.

Задача 3

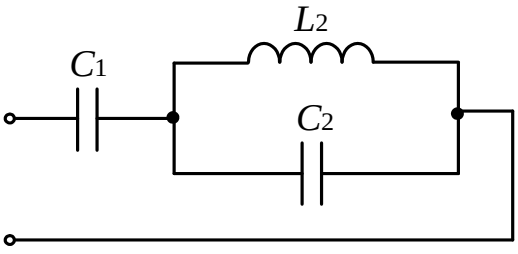


Рисунок 4.6

Для заданої індуктивності L_2 визначити, за яких значень ємностей C_1 та C_2 вхідний опір кола для першої гармоніки дорівнюватиме нулю, а для дев'ятої гармоніки – нескінченності.

Розв'язання

$$\underline{Z}(\omega) = -j\frac{1}{\omega C_1} + \frac{j\omega L_2\left(-j\frac{1}{\omega C_2}\right)}{j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_2}} = 0,$$

$$\underline{Z}(9\omega) = -j\frac{1}{9\omega C_1} + \frac{j9\omega L_2\left(-j\frac{1}{9\omega C_2}\right)}{j9\omega L_2 - j\frac{1}{9\omega C_2}} = \infty.$$

Одночасне розв'язання дає таке співвідношення:

$$\frac{1}{\omega C_2} = 81\omega L_2, \qquad \frac{1}{\omega C_1} = \frac{81}{80}\,\omega L_2.$$

Отже:

$$C_2 = \frac{1}{81\omega^2 L_2}, \qquad C_1 = \frac{80}{81\omega^2 L_2}.$$

Задача 4

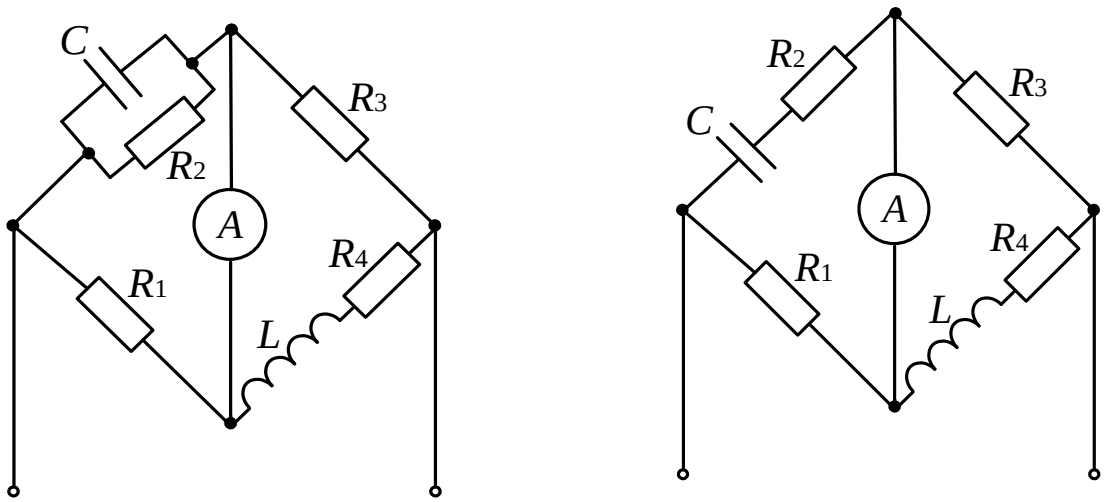
Який з двох мостів, зображених на рис. 4.7, можна повністю збалансувати (струм в діагоналі дорівнюватиме нулю) зміною параметрів моста, якщо до нього прикладена несинусоїдальна напруга?

Розв’язання

Якщо з рівняння балансу мосту

$$\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}$$

можна виключити частоту, то міст можна збалансувати на будь-якої форми вхідної напруги.



а *б*

Рисунок 4.7

Рівняння балансу мосту на рис. 4.7, *а*:

$$\frac{R_2\left(-j\frac{1}{\omega C}\right)j\omega C}{R_1\left(R_2 - j\frac{1}{\omega C}\right)j\omega C} = \frac{R_3}{R_4 + j\omega L}, \qquad \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2} = \frac{R_1 R_3}{R_4 + j\omega L}.$$

$$\frac{1}{R_2} + j\omega C = \frac{R_4}{R_1 R_3} + \frac{j\omega L}{R_1 R_3}, \qquad \frac{1}{R_2} = \frac{R_4}{R_1 R_3} => \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_3}{R_4}, j\omega C = \frac{j\omega L}{R_1 R_3}.$$

Рівняння балансу мосту на рис. 4.7, *б*:

$$\frac{R_2 - j\frac{1}{\omega C}}{R_1} = \frac{R_3}{R_4 + j\omega L}.$$

Виключити частоту не є можливим, отже, міст (рис. 4.7, *а*) збалансований за будь-якої частоти.

Задачі для самостійної роботи

Задача 1

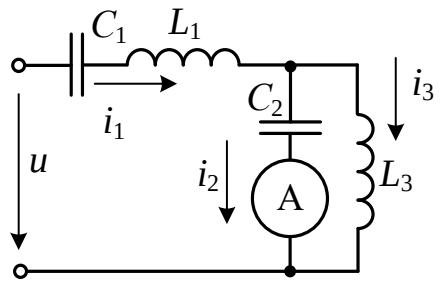


Рисунок 4.8

Вхідна напруга кола:

$u(t) = 270\sqrt{2}\sin 1000 + 90\sqrt{2}\sin(3000t + 10°)$ В.

Параметри кола: $C_1 = 200$ мкФ, $L_1 = 5$ мГн, $L_3 = 3$ мГн.

За якої ємності C_2 струм i_1 кола буде синусоїдальним з частотою $\omega = 1000$ с$^{-1}$?

Задача 2

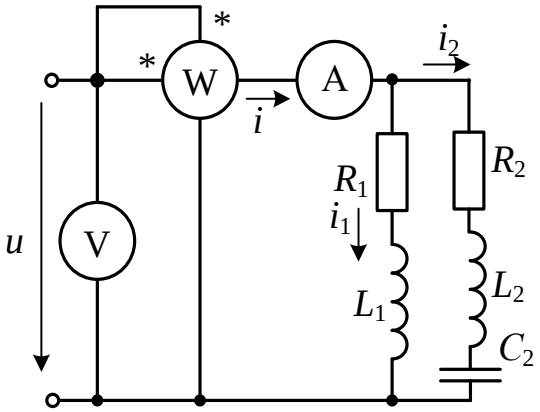


Рисунок 4.9

Вхідна напруга кола:

$u(t) = 60 + 100\sin(\omega t + 30°) + 50\sin(3\omega t + 60°)$ В.

Параметри кола: $R_1 = 6$ Ом; $R_2 = 8$ Ом; $L_1 = 47{,}8$ мГн; $L_2 = 31{,}8$ мГн; $C_2 = 159$ мкФ; $f = 50$ Гц.

Визначити миттєві значення струмів в усіх гілках і показання електродинамічних приладів, які реагують на діючі значення електричних величин.

Задача 3

До конденсатора з ємністю C_1 прикладена несинусоїдальна напруга: $u(t) = 100\sin\omega t + 20\sin 3\omega t + 5\sin 5\omega t$ В, а до конденсатора з ємністю C_2 – синусоїдальна. Визначити, яка з ємностей більша і у скільки разів, якщо виміряні напруги та струми в них однакові.

4.3. Запитання для самоконтролю

Які несинусоїдальні функції називають періодичними?

Як визначити діюче та середнє значення періодичного несинусоїдального струму або напруги?

Якими методами користуються для розрахунку лінійних електричних кіл за періодичного несинусоїдального впливу?

Як впливають опори ємності і індуктивності на струм в колі за несинусоїдальної періодичної напруги?

Як визначити активну потужність кола несинусоїдального періодичного струму?

Як визначити реактивну потужність кола несинусоїдального періодичного струму?

Як визначити повну потужність кола несинусоїдального періодичного струму?

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Маляр В. С. Теоретичні основи електротехніки: підручник / В. С. Маляр – Львів : Видавництво «Львівська політехніка», 2018. – 416 с.

2. Щерба А.А. Теоретичні основи електротехніки – 1. Електричні кола постійного і змінного струму. Чотириполюсники. Практикум. / А.А. Щерба, Ю.В. Перетятко. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 115 с.

3. Хілов В.С. Теоретичні основи електротехніки: підручник / В. С. Хілов. – Дніпро : Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», 2021. – 433с.

4. Намацалюк І.Н. Теоретичні основи електротехніки. Збірник задач [Електронний ресурс]: навчальний посібник для студентів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» / І. Н. Намацалюк, Ю. В. Перетятко. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 113с.

5. Рудик А. В. Теоретичні основи електротехніки. Частина 1. Практикум : посібник. [Електронне видання] / А. В. Рудик, Л. В. Филипчук, Н. І. Кулик. – Рівне : НУВГП, 2024. – 113 с.

6. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами: підручник / Карпов Ю. О., Кацив С. Ш., Кухарчук В. В., Ведміцький Ю. Г. – Херсон : «Олді-Плюс+», 2019. – 326 с.

7. Курило І.А. Розрахунок електричних кіл постійного струму. Навчальне видання. / І.А. Курило:, І.Н. Намацалюк, А.А. Щерба. – Київ : НТУУ «КПІ», ФЕА, 2006. – 51 с.

8. Щерба А. А. Навчально-методичний посібник з курсу «Електротехніка». Розділ «Розрахунок електричних кіл однофазного синусоїдного струму» / А. А. Щерба, В. П. Грудська, Л. Ю. Спінул – Київ : ІВЦ «Політехніка». – 2004.

9. Мадьяров В. Г. Теоретичні основи електротехніки. Частина 1. : конспект лекцій / Ю. О. Карпов, Т. Є. Магас, В. Г. Мадьяров. – Вінниця : ВНТУ , 2018. – 154 с.

10. Поляков М.Г. Математичні основи теоретичної електротехніки : навч. посібн. : у 2-ох ч. / М. Г. Поляков, Л. Я. Фомичова, С. О. Сушко. – Дніпропетровськ : НГАУ, 2001. – 210 с.

11. Теоретичні основи електротехніки. Збірник задач: навчальний посібник / укл. О. В. Корощенко, В. Ф. Денник, О. А. Журавель та ін.; за заг. ред. О. В. Корощенка. – Донецьк : ДВНЗ «ДонНТУ», 2012. – 673 с.

12. Форкун Я. Б. Конспект лекцій з курсу «Теорія електричних та магнітних кіл» (для студентів усіх форм навчання спеціальності 151 – Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології) / Я. Б. Форкун, М. Л. Глєбова. – Харків : ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, – 2017. – 124 с.

13. Основи теорії кіл, сигналів та процесів в системах технічного захисту інформації: підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч.1. /

Ю. О. Коваль, І. О. Милютченко, А.М. Олейніков, В.М. Шокало та ін.; за заг. редакцією В.М. Шокала. – Харків : НТМТ , 2011. – 544 с.

14. Стрелковська І. В. Ряди Фур’є. Інтеграл Фур’є : навч. посіб. для фахівців у галузі зв’язку / І. В. Стрелковська, В. М. Паскаленко – Одеса : 2021. – 122 с.

15. Воробкевич А. Ю. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки / А. Ю. Воробкевич, О. І. Шегедин, В. С. Маляр, Р. Я. Совин. – Київ : Магнолія Плюс, 2004. – 224 с.

16. Теорія електричних і магнітних кіл [Електронний ресурс] : підручник / С. В. Панченко, О. М. Ананьєва, М. М. Бабаєв та ін. – 2-ге вид., випр. та допов. – Харків : УкрДУЗТ, 2020. – 246 с.

17. Кобяков О. М. Теорія електричних кіл та сигналів. Основи розрахунку електричних кіл : конспект лекцій / укладачі: О. М. Кобяков, І. Є. Бражник. – Суми : Сумський державний університет, 2016. – 168 с.

18. Методичні вказівки з виконання розрахунково-графічного завдання за темою "Розрахунок лінійних електричних кіл постійного струму" з курсів "Теоретичні основи електротехніки", "Теорія електричних та магнітних кіл", "Теорія електричних кіл" для студ. спец. 141 "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка", 151 "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології", 171 "Електроніка" / уклад. М. М. Резинкіна [та ін.] ; Нац. техн. ун-т "Харків. політехн. ін-т". – Харків : НТУ "ХПІ", 2019. – 44 с.

19. Методичні вказівки з виконання розрахунково-графічного завдання за темою "Розрахунок лінійних електричних кіл гармонійного струму" з дисциплін "Теоретичні основи електротехніки", "Теорія електричних та магнітних кіл", "Теорія електричних кіл" для студ. спец. 141 "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка", 151 "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології", 171 "Електроніка" / уклад. М. М. Резинкіна [та ін.] ; Нац. техн. ун-т "Харків. політехн. ін-т". – Харків : НТУ "ХПІ", 2019. – 44 с.

Навчальне видання

КОСТЮКОВ Іван Олександрович
КУБРИК Борис Іванович
КРОПАЧЕК Ольга Юріївна
ЛИТВИНЕНКО Світлана Анатоліївна
ЛАВРІНЕНКО Ольга Валеріївна

ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО, ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО ТА ТРИФАЗНОГО ЖИВЛЕННЯ

Навчально-методичний посібник
для студентів електротехнічних та комп'ютерних спеціальностей

Відповідальний за випуск д.т.н. Костюков І. О.

Роботу до видання рекомендував проф. Любарський Б. Г.

В авторській редакції

План 2024 р., поз. 10

Підп. до друку 2025 р. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 7,3.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Електронне видання