МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Б. І. Кубрик, А. В. Гетьман, А. М. Борисенко, С. А. Литвиненко

АНАЛІЗ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ
У ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

Навчальний посібник
для студентів електротехнічних та комп'ютерних спеціальностей

Харків 2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Б. І. Кубрик, А. В. Гетьман, А. М. Борисенко, С. А. Литвиненко

АНАЛІЗ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ
У ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

Навчальний посібник
для студентів електротехнічних та комп'ютерних спеціальностей

Затверджено
редакційно-видавничою
радою НТУ «ХПІ»,
протокол № 1 від 16.02.2023 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2023

УДК 621.3(075) + 621.3.011.71(075)
А 64

Рецензенти:
М. А. Мирошник, д-р техн. наук, професор, Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна;
М. В. Мислович, д-р техн. наук, професор, Інститут електродинаміки НАН України

А 64 Аналіз перехідних процесів у лінійних електричних колах : навч. посіб. для студентів електротехнічних та комп'ютерних спеціальностей / Б. І. Кубрик, А. В. Гетьман, А. М. Борисенко, С. А. Литвиненко. – Харків : НТУ «ХПІ», 2023. – 274 с.

ISBN 978-617-05-0528-6

Посібник містить теоретичні матеріали з теми «Аналіз перехідних процесів у лінійних колах» дисциплін «Теоретичні основи електротехніки», «Теорія електричних і магнітних кіл», «Теорія електричних кіл», «Теорія електромагнітних кіл», «Основи електротехніки та електроніки». Викладено основні принципи класичного, часового, операторного та спектрального методів аналізу і наведено приклади їх практичного використання для кіл першого та другого порядку за постійного, синусоїдального й імпульсного впливу.

Призначено для студентів електротехнічних і комп'ютерних спеціальностей.

Іл. 202. Табл. 9. Бібліогр. 19 назв.

УДК 621.3(075) + 621.3.011.71(075)

ISBN 978-617-05-0528-6

ЗМІСТ

ВСТУП

У навчальному посібнику розглянуті основні методи аналізу перехідних процесів у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами та приклади їх практичного використання для розв'язування конкретних задач.

Потреба у вивченні та розрахунках перехідних процесів зумовлена тим, що це дає змогу передчасно виявити можливі збільшення напруг та струмів, які можуть призвести до виходу з ладу елементів кола, а також до зміни форми та амплітуди сигналів під час їх проходження через імпульсні електронні та радіотехнічні пристрої.

Теоретичне та практичне оволодіння методами аналізу перехідних процесів підвищує професійну компетенцію студентів та дозволить їм більш успішно опанувати подальші матеріали спецкурсів з обраної спеціальності. Теоретичний матеріал посібника викладено в достатньому об'ємі і в доступній для сприйняття формі. Всі основні теоретичні положення проілюстровані чисельними прикладами розв'язання типових задач, що робить цей посібник зручним для самостійної роботи студентів різних форм навчання.

Структурно посібник складається з п'яти розділів. У кожному з них спочатку подається теоретичний матеріал, а потім – питання для самоперевірки і приклади розв'язання задач.

У першому розділі розглянуті основні положення про перехідні процеси, закони комутації, початкові умови та методи розрахунку.

У другому розділі подані математичні основи класичного методу і проведений аналіз перехідних процесів в колах *RL, RC, RLC* за різних видів збудження.

У третьому розділі розглянуті часові характеристики електричних кіл та їх застосування для визначення відгуку кола на сигнали довільної форми за допомогою інтегралів накладання (Дюамеля) в різних формах запису. Операторний метод аналізу перехідних процесів розглядається у четвертому розділі, де наведений його математичний апарат на базі інтегральних перетворень Лапласа. Показані основні властивості цих перетворень, наведені закони Ома і Кірхгофа в операторній формі, методи переходу від операторних зображень до оригіналів. Розглянуті операторні передавальні функції та основи кореневого методу аналізу.

П’ятий розділ присвячений спектральному методу аналізу. В ньому розглядається частотний спосіб опису сигналів та наведений його математичний апарат на основі рядів та інтегральних перетворень Фур’є. Розглянуті частотні характеристики електричних кіл, спектри періодичних та неперіодичних сигналів, зв’язок між спектрами вхідного та вихідного сигналів, потужності та енергія спектрів, ширина спектру сигналу, поняття про неспотворюючі електричні кола, а також зв’язок між частотними, операторними та часовими характеристиками.

Навчальний посібник за обсягом та змістом повністю відповідає навчальним програмам з дисциплін «Теоретичні основи електротехніки», «Теорія електричних і магнітних кіл», «Теорія електричних кіл», «Теорія електромагнітних кіл», «Основи електротехніки та електроніки» для підготовки фахівців за спеціальностями 123, 141, 151, 152, 153, 171, 172.

1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ПРО ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

Електричні кола, до складу яких входять накопичувальні елементи (індуктивності, ємності), можуть перебувати в усталеному (стаціонарному) або в перехідному (нестаціонарному) стані. Усталений режим характеризується рівновагою між дією на електричне коло джерел живлення та зворотною реакцією елементів кола на цю дію. Тобто це такий режим, за якого струми і напруги в колі є незмінними в часі (в колах постійного струму) або є періодичними функціями часу (в колах змінного струму). В усталеному режимі струми та напруги в елементах кола можуть існувати нескінченно довго, не змінюючи свої величини та характеристики. Стан спокою кола, в якому струми і напруги набувають нульового значення, також є усталеним режимом.

1.1. Поняття про перехідний режим

Всі електричні кола використовуються в декількох режимах роботи [1]-[8]. В найпростішому випадку існує два варіанти: режим роботи за номінальних значень напруг і струмів та стан спокою кола за від’єднаних джерел електричної енергії. Надалі під комутацією будемо розуміти стрибкоподібну (миттєву) зміну режиму роботи кола. Комутація виникає в результаті зміни структури кола або параметрів його окремих елементів, а також може бути викликана вмиканням, вимиканням або перемиканням окремих його ділянок. Для позначення типу комутації на схемі кола використовують ключі, комутатори, реле та інші елементи. На рис. 1.1 представлені графічні позначення на схемах ключів: *а* – замикальний, *б* – розмикальний, *в* – перемикальний.

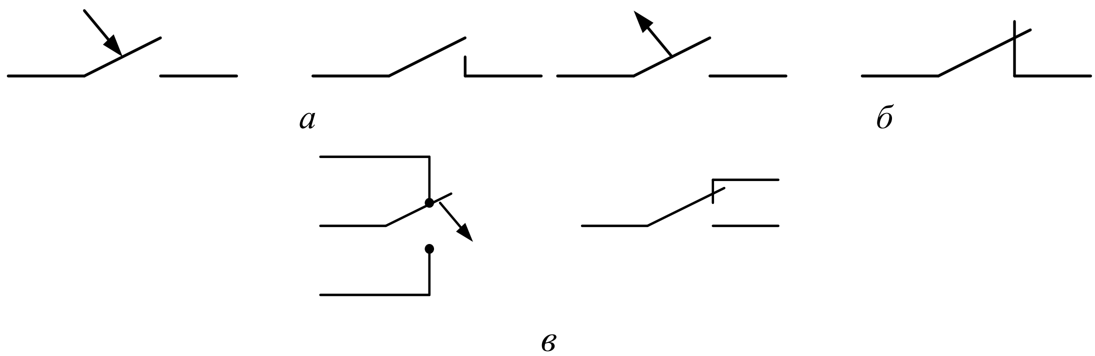


Рисунок 1.1

Перехідні процеси в колах виникають у результаті комутації. В подальшому будемо вважати, що початок відліку часу перехідного процесу збігається з моментом комутації ($t = 0$). Момент часу безпосередньо перед комутацією будемо позначати t (0–), а безпосередньо після комутації – t (0+) (рис. 1.2).

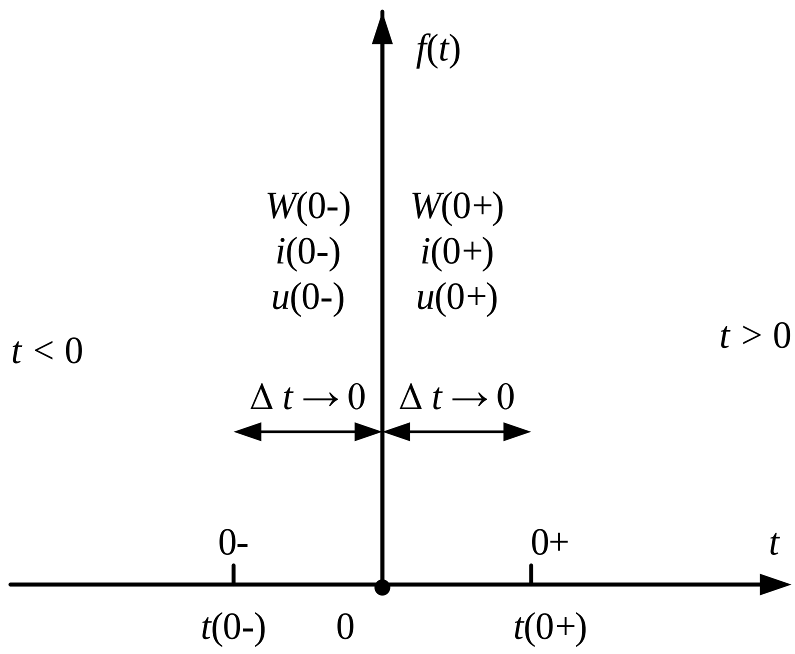


Рисунок 1.2

Значення величин напруг і струмів за t (0–) називають докомутаційними початковими умовами і позначають i(0–), u(0–), а за t (0+) – післякомутаційними початковими умовами і позначають i(0+), u(0+).

Хоча сама комутація відбувається миттєво, перехід кола від одного усталеного режиму до іншого буде займати деякий час. Це пов’язано з тим, що кожному стану кола відповідає певний запас енергії електричного та магнітного полів, а енергія миттєво змінюватися не може. З точки зору фізики перехідні процеси є процесами переходу кола від одного енергетичного стану (докомутаційного) до іншого (післякомутаційного), та обумовлені невідповідністю запасів енергії в електричному та магнітному полях кола до комутації та їх значень у новому усталеному режимі кола.

Теоретично перехідний процес триває нескінченно довго, проте практично цей час обмежують долями секунди. Фізичні процеси, які протікають за цей час, суттєво впливають на роботу електричних кіл через можливі перенапруги, надструми та електромагнітні коливання, що може порушити їх стабільний режим роботи аж до виходу їх з ладу. В той же час перехідні процеси лежать в основі нормального функціонування пристроїв, приладів, апаратури і цілих комплексів, які широко використовують в електроніці, радіотехніці, системах автоматики та інших. У зв’язку з цим знання законів протікання перехідних процесів та вміле їх використання має велике практичне значення.

1.2. Закони комутації

В електричних колах енергія магнітного та електричного полів не змінюється стрибком навіть в момент комутації. Енергія є безперервною функцією часу. Дійсно, нехай в момент часу t (0–) сумарна енергія усіх полів має значення $W(0–)$, а в момент часу $t\,(0+)$ становить $W(0+)$. Якщо припустити, що $W(0–) \neq W(0+)$ або $W(0+) – W(0–) = \Delta W \neq 0$, то потужність в колі досягала б нескінченного значення, що фізично неможливо:

$$P = \frac{dW}{dt} \to \infty.$$

В реальних колах потужність завжди скінченна, і тому зміна енергії $W(t)$ відбувається безперервно, плавно, без стрибків. Ця безперервність виражається рівнянням $\Delta W = 0$, або

$$W(0–) = W(0+). \qquad (1.1)$$

Оскільки в електричних колах енергія накопичується в електричних полях конденсаторів та магнітних полях котушок індуктивності, то рівняння (1.1) еквівалентно двом рівнянням:

$$W_м(0–) = W_м(0+), \quad (1.2)$$

$$W_е(0–) = W_е(0+). \quad (1.3)$$

На цій підставі сформульовані два закони комутації по відношенню до кожного з накопичувальних елементів. Кожен з цих законів має загальне і частинне формулювання.

1.2.1. *Перший закон комутації*

В електричному колі, що містить індуктивність, енергія накопичується в магнітному полі і обчислюється за допомогою співвідношення:

$$W_м = \frac{1}{2}\psi i_L. \quad (1.4)$$

В окремому випадку, коли індуктивність незмінна (L = const) і потокозчеплення $\psi = Li_L$, вираз (1.4) набуває вигляду:

$$W_м = \frac{Li_L^2}{2}. \quad (1.5)$$

Якщо енергія миттєво, стрибком змінюватися не може, то не мають змінюватися миттєво і фізичні величини, від яких залежить запас енергії – потокозчеплення ψ і струм i_L. Якщо припустити, що потокозчеплення або струм за постійної індуктивності змінюватимуться стрибком, то ЕРС самоіндукції в колі буде нескінченною, тобто буде порушений другий закон Кірхгофа, чого бути не може.

$$e_L = -\frac{d\psi}{dt} = -L\frac{di}{dt} \neq \infty. \quad (1.6)$$

Звідси можна сформулювати перший закон комутації.

В колі, що містить індуктивність, не можуть стрибком, миттєво змінюватися потокозчеплення та струм, в першу мить після комутації вони зберігають ті самі значення, які вони мали безпосередньо перед комутацією.

$$\begin{gathered} \psi(0+) = \psi(0–), \\ i_L(0+) = i_L(0–). \end{gathered} \quad (1.7)$$

1.2.2. *Другий закон комутації*

В колі, що містить ємність, енергія накопичується в електричному полі:

$$W_\text{е} = \frac{1}{2} Q u_C. \tag{1.8}$$

За незмінної ємності (C = const) заряд, який накопичується на обкладках конденсатора дорівнює

$$Q = C u_C$$

і тому

$$W_\text{е} = \frac{1}{2} C u_C^2. \tag{1.9}$$

Оскільки енергія електричного поля не може змінюватися миттєво стрибком, то також не повинні змінюватися миттєво стрибком електричний заряд Q та напруга u_C на обкладках конденсатора. Струм в конденсаторі визначається зміною заряду та напруги:

$$i_C = \frac{dQ}{dt} = C \frac{du_C}{dt}. \tag{1.10}$$

За стрибкоподібної зміни заряду Q та напруги u_C струм в конденсаторі набував би нескінченно великих значень, що неможливо. Звідси випливає формулювання другого закону комутації.

В конденсаторі електричний заряд Q та напруга на обкладках u_C миттєво стрибкоподібно змінюватися не можуть, в перший момент після комутації вони зберігають ті значення, які вони мали безпосередньо перед комутацією:

$$\begin{gathered} Q(0+) = Q(0-), \\ u_C(0+) = u_C(0-). \end{gathered} \tag{1.11}$$

Вираз відносно заряду використовується за стрибкоподібної зміни ємності кола.

Слід пам'ятати, що напруга на котушці індуктивності u_L, струм в конденсаторі i_C, напруга на резисторі u_R і струм у гілці з цим елементом можуть змінюватися миттєво стрибком.

Закони комутації використовуються в усіх методах аналізу перехідних процесів для визначення початкових умов.

1.3. Початкові умови

Під початковими умовами розуміють значення струмів у гілках, напруг на елементах та їхніх похідних у перший момент після комутації. При цьому розрізняють докомутаційні та післякомутаційні, незалежні та залежні, нульові та ненульові початкові умови. Наведемо визначення цих понять.

Докомутаційні початкові умови – це значення струмів та напруг в усталеному режимі до комутації за $t = 0–$. Їх будемо позначати $u_k(0–)$, $i_k(0–)$.

Післякомутаційні початкові умови – це значення струмів і напруг одразу після комутації t (0+), тобто це $u_k(0+)$, $i_k(0+)$.

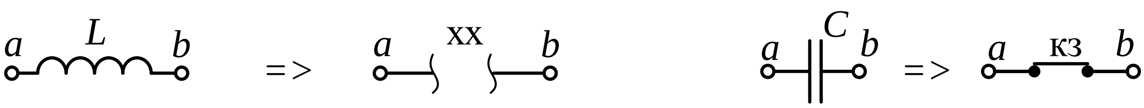
Докомутаційні початкові умови залишаються після комутації тільки для струмів в котушці індуктивності та для напруг на ємностях, що витікає із законів комутації, тобто $i_L(0–) = i_L(0+)$, $u_C(0–) = u_C(0+)$.

До незалежних початкових умов відносять струм $i_L(0+)$ (потокозчеплення) в котушках індуктивності та напруги (заряд) на ємностях $u_C(0+)$.

Наряду з незалежними початковими умовами використовуються залежні початкові умови, якими вважають величини всіх струмів і напруг, крім u_{Ck}, i_{Lk}, а також їх похідних за $t = t\,(0+)$. Залежні початкові умови визначаються через незалежні з використанням законів Кірхгофа.

Якщо в електричному колі мають місце лише нульові початкові умови, тобто $i_L(0–) = 0$, $u_C(0–) = 0$, то за $t = 0+$ ділянка з індуктивністю буде мати нескінченний опір, що еквівалентно розриву цієї ділянки, а ємність навпаки матиме нульовий опір, що еквівалентно короткому замиканню.

t=0– t=0+ t=0– t=0+



$i_L(0–)=0$ $i_L(0–)=i_L(0+)=0$ $u_C(0–)=0$ $u_C(0–)=u_C(0+)=0$

Рисунок 1.3

Початкові умови називають ненульовими, коли хоча б один накопичувальний елемент мав деякий запас енергії $W(0+)\neq 0$. У випадку ненульових початкових умов, коли $i_L(0–) \neq 0$, $u_C(0–) \neq 0$, то за $t = 0+$ ділянка з індуктивністю еквівалентна джерелу струму $J = i_L(0–)$, а ділянка з ємністю еквівалентна джерелу напруги, електрорушійна сила якого $E = u_C(0–)$.

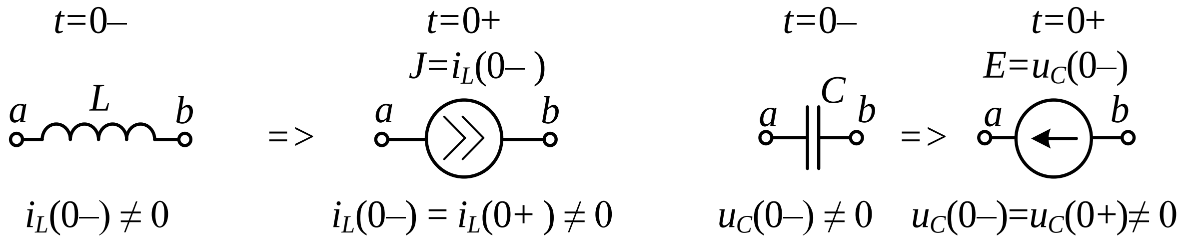


Рисунок 1.4

Наведені еквівалентні схеми заміщення накопичувальних елементів в залежності від початкових умов, як і закони Кірхгофа, використовуються для розрахунку залежних початкових умов. Для цього складається схема заміщення електричного кола для t = 0+ з урахуванням особливостей початкових умов реактивних елементів, і по ній визначаються залежні початкові умови (рис. 1.5).

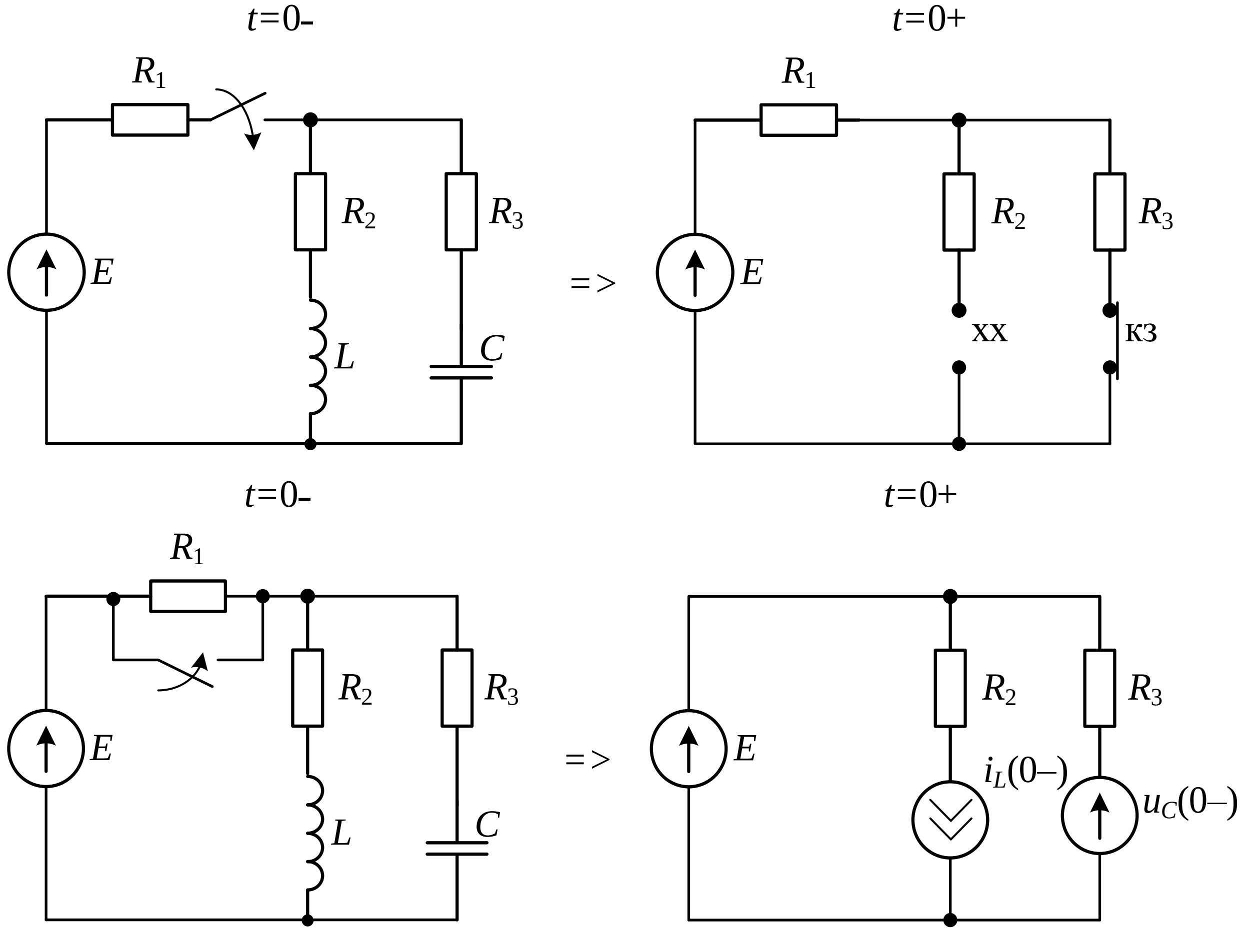


Рисунок 1.5

1.4. Методи аналізу перехідних процесів в лінійних електричних колах

Аналіз перехідних процесів в електричних колах дозволяє визначити часові залежності струмів і напруг від моменту комутації до моменту встановлення нового усталеного режиму. Загальний підхід для розрахунку струмів і напруг під час перехідного процесу полягає в складанні за допомогою законів Кірхгофа диференціальних рівнянь відносно миттєвих значень шуканих функцій. Розроблені методи аналізу перехідних процесів відрізняються способами розв’язання цих рівнянь [1]-[6], [9]. Умовно всі ці методи можна поділити на прямі і суперпозиційні [7], [8]. У прямих методах зовнішнє збудження розглядається як єдине ціле у вигляді функції часу. У суперпозиційних методах зовнішнє збудження представляється у вигляді суми елементарних типових складових.

До прямих методів відносять класичний, операторний та метод змінних стану.

Класичний метод аналізу перехідних процесів є найбільш наочним та простим з точки зору математичного апарату. Використовуючи цей метод складають за законами Кірхгофа відносно шуканих величин неоднорідні диференціальні рівняння, які описують стан кола після комутації. Розв’язок цих неоднорідних диференціальних рівнянь є сумою частинного розв’язку неоднорідного і загального розв’язку однорідного рівнянь. Цей метод добре розкриває фізику перехідних процесів, але його використання для кіл вище другого порядку нераціональне, оскільки розв’язання є дуже громіздким.

Операторний метод ґрунтується на використанні понять зображення функцій часу: кожній функції часу відповідає функція комплексної змінної $p = \delta + j\omega$ і навпаки – кожній функції змінної p відповідає функція часу. Такий перехід виконується за допомогою перетворення Лапласа [1]-[8], [11], завдяки якому операції диференціювання та інтегрування замінюються алгебраїчними операціями над їхніми зображеннями. При цьому вихідна система інтегро-диференціальних рівнянь кола відносно оригіналів перетворюється на систему алгебраїчних рівнянь відносно їхніх зображень. Розв’язавши цю систему відносно зображення шуканої функції, знаходять оригінал цієї функції, застосовуючи для цього зворотне перетворення Лапласа, теорему розкладання або табличний метод в залежності від складності отриманого виразу зображення шуканої функції. Операторний метод в порівнянні з класичним є більш універсальним, що забезпечує його широке застосування, особливо в системах автоматики, інформаційних системах та у радіотехніці. В той же час цей метод є дуже формалізованим і в ньому відсутня прозорість фізичних процесів, яка присутня у класичному методі.

Метод змінних стану [1] ґрунтується на виокремленні таких шуканих величин, які визначають енергетичний стан електричного кола, оскільки перехідний процес полягає в зміні одного усталеного стану на інший. Енергетичний стан кола повністю визначається струмами в котушках індуктивності і напругами на конденсаторах. Ці величини, відповідно до законів комутації, змінюються без розривів і є функціями стану, через які визначаються інші струми і напруги (u_R, u_L, i_R, i_C). У цьому методі спочатку складають рівняння за першим законом Кірхгофа для всіх вузлів, до яких приєднані ємності, і за другим законом Кірхгофа для всіх контурів з індуктивностями. Кількість усіх складених рівнянь повинна дорівнювати кількості накопичувальних елементів в колі. В цих рівняннях всі електричні змінні (u_R, u_L, i_R, i_C) виражають через змінні стану, тобто через i_L та u_C. Систему рівнянь, складену за законами Кірхгофа, шляхом перетворень приводять до системи n диференціальних рівнянь першого порядку в класичний формі Коші і записують її у матричній формі. Сформовану таким чином систему диференціальних рівнянь першого порядку розв'язують аналітичним методом виконуючи розклад експоненціальних матриць, і отримують аналітичні вирази розв'язків. Для розв'язання такої системи диференціальних рівнянь порядку $n > 2$ використовують числові методи інтегрування, наприклад, метод Рунге-Кутта та інші [4], [9]. Метод змінних стану використовується для розрахунків перехідних процесів в електричних колах, які мають у своєму складі велику кількість накопичувальних елементів.

В основі суперпозиційних методів лежить принцип суперпозиції (накладання) і тому їх можна використовувати тільки для лінійних електричних кіл. В усіх суперпозиційних методах вхідний сигнал представляється у вигляді суми стандартних елементарних сигналів, а вихідний сигнал визначається як сума відгуків кола на кожний елементарний сигнал окремо. До суперпозиційних методів відносять метод часових характеристик або інтеграла Дюамеля [3], [6], [11] і спектральний (частотний) метод. При використанні методу інтеграла Дюамеля зовнішнє зображення представляється у вигляді суми одиничних $1(t)$ або δ-функцій $\delta(t)$. В якості характеристик кола використовуються перехідна $h(t)$ та імпульсна $g(t)$ характеристики. Для кожного обраного інтервалу часу безперервної зміни функції вхідного впливу складають вирази для вихідної величини у вигляді однієї з форм інтегралу Дюамеля. Цей метод використовується для аналізу перехідних процесів в електричних колах, коли сигнали впливу довільно змінюються в часі або мають імпульсний характер.

Одним з різновидів спектрального аналізу є частотний аналіз, в якому вхідний сигнал представляється у вигляді гармонійних складових, набір яких утворює частотний спектр [12]-[17]. У випадку періодичного сигналу отримують його дискретний частотний спектр за допомогою розкладання в ряд Фур'є. У неперіодичного (одиночного) сигналу частотний спектр безперервний і для його визначення використовується пряме перетворення Фур'є. Реакція кола на вхідний сигнал, відповідно до принципу суперпозиції, визначається як сума гармонійних реакцій на кожну окрему гармонійну складову вхідного сигналу. Комплексна амплітуда кожної з гармонік спектру вихідного сигналу $\underline{Y}_{mk\ \text{вих}}$ може бути отримана як добуток комплексної амплітуди відповідної гармоніки вхідного сигналу $\underline{X}_{mk\ \text{вх}}$ та комплексного коефіцієнту передачі кола $K(jk\Omega)$ для даної k-ої гармоніки. У випадку, коли сигнал на вході кола неперіодичний, з суцільним спектром, який характеризується спектральною щільністю $X(j\omega)$, спектральна щільність вихідного сигналу $Y(j\omega)$ дорівнює добутку спектральної щільності вхідного сигналу та комплексної передавальної функції $K(j\omega)$. Функцію часу вихідного сигналу визначають за допомогою зворотного перетворення Фур'є. Спектральний метод застосовують для аналізу перехідних процесів в електричних колах за імпульсного характеру сигналу впливу або сигналу впливу складної форми і широко використовують в імпульсній та комп'ютерній техніці, системах автоматичного управління, зв'язку та інших [4]-[8].

1.5. Запитання для самоперевірки

Що називають усталеним (стаціонарним) режимом роботи електричного кола?

Поясніть причини виникнення перехідних процесів?

Дайте визначення комутації та наведіть приклади.

Як позначається комутація на електричних схемах?

Сформулюйте та запишіть перший закон комутації в загальному та частинному вигляді.

Доведіть перший закон комутації, використавши закон Кірхгофа і врахувавши, що енергія не змінюється миттєво стрибком.

Сформулюйте та запишіть другий закон комутації в загальному та частинному вигляді.

Доведіть другий закон комутації, використавши закон Кірхгофа і врахувавши, що енергія не змінюється миттєво стрибком.

Що називають початковими умовами? Наведіть їх класифікацію.

Накресліть схеми заміщення індуктивності і ємності за нульових та ненульових початкових умов.

Опишіть методи розрахунку початкових умов.

Назвіть основні методи аналізу перехідних процесів та поясніть їхню суть.

Які методи розрахунку перехідних процесів можна використовувати в нелінійних електричних колах?

1.6. Приклад визначення початкових умов

Визначити струми у всіх гілках і напруги на котушці індуктивності та конденсаторі в перший момент часу після комутації і в усталеному режимі після закінчення перехідного процесу (рис. 1.6).

Обчислити запаси енергії електричного і магнітного полів до комутації та після закінчення перехідного процесу.

Дано:
E = 120 В;
$R_1 = R_4$ = 10 Ом;
$R_2 = R_3$ = 20 Ом;
L = 0,5 Гн;
C =100 мкФ.

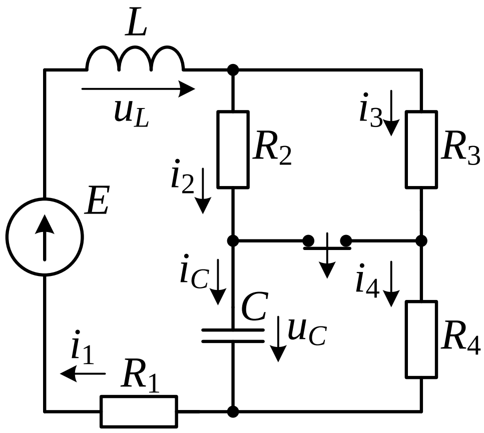


Рисунок 1.6

Розв'язання

Розглянемо усталений режим, що існував в колі до комутації при $t < 0$.

Під дією постійної ЕРС джерела в гілках кола протікали постійні струми, напруги на всіх ділянках не залежали від часу. При цьому котушка індуктивності не чинила опору струму і напруга на ній була відсутня, а конденсатор не пропускав струм:

$$u_L = L\frac{di_1}{dt} = 0; \quad i_\mathrm{C} = C\frac{du_\mathrm{C}}{dt} = 0.$$

Ці умови відображені на рис. 1.7.

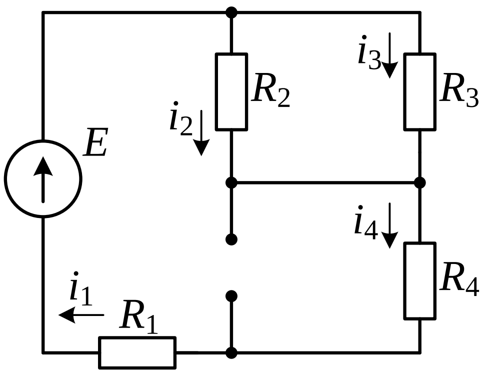


Рисунок 1.7

Таким чином, до розмикання контакту струми визначались виразами:

$$i_1 = i_4 = \frac{E}{R_\text{заг}} = \frac{\mathrm{E}}{R_1 + R_4 + R_2R_3/(R_2 + R_3)} = \frac{120}{30} = 4\ \mathrm{A};$$

$$i_2 = i_1 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_2} = 4 \cdot \frac{10}{10 + 10} = 2\ \mathrm{A};$$

$$i_3 = i_1 - i_2 = 4 - 2 = 2\ \mathrm{A}.$$

Конденсатор був заряджений до величини напруги на резисторі R_4:

$$u_C = i_4 \cdot R_4 = 4 \cdot 10 = 40 \text{ В}.$$

Такі значення струмів і напруг на ділянках кола зберігалися до останнього моменту перед комутацією, зокрема:

$$i_1(0-) = 4 \text{ А};$$

$$u_C(0-) = 40 \text{ В}.$$

При цьому в магнітному полі котушки індуктивності була накопичена енергія

$$W_M \Big|_{t \le 0} = \frac{Li_1^2(0)}{2} = \frac{0{,}5 \cdot 4^2}{2} = 4 \text{ Дж},$$

а в електричному полі конденсатора – енергія

$$W_E \Big|_{t \le 0} = \frac{Cu_C^2(0)}{2} = \frac{100 \cdot 10^{-6} \cdot 40^2}{2} = 0{,}08 \text{ Дж}.$$

Переходимо до розгляду режиму після комутації (t > 0).

Після розмикання контакту схема набуває вигляду, зображеного на рис. 1.8, причому струми i_2 та i_C тепер протікають в одній гілці, так само, як струми i_3 та i_4, отже:

$$i_2 = i_C;$$

$$i_3 = i_4.$$

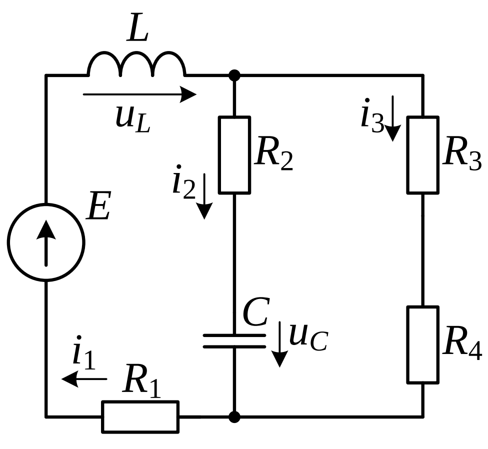


Рисунок 1.8

Напишемо систему рівнянь за законами Кірхгофа для миттєвих значень струмів і напруг кола, зображеного на рис. 1.8. Ці рівняння справедливі для будь-якого моменту часу після комутації.

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0 \tag{1.12}$$

$$R_1 i_1 + u_L + (R_3 + R_4) \cdot i_3 = E \tag{1.13}$$

$$(R_3 + R_4) \cdot \mathrm{i}_3 - u_\mathrm{C} - R_2 i_2 = 0 \tag{1.14}$$

У перший момент часу після комутації $t = 0+$ значення струму в котушці індуктивності $i_L = i_1$ та значення напруги на ємності u_C зберігаються такими самими, якими вони були в останній момент перед комутацією, оскільки запаси енергії не можуть змінюватися стрибком:

$$i_1(0+) = i_1(0-) = 4\ \text{А}; \tag{1.15}$$

$$u_\mathrm{C}(0+) = u_\mathrm{C}(0-) = 40\ \text{В}. \tag{1.16}$$

Ці положення відомі під назвою I та II законів комутації. Знаючи ці величини, можна розв’язати рівняння (1.12)-(1.14) для моменту $t = 0+$ відносно величини i_2, i_3 та u_L, які можуть змінюватися стрибком.

Із рівняння (1.12) маємо:

$$i_3(0+) = i_1(0+) - i_2(0+) = 4 - i_2(0+). \tag{1.17}$$

Підставимо (1.16) і (1.17) у рівняння (1.14):

$$(R_3 + R_4)(4 - i_2(0+)) - 40 - R_2 i_2(0+) = 0,$$

звідки:

$$i_2(0+) = \frac{4(R_3 + R_4) - 40}{R_3 + R_4 + R_2} = \frac{4 \cdot 30 - 40}{50} = 1{,}6\ \text{А}; \tag{1.18}$$

$$i_3(0+) = 4 - 1{,}6 = 2{,}4\ \text{А}. \tag{1.19}$$

Підставляючи (1.16) і (1.17) в рівняння (1.17), знаходимо:

$$u_L(0+) = 120 - 10 \cdot 4 - 30 \cdot 2{,}4 = 8\ \text{В}.$$

Інакше можна визначити струми і напруги в першу мить після комутації застосувавши еквівалентну схему.

В цій схемі конденсатор замінюється в залежності від значення напруги на ньому в останню мить перед комутацією або перемичкою (в разі $u_C(0-) = 0$), або джерелом ЕРС, яке дорівнює ненульовому значенню $u_C(0-)$.

Котушка індуктивності в еквівалентній схемі замінюється в залежності від значення струму в ній в останню мить перед комутацією або розривом (в разі $i_L(0-) = 0$), або джерелом струму, струм якого дорівнює ненульовому значенню $i_L(0-)$.

Еквівалентна схема кола в першу мить після комутації наведена на рис. 1.9.

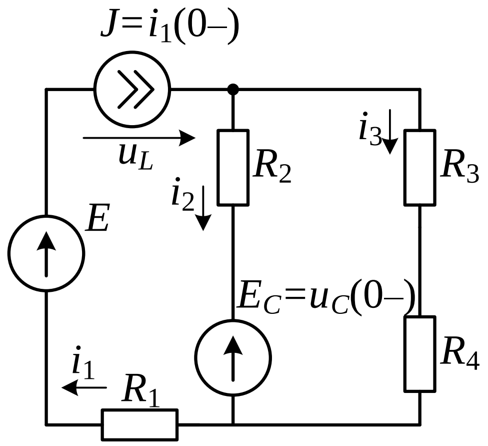


Рисунок 1.9

Розрахунки струмів і напруг виконуються будь-яким зручним методом, наприклад, методом накладання.

$$i_3(0+) = i_3^J(0+) + i_3^{Ec}(0+) = i_1(0-)\frac{R_2}{R_2+R_3+R_4} + \frac{u_C(0-)}{R_2+R_3+R_4} =$$

$$= 1{,}6 + 0{,}8 = 2{,}4 \text{ A}.$$

$$u_L(0+) = u_L^E(0+) + u_L^J(0+) + u_L^{Ec}(0+) =$$

$$= E - i_1(0-)\left(R_1 + \frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4}\right) +$$

$$+\left(\frac{u_C(0-)}{R_2+R_3+R_4}R_2 - u_C(0-)\right) = 120 - 88 - 24 = 8 \text{ B};$$

$$i_2(0+) = i_2^J(0+) + i_2^{Ec}(0+) = i_1(0-)\frac{R_3+R_4}{R_2+R_3+R_4} + \frac{-u_C(0-)}{R_2+R_3+R_4} =$$

$$= 2{,}4 - 0{,}8 = 1{,}6 \text{ A}.$$

Після закінчення перехідного процесу, коли $t \to \infty$, в гілках кола знову будуть протікати постійні струми; напруга на котушці індуктивності і струм через конденсатор знову стануть рівними нулю. Схема кола після закінчення перехідного процесу ($t \to \infty$) наведена на рис. 1.10.

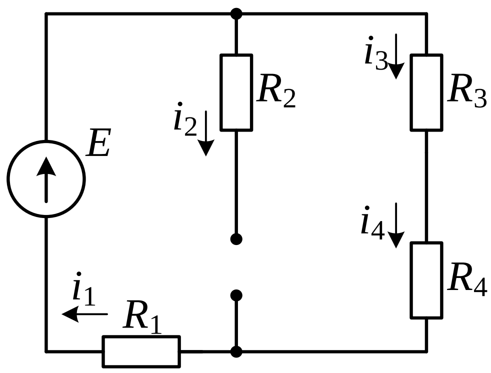


Рисунок 1.10

$$u_L\Big|_{t\to\infty} = 0;\ i_{\text{C}}\Big|_{t\to\infty} = i_2\Big|_{t\to\infty} 0,$$

тоді

$$i_1\Big|t\Big|_{t\to\infty} = i_3\Big|_{t\to\infty} = \frac{E}{R_1+R_3+R_4} = \frac{120}{40} = 3\text{ А.}$$

Конденсатор зарядиться до величини падіння напруги на резисторах R_3 та R_4. За другим законом Кірхгофа:

$$u_{\text{C}}\Big|_{t\to\infty} = i_3\Big|_{t\to\infty}\cdot(R_3+R_4) = 3\cdot 30 = 90\text{ В.}$$

За час перехідного процесу зміняться запаси енергій електричного і магнітного полів; вони матимуть такі значення:

$$W_{\text{E}}\Big|_{t\to\infty} = \frac{\text{C}u_{\text{C}}^2(\infty)}{2} = \frac{100\cdot 10^{-6}\cdot 90^2}{2} = 0{,}405\text{ Дж,}$$

$$W_{\text{М}}\Big|_{t\to\infty} = \frac{L\left(i_1\Big|_{t\to\infty}\right)^2}{2} = \frac{0{,}5\cdot 3^2}{2} = 2{,}25\text{ Дж.}$$

Результати розрахунків зведені в таблицю 1.1.

Таблиця 1.1

	i_1, А	i_C, А	i_3, А	u_C, В	u_L, В	$W_{\text{М}}$, Дж	$W_{\text{Е}}$, Дж
$t=0-$	4	0	2	40	0	4	0,08
$t=0+$	4	1,6	2,4	40	8	4	0,08
$t\to\infty$	3	0	3	90	0	2,25	0,405

2. КЛАСИЧНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

Класичний метод аналізу перехідних процесів полягає в безпосередньому інтегруванні диференціальних рівнянь, які описують зміну струмів і напруг на різних ділянках кола під час перехідного процесу. Ці рівняння складаються за законами Кірхгофа для миттєвих значень шуканих функцій (струмів або напруг), за заданих впливів, які є джерелами напруг $e(t)$ або струму $j(t)$. Складені диференціальні рівняння описують електромагнітні процеси в різні моменти часу і тому їх називають рівняннями стану.

2.1. Складання диференціальних рівнянь електричного кола

Розглянемо приклади складання таких рівнянь за умови приєднання джерела ЕРС до послідовного *RLC* кола. Приймемо, що конденсатор до комутації був незаряджений, тобто $u_C(0–) = 0$. В цьому прикладі впливом є $e(t)$, а відгуком можуть бути чотири часових функції – $i(t)$, $u_R(t)$, $u_L(t)$, $u_C(t)$.

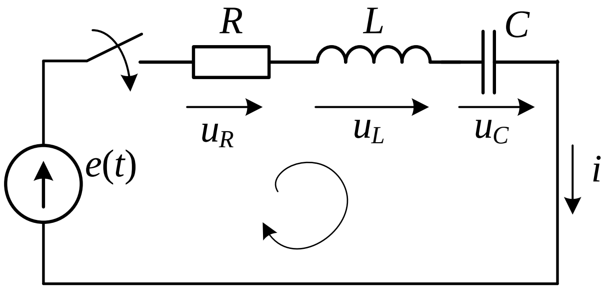


Рисунок 2.1

Для післякомутаційної схеми складаємо рівняння за другим законом Кірхгофа:

$$u_R + u_L + u_C = e(t).$$

Якщо ж відгуком кола на вплив напруги джерела $e(t)$ прийняти струм $i(t)$, отримаємо рівняння у вигляді:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = e(t)\,. \qquad (2.1)$$

Останнє рівняння – інтегро-диференціальне. Для його розв'язання з нього треба отримати диференціальне рівняння. Тому диференціюємо (2.1) і маємо такий вираз:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=\frac{de}{dt}. \qquad (2.2)$$

Після перетворень остаточно отримуємо диференціальне рівняння відносно функції $i(t)$.

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{LC}=\frac{1}{L}\frac{de}{dt},$$

або

$$\frac{d^2i}{dt^2}+2\delta\frac{di}{dt}+\omega_0^2 i=\frac{1}{L}\frac{de}{dt}, \qquad (2.3)$$

де $\delta=\frac{R}{2L}$ – коефіцієнт згасання,

$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ – резонансна кутова частота.

Складемо подібне до (2.3) рівняння, вважаючи відгуком кола на вплив напруги джерела $e(t)$ падіння напруги на резисторі, тобто

$$y(t) = u_R(t) = Ri(t).$$

Вираз для струму $i(t) = u_R/R$ підставимо в (2.3) і отримаємо:

$$\frac{d^2u_R}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_R}{dt}+\frac{u_R}{LC}=\frac{R}{L}\frac{de}{dt},$$

або

$$\frac{d^2u_R}{dt^2}+2\delta\frac{du_R}{dt}+\omega_0^2 u_R=\frac{R}{L}\frac{de}{dt}. \qquad (2.4)$$

Таким же чином, підставляючи в (2.3) вирази для струму, складені через напругу на котушці індуктивності

$$i_L=\frac{1}{L}\int u_L dt$$

або через напругу на конденсаторі

$$i_C=C\frac{du_C}{dt}.$$

Отримаємо диференціальні рівняння відносно напруги на котушці індуктивності $u_L(t)$ чи на конденсаторі $u_C(t)$. Вони мають такий вигляд:

$$\frac{d^2u_L}{dt^2}+2\delta\frac{du_L}{dt}+\omega_0^2 u_L=\frac{d^2e}{dt^2}, \qquad (2.5)$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+2\delta\frac{du_C}{dt}+\omega_0^2 u_C=\omega_0^2 e. \qquad (2.6)$$

З аналізу отриманих рівнянь можна зробити такі висновки:

– порядок похідних правої частини не більше порядку похідних лівої частини;

– коефіцієнти лівої частини рівнянь однакові, а правої – різні: порядок кожного диференціального рівняння (2.3) - (2.6) дорівнює числу незалежних накопичувальних елементів в колі.

В загальному випадку для кола з числом накопичувальних елементів n рівняння, що описують перехідні процеси в лінійних колах, мають такий вигляд:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = F(t), \qquad (2.7)$$

де x – шукана величина (струм або напруга); a_n – сталі, коефіцієнти, що визначаються параметрами елементів кола; $F(t)$ – функція часу, яка задається зовнішнім джерелом енергії, що діє в колі.

В залежності від порядку диференціальних рівнянь, що описують досліджуване коло, розрізняють кола першого, другого і вищого порядку.

2.2. Розв'язання диференціальних рівнянь електричного кола

Як відомо з математики [9], розв'язання (загальний інтеграл) лінійного неоднорідного диференціального рівняння складається із суми двох розв'язань: частинного розв'язання) $x'(t)$ вихідного неоднорідного рівняння та загального розв'язання $x''(t)$ однорідного рівняння (без правої частини):

$$x(t) = x_{\text{част}} + x_{\text{заг}}.$$

У теорії електричних кіл частинну складову $x_{\text{част}}$ називають вимушеною $x_{\text{вим}}$, а загальну $x_{\text{заг}}$ складову називають вільною складовою $x_{\text{в}}$.

Величина і характер вимушеної складової $x_{\text{вим}}$ визначається джерелом енергії і відповідає значенню шуканої функції в новому усталеному режимі після комутації. Для визначення цієї складової використовують всі відомі методи розрахунку кіл постійного або змінного струму.

Вільна складова $x_{\text{в}}$ від джерела енергії не залежить, існує тільки під час перехідного процесу та з часом згасає. Ця складова виникає через невідповідність запасів енергії електромагнітних полів безпосередньо до комутації $W(0–)$ і того запасу енергії, який обумовлений вимушеною складовою безпосередньо після комутації $W_{\text{вим}}(0+)$.

Вільна складова має вигляд:

$$x_в(t) = A_1e^{p1t} + A_2e^{p2t} + \ldots + A_ne^{pnt}, \quad (2.8)$$

де A_1, A_2,..., A_n – сталі інтегрування; p_1, p_2,..., p_n – корені характеристичного рівняння, яке отримується з однорідного диференціального заміною у ньому похідної на оператор p $d^nx/dt^n \rightarrow p^n$ [1]-[4]:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1p + a_0 = 0. \quad (2.9)$$

Корені цього характеристичного рівняння від’ємні.

Сталі інтегрування A_k визначаються за законами комутації та післякомутаційними значеннями шуканої функції та її похідних.

Загальна кількість цих значень має дорівнювати порядку диференціального рівняння.

Якщо порядок кола $n = 1$, то достатньо знати $x(0+)$;
якщо $n = 2$, то треба знати $x(0+)$ та $dx/dt\,\big|_{t=0+}$;
якщо $n = 3$, то треба знати $x(0+)$, $dx/dt\,\big|_{t=0+}$, $d^2x/dt^2\,\big|_{t=0+}$.

Характер вільної складової визначається видом коренів характеристичного рівняння і залежить від параметрів елементів кола та схеми їхнього з’єднання. Якщо корені цього рівняння дійсні, то вільна складова $x_в$ постійно згасає, і перехідний процес буде аперіодичним. За комплексно-спряжених коренів в колі буде коливальний перехідний процес. Треба зауважити, що дійсні частини коренів є від’ємними, оскільки вільна складова з часом згасає.

В класичному методі розрахунку перехідних процесів післякомутаційний режим розглядається як сума двох режимів – усталеного (вимушеного), який триває нескінченно, і вільного, який триває впродовж перехідного процесу.

$$x(t) = x_{вим}(t) + x_в(t) = x_{вим}(t) + A_1e^{p1t} + A_2e^{p2t} + \ldots + A_ne^{pnt}. \quad (2.10)$$

Оскільки принцип накладання (суперпозиції) справедливий для лінійних кіл, то такий метод розрахунку перехідних процесів може застосовуватися для такого класу кіл.

2.3. Методи складання характеристичних рівнянь

Вільна складова не залежить від джерел енергії і визначається лише структурою електричного кола та параметрів його елементів, отже корені характеристичного рівняння будуть однакові для всіх змінних функцій. Характеристичні рівняння складаються для післякомутаційної схеми з використанням різних методів [1]-[8].

В класичному методі складається система диференціальних рівнянь за законами Кірхгофа для миттєвих значень напруг і струмів. Далі шляхом виключення усіх невідомих крім шуканої отримують неоднорідне диференціальне рівняння з одним невідомим. Це рівняння використовують для складання характеристичного рівняння та знаходять його корені.

В іншому методі характеристичне рівняння можна скласти шляхом прирівнювання нулю головного визначника системи рівнянь, складених за законами Кірхгофа для вільних складових.

Найбільш простим і поширеним є метод складання характеристичного рівняння шляхом прирівнювання нулю виразу для операторного опору кола відносно будь-якої гілки.

Розглянемо приклади використання цих методів.

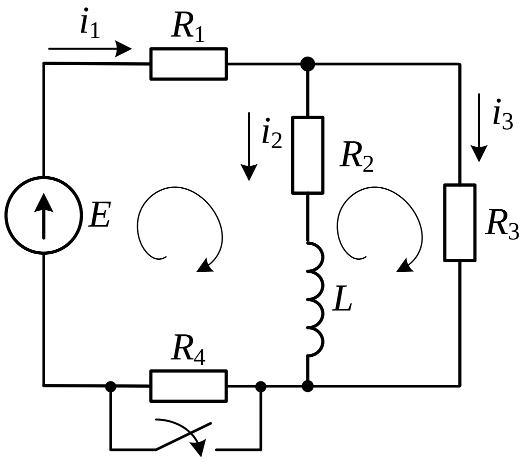


Рисунок 2.2

Складемо систему диференціальних рівнянь за законами Кірхгофа:

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0, \tag{2.11}$$

$$i_1 R_1 + i_2 R_2 + L\frac{di_2}{dt} = E, \tag{2.12}$$

$$-i_2R_2 - L\frac{di_2}{dt} + i_3R_3 = 0. \tag{2.13}$$

Розв'яжемо цю систему відносно струму i_2. Для цього спочатку виразимо струми i_1 та i_3 через шуканий струм i_2.

З рівняння (2.12) маємо:

$$i_1R_1 = -i_2R_2 - L\frac{di_2}{dt} + E$$

або

$$i_1 = \frac{E}{R_1} - \frac{i_2R_2}{R_1} - \frac{L}{R_1}\frac{di_2}{dt}.$$

З рівняння (2.13) отримуємо:

$$i_3R_3 = i_2R_2 + L\frac{di_2}{dt},$$

$$i_3 = \frac{i_2R_2}{R_3} + \frac{L}{R_3}\frac{di_2}{dt}.$$

Вирази струмів i_1 та i_3 підставимо у (2.11) і отримаємо:

$$-\frac{E}{R_1} + \frac{i_2R_2}{R_1} + \frac{L}{R_1}\frac{di_2}{dt} + i_2 + \frac{i_2R_2}{R_3} + \frac{L}{R_3}\frac{di_2}{dt} = 0,$$

$$\frac{i_2R_2}{R_1} + \frac{i_2R_2}{R_3} + \left(\frac{L}{R_1} + \frac{L}{R_3}\right)\frac{di_2}{dt} + i_2 = \frac{E}{R_1}.$$

Отримали неоднорідне диференціальне рівняння відносно змінної i_2:

$$\left(\frac{L}{R_1} + \frac{L}{R_3}\right)\frac{di_2}{dt} + i_2\left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_3} + 1\right) = \frac{E}{R_1}.$$

Характеристичне рівняння має такий вигляд:

$$p\left(\frac{L}{R_1} + \frac{L}{R_3}\right) + \left(\frac{R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3}{R_1R_3}\right) = 0$$

або

$$pL\left(\frac{R_1 + R_3}{R_1R_3}\right) + \left(\frac{R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3}{R_1R_3}\right) = 0.$$

Остаточно, після множення правої і лівої частини на R_1R_3 маємо:

$$pL(R_1 + R_3) + R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3 = 0.$$

Корінь цього рівняння

$$p = -\frac{R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3}{L(R_1 + R_3)}.$$

$$[p] = \frac{1}{\text{с}}.$$

У другому методі складання характеристичного рівняння необхідно записати систему диференціальних рівнянь за законами Кірхгофа для вільних складових. В цій системі рівнянь похідні від змінних замінюються на оператор p, а інтеграли – на $1/p$.

Тобто

$$\frac{di_{k\text{в}}}{dt} \to pi_{k\text{в}}, \qquad \int i_{k\text{в}} dt \to \frac{i_{k\text{в}}}{p}.$$

Для вищенаведеного прикладу система рівнянь для вільних складових має вигляд:

$$\begin{cases} i_{1\text{в}}R_1 + i_{2\text{в}}R_2 + pLi_{2\text{в}} \quad + 0 \quad = 0, \\ 0 \quad - i_{2\text{в}}R_2 - pLi_{2\text{в}} + \; i_{3\text{в}}R_3 \; = 0, \\ i_{1\text{в}} \qquad - i_{2\text{в}} \qquad - i_{3\text{в}} \quad = 0. \end{cases}$$

Вираз для головного визначника цієї системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 & (R_2 + pL) & 0 \\ 0 & -(R_2 + pL) & R_3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = R_1(R_2 + pL) + R_1R_3 + (R_2 + pL)R_3 =$$

$$= pL(R_1 + R_3) + R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3.$$

Характеристичне рівняння при цьому повністю збігається з отриманим раніше за використання класичного методу:

$$pL(R_1 + R_3) + R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3 = 0.$$

Очевидно, що і корінь p має той самий вигляд:

$$p = -\frac{R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3}{L(R_1 + R_3)}.$$

В третьому методі характеристичне рівняння отримують з узагальненого операторного опору $Z(p)$, записаного відносно будь-якої пари затискачів. Цей опір отримують з комплексного опору шляхом заміни множника $j\omega$ на оператор p. Тоді операторні зображення опорів елементів матимуть вигляд:

$$Z_R(p) = R, \; Z_L(p) = pL, \; Z_C(p) = 1/pC.$$

Для отримання характеристичного рівняння вираз опору $Z(p)$ прирівнюють до нуля.

Для вищенаведеного прикладу запишемо рівняння відносно розриву в другій гілці:

$$Z_2(p) = R_2 + pL + \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3 + pL(R_1 + R_3)}{R_1 + R_3}.$$

Прирівнявши вираз $Z_2(p)$ до нуля отримаємо характеристичне рівняння:

$$R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3 + pL(R_1 + R_3) = 0.$$

Корінь його є таким самим, як і за використання попередніх методів складання характеристичного рівняння:

$$p = -\frac{R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3}{L(R_1 + R_3)}.$$

Порядок диференціального рівняння, яким описується перехідний процес, і, відповідно, степінь характеристичного рівняння та кількість його коренів визначаються кількістю незалежних накопичувальних елементів (котушка індуктивності L та конденсатор з ємністю C). Якщо електричне коло містить паралельно з'єднані конденсатори C_1, C_2,…, C_n, або послідовно з'єднані котушки L_1, L_2,…, L_k , то у розрахунках перехідних процесів вони мають бути замінені одним еквівалентним елементом $C_е = C_1+C_2+…+ C_n$ або $L_е = L_1 + L_2 + … + L_k$.

2.4. Визначення сталих інтегрування

Сталі інтегрування визначають на основі післякомутаційних початкових умов для шуканої функції та її похідних. При цьому використовують закони Кірхгофа і закони комутації.

В колах першого порядку маємо характеристичне рівняння першого степеня з одним коренем, який є дійсним від'ємним числом. При цьому вільна складова має вигляд експоненти, що згасає з часом:

$$x_в(t) = Ae^{pt}.$$

Безпосередньо після комутації в момент часу $t = 0+$ цей вираз має вигляд:

$$x_в(0+) = Ae^{p0+} = Ae^0 = A,$$

тобто стала інтегрування для цього випадку визначається зі значення вільної складової:

$$A = x_в(0+).$$

В колах другого порядку характеристичні рівняння мають другий степінь. Отже ці рівняння мають два корені, і тому вираз для вільної складової буде мати вигляд:

$$x_в(t) = A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t}.$$

Для різного виду коренів характеристичного рівняння цей вираз може виглядати по різному.

У випадку, коли корені рівняння p_1, p_2 дійсні і різні, вільна складова є сумою двох експонент, що мають різне згасання, тобто згасають з різною швидкістю:

$$p_1 = -\delta + \theta,\ p_2 = -\delta - \theta,$$
$$x_{\text{в}}(t) = A_1 e^{(-\delta + \theta)t} + A_2 e^{(-\delta - \theta)t},$$

що свідчить про те, що в колі спостерігається аперіодичний перехідний процес.

Для визначення двох сталих інтегрування треба мати значення вільної складової в першу мить після комутації $x_{\text{в}}(0+)$ та її похідної для $t = 0+$:

$$\left.\frac{dx_{\text{в}}}{dt}\right|_{t = 0+}.$$

Прості розрахунки дозволяють скласти таку систему рівнянь:

$$x_{\text{в}}(0+) = A_1 e^{0+} + A_2 e^{0+} = A_1 + A_2.$$
$$\left.\frac{dx_{\text{в}}}{dt}\right|_{t = 0+} = p_1 A_1 e^{0+} + p_2 A_2 e^{0+} = p_1 A_1 + p_2 A_2.$$

Спільне розв’язання цих рівнянь дозволяє отримати обидві сталі інтегрування A_1 і A_2.

Якщо корені характеристичного рівняння є дійсними і рівними ($p_1 = p_2 = -\delta$) вираз для вільної складової набуває вигляду:

$$x_{\text{в}}(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\delta t}.$$

Це рівняння граничного аперіодичного перехідного процесу, що згасає зі швидкістю δ. У цьому випадку, як і у попередньому, сталі інтегрування можна визначити використавши значення для $t = 0+$ вільної складової $x_{\text{в}}(0+)$ та її похідної $\left.\frac{dx_{\text{в}}}{dt}\right|_{t = 0+}$.

$$\frac{dx_в}{dt} = -\delta A_1 e^{-\delta t} + A_2 e^{-\delta t} - \delta A_2 t e^{-\delta t}.$$

Отже

$$x_в(0+) = (A_1 + A_2 \cdot 0)e^{0t} = A_1,$$

$$\left.\frac{dx_в}{dt}\right|_{t=0+} = -\delta A_1 + A_2.$$

Ці два рівняння дають можливість знайти сталі інтегрування.

У випадку комплексно спряжених коренів $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_в$ вільна складова має коливальний характер та описується виразом:

$$x_в(t) = A_1 e^{(-\delta + j\omega_в)t} + A_2 e^{(-\delta - j\omega_в)t} = Ae^{-\delta t}\sin(\omega_в t + \psi).$$

У виразі δ – коефіцієнт згасання; $\omega_в$ – частота вільних коливань.

І у цьому випадку треба знаходити дві сталі інтегрування: A та ψ. Для їх визначення треба мати величину самої вільної складової та її похідної в першу мить після комутації t = 0+.

Вільна складова в момент t = 0+:

$$x_в(0+) = A_1 e^0 \sin\psi = A_1 \sin\psi, \tag{2.14}$$

а її похідна:

$$\frac{dx_в}{dt} = -A\delta e^{-\delta t}\sin(\omega_в t + \psi) + A\omega_в e^{-\delta t}\cos(\omega_в t + \psi)$$

в момент t = 0+ матиме вигляд:

$$\left.\frac{dx_в}{dt}\right|_{t=0+} = -A\delta\sin\psi + A\omega_в\cos\psi. \tag{2.15}$$

Спільне розв’язання рівнянь (2.14) та (2.15) дає значення сталих інтегрування A та ψ.

2.5. Алгоритм розрахунку перехідних процесів класичним методом

Розрахунок перехідних процесів класичним методом проводиться в такій послідовності:

1. Визначають незалежні початкові умови з розрахунку електричного кола до комутації (t = 0–).

2. Складають для кола після комутації диференціального рівняння відносно шуканої функції та представляють його розв’язання у вигляді суми двох складових – вимушеної $x_{вим}$ та вільної $x_в$.

3. Виконують розрахунок вимушеної складової з аналізу нового усталеного режиму в післякомутаційному колі (t→∞).

4. Складають характеристичне рівняння та визначають його корені.

5. Складають аналітичний вираз для вільних складових в залежності від виду коренів характеристичного рівняння.

6. Виконують розрахунок залежних початкових умов, які необхідні для визначення сталих інтегрування.

7. Визначають сталі інтегрування та складають вираз для вільної складової.

8. Складають остаточний вираз шуканої функції у вигляді суми вимушеної та вільної складових.

2.6. Перехідні процеси в колах першого порядку

2.6.1. *Перехідні процеси в послідовному колі RL*

Розглянемо послідовне коло RL, до якого в момент комутації (t = 0) приєднується джерело живлення.

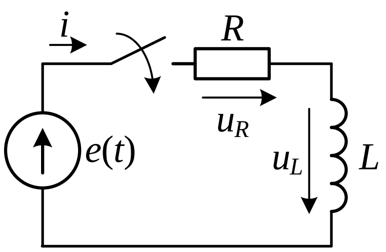


Рисунок 2.3

За такої постановки задачі маємо нульові початкові умови, тобто
$i(0–) = u_R(0–) = u_L(0–) = 0$.

Для післякомутаційного кола рівняння за другим законом Кірхгофа для миттєвих значень струму та напруг має вигляд:

$$u_L + u_R = e(t), \tag{2.16}$$

де $u_R = iR$, $u_L = Ldi/dt$.

З цього рівняння отримуємо неоднорідне диференціальне рівняння першого прядку, де шуканою функцією є $x(t) = i(t)$:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = e(t). \tag{2.17}$$

Представимо розв'язок цього диференціального рівняння у вигляді суми двох складових – вимушеної $i_{\text{вим}}$ та вільної $i_{\text{в}}$:

$$i(t) = i_{\text{вим}} + i_{\text{в}}. \tag{2.18}$$

Вимушена складова $i_{\text{вим}}$ задається джерелом живлення і розраховується з нового усталеного режиму після комутації ($t \to \infty$).

Більш детально розглянемо вільну складову. Її визначимо з однорідного диференціального рівняння:

$$Ri_{\text{в}} + L\frac{di_{\text{в}}}{dt} = 0. \tag{2.19}$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$R + Lp = 0. \tag{2.20}$$

Корінь цього рівняння $p = –R/L$.

Розв'язання рівняння (2.19) є експонентою, що згасає з часом:

$$i_{\text{в}}(t) = Ae^{pt} = Ae^{-tR/L}. \tag{2.21}$$

A – невідома стала інтегрування, для визначення якої використовується перший закон комутації.

Величина

$$\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{L}{R}$$

називається сталою часу перехідного процесу і вимірюється в секундах.

$$[\tau_L] = \frac{\text{Гн}}{\text{Ом}} = \frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{Ом}} = \text{с}.$$

Чим більшою є ця величина, тим триваліший перехідний процес. З урахуванням сталої часу вільну складову струму записують так:

$$i_{\text{в}}(t) = Ae^{-t/\tau}. \tag{2.22}$$

Величина обернена сталій часу

$$d = \frac{R}{L} = \frac{1}{\tau} = |p|$$

називається коефіцієнтом згасання кола RL.

Знак «мінус» у показнику степеня свідчить про те, що з часом вільна складова згасає. Хоча теоретично перехідний процес триває нескінченно довго на практиці прийнято вважати перехідний процес закінченим, коли вільна складова зменшується до 0,01 від свого початкового значення, а новий усталений режим досягає 0,99 від необхідного. Практична тривалість перехідного процесу знаходиться зі співвідношення:

$$0{,}01 = e^{-t_{\text{пп}}/\tau}, \quad ln0{,}01 = -4{,}6 = -\frac{t_{\text{пп}}}{\tau},$$

звідки отримуємо:

$$t_{\text{пп}} = 4{,}6\tau. \qquad (2.23)$$

В залежності від потрібної точності розрахунків в інженерній практиці

$$t_{\text{пп}} = (3 - 4{,}6)\tau.$$

Побудуємо графік функції $e^{-t/\tau}$, використовуючи дані таблиці 2.1:

Таблиця 2.1

t/τ	0	1	2	3	4,6
$e^{-t/\tau}$	1	0,37	0,13	0,05	0,01

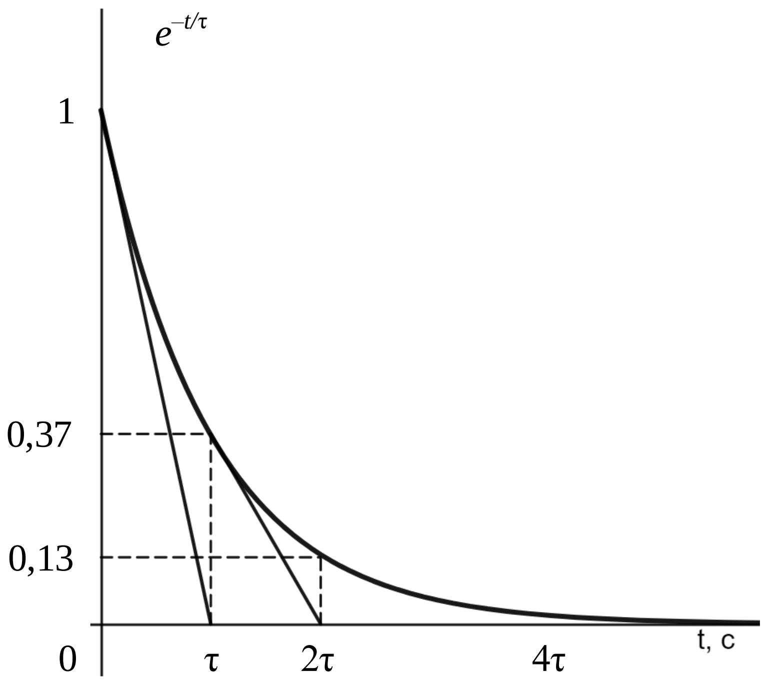


Рисунок 2.4

З цих даних випливає, що стала часу τ – це такий проміжок часу, за який вільна складова зменшується в e = 2,718 раза.

Сталу часу τ можна визначити графічно. Довжина піддотичної для дотичної, проведеної в будь-якій точці експоненти, дорівнює сталій часу. Для знаходження сталої інтегрування з (2.21) запишемо вираз для вільної складової для t = 0+:

$$i_в(0+) = Ae^0 = A. \tag{2.24}$$

Повне розв'язання для струму i в перехідному процесі для t = 0+ має такий вигляд:

$$i(0+) = i_{вим}(0+) + A. \tag{2.25}$$

За першим законом комутації струм в котушці індуктивності стрибкоподібно миттєво змінитися не може, тому:

$$i_L(0–) = i_L(0+) = 0 = i_{вим}(0+) + A,$$

$$A = –i_{вим}(0+).$$

Значення вимушеної складової залежить від конкретних умов задачі, що буде розглянуте далі.

Коротке замикання в колі *RL*

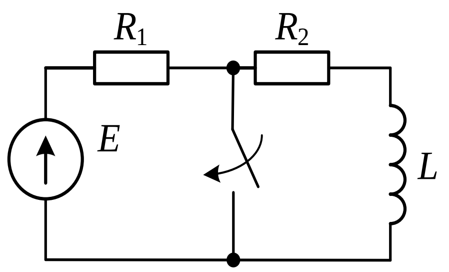


Рисунок 2.5

До комутації за t = 0– до кола з послідовно з'єднаними елементами R_1, R_2, L було підключено джерело постійної ЕРС.

Оскільки в колах постійного струму опір індуктивного елементу X_L = 0, то струм в колі до комутації:

$$i_L(0-) = \frac{E}{R_1 + R_2}. \tag{2.26}$$

Напруга на котушці індуктивності за постійного струму:

$$u_L(0-) = 0.$$

Після комутації це коло розпадається на два незалежних:

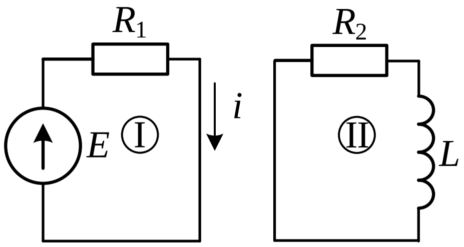


Рисунок 2.6

В першому перехідного процесу не буде, оскільки в його складі немає накопичувальних елементів. Тут миттєво встановився струм величиною $i = E/R_1$.

Для другого кола складаємо диференціальне рівняння відносно струму $i_L(t)$. Оскільки джерел живлення в цьому колі немає, то права частина цього рівняння дорівнюватиме нулю:

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0. \tag{2.27}$$

Його розв'язання не містить вимушеної складової і тому перехідний процес буде визначатися виключно вільною складовою $i_{L\text{в}}(t)$. Тобто в даному випадку

$$i_L(t) = i_{L\text{в}}(t) = Ae^{-t/\tau}. \tag{2.28}$$

Стала часу визначається виразом:

$$\tau = \frac{L}{R_2}. \tag{2.29}$$

Сталу інтегрування знаходимо за використання першого закону комутації:

$$i_L(0-) \ = \ i_L(0+) \ = \frac{E}{R_1 + R_2} = Ae^0 = A. \tag{2.30}$$

Вираз для струму в періодичному процесі

$$i_L(t) \ = \frac{E}{R_1 + R_2}e^{-t/\tau}. \tag{2.31}$$

Напруга на котушці індуктивності під час перехідного процесу:

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = L\frac{E}{R_1 + R_2}\left(-\frac{R_2}{L}\right)e^{-t/\tau} = -\frac{ER_2}{R_1 + R_2}e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{2.32}$$

Монотонний спад струму в колі після комутації пов'язаний з тим, що енергія магнітного поля в котушці індуктивності миттєво змінитися не може. ЕРС самоіндукції, яка обумовлена спаданням магнітного потоку, прагне підтримати струм в котушці за рахунок зникаючого магнітного поля. По мірі того, як енергія магнітного поля розсіюється, перетворюючись в тепло в резисторі R_2, струм буде наближатися до нульового значення.

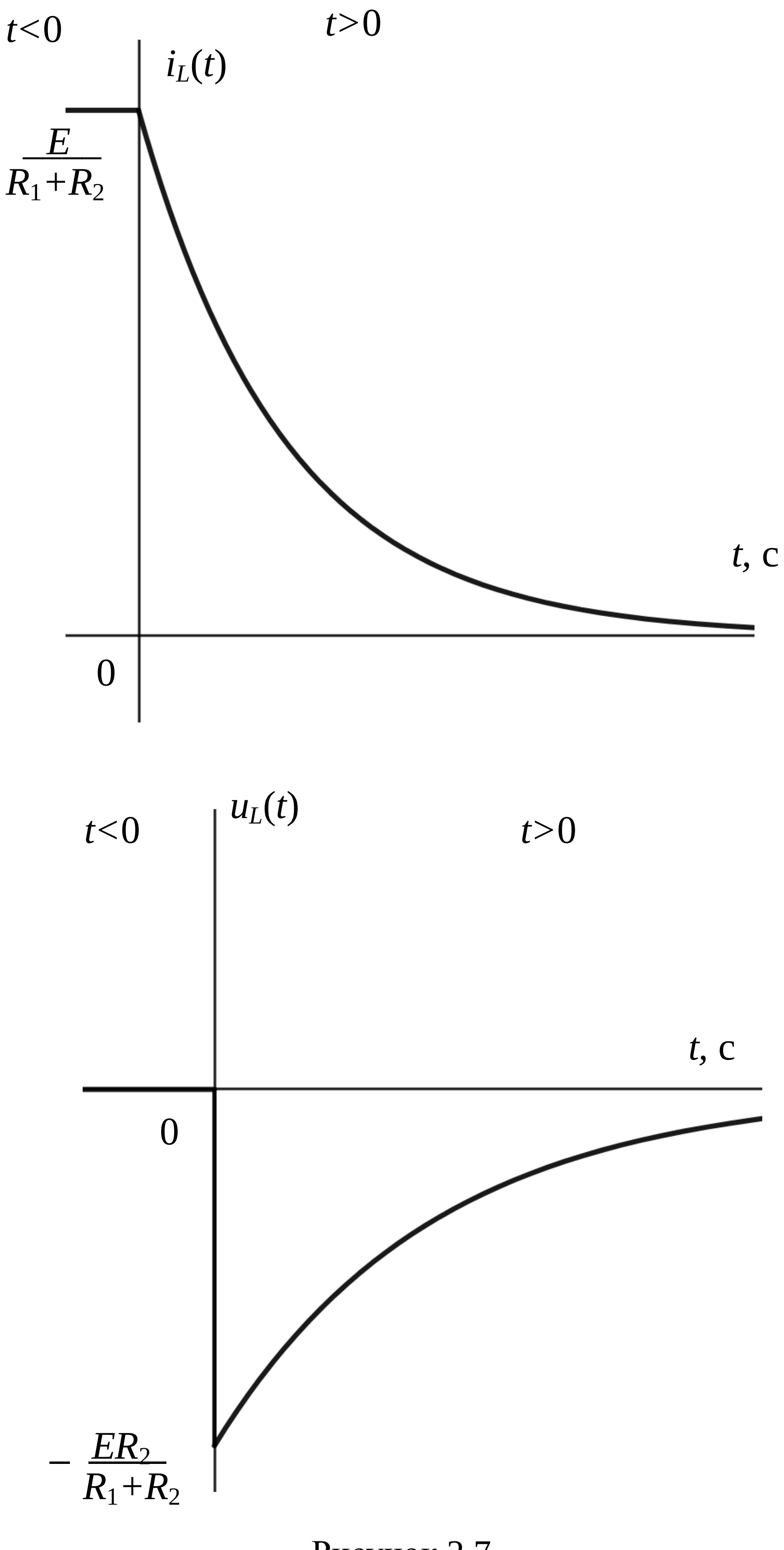


Рисунок 2.7

Приєднання до послідовного кола *RL* джерела постійної напруги

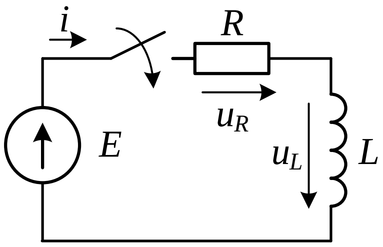


Рисунок 2.8

До комутації за $t = 0–$ в колі маємо нульові початкові умови:

$i_L(0–) = u_R(0–) = u_L(0–) = 0.$

Для післякомутаційного кола (ключ замкнений) для $t > 0$ складаємо диференціальне рівняння відносно шуканої величини струму в котушці індуктивності $i_L(t)$:

$$LdiLdt+RiL=E. \qquad (2.33)$$

Розв’язання цього рівняння має вигляд:

$$i_L(t) = i_{L_{\text{вим}}} + i_{L_{\text{в}}}. \qquad (2.34)$$

Вимушена складова струму визначається з усталеного режиму після комутації:

$$i_{L_{\text{вим}}} = \frac{E}{R}. \qquad (2.35)$$

Перетворюючи диференціальне рівняння (2.33) в однорідне отримуємо характеристичне рівняння:

$$R + Lp = 0. \qquad (2.36)$$

Корінь цього рівняння:

$$p = –R/L. \qquad (2.37)$$

Вираз вільної складової шукаємо у вигляді:

$$i_{\text{в}}(t) = Ae^{pt}, \qquad (2.38)$$

де A – стала інтегрування. Для її визначення скористаємось першим законом комутації і складемо рівняння (2.34) для $t = 0+$:

$$i_L(0-) \ = \ i_L(0+) \ = 0 = \frac{E}{R} + Ae^0, \qquad (2.39)$$

отже

$$A = -\frac{E}{R},$$

і вільна складова струму набуває вигляду:

$$i_{L\text{в}}(t) \ = -\frac{E}{R}e^{pt} = -\frac{E}{R}e^{-t/\tau}. \qquad (2.40)$$

Остаточний вираз шуканої функції $i_L(t)$:

$$i_L(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{pt} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \tag{2.41}$$

Отримавши базову функцію струму $i_L(t)$ знаходимо функції $u_R(t)$ та $u_L(t)$:

$$u_R(t) = Ri_L(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \tag{2.42}$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = L\left(-\frac{E}{R}\right)\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-t/\tau} = Ee^{-t/\tau}. \tag{2.43}$$

На рис. 2.9 *а*, *б* наведені графіки функцій $i_L(t)$ зі складовими та $u_L(t)$ у перехідному процесі.

Струм в індуктивності за весь час перехідного процесу змінюється за експоненціальним законом до усталеного значення $i_{L\text{вим}}(t) = \frac{E}{R}$. Такий характер функції $i_L(t)$ можна пояснити тим, що в початковий момент $t = 0+$ ЕРС самоіндукції набуває значення

$$e_L = -L\frac{di_L}{dt} = -E$$

і повністю компенсується ЕРС джерела напруги, тому і струм в цей момент дорівнює нулю. З плином часу ЕРС самоіндукції зменшується, і величина струму асимптотично наближається до вимушеного значення (2.35).

Напруга на індуктивності в перший момент після комутації збільшується стрибком, миттєво від нуля до $u_L(0+) = E$. Це пояснюється тим, що у момент $t = 0+$ напруга на резисторі $u_R(0+) = Ri_L(0+) = 0$, і вся напруга джерела витрачається на подолання ЕРС самоіндукції. З часом напруга на індуктивності зменшується за експоненціальним законом, асимптотично наближуючись до нуля. Графік часової залежності напруги на резисторі $u_R(t)$ ідентичний графіку функції $i_L(t)$.

Напруга на індуктивності в перший момент після комутації змінюється миттєво стрибком від $u_L(0-) = 0$ до значення

$$u_L(0+) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}.$$

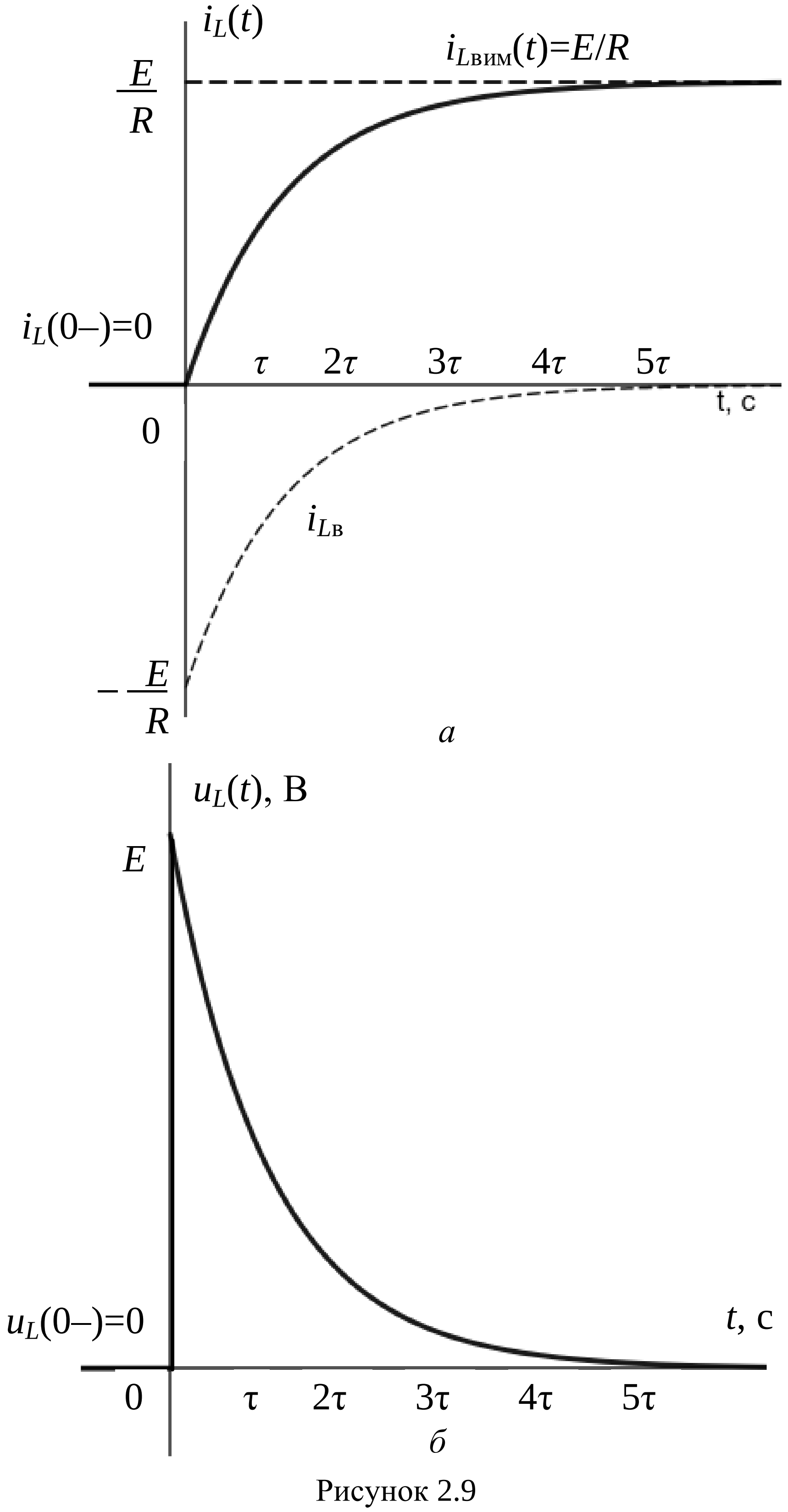


Рисунок 2.9

Це пояснюється тим, що в колі для підтримки струму на докомутаційному рівні ЕРС самоіндукції має бути на рівні

$$e_L(0+) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2},$$

а напруга

$$u_L(0+) = -e_L(0+) = -\frac{ER_2}{R_1 + R_2}.$$

Приєднання послідовного кола *R-L* до джерела синусоїдальної напруги

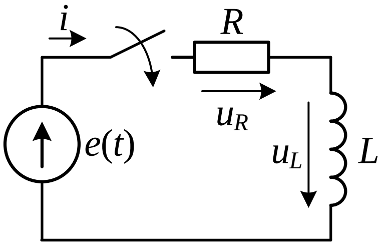


Рисунок 2.10

До кола *R-L* за нульових початкових умов приєднується джерело синусоїдальної напруги ЕРС:

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e).$$

Для кола після комутації диференціальне рівняння відносно струму має вигляд:

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = E_m \sin(\omega t + \psi_e). \tag{2.44}$$

Його розв’язання складається з двох доданків:

$$i_L(t) = i_{L_{\text{вим}}}(t) + i_{L_{\text{в}}}(t). \tag{2.45}$$

Використовуючи комплексний метод розрахунку кіл гармонійного струму знаходимо вимушену складову цього струму:

$$\underline{I}_{mL\text{вим}} = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_\text{e}} = \frac{E_m e^{j\psi_e}}{R + j\omega L} = \frac{E_m e^{j\psi_\text{e}}}{Ze^{j\varphi}},$$

де $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ – модуль комплексного опору ділянки *RL*,

а кут зсуву фаз $\varphi = arctg\frac{\omega L}{R}$ є аргументом комплексного опору ділянки *RL*.

Комплексна амплітуда вимушеної складової струму:

$$\underline{I}_{mL\text{вим}} = \frac{E_m}{Z} e^{j(\psi_\text{e} - \varphi)} = I_{mL\text{вим}} e^{j(\psi_\text{e} - \varphi)} = I_m e^{j\psi_\text{i}},$$

де амплітуда струму $I_{mL\text{вим}} = \frac{E_m}{Z}$, а початкова його фаза $\psi_\text{i} = \psi_\text{e} - \varphi$.

Запишемо гармонійну функцію $i_{L_{\text{вим}}}(t)$:

$$i_{L_{\text{вим}}}(t) = I_{mL\text{вим}} \sin(\omega t + \psi_\text{i}). \tag{2.46}$$

Значення вимушеної складової в першу мить після комутації (*t* = 0+):

$$i_{L_{\text{вим}}}(0+) = I_{mL\text{вим}} \sin\psi_\text{i}. \tag{2.47}$$

Вільна складова не залежить від наявності і характеру джерела ЕРС і тому для цього кола вона має вигляд:

$$i_{L\text{в}}(t) = Ae^{pt} = Ae^{-t/\tau}.$$

Із характеристичного рівняння $R + Lp = 0$ знаходимо його корінь

$$p = -R/L.$$

З початкових умов і законів комутації визначимо сталу інтегрування A.

За першим законом комутації $i_L(0-) = i_L(0+) = 0$. Тому має виконуватись така умова:

$$i_L(0-) = i_L(0+) = 0 = i_{L_{\text{вим}}}(0+) + i_{L_{\text{в}}}(0+),$$

тобто

$$0 = I_{mL\text{вим}} \sin \psi_{\text{i}} + Ae^0,$$

отже

$$A = -I_{mL\text{вим}} \sin \psi_{\text{i}}.$$

Тому вільну складову можна записати так:

$$i_{L\text{в}}(t) = -I_{mL\text{вим}} \sin \psi_{\text{i}}\, e^{pt} = -I_{mL\text{вим}} \sin \psi_{\text{i}}\, e^{-t/\tau},$$

$$i_{L\text{в}}(t) = -I_{mL\text{вим}} \sin(\psi_{\text{e}} - \varphi)\, e^{-t/\tau}. \qquad (2.48)$$

Таким чином, струм $i_L(t)$ у перехідному процесі описується таким виразом:

$$i_L(t) = I_{mL\text{вим}} \sin(\omega t + \psi_{\text{e}} - \varphi) - I_{mL\text{вим}} \sin(\psi_{\text{e}} - \varphi)\, e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (2.49)$$

Використовуючи (2.47), знаходимо напругу на індуктивному елементі:

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = \omega L I_{mL\text{вим}} \sin\left(\omega t + \psi_{\text{e}} - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) -$$

$$-I_{mL\text{вим}} R \sin(\psi_{\text{e}} - \varphi)\, e^{-\frac{t}{\tau}} =$$

$$= U_{mL\text{вим}} \sin\left(\omega t + \psi_{\text{e}} - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) - U_{L\text{в}} \sin(\psi_{\text{e}} - \varphi)\, e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (2.50)$$

Напруга на активному опорі в перехідному процесі змінюється пропорційно струму:

$$u_R(t) = Ri_L(t) =$$

$$= RI_{mL\text{вим}} \sin(\omega t + \psi_{\text{e}} - \varphi) - RI_{mL\text{вим}} \sin(\psi_{\text{e}} - \varphi)\, e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (2.51)$$

Оскільки вирази (2.49) та (2.51) ідентичні подальший аналіз розрахунків буде стосуватися функцій $i_L(t)$ та $u_L(t)$.

З виразів (2.49) - (2.51) випливає, що інтенсивність перехідного процесу залежить від початкової фази коливання ЕРС джерела живлення ψ_e, яка визначає величини струму та напруг на елементах кола в момент комутації (t = 0).

Розглянемо два крайні випадки.

Перший випадок можна спостерігати за умови, коли в момент комутації $\psi_i = 0$, тобто $\psi_e = \varphi$, і вимушена складова струму в першу мить після комутації, згідно з (2.47), дорівнює нулю. При цьому вільна складова струму буде відсутня $i_{L\text{в}}(\mathrm{t}) = 0$, а, отже, в колі перехідного процесу не буде, і коло одразу переходить до нового усталеного режиму. У цьому випадку маємо повну відповідність запасу енергії магнітного поля в індуктивному елементі безпосередньо перед комутацією, що визначається величиною i_L(0–), тому запасу енергії магнітного поля безпосередньо після комутації, що визначається вимушеною складовою струму $i_{L\text{вим}}$(0+):

$$W_{\text{м}}(0-) = \frac{Li_L^2(0-)}{2} = W_{\text{м}}(0+) = \frac{Li_L^2(0+)}{2} = 0.$$

Графіки функцій $i_L(t)$ та $u_L(t)$ наведені на рисунку 2.11.

Другий випадок спостерігається за умови включення джерела гармонійної ЕРС в момент, коли вимушена складова струму досягає максимального значення. Це буде, коли $\psi_\mathrm{i} = \pm\frac{\pi}{2}$, а $\psi_\mathrm{e} = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$.

Вільна складова струму за таких умов в момент комутації також буде мати максимальне значення, що призведе по появи в колі найбільш напруженого перехідного процесу.

Примітка

В цьому випадку $\left(\psi_\mathrm{i} = \pm\frac{\pi}{2}\right)$ за t = 0+ вимушена складова має максимальне (амплітудне) значення і тому енергія магнітного поля має бути максимальною, але за нульових початкових умов i_L(0–) = 0 запас енергії відсутній. Тобто за таких умов спостерігається найбільша невідповідність між енергією, яка визначається вимушеною складовою, і енергією в останню мить перед комутацією. Тому в колі і виникає найбільш інтенсивний перехідний процес.

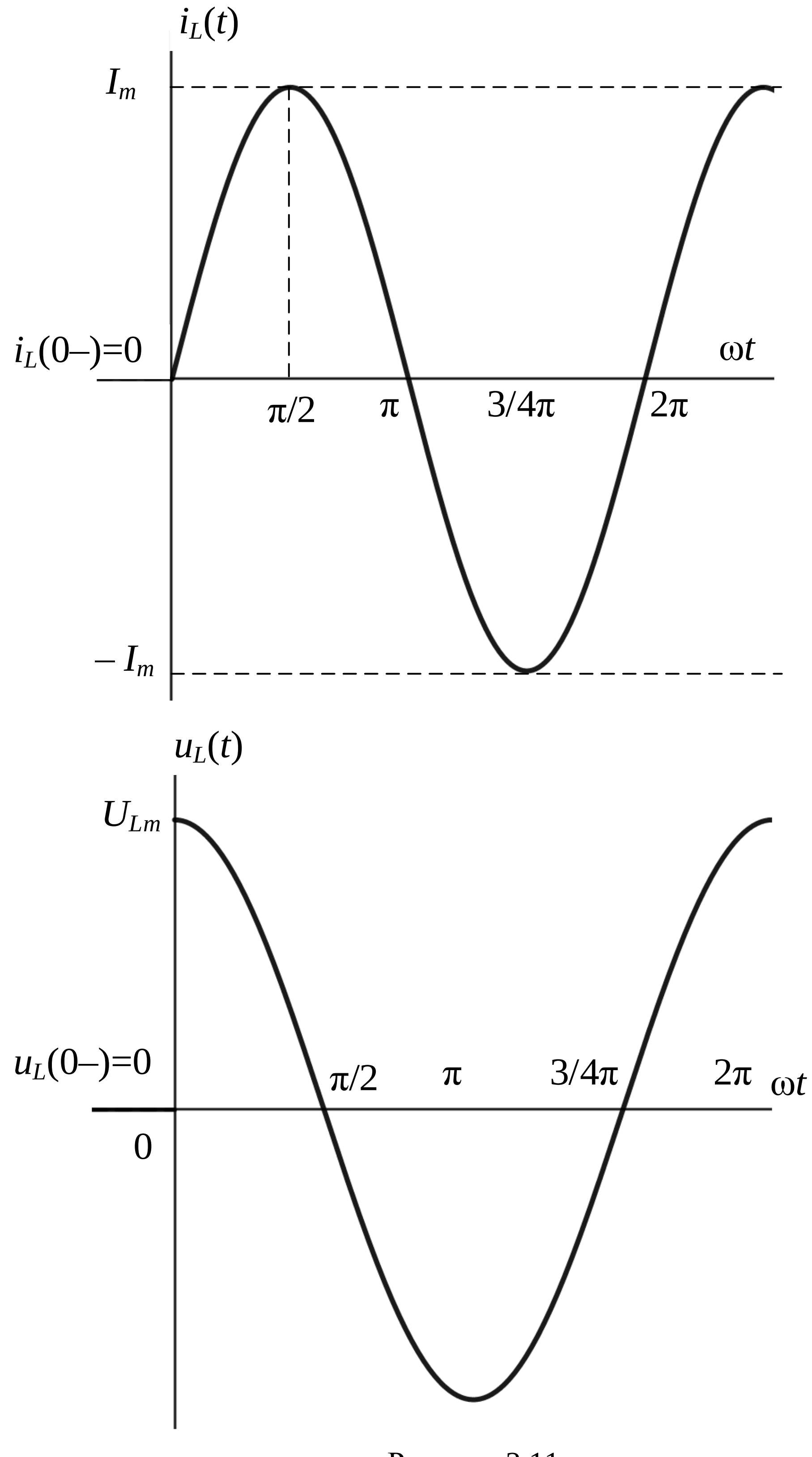


Рисунок 2.11

Вираз для струму приймає вигляд:

$$i_L(t) = I_{\text{m}L\text{вим}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - I_{\text{m}L\text{вим}} e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2.52}$$

для випадку $\psi_i = \dfrac{\pi}{2}$,

$$i_L(t) = I_{\text{m}L\text{вим}} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + I_{\text{m}L\text{вим}} e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2.53}$$

для випадку $\psi_i = -\frac{\pi}{2}$.

На рисунку 2.12 наведений графік струму $i_L(t)$ згідно рівняння (2.52) за умови, що стала часу кола значно більша за період гармонійної функції, тобто $\tau >> T$.

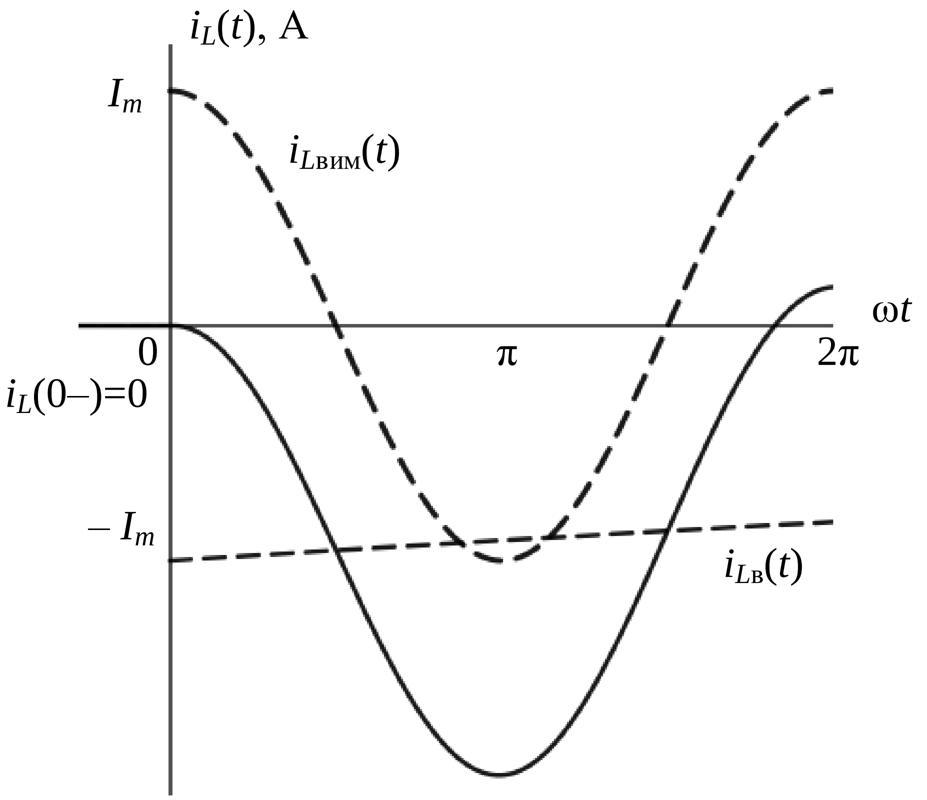


Рисунок 2.12

Під час перехідного процесу струм в колі не є періодичною функцією часу і тому змінюється не за гармонійним законом. Початкове значення вільної складової струму дорівнює амплітудному значенню вимушеної складової. За умови, що $\tau >> T$, за час, що відповідає половині періоду коливань напруги джерела, вимушена складова сягає амплітудного значення, а вільна складова суттєво не зменшиться. Тому в кінці першого півперіоду максимальне значення струму перехідного процесу I_{max} може перевищувати амплітуду усталеного струму майже в два рази. У граничному випадку, коли $\tau \to \infty$, тобто за відсутності активного опору ($R = 0$), максимальне значення струму буде прагнути до подвоєного амплітудного $2I_{\text{m}}$. В реальних колах ($R \neq 0$), вільна складова завжди згасає, і тому під час розрахунків експлуатаційних режимів роботи апаратури приймають $I_{\text{max}} = 1{,}8I_m$. Слід зважати на те, що збільшення струму майже вдвічі може призвести до небажаних наслідків.

Складемо вираз для напруги на індуктивному елементі під час перехідного процесу:

$$u_L(t) = \omega L I_{mL\text{вим}} \sin(\omega t + \pi) + I_{mL\text{вим}} R \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{2.54}$$

для випадку $\psi_i = \frac{\pi}{2}$,

$$u_L(t) = \omega L I_{mL\text{вим}} \sin(\omega t) - I_{mL\text{вим}} R \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{2.55}$$

для випадку $\psi_i = -\frac{\pi}{2}$.

Часова залежність напруги $u_L(t)$ згідно з рівнянням (2.55) наведена на рисунку 2.13. При цьому проілюстрований випадок, коли $R >> \omega L$. В цьому випадку в момент комутації на індуктивному елементі буде отриманий значний стрибок напруги від нуля до $|u_L(0+)| = I_{mL\text{вим}} R$, що може призвести до пробою ізоляції. Тому при виборі ізоляційних матеріалів для електроустановок треба брати до уваги ці можливі стрибки напруги в першу мить після комутації.

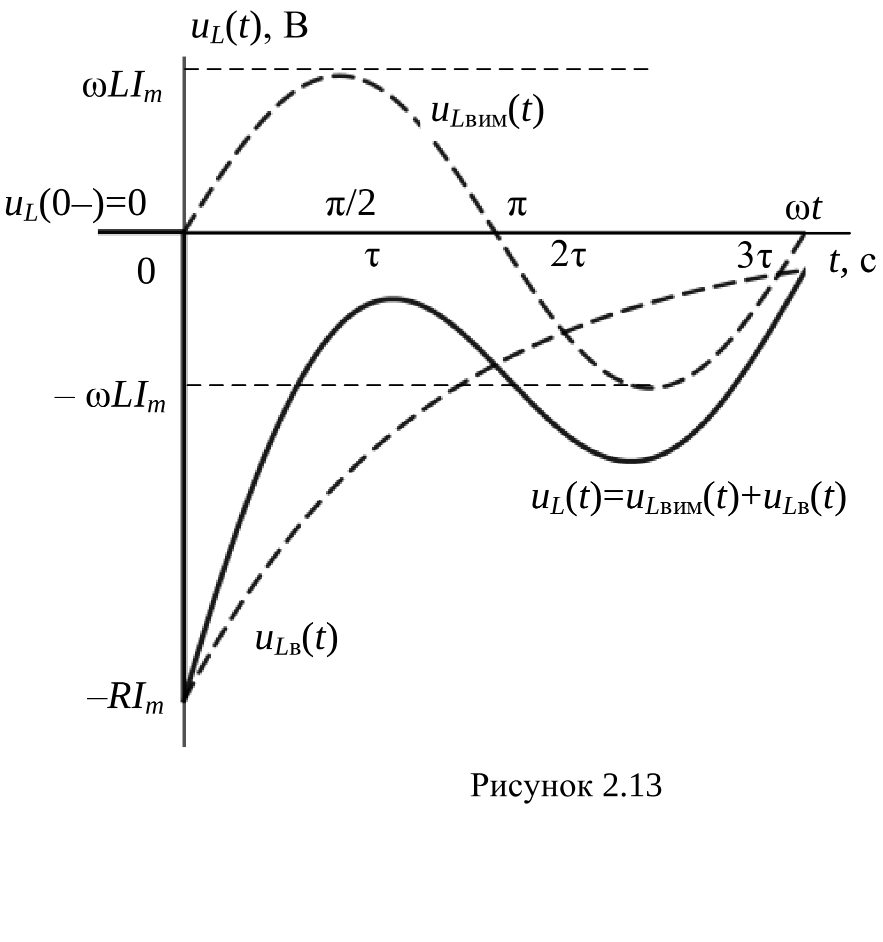


Рисунок 2.13

2.6.2. *Перехідні процеси в послідовному RC колі*

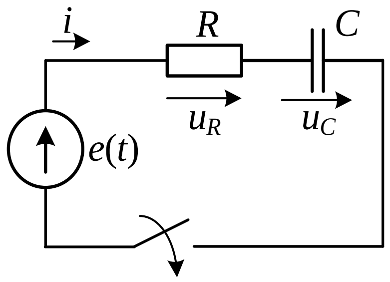


Рисунок 2.14

В момент $t = 0$ коло, складене з послідовно з'єднаних елементів R і C, підключається до джерела живлення $e(t)$.

Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа для післякомутаційного кола ($t > 0$):

$$iR + \frac{1}{C}\int idt = e(t). \tag{2.56}$$

Це рівняння для випадку, коли шуканою величиною є струм. Для кола RC зручніше виконувати розрахунки, якщо за шукану змінну обрати напругу на ємності $u_C(t)$, оскільки вона підпорядковується другому закону комутації. Оскільки струм через конденсатор і напруга u_C на цьому конденсаторі визначається таким співвідношенням:

$$i_C = C\frac{du_C}{dt}, \tag{2.57}$$

то рівняння (2.56) можна записати так:

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = e(t). \tag{2.58}$$

Це неоднорідне диференціальне рівняння, розв'язання якого має вигляд:

$$u_C(t) = u_{C\text{вим}}(t) + u_{C\text{в}}(t). \tag{2.59}$$

Для заданого виду джерела живлення вимушена складова $u_{C\text{вим}}(t)$ розраховується відомими методами розрахунку кіл постійного або синусоїдного струму.

Характеристичне рівняння для цього кола:

$$RCp + 1=0, \tag{2.60}$$

а його корінь:

$$p = -\frac{1}{RC}. \tag{2.61}$$

Стала часу кола:

$$\tau_{RC} = \left|\frac{1}{p}\right| = RC, [\tau_{RC}] = \text{Ом} \cdot \text{Ф} = \frac{\text{с}}{\text{Ом}} \cdot \text{Ом} = \text{с}.$$

Для кіл першого порядку вільну складову шукаємо у вигляді:

$$u_{C\text{в}}(t) = Ae^{pt} = Ae^{-t/\tau_{RC}}. \qquad (2.62)$$

Сталу інтегрування A визначаємо з початкових умов за $t = 0+$ з використанням другого закону комутації. Вимушена складова, як відомо, залежить від наявності джерела живлення та його виду.

Підключення послідовного кола *RC* до джерела постійної напруги

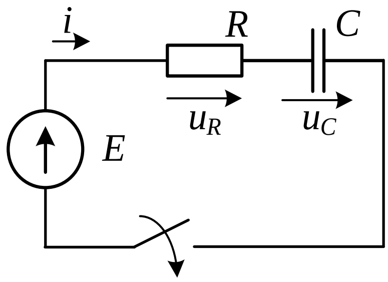


Рисунок 2.15

В колі з індуктивністю за відсутності джерела живлення струм достатньо швидко згасає, а в колі з ємністю напруга на конденсаторі може утримуватися дуже довгий час. При цьому ця напруга може бути додатною, якщо вона за напрямком збігається зі струмом (рис. 2.16), може бути від'ємною, коли напрямки цих величин є протилежними.

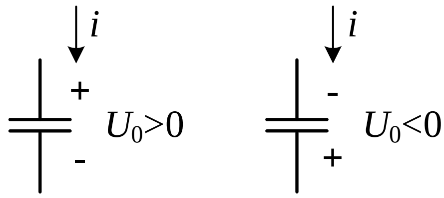


Рисунок 2.16

У випадку, коли в момент $t = 0–$ напруга на конденсаторі відсутня ($u_C(0–) = 0$), будемо мати перехідний процес з нульовими початковими умовами.

З урахуванням цих зауважень розглянемо підключення кола RC до джерела постійної напруги за ненульових початкових умов, тобто $u_C(0–) \neq 0$.

Диференціальне рівняння кола RC:

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E. \qquad (2.63)$$

Тут будемо вважати, що $u_C(0–) = U_0$ – напруга на конденсаторі за $t = 0–$.

Як відомо, розв'язання цього рівняння відносно шуканої функції $u_C(t)$ має такий вигляд:

$$u_C(t) = u_{C\text{вим}}(t) + u_{C\text{в}}(t). \qquad (2.64)$$

Вимушена складова $u_{C\text{вим}}(t)$ – це напруга на конденсаторі, яка встановиться на ньому по завершенні перехідного процесу. В колах постійного струму опір ємності є нескінченним і тому струм в колі буде відсутній, отже падіння напруги на резисторі $u_R = 0$, тож напруга на конденсаторі дорівнює $u_{C\text{вим}} = E$.

Вільна складова напруги:

$$u_{C\text{в}}(t) = Ae^{-t/\tau_{RC}}. \qquad (2.65)$$

Сталу інтегрування отримаємо з початкових умов в момент $t = 0+$ та другого закону Кірхгофа.

$$u_C(0+) = u_{C\text{вим}}(0+) + u_{C\text{в}}(0+) = u_{C\text{вим}}(0+) + A, \qquad (2.66)$$

де $u_C(0–) = u_C(0+) = U_0$.

Отримаємо вираз для сталої A:

$$U_0 = E + A,$$

отже

$$A = U_0 - E. \qquad (2.67)$$

З урахуванням отриманих результатів маємо вираз шуканої функції:

$$u_C(t) = E + (U_0 - E)e^{-t/\tau_{RC}}. \qquad (2.68)$$

Шляхом диференціювання (2.68) отримаємо функцію $i_C(t)$:

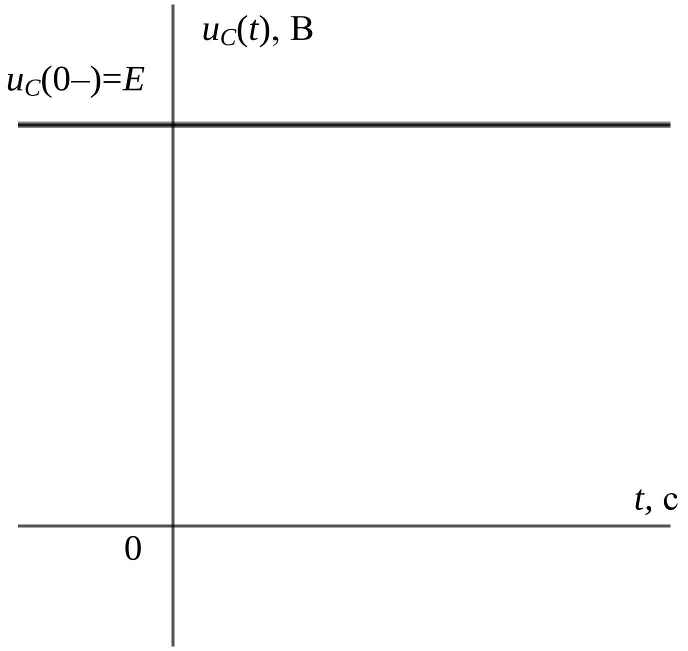
$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = C\left(-\frac{1}{RC}\right)(U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau_{RC}}} = -\frac{U_0 - E}{R}e^{-\frac{t}{\tau_{RC}}}. \qquad (2.69)$$

Маючи вирази в загальному вигляді для функцій $u_{C\text{вим}}(t)$ та $i_C(t)$ розглянемо особливості перехідних процесів в колах R-C в залежності від початкових умов на конденсаторі.

До комутації конденсатор був заряджений до напруги джерела E, тобто $u_C(0–) = E$. З аналізу виразів (2.67) і (2.68) маємо, що вільні складові за цих умов дорівнюють нулю і тому перехідного процесу не буде. В цьому варіанті початкових умов є повна відповідність між запасом енергії в електричному полі конденсатора безпосередньо до комутації і запасом енергії, що визначається вимушеною складовою, яка виникає одразу після комутації:

$$W_\text{е}(0-) = \frac{Cu_C^2(0-)}{2} = W_\text{е вим}(0+) = \frac{Cu_{C\text{вим}}^2(0+)}{2}. \qquad (2.70)$$

Таким чином, відсутня зміна енергії на конденсаторі при переході кола від одного вимушеного стану до другого.



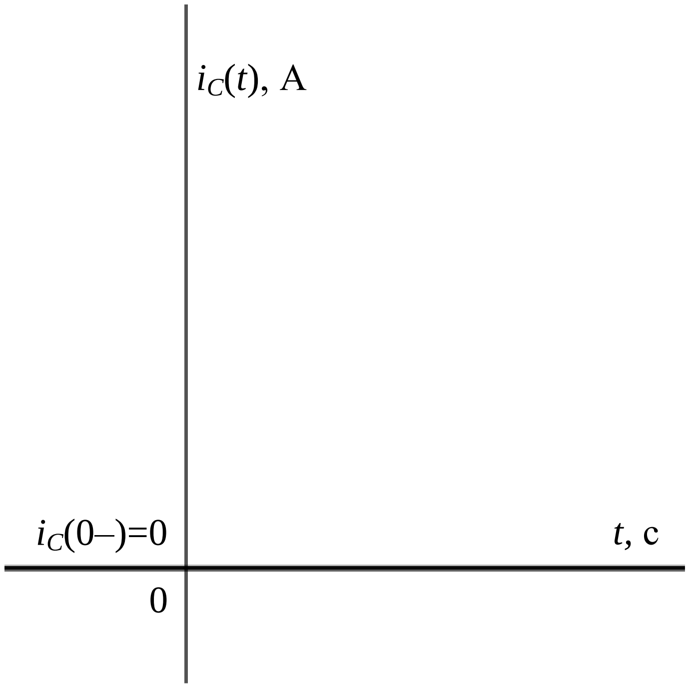


Рисунок 2.17

1. Конденсатор до комутації був заряджений позитивно, але його напруга менше напруги джерела живлення $0 < u_C(0–) < E$.

Для цього варіанту початкових умов вирази (2.68) і (2.69) набувають вигляду:

$$u_C(t) = E - (E - U_0)e^{-t/\tau_{RC}}, \qquad (2.71)$$

$$i_C(t) = \frac{E - U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau_{RC}}}. \tag{2.72}$$

Проаналізуємо наведені на рис. 2.18 графіки цих функцій.

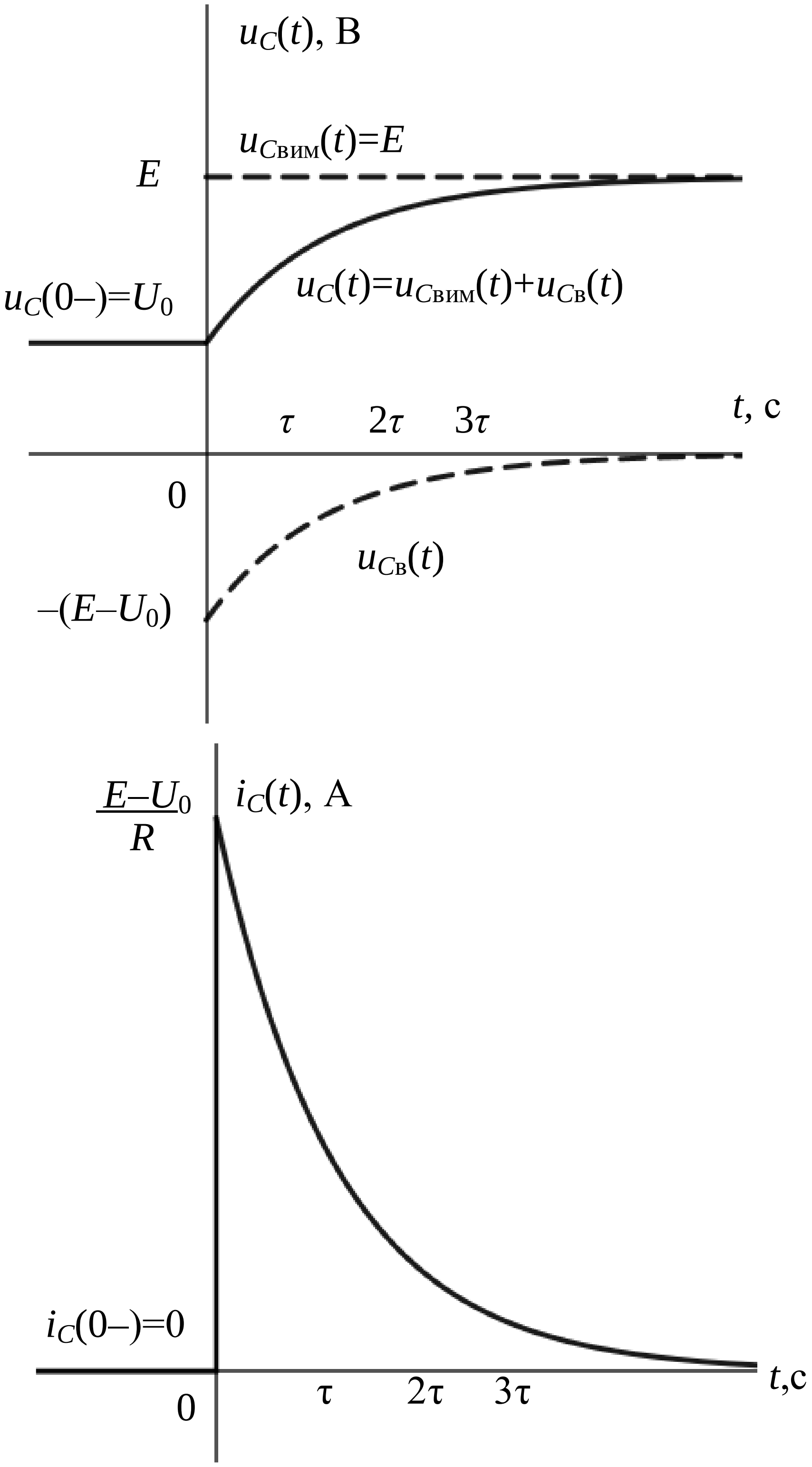


Рисунок 2.18

Вимушена складова функції $u_C(t)$ в цьому випадку від часу не залежить і тому на рис. 2.18 має вигляд прямої, яка є паралельною осі часу t. Вільна складова функції має вигляд експоненти, що згасає. Значення її в момент $t(0+)$ дорівнює $[-(E-U_0)]$. Після комутації графік самої шуканої функції $u_C(t)$ – це сума ординат обох її складових. В момент $t = 0$ величини $u_C(0-) = u_C(0+) = U_0$, тобто виконується другий закон комутації.

Функція $i_C(t)$ визначається тільки вільною складовою і в момент комутації $t = 0$ стрибкоподібно змінюється від нуля $i_C(0-) = 0$ до

$$i_C(0+) = \frac{E - U_0}{R}$$

і потім за експоненціальним законом згасає. Знак струму та напруги позитивний і тому в цьому випадку відбувається заряд, точніше – дозаряд конденсатора до напруги джерела живлення.

В цьому випадку конденсатор до комутації був заряджений до напруги U_0, але вона була від'ємна в порівнянні з напругою джерела живлення, тобто $u_C(0-) = -U_0$. При цьому рівняння для напруги $u_C(t)$ і струму $i_C(t)$ набувають вигляду:

$$u_C(t) = E - (E + U_0)e^{-\frac{t}{\tau_{RC}}}, \tag{2.73}$$

$$i_C(t) = \frac{E + U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau_{RC}}}. \tag{2.74}$$

Часові залежності напруги на конденсаторі та струму в колі наведені на рис. 2.19. Вони побудовані за умови, що $|U_0| < E$.

Як видно з наведених графіків, під час перехідного процесу напруга на конденсаторі $u_C(t)$ змінює свій знак в момент $t = t_1$, а струм залишається позитивним. В інтервалі часу $0 < t < t_1$ знаки у струму і напруги протилежні, а це вказує на те, що розряджається до нуля. За $t > t_1$ знаки напруги і струму однакові, отже триває заряд конденсатора до величини напруги джерела ЕРС. Таким чином у випадку, коли $U_0 < 0$, спостерігається перезаряд конденсатора (заряд зі зміною знаку напруги).

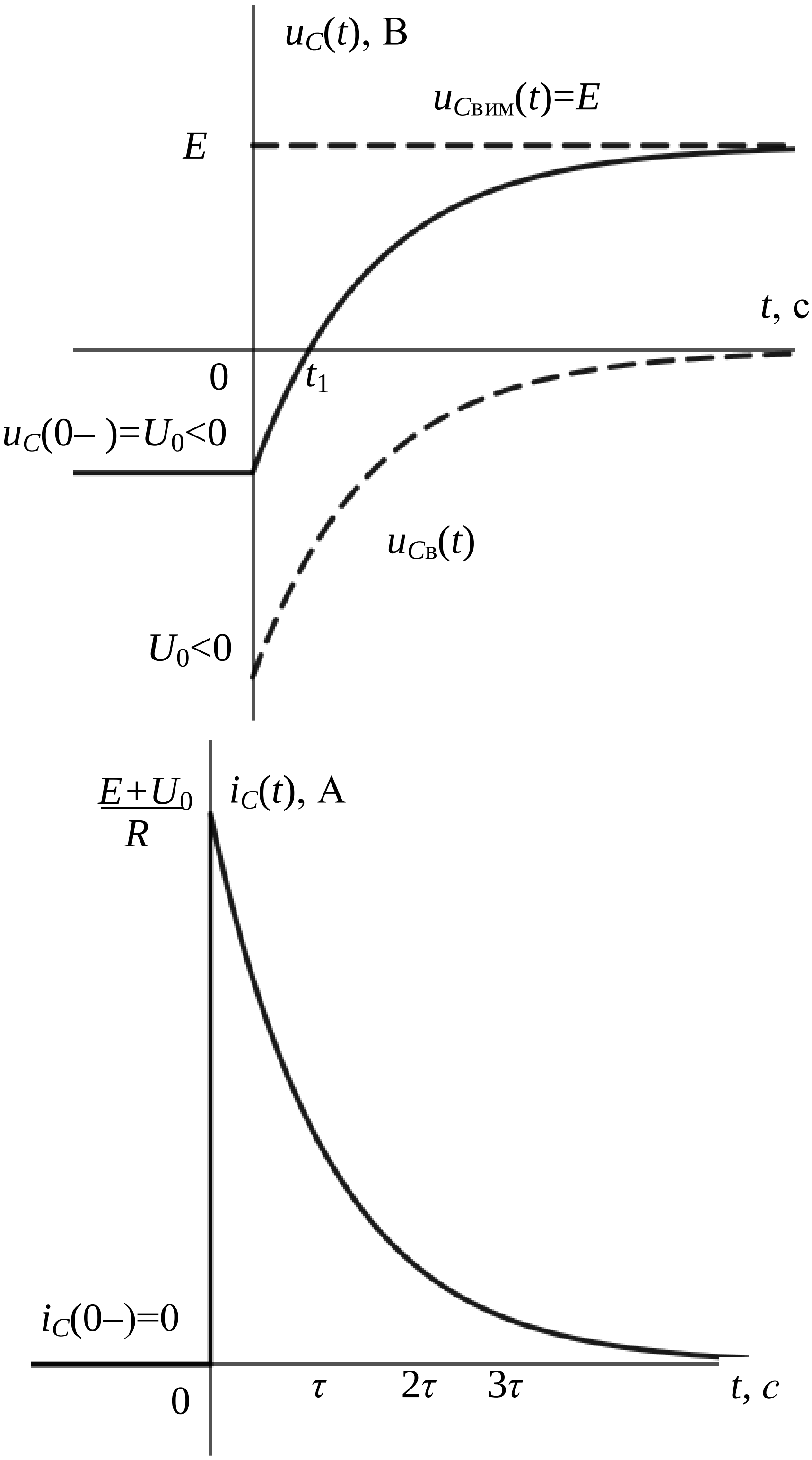


Рисунок 2.19

4. В колі є нульові початкові умови, за яких $u_C(0–) = u_C(0+) = 0$. Рівняння (2.68) і (2.69) набувають вигляду:

$$u_C(t) = E - Ee^{-\frac{t}{\tau_{RC}}} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{RC}}}\right), \quad (2.75)$$

$$i_C(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau_{RC}}}. \tag{2.76}$$

Графіки цих функцій наведені на рис. 2.20.

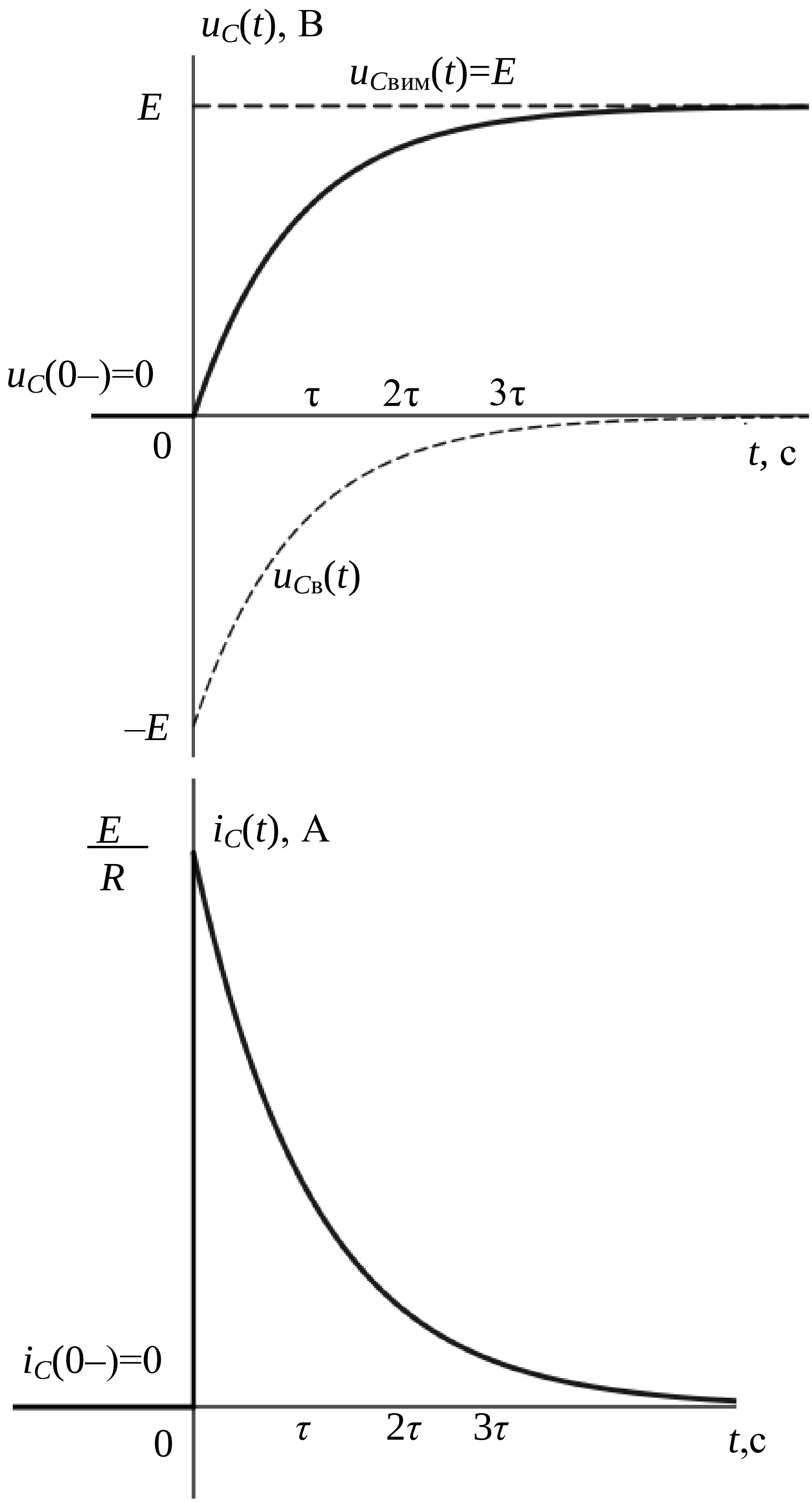


Рисунок 2.20

Коротке замикання кола *RC*

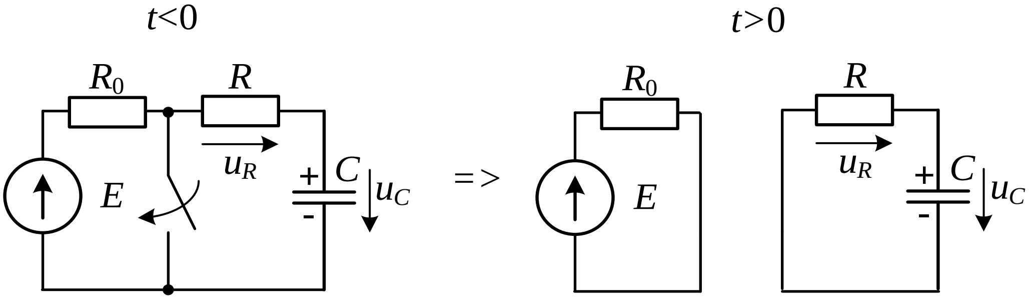


Рисунок 2.21

До комутації конденсатор був заряджений від джерела постійної ЕРС до напруги $u_C(0–) = U_0 = E$. Після комутації коло можна розділити на два незалежних кола. В першому колі миттєво встановився струм $I = E/R_0$, а в другому колі матимемо перехідний процес розряду конденсатора. Для кола RC після комутації складемо рівняння за другим законом Кірхгофа відносно шуканої функції $u_C(t)$.

$$Ri + u_C = 0 \quad \text{або} \quad RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0. \qquad (2.77)$$

Це однорідне диференціальне рівняння. Оскільки вимушена складова в такому випадку дорівнює нулю, розв’язання має одну складову – вільну $u_{C\text{в}}(t)$.

$$u_C(t) = u_{C\text{в}}(t) = Ae^{-t/\tau_{RC}}, \qquad (2.78)$$

де $\tau_{RC} = RC$.

Сталу інтегрування визначимо з другого закону комутації:

$$u_C(0-) = u_C(0+) = E = Ae^0,$$

$$A = E. \qquad (2.79)$$

Для напруги на конденсаторі отримаємо такий вираз:

$$u_C(t) = Ee^{-t/\tau_{RC}}. \qquad (2.80)$$

Струм в колі буде визначатися співвідношенням:

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau_{RC}}}. \qquad (2.81)$$

Графіки цих функцій наведені на рис. 2.22.

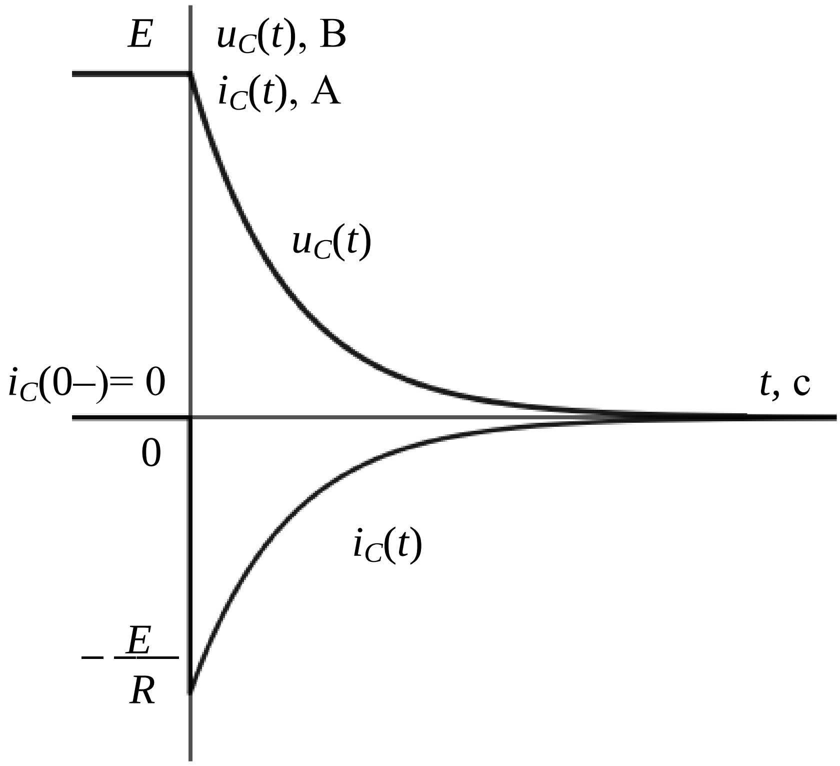


Рисунок 2.22

Напруга на конденсаторі $u_C(t)$ зменшується за експоненціальним законом, її похідна $\frac{du_C}{dt} < 0$, і тому струм $i_C(t)$ від'ємний. За час перехідного процесу енергія, яка була накопичена в електричному полі конденсатора до комутації

$$W_\text{е}(0-) = \frac{CU_0^2}{2},$$

перетворюється в резисторі R у вигляді тепла:

$$W_\text{т} = \int_0^\infty i^2(t)Rdt = \int_0^\infty \left(-\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau_{RC}}}\right)^2 Rdt = \frac{CU_0^2}{2} = W_\text{е}(0-). \quad (2.82)$$

Підключення кола *RC* до джерела синусоїдальної напруги

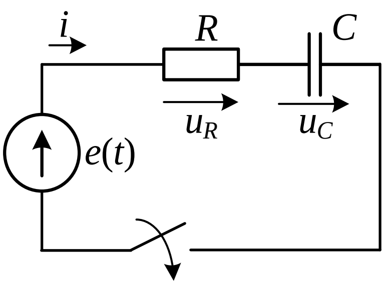


Рисунок 2.23

Приймемо, що коло мало нульові початкові умови, тобто $u_C(0–) = 0$. Диференціальне рівняння відносно шуканої функції $u_C(t)$ для післякомутаційного кола має вигляд:

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E_\mathrm{m}\sin(\omega t + \psi_e). \tag{2.83}$$

Розв’язання цього рівняння:

$$u_C(t) = u_{C\text{вим}}(t) + u_{C\text{в}}(t). \tag{2.84}$$

За приєднання до кола джерела синусоїдної напруги вимушена складова напруги на конденсаторі $u_{C\text{вим}}(t)$ теж буде синусоїдною функцією часу. Для розрахунку цієї складової будемо використовувати комплексний метод:

$$\underline{U}_{C\mathrm{m}\,\text{вим}} = \underline{I}_{C\mathrm{m}\,\text{вим}}\left(-j\frac{1}{\omega C}\right). \tag{2.85}$$

Комплексну амплітуду вимушеної складової струму знаходимо за законом Ома в комплексній формі:

$$\underline{I}_{C\mathrm{m}\,\text{вим}} = \frac{\underline{E}_\mathrm{m}}{\underline{Z}}, \tag{2.86}$$

де $\underline{E}_\mathrm{m} = E_\mathrm{m}e^{j\psi_e}$– комплексна амплітуда ЕРС,

$\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$ – комплексний опір кола,

$Z = \sqrt{R^2 + \left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ – повний опір кола,

$\varphi = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{R\omega C}\right)$ – зсув фази між струмом в колі і напругою живлення.

Тоді вимушена складова струму в комплексній формі матиме вигляд:

$$\underline{I}_{C\mathrm{m}\,\text{вим}} = \frac{E_\mathrm{m}e^{j\psi_e}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{E_\mathrm{m}}{Z}e^{j(\psi_e-\varphi)} = I_{C\mathrm{m}\,\text{вим}}e^{j\psi_i}, \tag{2.87}$$

де $\psi_i = \psi_e - \varphi$.

Миттєве значення вимушеної складової струму в колі:

$$i_{C\text{вим}}(t) = I_{C\mathrm{m}\,\text{вим}}\sin(\omega t + \psi_i).$$

Знаходимо вимушену складову напруги в комплексній формі:

$$\underline{U}_{C\mathrm{m}\,\text{вим}} = I_{C\mathrm{m}\,\text{вим}}e^{j(\psi_e-\varphi)}\frac{1}{\omega C}e^{-j\pi/2} = \frac{I_{C\mathrm{m}\,\text{вим}}}{\omega C}e^{j\left(\psi_e-\varphi-\frac{\pi}{2}\right)} =$$
$$= U_{C\mathrm{m}\,\text{вим}}e^{j\psi_u}, \tag{2.88}$$

де $\psi_u = \psi_e - \varphi - \frac{\pi}{2} = \psi_i - \frac{\pi}{2}$.

Миттєве значення вимушеної складової напруги на конденсаторі:

$$u_{C\text{вим}}(t) = U_{Cm\,\text{вим}} \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (2.89)$$

В момент t = 0+ вимушена складова дорівнює:

$$u_{C\text{вим}}(0+) = U_{Cm\,\text{вим}} \sin\left(\psi_i - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (2.90)$$

Вільні складові для напруги і струму:

$$u_{C\text{в}}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad (2.91)$$

$$i_{C\text{в}}(t) = C\frac{du_{C\text{в}}}{dt} = -\frac{A}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad (2.92)$$

де $\tau = RC$.

Сталу інтегрування A знаходимо з початкових умов з використанням другого закону комутації:

$$u_C(0-) = u_C(0+) = 0 = u_{C\text{вим}}(0+) + u_{C\text{в}}(0+),$$

$$0 = U_{Cm\,\text{вим}} \sin\left(\psi_i - \frac{\pi}{2}\right) + A,$$

$$A = -U_{Cm\,\text{вим}} \sin\left(\psi_i - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (2.93)$$

Остаточно вільні складові напруги $u_C(t)$ і струму $i_C(t)$ мають вигляд:

$$u_{C\text{в}}(t) = -U_{Cm\,\text{вим}} \sin\left(\psi_i - \frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad (2.94)$$

$$i_{C\text{в}}(t) = \frac{U_{Cm\,\text{вим}}}{R} \sin\left(\psi_i - \frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (2.95)$$

Додаванням вимушеної і вільної складових отримуємо вирази для часових функцій напруги $u_C(t)$ і струму $i_C(t)$ в перехідному процесі:

$$u_C(t) = U_{Cm\,\text{вим}} \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right) - U_{Cm\,\text{вим}} \sin\left(\psi_i - \frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad (2.96)$$

$$i_C(t) = I_{Cm\,\text{вим}} \sin(\omega t + \psi_i) + \frac{U_{Cm\,\text{вим}}}{R} \sin\left(\psi_i - \frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (2.97)$$

Проаналізувавши вирази (2.96) та (2.97) можна зробити висновки, що під час перехідного процесу значення напруги та струму в певні моменти часу перевищують їхні амплітудні значення, і це безпосередньо пов'язано з моментом підключення джерела живлення, тобто з параметром ψ_e.

Виконаємо аналіз впливу моменту підключення джерела живлення на інтенсивність перехідного процесу.

Розглянемо два крайні випадки.

1. В момент підключення джерела величина струму сягає його амплітудного значення, тобто початкова фаза струму $\psi_i = \frac{\pi}{2}$, а початкова фаза коливань джерела $\psi_e = \varphi + \frac{\pi}{2}$.

З урахуванням цих початкових фаз вирази (2.96) та (2.97)мають вигляд:

$$u_C(t) = U_{Cm\,\text{вим}} \sin(\omega t), \tag{2.98}$$

$$i_C(t) = I_{Cm\,\text{вим}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{2.99}$$

Вільні складові у цих виразах відсутні, отже в колі відсутній перехідний процес. Після приєднання джерела живлення в колі встановлюється новий усталений режим, який описується виразами (2.98) і (2.99). Графіки функцій $u_C(t)$ та $i_C(t)$ наведено на рис. 2.24.

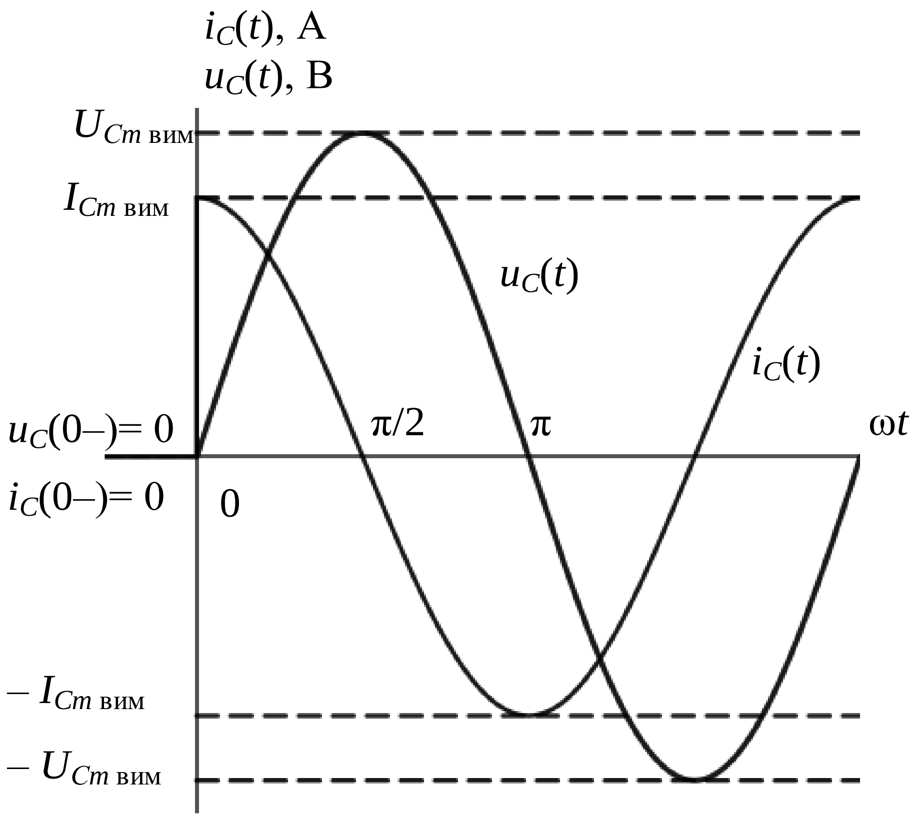


Рисунок 2.24

Оскільки до комутації, як було прийнято, в колі діяли нульові початкові умови, тобто $u_C(0-) = 0$, то енергія електричного поля в конденсаторі дорівнює нулю:

$$W_e(0-) = \frac{Cu_C^2(0-)}{2}.$$

З урахуванням другого закону комутації $u_C(0–) = u_C(0+) = 0$ енергія безпосередньо після комутації стрибкоподібно не змінюється, отже

$$W_{\text{е}}(0+) = \frac{Cu_C^2(0+)}{2} = 0.$$

Таким чином, в цьому випадку має місце повна відповідність між енергією, яка повинна бути в конденсаторі у вимушеному режимі, і тою енергією, яка є фактично в момент комутації.

2. Включення джерела живлення відбувається в момент, коли $\psi_i = 0$, а $\psi_e = \varphi$. Вирази (2.96) і (2.97) за такої умови мають вигляд:

$$u_C(t) = U_{C\text{m вим}} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + U_{C\text{m вим}} e^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad (2.100)$$

$$i_C(t) = I_{C\text{m вим}} \sin(\omega t) - \frac{I_{C\text{m вим}}}{\omega RC} e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (2.101)$$

З аналізу цих виразів випливає, що вільні складові обох функцій в момент комутації мають максимально можливі значення і тому перехідний процес буде найбільш інтенсивним. Часові залежності напруги $u_C(t)$, струму $i_C(t)$ та їхніх складових наведено на рис. 2.25 *а*, *б* відповідно. При цьому прийнято, що стала часу кола τ значно більша за період гармонійних коливань T, тобто $\tau >> T$.

За вищезазначеного припущення $\tau >> T$ згасання перехідного процесу відбувається повільно, і тому в кінці першого півперіоду напруга на конденсаторі може сягати майже подвоєного амплітудного значення вимушеної складової. На ці обставини треба зважати в практичній роботі враховуючи припустимі напруги на конденсаторах з огляду на можливі перенапруги.

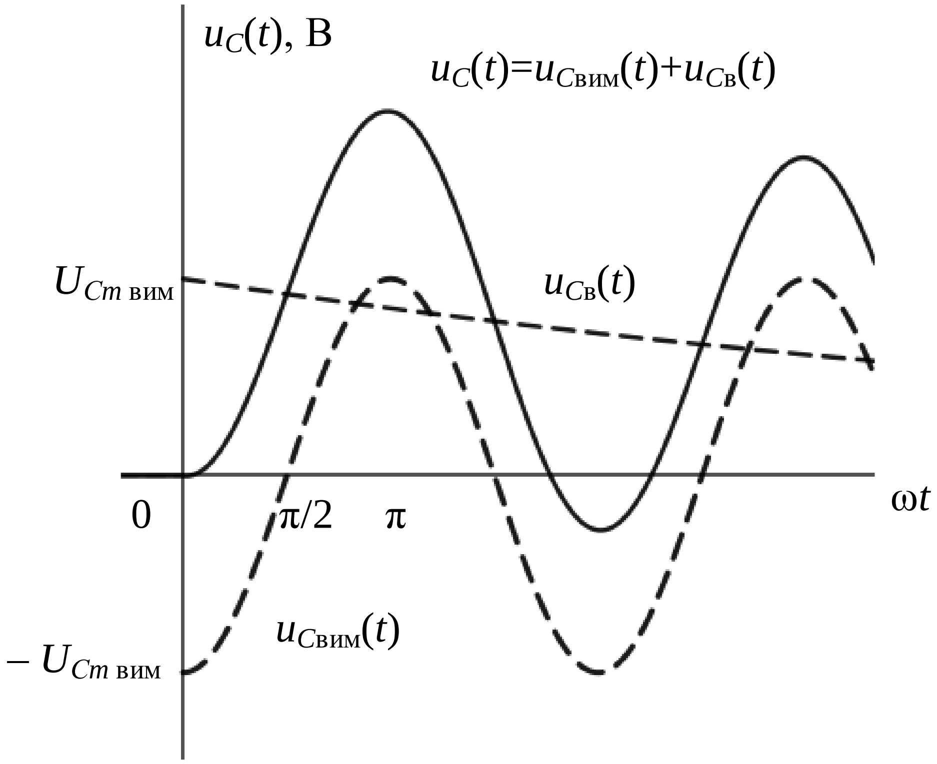
Струм в конденсаторі в момент комутації може перевищувати амплітуду вимушеної складової у стільки разів, у скільки разів опір ємності $|X_C| = 1/\omega C$ більше за опір резистора R. Тобто якщо $|X_C|/R>>1$, або $|X_C|>>R$, то

$$i_{\max} = I_{\text{m вим}} \frac{|X_C|}{R} \gg I_{\text{m вим}}.$$

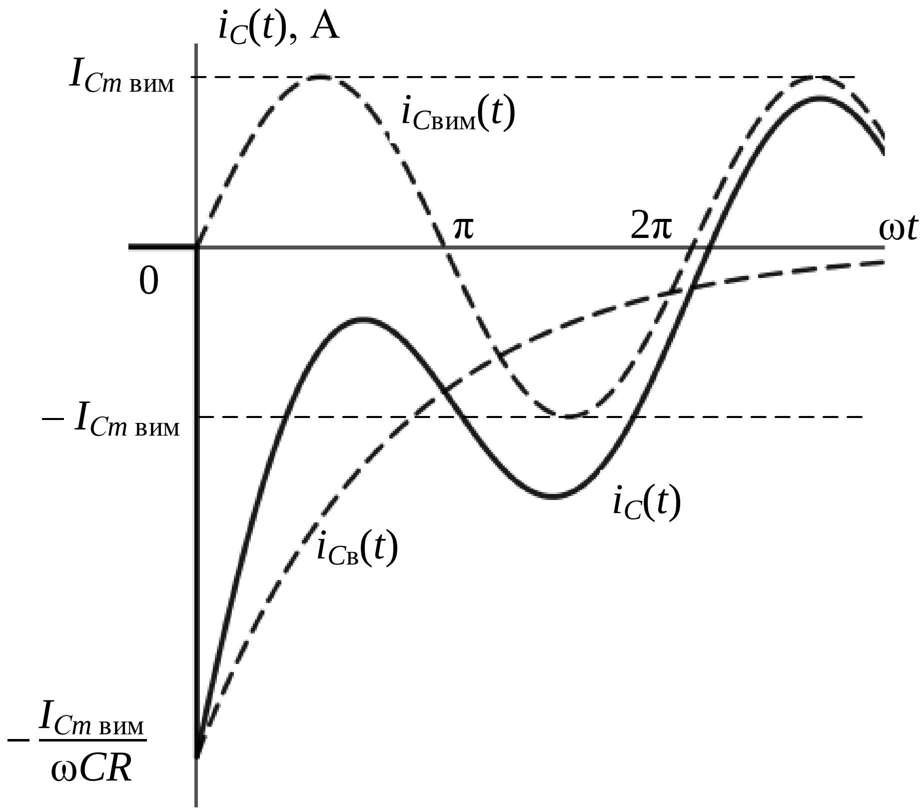
На практиці кабельні лінії мають великий ємнісний і відносно малий активний опір. За включення навантаженої кабельної мережі в ній може виникати дуже великий стрибок струму, який часто призводить до руйнування кабеля. Для обмеження цього струму кабельні лінії вмикають через обмежувальні опори. В подальшому ці опори закорочують.

Іншим прикладом може бути електронне реле часу., яке використовує той факт, що напруга на ємності зростає поступово, і вмикання будь-якого кола (наприклад вмикання підсилювача) відбудеться через певний проміжок часу.

Реле, виконані на *RC* елементах, широко використовуються в елементах та вузлах автоматики, в електроніці.



а



б

Рисунок 2.25

2.7. Перехідні процеси в колах другого порядку

2.7.1. *Загальні положення про перехідні процеси в колах другого порядку*

В колах другого порядку одночасно наявні накопичувальні елементи двох типів – індуктивний і ємнісний. Електромагнітні процеси в таких колах описуються диференціальними рівняннями другого порядку. Найпростішими прикладами таких кіл можна вважати послідовні і паралельні коливальні контури.

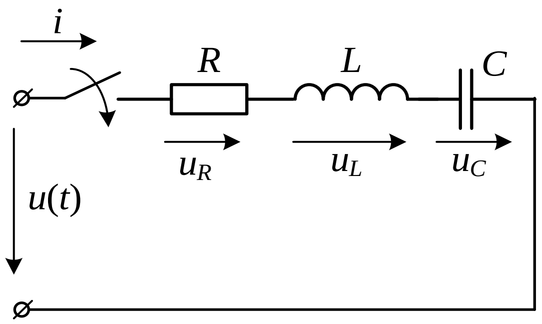


Рисунок 2.26

Розглянемо перехідний процес в колі з послідовно з'єднаними елементами R, L, C у випадку приєднання джерела живлення з напругою $u(t)$. Будемо вважати, що початкові докомутаційні умови були нульовими, тобто $i(0–) = u_C(0–) = 0$.

Після комутації рівняння, складене за другим законом Кірхгофа, має вигляд:

Оскільки струм в конденсаторі і напруга на ньому пов'язані відомим співвідношенням

$$i_C = C\frac{du_C}{dt}, \qquad (2.102)$$

то замість **Помилка! Джерело посилання не знайдено.** отримуємо неоднорідне диференціальне рівняння відносно шуканої функції $u_C(t)$:

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = u(t). \qquad (2.103)$$

Розв'язанням цього рівняння, як і в колах першого порядку, є сума вимушеної і вільної складових:

$$u_C(t) = u_{C\text{вим}}(t) + u_{C\text{в}}(t). \qquad (2.104)$$

Вимушена складова визначається виключно видом і параметрами джерела живлення.

Для визначення вільної складової, характер якої не залежить від правої частини (2.103), складаємо характеристичне рівняння для (2.103):

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0, \qquad (2.105)$$

або

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0, \qquad (2.106)$$

де $\delta = \frac{R}{2L}$ – коефіцієнт згасання, ω_0 – резонансна частота.

Характеристичне рівняння (2.104) має два корені:

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \qquad (2.107)$$

В залежності від співвідношення параметрів елементів кола вид коренів, а значить і характер вільного процесу, можуть бути різними. Можливі три випадки.

1. Корені дійсні, різні, від'ємні.

Перехідний процес матиме аперіодичний характер за умови:

$$\delta > \omega_0, \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ або } R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{\text{кр}}.$$

$R_{\text{кр}}$ – найменший опір, за якого перехідний процес буде аперіодичним.

2. Корені дійсні, однакові, від'ємні.

Перехідний процес має гранично аперіодичний характер або критичний у випадку, коли:

$$\delta = \omega_0, \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ або } R = R_{\text{кр}}.$$

3. Корені комплексно спряжені.

Перехідний процес має коливальний характер зі згасанням, якщо:

$$\delta < \omega_0, \frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ або } R < R_{\text{кр}}.$$

$$p_{1,2} = -\delta \pm \mathrm{j}\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm \mathrm{j}\omega_{\text{в}},$$

де $\omega_{\text{в}}$ – частота власних згасаючих коливань.

Розглянемо більш детально кожен з цих випадків.

2.7.2. ***Перехідні процеси на прикладі розряду конденсатора через активний опір і котушку індуктивності***

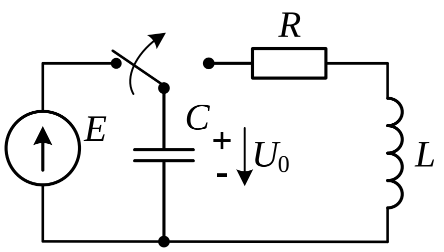


Рисунок 2.27

До комутації конденсатор був заряджений джерелом живлення до напруги $u_C(0–) = U_0$.

Після комутації конденсатор буде розряджатися на коло RL.

2.7.2.1. ***Аперіодичний розряд конденсатора***

У аперіодичному розряді напруга буде згасати за експоненціальним законом від U_0 до 0. У цьому процесі струм не буде змінювати свій напрямок (знак). Такий перехідний процес виникає, як було показано раніше, за умови $R > R_{\text{кр}}$.

Корені характеристичного рівняння – дійсні, від'ємні і різні.

В цьому прикладі вимушена складова $u_{C\text{вим}} = 0$, і тому загальне розв'язання диференціального рівняння має тільки одну вільну складову:

$$u_C(t) = u_{C\text{в}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (2.108)$$

Струм в колі також має тільки одну вільну складову і визначається виразом:

$$i(t) = i_\text{в}(t) = C\frac{du_{C\text{в}}}{dt} = Cp_1A_1e^{p_1 t} + Cp_2A_2e^{p_2 t}. \quad (2.109)$$

Для визначення сталих інтегрування A_1 і A_2 запишемо для моменту $t = 0+$ рівняння (2.108), (2.109) та скористаємося першим і другим законами комутації:

$$u_C(0+) = A_1 + A_2,$$
$$u_C(0+) = u_C(0-) = U_0 = A_1 + A_2. \quad (2.110)$$

$$i(0+) = Cp_1A_1 + Cp_2A_2,$$
$$i(0+) = i(0-) = 0 = p_1A_1 + p_2A_2. \quad (2.111)$$

Отже, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} U_0 = A_1 + A_2, \\ 0 = p_1A_1 + p_2A_2. \end{cases} \quad (2.112)$$

З розв’язання (2.112) отримуємо значення сталих A_1 і A_2:

$$A_1 = \frac{U_0 p_2}{p_2 - p_1}, A_2 = -\frac{U_0 p_1}{p_2 - p_1}. \quad (2.113)$$

З урахуванням (2.113) рівняння (2.108) і (2.109) мають вигляд:

$$u_C(t) = \frac{U_0}{p_2 - p_1}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}), \quad (2.114)$$

$$i(t) = \frac{U_0 C p_1 p_2}{p_2 - p_1}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{U_0}{L(p_2 - p_1)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}), \quad (2.115)$$

оскільки за теоремою Вієта добуток коренів рівняння дорівнює вільному члену: $p_1 p_2 = \frac{1}{LC}$.

Напруга на котушці індуктивності:

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{p_2 - p_1}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}). \qquad (2.116)$$

Перед побудовою графіків отриманих функцій проведемо аналіз складових, які входять в їхні вирази:

– корені p_1 і p_2 – від'ємні числа, $|p_2| > |p_1|$;

– різниця коренів $p_2 - p_1 < 0$;

– експонента $e^{p_2 t}$ згасає швидше, ніж $e^{p_1 t}$.

За законами комутації напруга на конденсаторі та струм в котушці індуктивності миттєво стрибком не змінюються, тому в момент комутації $u_C(0-) = U_0$, $i_L(0-) = 0$. А напруга $u_L(t)$ в цей момент змінюється миттєво від нуля до – U_0 (рис.2.28). Це пояснюється тим, що котушка індуктивності за нульових початкових умов в перший момент після комутації еквівалентна обриву кола і тому вся напруга конденсатора зосереджена на її затискачах.

Оскільки часова залежність $u_C(t)$ є сумою двох експонент зі згасанням, то напруга на конденсаторі зменшується з часом від початкового значення U_0 до нуля. Ця функція має точку перегину за $t = t_1$, в якій вона зменшується з найбільшою швидкістю, і тому струм в цей момент сягає свого екстремуму (максимуму за модулем), бо

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt},$$

а напруга на котушці індуктивності в цей момент дорівнює нулю, оскільки

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt}.$$

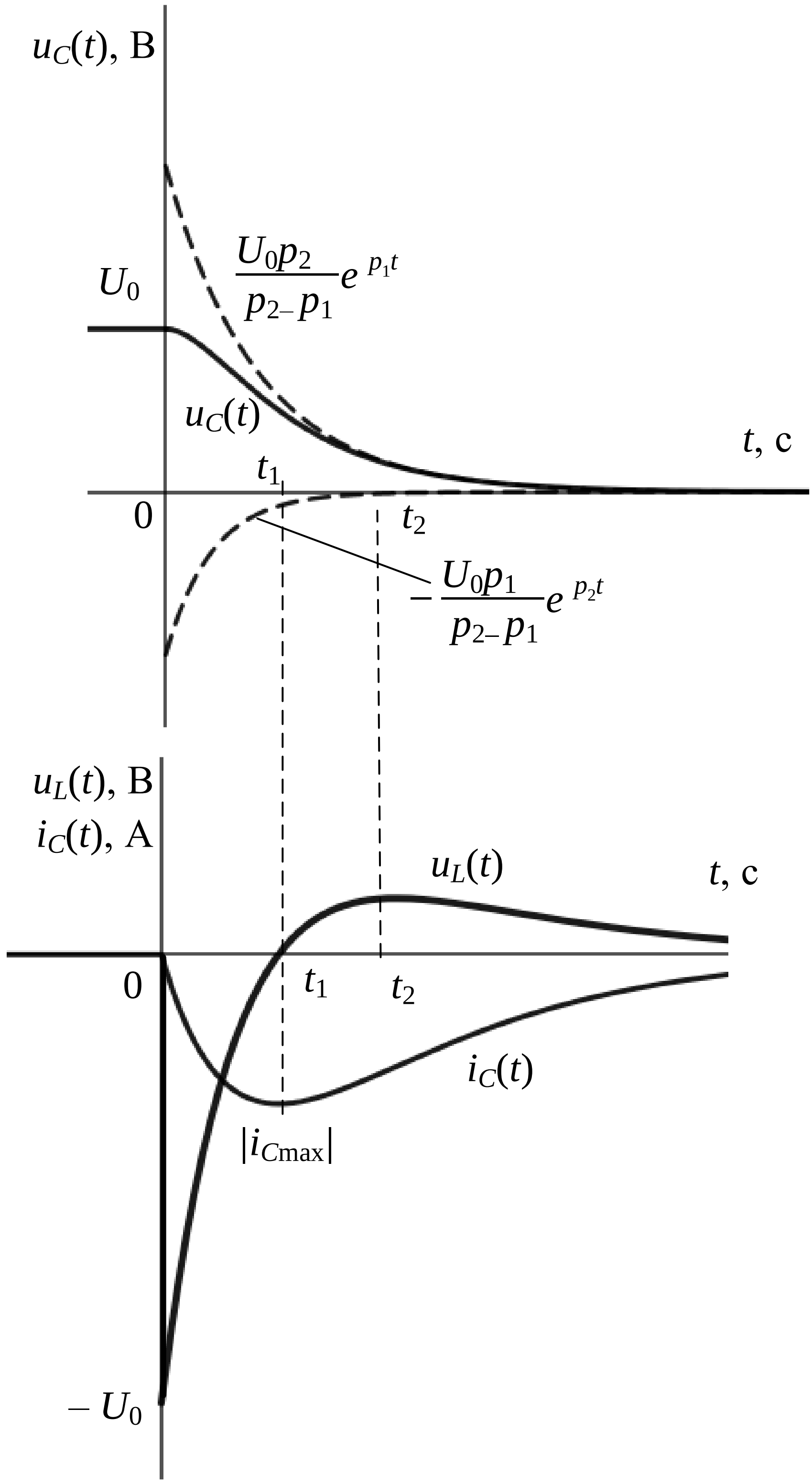


Рисунок 2.28

В подальшому функція $i_C(t)$ буде згасати маючи точку перегину в момент $t = t_2$. В цей момент напруга на індуктивності досягає свого максимуму, після чого зменшується і прагне до нуля. Оскільки в колі протікає процес розряду конденсатора, то напрямок (знак) струму і напруги протилежні. Моменти часу t_1 і t_2 можна знайти, прирівнявши нулю похідні $\frac{di}{dt}$ та $\frac{du_L}{dt}$ відповідно. Опускаючи викладки наведемо остаточний результат:

$$t_1 = \frac{\ln p_2 / p_1}{p_1 - p_2}, \quad t_2 = \frac{2 \ln p_2 / p_1}{p_1 - p_2} = 2t_1. \tag{2.117}$$

З енергетичної точки зору у випадку аперіодичного розряду конденсатора, коли $t < t_1$, енергія, що вивільняється з нього, більшою мірою поглинається в опорі і тільки незначна її частина переходить в енергію магнітного поля котушки індуктивності, якої недостатньо для перезаряду конденсатора. Коли $t > t_1$, в тепло, що розсіюється на резисторі, переходить не тільки решта енергії електричного поля конденсатора, а також енергія, яка була накопичена у магнітному полі котушки індуктивності.

2.7.2.2. *Гранично-аперіодичний процес розряду конденсатора*

Такий перехідний процес відбувається, за умови, коли $\delta = \omega_0$ і корені характеристичного рівняння дійсні, від'ємні та рівні, тобто $p_1 = p_2 = -\delta$. Тоді

$$R = R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Якщо значення коренів p_1 і p_2 підставити у вирази (2.114) - (2.116), то отримаємо невизначеність виду $\left\| \frac{0}{0} \right\|$. Розкриємо її за правилом Лопіталя, взявши похідні за p_1 від чисельника і знаменника. Отримуємо такі вирази для шуканих струму і напруг:

$$u_C(t) = \lim_{p_1 = p_2 \to -\delta} u_C = -U_0 (p_2 t e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \Big|_{p_1 = p_2 \to -\delta},$$

$$u_C(t) = U_0 e^{-\delta t} (\delta t + 1), \tag{2.118}$$

$$i(t) = \lim_{p_1 = p_2 \to -\delta} i = -\frac{U_0}{L} (t e^{p_1 t}) \Big|_{p_1 = p_2 \to -\delta} = -\frac{U_0}{L} \left(t e^{-\delta t} \right), \tag{2.119}$$

$$u_L(t) = \lim_{p_1 = p_2 \to -\delta} u_L = -U_0 (e^{p_1 t} + p_1 e^{p_2 t}) \Big|_{p_1 = p_2 \to -\delta},$$

$$u_L(t) = U_0 e^{-\delta t} (\delta t - 1). \tag{2.120}$$

Графіки функцій $u_C(t)$, $u_L(t)$, $i_L(t)$ мають вигляд, аналогічний отриманим раніше за аперіодичного розряду конденсатора на коло RL, але перехідний процес в цьому випадку має найменшу тривалість.

Фізична сутність процесів не відрізняється від вище розглянутого випадку. Електрична енергія, яка вивільняється з розрядом конденсатора, виділяється у вигляді тепла на резисторі з опором R та накопичується в котушці індуктивності у вигляді енергії магнітного поля. Але опір R ще достатньо великий, і енергії магнітного поля не достатньо для перезаряду конденсатора.

2.7.2.3. *Коливальний розряд конденсатора*

Коливальний розряд конденсатора на коло RL виникає за умови, коли

$$R < R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Тоді корені характеристичного рівняння комплексно спряжені:

$$p_1 = -\delta + j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \qquad p_2 = -\delta - j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \tag{2.121}$$

Зобразимо їх на комплексній площині (див. рис. 2.29) і проаналізуємо співвідношення величин, які входять до складу коренів p_1 і p_2.

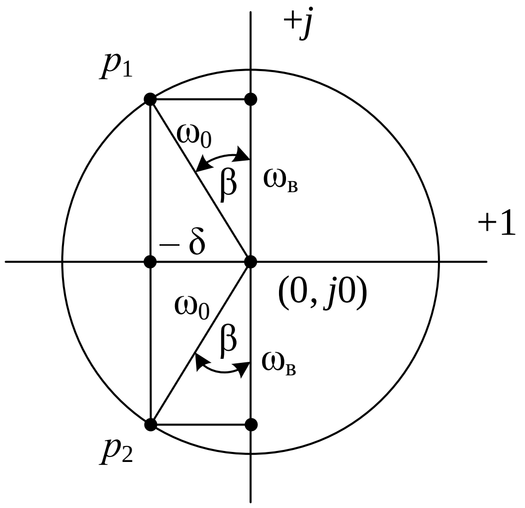


Рисунок 2.29

Корені p_1 і p_2 розташовуються на комплексній площині симетрично відносно дійсної осі на лівому боці півкола, центр якого збігається з початком координат $(0, j0)$, а його радіус дорівнює

$$\omega_0 = \sqrt{\delta^2 + \omega_в^2},$$

де ω_0 – це частота резонансних коливань, δ – коефіцієнт згасання, $\omega_в$– частота власних згасаючих коливань.

Тобто частота власних коливань тим більше відрізняється від резонансної, чим більшим є згасання δ: $\omega_в = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Кут β визначається так: $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{\delta}{\omega_в}$. Модулі коренів p_1 і p_2 визначаються таким чином:

$$|p_1| = |p_2| = \sqrt{\delta^2 + \omega_в^2} = \omega_0. \qquad (2.122)$$

Комплексні корені в алгебраїчній і показниковій формах:

$$p_1 = -\delta + j\omega_в = \omega_0 e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}, \qquad (2.123)$$

$$p_2 = -\delta - j\omega_в = \omega_0 e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}. \qquad (2.124)$$

Різниця коренів:

$$p_2 - p_1 = -2j\omega_в = 2\omega_0 e^{-j\frac{\pi}{2}}. \qquad (2.125)$$

Підставимо корені p_1 і p_2 в комплексній формі у вирази (2.114) - (2.116) для функцій $u_C(t)$, $u_L(t)$, $i_L(t)$:

$$u_C(t) = \frac{U_0}{p_2 - p_1}\left(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}\right) =$$

$$= -\frac{U_0}{2j\omega_в}\left(\omega_0 e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)} e^{(-\delta + j\omega_в)t} - \omega_0 e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)} e^{(-\delta - j\omega_в)t}\right) =$$

$$= -\frac{U_0 \omega_0 e^{-\delta t}}{2j\omega_в}\left(e^{j\left(\omega_в t - \frac{\pi}{2} - \beta\right)} - e^{-j\left(\omega_в t - \frac{\pi}{2} - \beta\right)}\right).$$

Застосувавши формулу Ейлера

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j},$$

отримаємо остаточний вираз для напруги на конденсаторі у випадку коливального перехідного процесу:

$$u_C(t) = -U_0 \frac{\omega_0}{\omega_в} e^{-\delta t} \frac{\left(e^{j\left(\omega_в t - \frac{\pi}{2} - \beta\right)} - e^{-j\left(\omega_в t - \frac{\pi}{2} - \beta\right)}\right)}{2j} =$$

$$= -U_0 \frac{\omega_0}{\omega_в} e^{-\delta t} \sin\left(\omega_в t - \frac{\pi}{2} - \beta\right). \qquad (2.126)$$

Після аналогічних перетворень отримані вирази для функцій $i(t)$, $u_L(t)$:

$$i(t) = -\frac{U_0}{L\omega_в} e^{-\delta t} \sin \omega_в t, \qquad (2.127)$$

$$u_L(t) = -U_0 \frac{\omega_0}{\omega_в} e^{-\delta t} \sin\left(\omega_в t + \frac{\pi}{2} + \beta\right). \qquad (2.128)$$

У випадку ідеального коливального контуру, коли немає активного опору ($R = 0$), згасання відсутнє ($\delta = 0$), частота власних коливань зрівняється з резонансною $\omega_в = \omega_0$, кут $\beta = 0$, а вирази для струму і напруг набувають такого вигляду:

$$i(t) = -\frac{U_0}{L\omega_0}\sin\omega_0 t, \tag{2.129}$$

$$u_C(t) = -U_0\sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right), \tag{2.130}$$

$$u_L(t) = -U_0\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{2.131}$$

Графіки функцій $u_C(t)$, $u_L(t)$, $i(t)$ наведені на рис. 2.30.

В цьому випадку процес має коливальний характер без згасання з частотою

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{2.132}$$

Період цих коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \tag{2.133}$$

Коли напруга на конденсаторі зменшується, то струм в котушці індуктивності збільшується і енергія електричного поля переходить в енергію магнітного поля. Зі зменшенням струму відбувається зворотній процес, тобто конденсатор знов заряджається.

У випадку, коли $R \neq 0$ і $\delta < \omega_0$, під час розряду конденсатора на коло RL виникають згасаючі гармонійні коливання з періодом:

$$T_\text{в} = \frac{2\pi}{\omega_\text{в}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \tag{2.134}$$

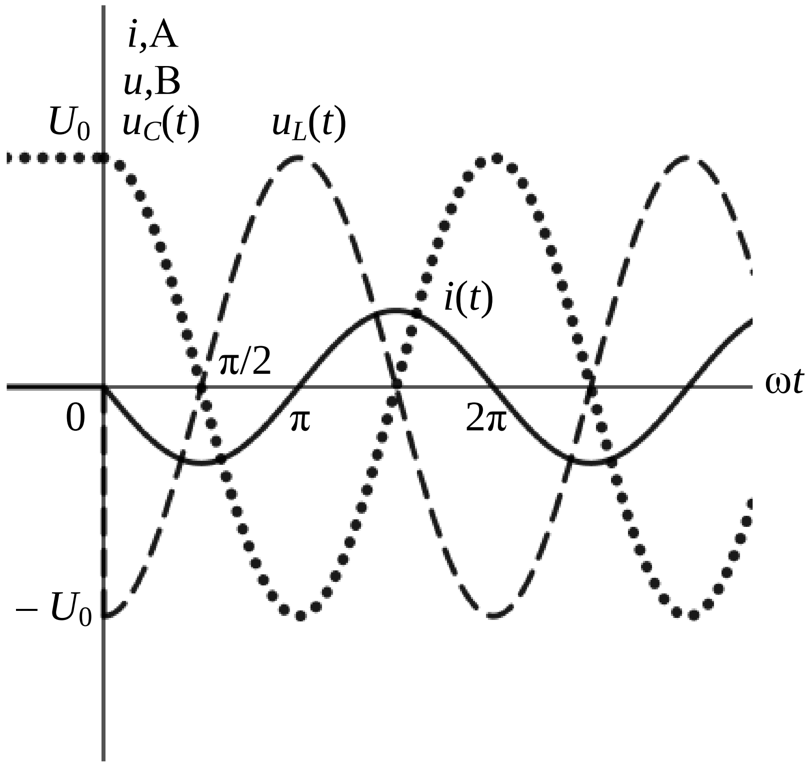


Рисунок 2.30

Згасання амплітуди коливань, яке визначається експоненціальним множником $e^{-\delta t}$, залежить від співвідношення параметрів кола. Зазвичай ця величина кількісно характеризується декрементом коливання, який визначається відношенням двох поспіль амплітуд однакового знаку, віддалених на період $T_в$:

$$\Delta = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T_в}.$$

Величина декременту коливання залежить лише від співвідношення параметрів елементів кола. Також використовується логарифмічний декремент коливань

$$\ln\Delta = \delta T_в.$$

Якщо функція згасає повільно, то відношення значень амплітуд, що відстоять на $T_в$, близьке до одиниці, а логарифмічний декремент $\ln\Delta \to 0$. Великий вплив на швидкість згасання має величина опору R. Зі збільшенням R зменшується частота $\omega_в$ і збільшується період $T_в$. Коли $R = R_{кр}$ частота власних коливань дорівнює нулю, період $T_в \to \infty$, що відповідає аперіодичному процесу розряду конденсатора.

По отриманих виразах (2.126), (2.127) побудовані графіки функцій $u_C(t)$, $i(t)$ (рис. 2.31). Для їх побудови використані огинаючі: для напруги $\pm U_0 \frac{\omega_0}{\omega_в} e^{-\delta t}$, для струму $\pm \frac{U_0}{L\omega_в} e^{-\delta t}$.

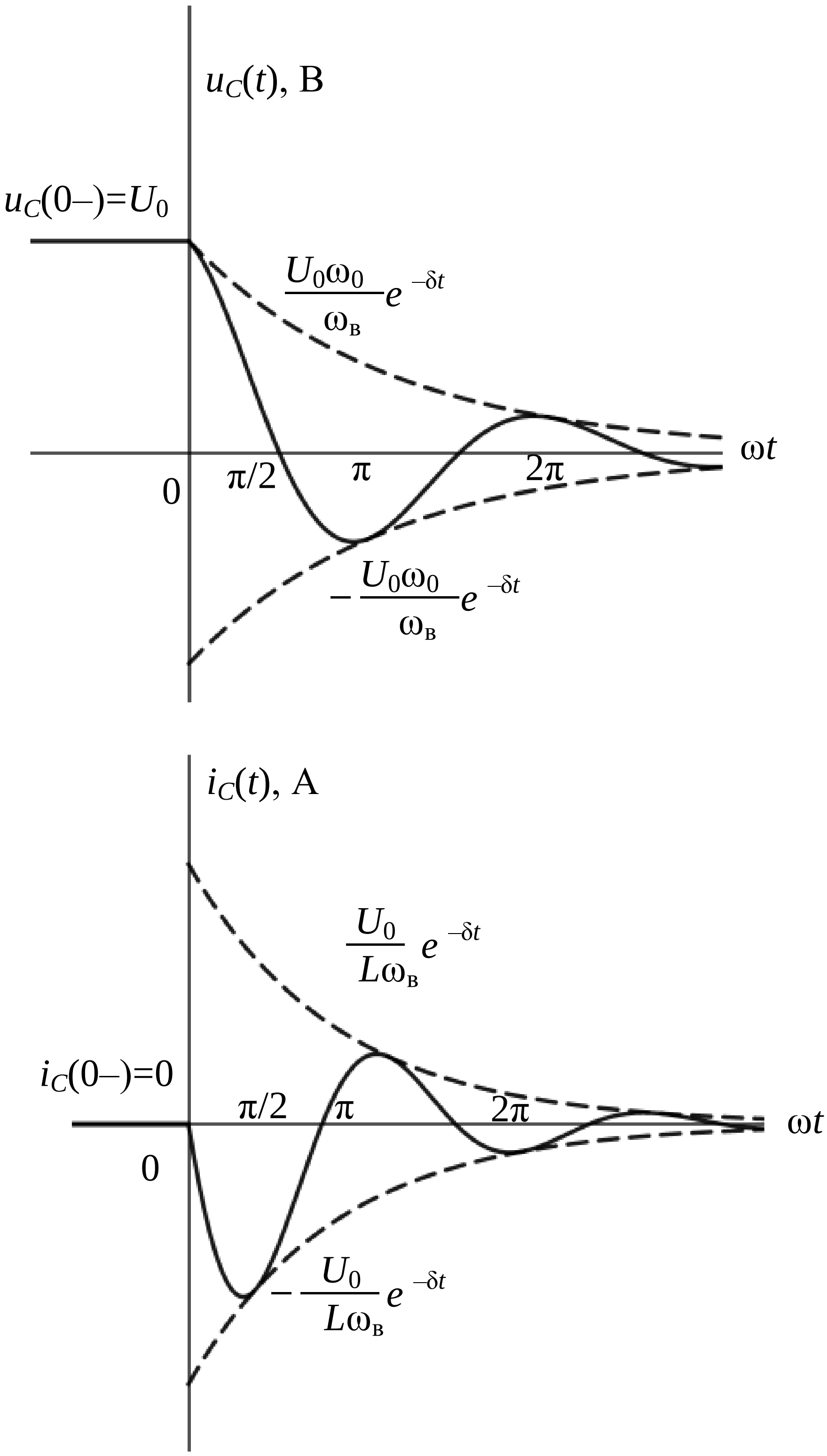


Рисунок 2.31

Коливання напруги і струму виникають внаслідок перетворення енергії електричного поля в енергію магнітного поля і навпаки. Оскільки $R \neq 0$, ці коливання супроводжуються втратами енергії в резисторі. Кутова частота коливань $\omega_в$ у випадку $\delta \neq 0$ завжди менше частоти ω_0. Чим більше коефіцієнт згасання δ у порівнянні з ω_0, тим швидше згасає коливальний процес.

Напруга на конденсаторі $u_C(t)$ по фазі зсунута відносно струму на кут $\left[-\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\right]$. В цілому, отримані вирази для функцій $u_C(t)$, $u_L(t)$, $i(t)$ не є синусоїдальними функціями, оскільки в цих виразах є експоненціальний множник $e^{-\delta t}$, тому напруга на конденсаторі відстає від струму на кут $\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$, а не на $\frac{\pi}{2}$. На котушці індуктивності напруга випереджає струм на кут $\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$.

2.7.3. *Приєднання кола RLC до джерела постійної напруги*

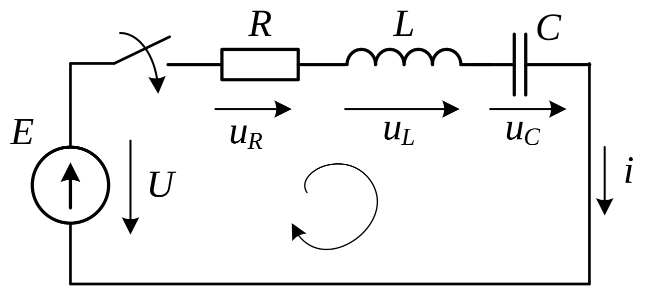


Рисунок 2.32

Будемо вважати, що докомутаційне коло мало нульові початкові умови, тобто $u_C(0–) = 0$, $i(0–) = 0$.

Диференціальне рівняння складене для кола після комутації за другим законом Кірхгофа:

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = U$$

або

$$Ri + L\frac{di}{dt} + u_C = U. \qquad (2.135)$$

Обираємо за шукану величину напругу на конденсаторі $u_C(t)$. Скористаємось відомим співвідношенням маж напругою на конденсаторі і струмом:

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}. \qquad (2.136)$$

Після підстановки (2.136) у (2.135) отримуємо неоднорідне диференціальне рівняння, складене відносно $u_C(t)$.

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U. \qquad (2.137)$$

Повне розв'язання цього рівняння є сумою вимушеної та вільної складових:

$$u_C(t) = u_{C\text{вим}}(t) + u_{C\text{в}}(t). \tag{2.138}$$

В новому усталеному режимі після комутації отримуємо коло постійного струму з послідовно з'єднаними елементами *R, L, C*. Для такого режиму котушка індуктивності має нульовий опір, а конденсатор – нескінченний. Тому вимушений струм дорівнює нулю, а вимушена складова напруги на конденсаторі дорівнює ЕРС джерела:

$$i_{\text{вим}}(t) = 0, u_{C\text{вим}}(t) = U.$$

Характеристичне рівняння кола:

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0. \tag{2.139}$$

Рівняння (2.139) таке саме, як і (2.105), яке було отримане для процесу розряду конденсатора. Отже, вільна складова напруги зберігає свій загальний вигляд.

2.7.3.1. *Аперіодичний заряд конденсатора*

У випадку аперіодичного заряду конденсатора, коли корені характеристичного рівняння дійсні, від'ємні і різні, вільна складова напруги на конденсаторі має вигляд:

$$u_{C\text{в}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \tag{2.140}$$

Для аперіодичного заряду конденсатора повне розв'язання можна записати так:

$$u_C(t) = E + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \tag{2.141}$$

Струм в колі:

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = CA_1 p_1 e^{p_1 t} + CA_2 p_2 e^{p_2 t}.$$

Для визначення двох сталих інтегрування треба знати $u_C(0+)$ та $\left.\frac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0+}$. За другим законом комутації $u_C(0+) = u_C(0–) = 0$, за першим законом комутації $i(0+) = i(0–) = 0$, а звідси маємо:

$$\left.\frac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0+} = \frac{i(0+)}{C} = 0. \tag{2.142}$$

Тому для моменту t = 0+ маємо два рівняння:

$$\begin{cases} u_C(0+) \ = U + A_1 + A_2, \\ i(0+) = Cp_1A_1 + Cp_2A_2. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = -U, \\ p_1A_1 + p_2A_2 = 0. \end{cases} \qquad (2.143)$$

Із розв'язання (2.143) отримуємо вирази для сталих інтегрування:

$$A_1 = \frac{Up_2}{p_1 - p_2}, A_2 = -\frac{Up_1}{p_1 - p_2}. \qquad (2.144)$$

Таким чином, на відміну від аперіодичного розряду конденсатора знаки у A_1 та A_2 змінюються на протилежні, а замість U_0 маємо U.

Складемо вираз для струму та напруг на конденсаторі і котушці індуктивності у аперіодичному заряді використовуючи аналогію з розрядом конденсатора:

$$i(t) = \frac{U}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}), \qquad (2.145)$$

$$u_C(t) = U + \frac{U}{p_1 - p_2}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}), \qquad (2.146)$$

$$u_L(t) = \frac{E}{p_1 - p_2}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}). \qquad (2.147)$$

На рис. 2.33 наведений якісний вигляд функцій $u_C(t)$, $u_L(t)$, $i(t)$ у аперіодичному перехідному процесі.

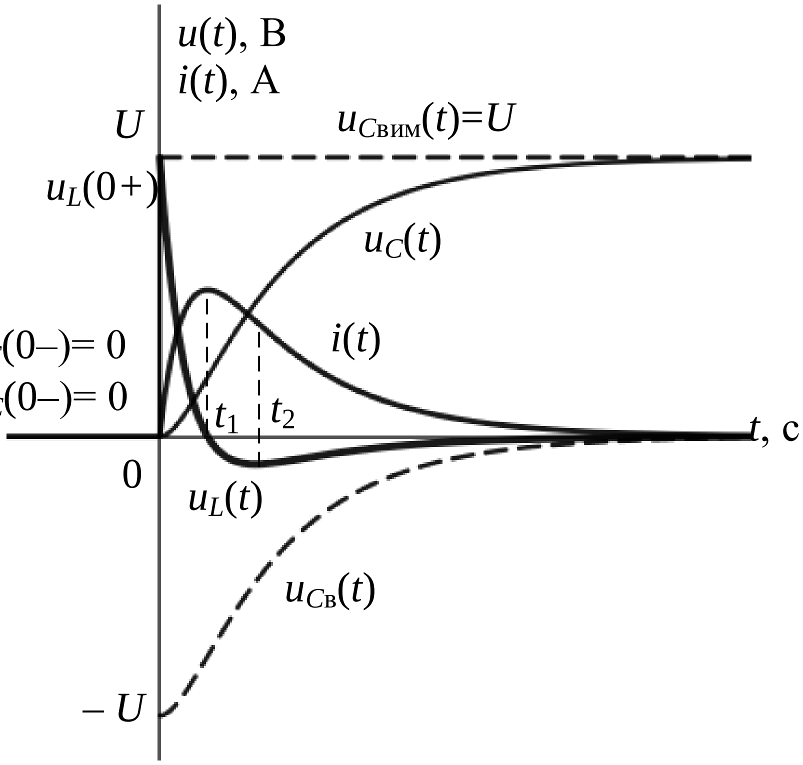


Рисунок 2.33

З цих графіків випливає, що напруга на конденсаторі збільшується до рівня напруги джерела ЕРС, маючи точку перегину за $t = t_1$, в якій струм має максимальне значення, а напруга на котушці індуктивності спадає до нуля. Графіки функцій $i(t)$ та $u_C(t)$ мають той же характер, як і за аперіодичного розряду конденсатора.

2.7.3.2. *Гранично-аперіодичний заряд конденсатора*

Для гранично-аперіодичного процесу заряду конденсатора виконуються такі умови: $\delta = \omega_0$, $R = R_{кр}$, $p_1 = p_2 = -\delta$.

Для цього випадку розв'язання відносно струму має вигляд:

$$it{=}i\text{в}t{=}\mathrm{A}1{+}A2te{-}\delta t. \qquad (2.148)$$

Початкові післякомутаційні умови:

$$i(0+) = A_1 = 0,$$

тому

$$i(t) = A_2 t e^{-\delta t}. \qquad (2.149)$$

Похідна

$$\frac{di}{dt} = A_2 e^{-\delta t}(1 - \delta t), \frac{di}{dt}\bigg|_{t\,=\,0\,+} = A_2 = \frac{U}{L}. \qquad (2.150)$$

Таким чином, струм в часі змінюється так:

$$i(t) = \frac{U}{L} t e^{-\delta t}. \qquad (2.151)$$

Напруга на котушці індуктивності:

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = Ue^{-\delta t}(1 - \delta t). \qquad (2.152)$$

За другим законом Кірхгофа

$$u_R + u_L + u_C = U, \; u_C = U - (u_R + u_L).$$

$$u_C(t) = U\left(1 - \frac{R}{L}te^{-\delta t} + \delta t e^{-\delta t}\right) = U - U(1 + \delta t)e^{-\delta t}, \qquad (2.153)$$

де $R/L = 2\delta$.

Графіки струму і напруг аналогічні наведеним на рис. 2.33.

2.7.3.3. *Коливальний заряд конденсатора*

Коливальний (періодичний) процес заряду конденсатора виникає за умови, коли $R < R_{кр}$. Тоді корені характеристичного рівняння (2.139) будуть комплексно спряжені, тобто $p_{1,2} = -\delta \pm \omega_в$. Для розрахунку перехідного процесу в цьому випадку можна обійтися без розв'язання диференціального рівняння, оскільки його вільну складову ми вже визначили (див. п. 2.7.2.3), де розглядали коливальний розряд конденсатора. Треба тільки взяти до уваги, що у випадку заряду конденсатора вільні складові струму і напруг змінюють знак на протилежний і з'являється вимушена складова $U_{Cвим}$ у напруги на конденсаторі, величина якої дорівнює ЕРС джерела напруги.

Вирази напруг $u_C(t)$, $u_L(t)$ і струму $i(t)$ для випадку коливального заряду конденсатора:

$$i(t) = \frac{U}{L\omega_в} e^{-\delta t} \sin\omega_в t, \qquad (2.154)$$

$$u_C(t) = U + U\frac{\omega_0}{\omega_в} e^{-\delta t} \sin\left(\omega_в t - \frac{\pi}{2} - \beta\right), \qquad (2.155)$$

$$u_L(t) = U\frac{\omega_0}{\omega_в} e^{-\delta t} \sin\left(\omega_в t + \frac{\pi}{2} + \beta\right). \qquad (2.156)$$

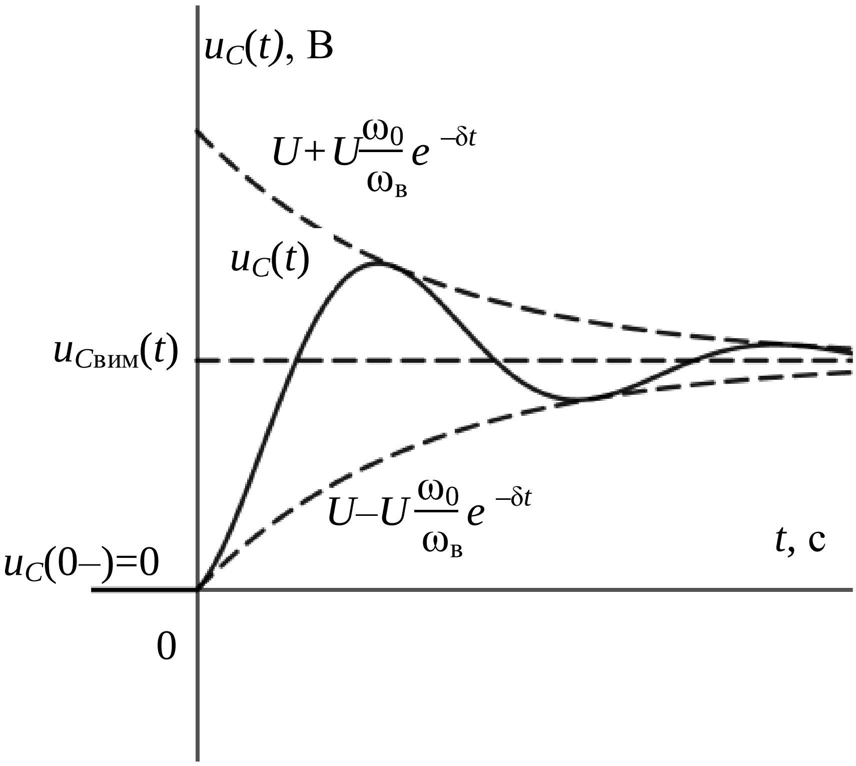


Рисунок 2.34

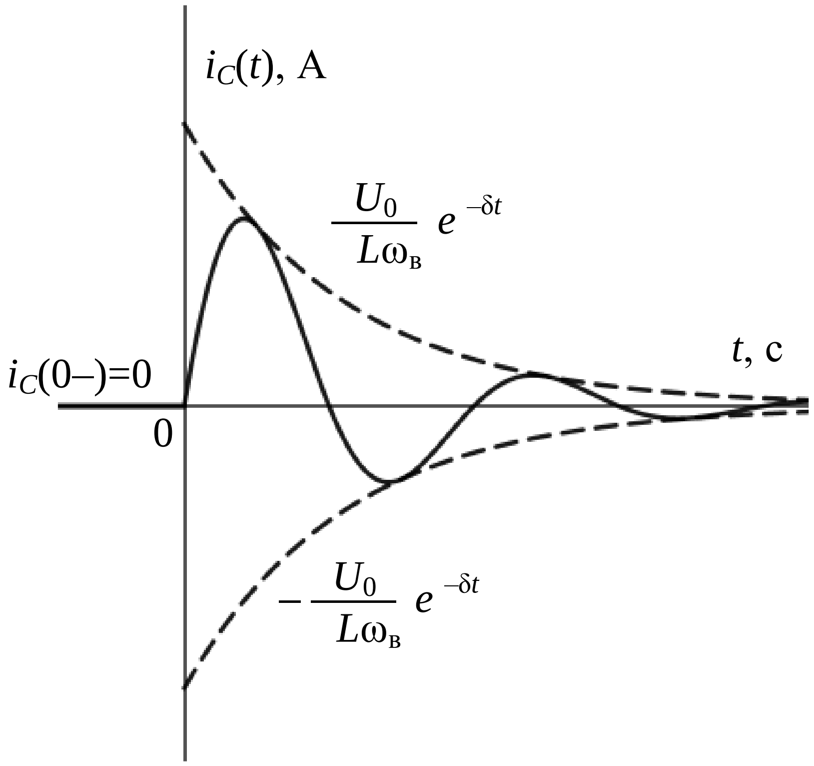


Рисунок 2.35

На рис. 2.34 і рис.2.35 наведений якісний вигляд графіків функцій $u_C(t)$ та $i(t)$, які ілюструють коливальний перехідний процес за нульових початкових умов. Обидві ці функції здійснюють згасаючі коливання навколо свого нового вимушеного значення– напруга $u_C(t)$ навколо вимушеної складової U, а струм $i(t)$ навколо нульового значення. Слід звернути увагу на те, що напруга на конденсаторі може сягати майже подвоєного амплітудного значення ЕРС напруги джерела приблизно через півперіода після комутації.

У випадку, коли $R = 0$, то $\delta = 0$, $\beta = 0$, $\omega_в = \omega_0$, вирази для напруг $u_C(t)$, $u_L(t)$ і струму $i(t)$ набувають вигляду:

$$i(t) = \frac{U}{L\omega_0}\sin\omega_0 t, \tag{2.157}$$

$$u_C(t) = U + U\sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right), \tag{2.158}$$

$$u_L(t) = U\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{2.159}$$

За таких умов в колі встановлюються коливання без згасання, частота їх ω_0, а напруга на конденсаторі буде змінюватися в межах від 0 до $2U$.

2.7.4. *Підключення кола RLC до синусоїдальної напруги*

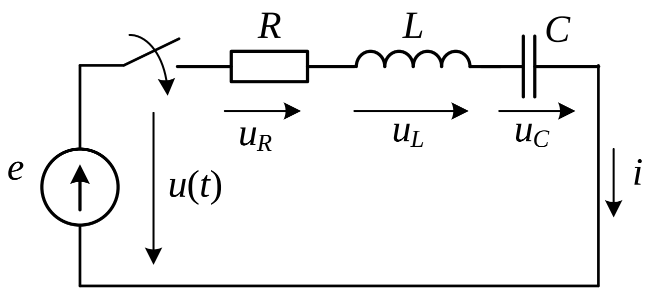


Рисунок 2.36

Розглянемо перехідний процес, що спричиняє увімкнення кола RLC на гармонійну напругу, за нульових початкових умов, тобто $u_C(0–) = 0$, $i(0–) = 0$.

Диференціальне рівняння для післякомутаційного кола відносно шуканої функції $u_C(t)$ має такий вигляд:

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U_m\sin(\omega t + \psi_u). \qquad (2.160)$$

Його повне розв’язання:

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U_m\sin(\omega t + \psi_u). \qquad (2.161)$$

Для розрахунку вимушеної складової скористаємось комплексним методом:

$$\underline{I}_{m\text{вим}} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}},$$

де $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$, $\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Ze^{j\varphi}$,

$Z = \left|\underline{Z}\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$, $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{X}{R}$.

Тому комплексна амплітуда вимушеної складової струму в колі:

$$\underline{I}_{m\text{вим}} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{Ze^{j\varphi}} = I_{m\text{вим}} e^{j(\psi_u - \varphi)} = I_{m\text{вим}} e^{j\psi_i}, \qquad (2.162)$$

де $\psi_i = \psi_u - \varphi, I_{m\text{вим}} = \left|\underline{I}_{m\text{вим}}\right| = \frac{U_m}{Z}$,

а комплексна амплітуда вимушеної складової напруги на конденсаторі:

$$\underline{U}_{Cm\,\text{вим}} = \underline{I}_{m\text{вим}}\left(-j\frac{1}{\omega C}\right) =$$

$$= I_{m\text{вим}} e^{j\psi_i} \cdot \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} = U_{Cm\,\text{вим}} e^{j\left(\psi_i - \frac{\pi}{2}\right)}. \qquad (2.163)$$

Вільна складова не залежить від джерела живлення і для кіл другого порядку вона має такий вигляд:

$$u_{C\text{в}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \qquad (2.164)$$

Тоді повне розв’язання для функції $u_C(t)$:

$$u_C(t) = \frac{I_{m\text{вим}}}{\omega C}\sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right) + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \qquad (2.165)$$

Повне розв’язання для струму $i(t)$:

$$i(t) = I_{m\text{вим}}\sin(\omega t + \psi_i) + C\frac{du_{C\text{в}}(t)}{dt},$$

$$i(t) = I_{m\text{вим}}\sin(\omega t + \psi_i) + Cp_1 A_1 e^{p_1 t} + Cp_2 A_2 e^{p_2 t}. \qquad (2.166)$$

Для вільного режиму у випадку синусоїдального джерела ЕРС також існують три варіанти розвитку процесу в залежності від виду коренів характеристичного рівняння – аперіодичний, гранично-аперіодичний та коливальний. Найбільш цікавим є третій варіант, пов’язаний з появою під час перехідного процесу власних коливань з частотою $\omega_\text{в}$.

Сталі інтегрування A_1 і A_2 можна знайти, знаючи післякомутаційні початкові умови і використовуючи закони комутації. Після підстановки комплексних коренів у (2.165) і (2.166) отримуємо вирази для струму і напруги на конденсаторі:

$$i(t) = I_{m\text{вим}}\sin(\omega t + \psi_i) -$$

$$-I_{m\text{вим}}\frac{\omega_0}{\omega_\text{в}}\left[\sin\psi_i\sin(\omega_\text{в} t + \beta) + \frac{\omega_0}{\omega}\cos\psi_i\sin(\omega_\text{в} t)\right]e^{-\delta t}, \qquad (2.167)$$

$$u_C(t) = -\frac{I_{m\text{вим}}}{\omega C}\cos(\omega t + \psi_i) -$$

$$-\frac{I_{m\text{вим}}}{\omega_\text{в} C}\left[\sin\psi_i\sin\omega_\text{в} t + \frac{\omega_0}{\omega}\cos\psi_i\sin(\omega_\text{в} t - \beta)\right]e^{-\delta t}. \qquad (2.168)$$

У випадку, коли частота джерела $\omega = \omega_\text{в}$, згасання буде дуже малим, тобто $\delta << \omega_0$, і тому $\omega_\text{в} \approx \omega_0$, кут $\beta = \pi/2$, а рівняння (2.167) і (2.168) виглядатимуть так:

$$i(t) \approx I_{m\text{вим}}\left(1 - e^{-\delta t}\right)\sin(\omega t + \psi_i), \qquad (2.169)$$

$$u_C(t) = -\frac{I_{m\text{вим}}}{\omega C}\left(1 - e^{-\delta t}\right)\cos(\omega t + \psi_i). \qquad (2.170)$$

В такому варіанті перехідного процесу амплітуди коливань струму та напруги на конденсаторі поступово збільшуються (див. рис. 2.37) від моменту комутації до нового усталеного режиму.

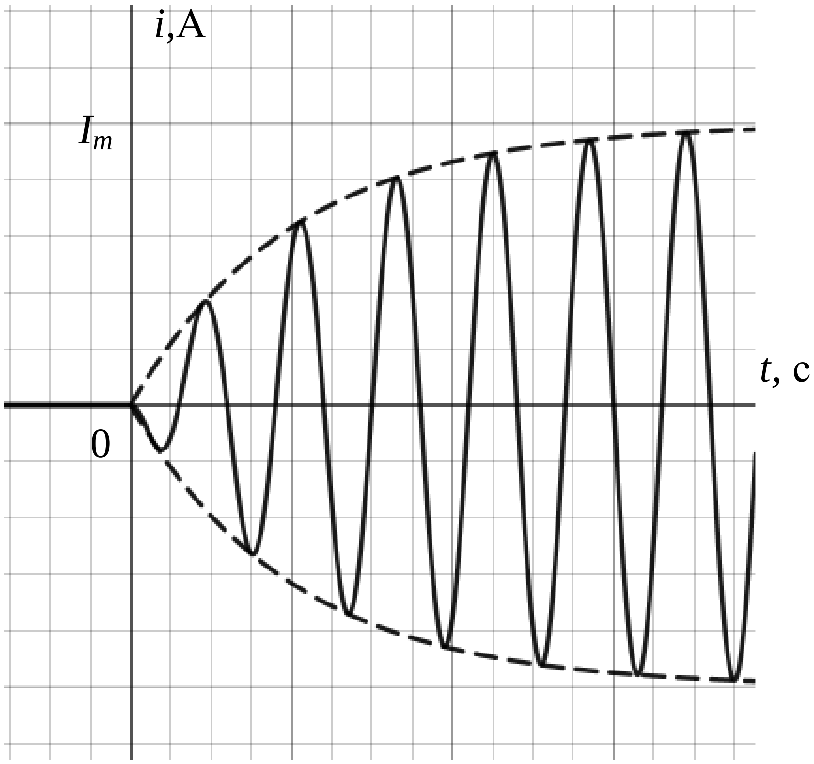


Рисунок 2.37

Характерною особливістю такого перехідного процесу, який називають *ізохронізмом коливань*, полягає в тому, що амплітуди струму та напруги на конденсаторі поступово збільшуються від моменту комутації до встановлення нового вимушеного режиму. Треба брати до уваги те, що за умови $\omega \approx \omega_0$ коло *RLC* знаходиться в режимі резонансу напруг. Тому за високих значень добротності кола Q амплітуда струму може сягати значень $I_m = U_m/R$, а амплітуди напруг на індуктивності і ємності значно перевищуватимуть амплітуду прикладеної напруги. Це треба враховувати, щоб уникнути аварійних режимів роботи пристроїв та устаткування.

Якщо частота власних згасаючих коливань $\omega_в$ близька за значенням (але не дорівнює) частоті джерела живлення ω, то за малих значень коефіцієнта згасання ($\delta << \omega_0$) в колі виникають биття коливань. Це явище виникає внаслідок того, що з підключенням джерела гармонійної напруги до кола другого порядку виникає різниця частот ω і $\omega_в$, що спричиняє безперервну зміну фазових співвідношень між вільною та вимушеною складовими:

$$\Delta\varphi(t) = (\omega - \omega_в)t.$$

В моменти часу, коли різниця фаз дорівнює $2k\pi$, де $k = 0,\ldots, n,$ сума миттєвих значень вимушеної та вільної складових струму буде максимальною, а коли різниця фаз дорівнюватиме $(2k+1)\pi$, ця сума буде мати мінімальне значення. Частоту повторювання максимумів обвідної струму називають частотою биття. Таким чином, кутова частота биття дорівнюватиме абсолютному значенню різниці кутових частот вільної та вимушеної складових:

$$\omega_б = |\omega - \omega_0|.$$

В реальних колах другого порядку биття мають згасаючий характер (рис.2.38), оскільки коефіцієнт згасання таких кіл є завжди ненульовим і вільна складова зменшується в часі до нуля, биття згасають і в колі встановлюється гармонійний режим.

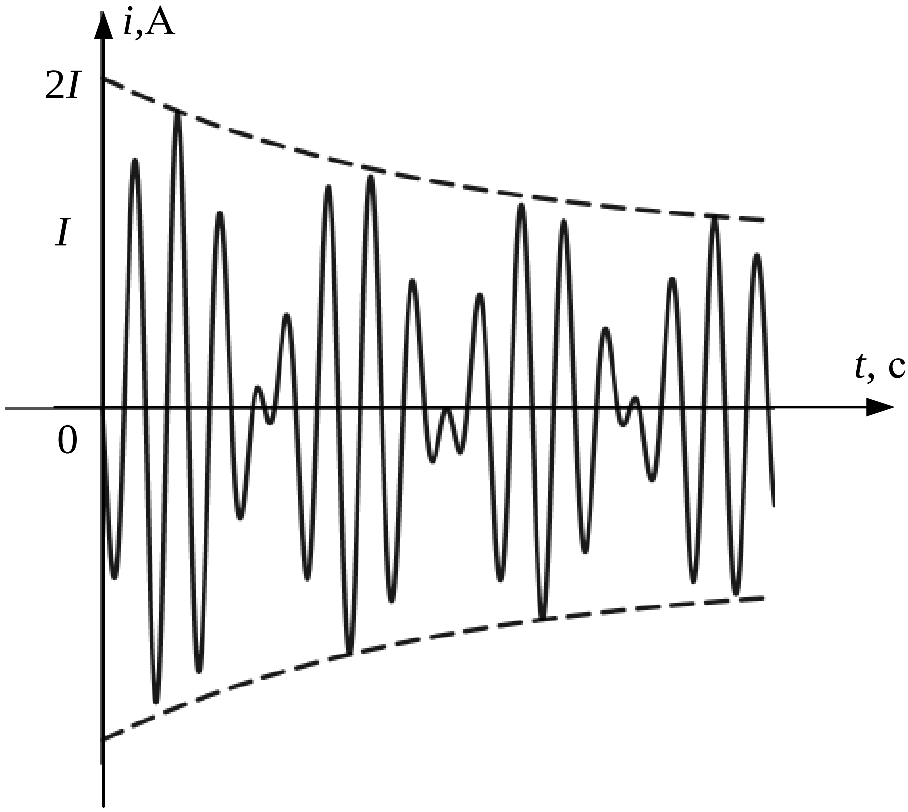


Рисунок 2.38

2.8. Запитання для самоперевірки

Поясніть суть класичного методу і його властивості.

Як скласти диференціальне рівняння, що описує роботу електричного кола в перехідному процесі?

Складіть диференціальні рівняння для найпростіших *RL* та *RC* кіл.

Опишіть загальну методику визначення шуканої функції з використанням класичного методу.

Дайте визначення вимушеної та вільної складових шуканої функції та наведіть порядок їх розрахунку.

Дайте визначення характеристичного рівняння кола та опишіть методи їх отримання.

Поясніть, чи залежить вигляд характеристичного рівняння від характеру функції впливу на вході кола.

Складіть характеристичне рівняння для найпростішого кола *RL* та *RC.*

Що таке сталі інтегрування і як вони визначаються в залежності від порядку диференціального рівняння кола?

Запишіть вираз вільної складової для кола першого порядку, дайте визначення сталої часу кола та поясніть її фізичний та геометричний сенс.

Що таке практична тривалість перехідного процесу і як вона пов’язана зі сталою часу кола?

Сформулюйте порядок визначення сталих часу в розгалужених колах першого порядку.

Запишіть вирази вільної складової для кола другого порядку для трьох видів коренів характеристичного рівняння.

Проаналізуйте залежність характеру перехідного процесу при підключенні кола *RC* до джерела постійної напруги від початкових значень напруги на конденсаторі.

Проведіть аналіз залежності інтенсивності перехідного процесу від значення початкової фази напруги джерела ЕРС за підключення кола *RC* на гармонійну напругу.

За якого значення початкової фази джерела напруги перехідний процес буде найбільш інтенсивним, а за якого значення початкової фази перехідний процес буде відсутнім?

Складіть диференціальне рівняння кола для розряду конденсатора на коло *RL*. За яких значень коренів характеристичного рівняння перехідний процес буде аперіодичним, гранично аперіодичним та коливальним?

Що таке коефіцієнт та декремент згасання?

2.9. Приклади розв’язання задач

Приклад 1

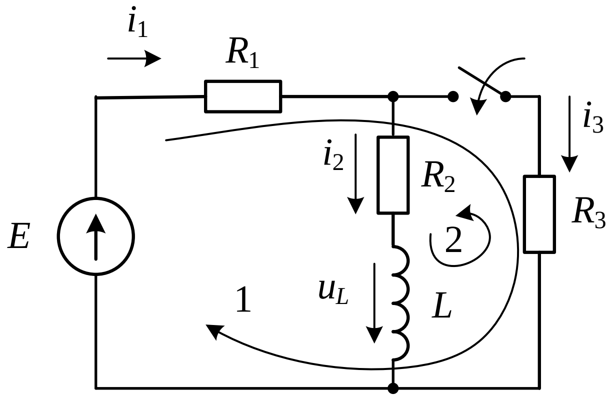


Рисунок 2.39

За заданих опорів і ЕРС джерела постійної напруги визначити струми в гілках і напругу на індуктивності в перехідному режимі.

Для вирішення цього завдання необхідно скласти систему рівнянь за законами Кірхгофа для кола після комутації:

$$i_1 = i_2 + i_3; \tag{2.171}$$

для контурів (1) та (2) за II законом Кірхгофа:

$$i_1 R_1 + i_3 R_3 = U; \tag{2.172}$$

$$i_2 R_2 + L\frac{di_2}{dt} - i_3 R_3 = 0; \tag{2.173}$$

Розв’яжемо цю систему відносно струму i_2, оскільки визначаючи сталу інтегрування в цьому випадку можна скористатися першим законом комутації. Помножимо обидві частини (2.171) на R_1:

$$i_1 R_1 = i_2 R_1 + i_3 R_1. \tag{2.174}$$

З виразу (2.172) отримаємо:

$$i_1 R_1 = U - i_3 R_3; \tag{2.175}$$

З (2.174) та (2.175) маємо: $i_2 R_1 + i_3 R_1 = U - i_3 R_3$, звідки

$$i_3 = \frac{U - i_2 R_1}{R_1 + R_3}. \tag{2.176}$$

Отримане значення i_3, використаємо в (2.173).

Після перетворення отримуємо:

$$L\frac{di_2}{dt}+i_2\left(R_2+\frac{R_3\cdot R_1}{R_3+R_1}\right)=\frac{UR_3}{R_1+R_3};$$

або

$$L\frac{(R_1+R_3)}{R_3}\cdot\frac{di_2}{dt}+i_2\left(R_1+R_2+\frac{R_1\cdot R_2}{R_3}\right)=U. \qquad (2.177)$$

Диференціальне рівняння (2.177) лінійне, першого порядку, неоднорідне. Його розв’язанням є сума двох компонентів: вимушеної і вільної і безкоштовної:

$$i_2(t)=i_{2_{\text{вим}}}+i_{2_{\text{в}}}.$$

Вимушена складова $i_{2\text{вим}}$ – значення струму в сталому режимі після комутації:

$$i_{2_{\text{вим}}}=\frac{U}{R_1+\frac{R_2\cdot R_3}{R_2+R_3}}\cdot\frac{R_3}{R_2+R_3}=\frac{U\cdot R_3}{R_1(R_2+R_3)+R_2\cdot R_3}.$$

Для визначення вільної складової розв’яжемо характеристичне рівняння:

$$p\cdot L\frac{(R_1+R_3)}{R_3}+R_1+R_2+\frac{R_1\cdot R_2}{R_3}=0;$$

$$p=-\frac{(R_1R_3+R_2R_3+R_1R_2)}{L(R_1+R_3)}=-\frac{\left(R_2+\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}\right)}{L}.$$

Стала часу кола:

$$\tau=\left|\frac{1}{p}\right|=\frac{L}{R_2+\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}}.$$

Розв’язання для вільної складової має вигляд:

$$i_{2_{\text{в}}}=A\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Загальний вираз для струму i_2 в перехідному процесі:

$$i_2(t)=\frac{U\cdot R_3}{R_1(R_2+R_3)+R_2\cdot R_3}+A\cdot e^{-\frac{t}{\tau}};$$

Сталу інтегрування A визначимо з початкових умов з використанням першого закону комутації:

$$i_2(0+)=\frac{UR_3}{R_1(R_2+R_3)+R_2\cdot R_3}+A;$$

До комутації:

$$i_2(0-) = \frac{U}{R_1 + R_2};$$

оскільки $i_2(0+) = i_2(0-)$, то:

$$\frac{UR_3}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 \cdot R_3} + A = \frac{U}{R_1 + R_2},$$

звідки:

$$A = \frac{U}{R_1 + R_2} - \frac{UR_3}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 \cdot R_3} = \frac{U}{(R_1 + R_2) \cdot \left(1 + \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2}\right)}.$$

Остаточно:

$$i_2(t) = \frac{U \cdot R_3}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 \cdot R_3} + \frac{U}{(R_1 + R_2) \cdot \left(1 + \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2}\right)} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}};$$

Напруга на індуктивності в перехідному процесі:

$$u_L(t) = L\frac{di_2}{dt};$$

Струми i_1 та i_3 визначаються з виразів (2.175) та (2.176):

$$i_1 = \frac{U - i_2R_2 - u_L(t)}{R_1}; i_3 = \frac{i_2R_2 + u_L(t)}{R_3}.$$

Приклад 2

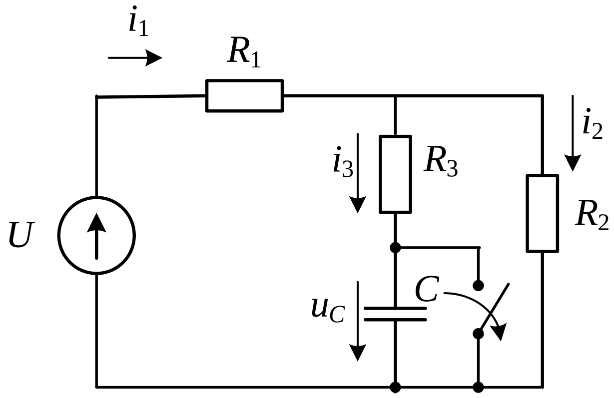


Рисунок 2.40

Умова задачі аналогічна попередній умові: для всіх зазначених параметрів кола U = const, визначити струми у всіх гілках і напругу на конденсаторі в перехідному процесі.

Система рівнянь за законами Кірхгофа для кола після комутації має вигляд:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3; \\ i_3 R_3 + i_1 R_1 + u_c = U; \\ i_3 R_3 + u_c - i_2 R_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему відносно напруги на конденсаторі, отримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку, неоднорідне:

$$C \cdot \frac{(R_3 R_2 + R_1 R_2 + R_3 R_1)}{R_2} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{(R_1 + R_2)}{R_2} \cdot u_C = U. \tag{2.178}$$

Раціонально розв'язувати систему рівнянь відносно тієї фізичної величини, яка підпорядковується першому або другому закону комутації, що спрощує визначення сталих інтегрування.

Характеристичне рівняння:

$$Cp \cdot \frac{(R_3 R_2 + R_1 R_2 + R_3 R_1)}{R_2} + \frac{(R_1 + R_2)}{R_2} = 0;$$

$$p = -\frac{\frac{(R_1 + R_2)}{R_2}}{C \cdot \frac{(R_3 R_2 + R_1 R_2 + R_3 R_1)}{R_2}} = -\frac{1}{C\left(R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)}.$$

Стала часу кола:

$$\tau_C = \left|\frac{1}{p}\right| = C\left(R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right).$$

Розв'язання диференціального рівняння (2.178) можна представити у вигляді

$$u_c(t) = u_{c_{\text{вим}}} + u_{c_{\text{в}}};$$

де $u_{c_{\text{вим}}} = \frac{UR_2}{R_1 + R_2}$; $u_{c_{\text{в}}} = Ae^{-\frac{t}{\tau_C}}$.

Остаточно розв'язання з урахуванням значень $u_{c_{\text{в}}}$ та $u_{c_{\text{вим}}}$:

$$u_C(t) = \frac{UR_2}{R_1 + R_2} + Ae^{-\frac{t}{\tau_C}}.$$

Одразу після комутації (t = 0+) беручи до уваги II закон комутації отримаємо:

$$u_C(0+) = \frac{UR_2}{R_1 + R_2} + A.$$

До комутації конденсатор був закорочений та $u_c(0-) = 0$; оскільки $u_c(0+) = u_c(0-)$, то:

$$A = -\frac{UR_2}{R_1 + R_2}.$$

Остаточно маємо:

$$u_C(t) = \frac{UR_2}{R_1 + R_2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right).$$

Струм через конденсатор в перехідному процесі:

$$i_3 = C\frac{du_C}{dt}.$$

Струми в інших гілках визначаються за законами Кірхгофа.:

$$i_2 = \frac{i_3R_3 + u_C}{R_2}; \quad i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

З розглянутих прикладів можна зробити висновок, що в розгалуженому лінійному електричному колі з одним накопичувачем енергії (L або C) рівняння, складене по відношенню до будь-якого струму (напруги на індуктивності або ємності), є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку. Розв'язанням такого рівняння є сума двох складових: вимушеної і вільної.

Тому не завжди потрібно складати диференціальне рівняння відносно шуканої величини. Достатньо одразу записати його розв'язання як суму двох складових. В цьому випадку є складнощі з визначенням сталої часу розгалуженого кола. Але, оскільки відомо, що стала часу визначається в результаті розв'язання характеристичного рівняння, складеного на основі однорідного диференціального рівняння, тобто без джерела енергії.

У разі розгалуженої схеми *RL* сталу часу можна представити у вигляді:

$$\tau_L = \frac{L}{R_{\text{e}}};$$

І для розгалуженої схеми *RC* :

$$\tau_c = C \cdot R_{\text{e}};$$

В обох цих випадках R_{e} – вхідний опір, що визначається відносно затискачів накопичувача (L або C) для кола після комутації за короткозамкнених джерел ЕРС (або розімкнених джерел струму) для кола постійного або змінного струму.

Приклад 3

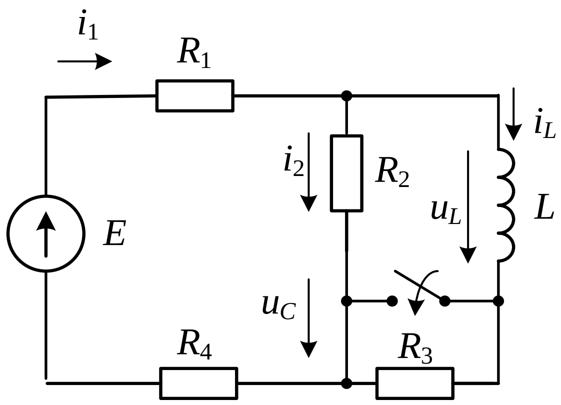


Рисунок 2.41

Дано:

E = 100 В, $R_1 = R_4 = 20$ Ом,

$R_2 = R_3 = 80$ Ом,

L = 30 мГн.

Визначити струми у всіх гілках, а також напруги на індуктивності в перехідному процесі. Побудувати графік $i_1(t)$.

Розв'язання

До комутації (t = 0–),

$$i_L(0-) = \frac{E}{R_1 + R_4 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{100}{40 + 40} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}625, \text{А}.$$

Система рівнянь за законами Кірхгофа після комутації:

$$i_1(R_1 + R_4) + i_2 R_2 = E, \qquad (a)$$

$$L\frac{di_L}{dt} - i_2 R_2 = 0, \qquad (b)$$

$$i_1 + i_2 = i_L. \qquad (c)$$

Розв'язання цієї системи відносно струму i_L:

$$i_L(t) = i_{L_{\text{вим}}} + i_{L_{\text{в}}}.$$

$$i_{L_{\text{вим}}} = \frac{E}{R_1 + R_4} = \frac{100}{40} = 2{,}5(A); \quad i_{L_{\text{в}}} = Ae^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Стала часу кола

$$\tau_L = \frac{L}{R_{\text{е}}} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{26.67} \cdot 1{,}13 \cdot 10^{-3}, \text{с},$$

де

$$R_{\text{е}} = \frac{R_2(R_1 + R_4)}{R_2 + R_1 + R_4} = \frac{80 \cdot 40}{80 + 40} = 26{,}67(\text{Ом}).$$

$$i_L(t) = 2{,}5 + Ae^{-\frac{t}{\tau_L}},$$

Для $t = 0+$ $i_L(0+) = 2{,}5 + A$.

За першим законом комутації: $i_L(0+) = i_L(0-) = 0{,}625$; $0{,}625 = 2{,}5 + A$, звідки $A = 625 - 2{,}5 = -1{,}875$.

Отже, в перехідному процесі:

$$i_L(t) = 2{,}5 - 1{,}875 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_L}},$$

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = 50 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

З рівняння (b)

$$i_2(t) = \frac{u_L(t)}{R_2} = \frac{50 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_L}}}{80} = 0{,}625 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_L}}, \text{А}.$$

З рівняння (a)

$$i_1(t) = \frac{E - i_2R_2}{R_1 + R_4} = \frac{100 - 80 \cdot 0{,}625 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_L}}}{40} = 2{,}5 - 1{,}25 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_L}}, \text{А}.$$

Побудова графіка (рис. 2.42) полягає в графічному додаванні двох складових струму $i_1(t)$: вимушеної постійної складової і вільної, що має форму експоненти зі згасанням.

Висновок: струм в гілці з резистором може не змінюватися в момент перемикання або змінюватися стрибком, тобто не підпорядковується І закону комутації.

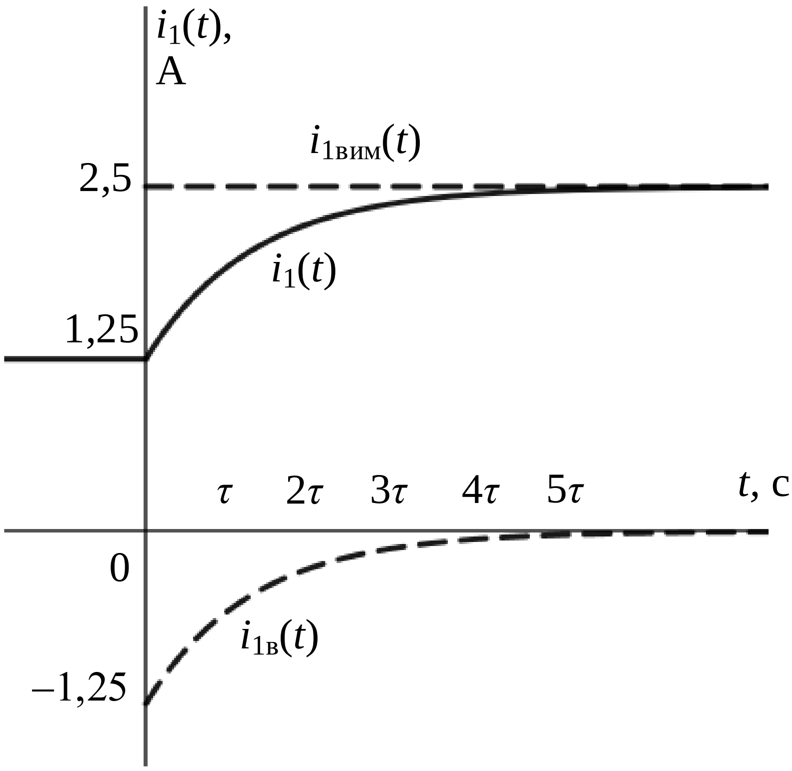


Рисунок 2.42

Приклад 4

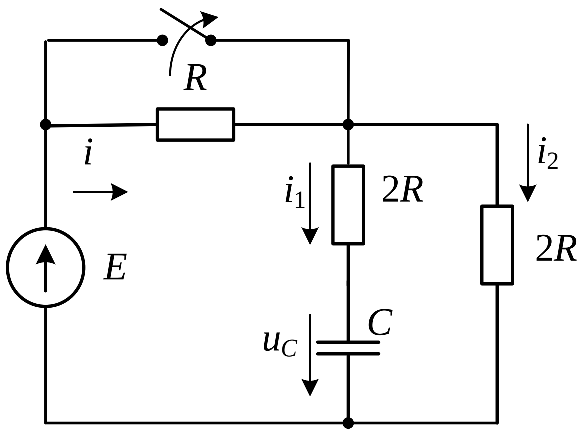


Рисунок 2.43

Дано:

E = 100 В; R = 20 Ом; C = 50 мкФ.

Визначити $i_1(t)$ і побудувати графік.

Розв'язання

Після комутації система рівнянь за законами Кірхгофа має вигляд:

$$\begin{cases} iR + i_2 2R + u_c = E, \\ i_1 2R + u_c - i_2 R = 0, \\ i = i_2 + i_1. \end{cases}$$

Розв'язання даної системи відносно напруги на конденсаторі:

$$u_C(t) = u_{C_{\text{вим}}} + u_{C_{\text{в}}};$$

$$u_{c_{\text{вим}}} = i_{2_{\text{вим}}} \cdot R;\ i_{2_{\text{вим}}} = \frac{E}{2R},$$

тоді $u_{c_{\text{вим}}} = \frac{E}{2} = 50$ В.

$$u_{C_{\text{в}}} = A_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_C}};\ \text{де}\ \tau_C = C \cdot R_{\text{е}};\ R_{\text{е}} = \frac{R}{2} + 2R = 10 + 40 = 50\ \text{Ом},$$

$$\tau_C = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 25 \cdot 10^{-3}\ \text{с},$$

$$u_c(t) = 50 + A_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_C}}.$$

для $t = 0+$ $u_C(0+) = 50 + \text{A}$.

Відповідно до II закону комутації: $u_C(0+) = u_C(0-) = E$, тоді $A_1 = 100 - 50 = 50$.

В перехідному процесі:

$$u_C(t) = 50 + 50 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_C}};$$

$$i_1(t) = C \cdot \frac{du_c}{dt} = -\frac{50}{R_{\text{е}}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_C}} = -1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_C}}.$$

Графік $i_1(t)$ представлений на рис. 2.44.

Висновок: струм через конденсатор в момент перемикання змінюється стрибком.

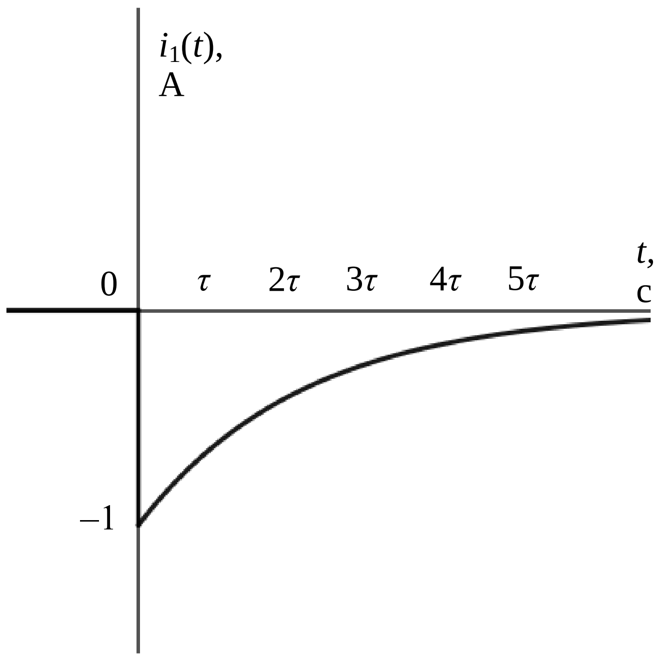


Рисунок 2.44

Приклад 5

Розглянемо розгалужену схему з двома накопичувачами. Після комутації електричне коло можна аналізувати як два автономні кола. Перехідні процеси відбуваються в колах з одним накопичувачем енергії: в одному колі – L, в іншому – C.

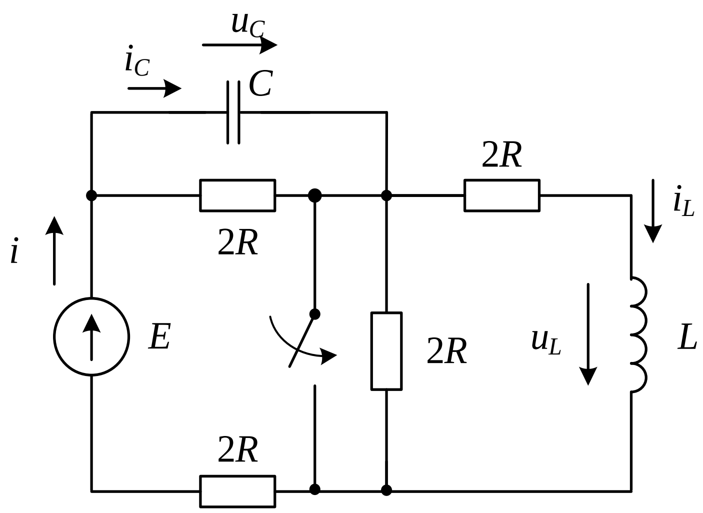


Рисунок 2.45

Дано:

E = 200 В; R = 10 Ом; C = 50 мкФ.

Визначити: $u_C(t)$, $i_C(t)$, $i_L(t)$, $u_L(t)$. Побудувати графіки $u_C(t)$, $i_L(t)$.

Розв'язання

До комутації:

$$i(0-) = \frac{E}{5R} = \frac{200}{50} = 4 \text{ А},$$

$$i_L(0-) = \frac{i(0-)}{2} = 2 \text{ А},$$

$$u_C(0-) = i(0-) \cdot 2R = 4 \cdot 20 = 80 \text{ В}.$$

Після комутації:

1)

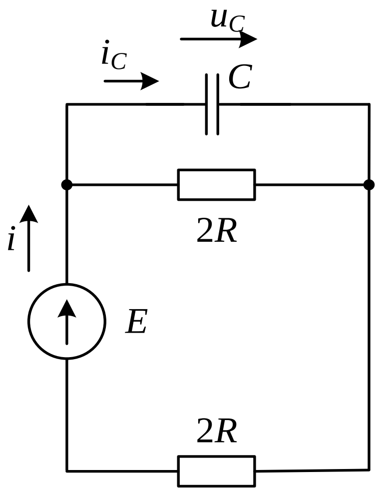


Рисунок 2.46

$$u_C = u_{C\text{вим}} + u_{C\text{в}},$$

$$u_{C\text{вим}} = \frac{E}{2} = \frac{200}{2} = 100 \text{ В},$$

$$u_{C\text{в}} = Ae^{-\frac{t}{\tau_C}},$$

$$\tau_C = C \cdot R_\text{е} = C \cdot R = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 10 = 0{,}5 \cdot 10^{-3}\text{с},$$

$$u_C(t) = 100 + A\text{e}^{-\frac{t}{\tau_C}}.$$

Сталу A визначимо з початкових умов для t = 0+ з урахуванням II закону комутації:

$$u_C(0+) = 100 + A, u_C(0+) = u_C(0-) = 80 \text{ В}.$$

Тоді, A = –100 + 80 = –20.

Напруга на конденсаторі в перехідному процесі:

$$u_C(t) = 100 - 20 \cdot A\text{e}^{-\frac{t}{\tau_C}}, \text{В}.$$

струм через конденсатор:

$$i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} = 2 \cdot \text{e}^{-\frac{t}{\tau_C}}, \text{А}.$$

Другий контур:

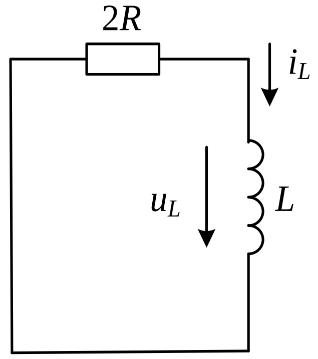


Рисунок 2.47

$i_L(t) = i_{L_в} = A_1 e^{-\frac{t}{\tau_L}}$, де $\tau_L = \frac{L}{2R} = \frac{0,5}{20} = 0{,}025$ с; для $t = 0+$ з урахуванням I закону комутації:

$$i_L(0+) = A_1, \quad i_L(0+) = i_L(0-) = 2; \quad A_1 = 2.$$

тоді

$$i_L(t) = 2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_L}}\ \text{А};$$

$$u_L(t) = L\frac{di_1}{dt} = -40e^{-\frac{t}{\tau_L}}\ \text{В}.$$

Графіки $i_L(t)$ та $u_C(t)$:

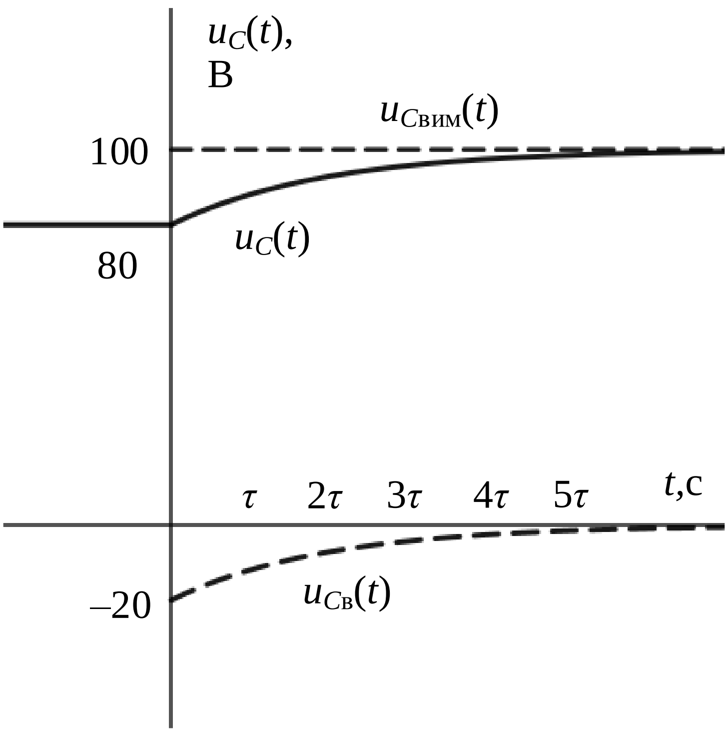


Рисунок 2.48

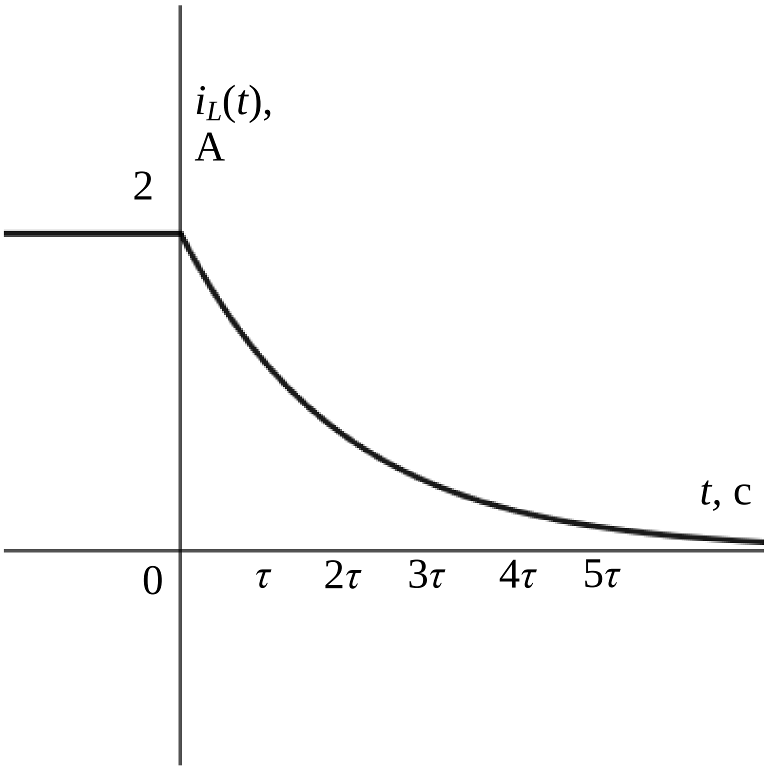


Рисунок 2.49

Висновок: струм індуктивності і напруга на конденсаторі не змінюються в момент перемикання.

Приклад 6

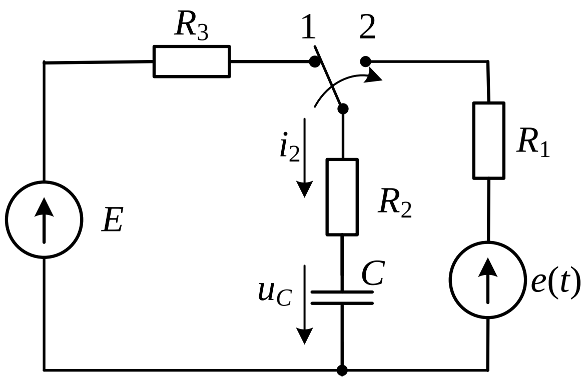


Рисунок 2.50

Дано:
$R_1 = R_2 = R_3 = 5$ Ом, $E = 100$ В; $1/\omega C = 10$ Ом; $e(t) = 100\sqrt{2}\sin(\omega t + 45^\circ)$ В;
$\omega = 10^4$ 1/с.

Визначити закон зміни $u_c(t)$ у перехідному процесі. Побудувати графік.

Розв’язання

До комутації конденсатор був підключений до джерела живлення постійної напруги, і напруга на ньому була: $u_C(0–) = E = 100$, В.

Після комутації складається диференціальне рівняння електричного кола:

$$u_c + i_2(R_1 + R_2) = e(t).$$

Оскільки $i_2 = C\frac{du_c}{dt}$, то

$$(R_1 + R_2) \cdot C\frac{du_c}{dt} + u_c = e(t).$$

Розв’язання цього рівняння відносно до u_C: $u_c(t) = u_{c_{\text{вим}}} + u_{c_{\text{в}}}$.

Оскільки джерелом енергії є синусоїдальна функція, то вимушені струм і напруга на конденсаторі також будуть змінюватися за гармонійним законом, тобто:

$$i_{2_{\text{вим}}} = I_{2m}\sin(\omega t + \psi_i), \quad u_{c_{\text{вим}}} = U_{c\text{т}}\sin(\omega t + \psi_{uc}),$$

де $I_{2m} = \dfrac{E_m}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \dfrac{100\sqrt{2}}{\sqrt{10^2 + 10^2}} = 10,$ А.

$$\varphi = \text{arctg}\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R_1 + R_2} = \text{arctg}\frac{-10}{10} = -45°.$$

оскільки: $\psi_E - \psi_i = \varphi$, то $\psi_i = \psi_E - \varphi = 45° + 45° = 90°$.

$$i_{2_{\text{вим}}} = 10\sin(\omega t + 90°);$$

$$U_{\text{Ст}} = I_{2m} \cdot \frac{1}{\omega C} = 10 \cdot 10 = 100 \quad B;$$

$$\psi_{U_{\text{С}}} = \psi_i - 90° = 90° - 90° = 0.$$

тоді: $u_{c_{\text{вим}}} = 100\, sin\, \omega\, t$; $u_{c_{\text{в}}} = \text{A}e^{-\frac{t}{\tau_C}}$.

Стала часу: $\tau_C = C(R_1 + R_2)$;

величину ємності визначимо з виразу:

$$\frac{1}{\omega C} = 10; \frac{1}{10^4 \cdot C} = 10; \quad C = \frac{1}{10^5} = 10^{-5} \text{ Ф},$$

$$\tau_C = 10^{-5} \cdot 10 = 10^{-4} c.$$

Повністю $u_C(t)$ в перехідному процесі: $u_C(t) = 100\sin\omega\, t + \text{A}e^{-\frac{t}{\tau_C}}$.

Для $t = 0 + u_c(0+) = A$.

Згідно з II законом комутації

$$u_c(0+) = u_c(0-) = 100 \text{ В},$$

отже A =100.

Остаточно $u_\text{C}(t) = 100\sin\omega\, t + 100e^{-\frac{t}{\tau_C}}$.

$$i_2(t) = C\frac{du_\text{C}}{dt} = i_{2_\text{вим}} + i_{2_\text{в}} = 10\sin(\,\omega t + 90°) + C\frac{du_{\text{C}_\text{в}}}{dt},$$

$$i_2(t) = 10\sin(\,\omega t + 90°) - 10e^{-\frac{t}{\tau_C}}.$$

Для побудови графіку $u_c(t)$ необхідно визначити, скільки τ_C міститься в періоді T вимушеної складової.

Період гармонійної функції:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6.28}{10^4} = 6.28\cdot 10^{-4}\text{с};\ \ \tau_\text{C} = 10^{-4}\text{ с}.$$

співвідношення $\frac{T}{\tau_C} \approx 6$, тобто в період міститься приблизно $6\tau_C$ $(T \approx 6\tau_C)$.

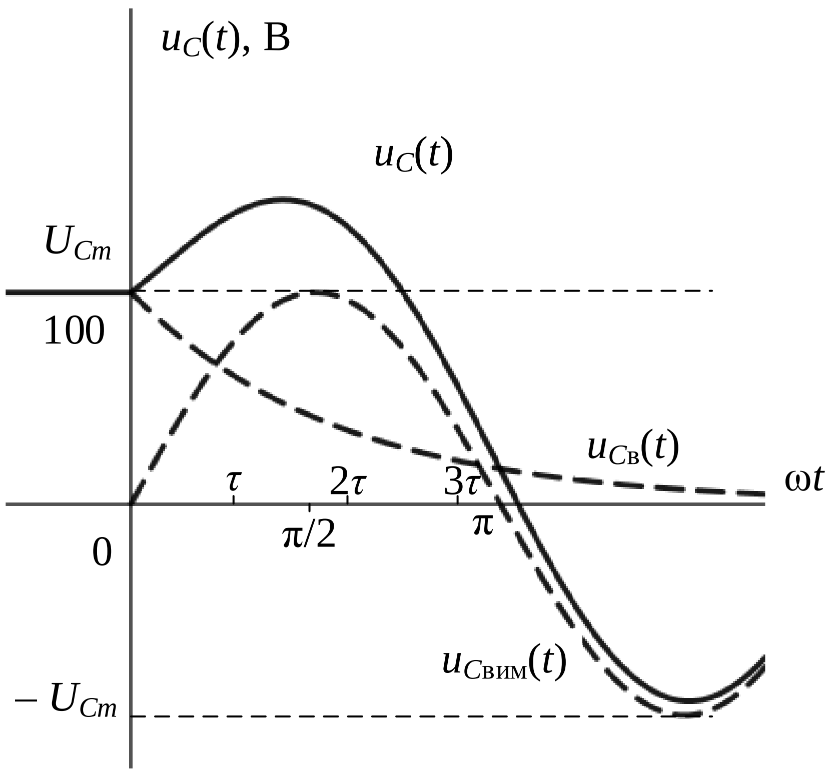


Рисунок 2.51

Висновок: вимушена складова напруги (струму) на конденсаторі визначається характером напруги джерела енергії (повна напруга $u_c(t)$) в момент t = 0+ підкоряється II закону комутації.

Приклад 7

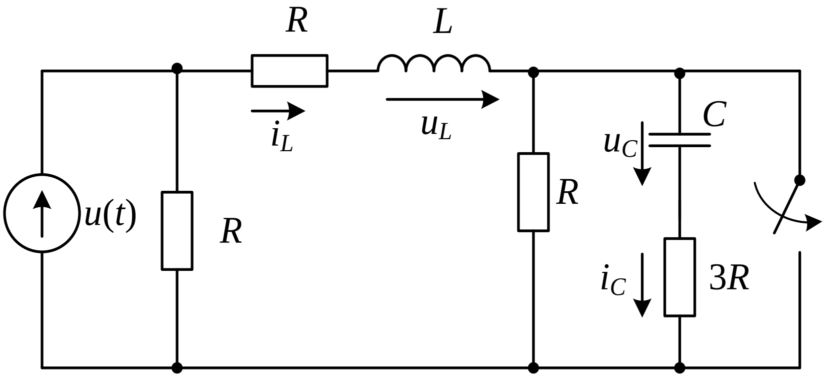


Рисунок 2.52

Дано:

U_m = 150 В; ω = 100 1/с;

$\psi_u = 45^0$; R = 50 Ом;

L = 1 Гн; C = 50 мкФ.

Визначити $i_L(t)$, $u_L(t)$, $u_C(t)$, $i_c(t)$ в процесі переходу. Побудувати часові діаграми $i_L(t)$ и $u_C(t)$.

Розв'язання

До комутації:

$\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u} = 150e^{j45^0}$;

комплексна амплітуда струму в індуктивності:

$$\underline{I}_{Lm} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}_e};$$

комплекс струму в ємності:

$$\underline{I}_{Cm} = \underline{I}_{Lm} \cdot \frac{R}{4R - \frac{j}{\omega C}};$$

напруга на конденсаторі:

$$\underline{U}_{Cm} = \underline{I}_{Cm}\left(-\frac{j}{\omega C}\right).$$

Розрахуємо необхідні значення:

$$\underline{Z}_e = \frac{R\left(3R - \frac{j}{\omega C}\right)}{4R - \frac{j}{\omega C}} + R + j\omega L = \frac{50\left(150 - \frac{j}{10^{-3}\cdot 5}\right)}{200 - \frac{j}{10^{-3}\cdot 5}} + 50 + j100 =$$

$$= \frac{50(150 - j200)}{200 - j200} + 50 + j100 = 132{,}6e^{j45^0}, \text{Ом.}$$

$$\frac{R}{4R - \frac{j}{\omega C}} = \frac{50}{200 - j200} = \frac{50}{200\sqrt{2}e^{-j45^0}} = 0{,}177e^{j45^0}$$

Підставляємо отримані значення в вищенаведені вирази:

$$\underline{I}_{Lm} = \frac{150e^{j45^\circ}}{132{,}6e^{j45^\circ}} = 1{,}13, A; \underline{I}_{Cm} = 1{,}13\cdot 0{,}177e^{j45^\circ} = 0{,}2e^{j45^\circ}, \text{А};$$

$\underline{U}_{Cm} = 0{,}2e^{j45^\circ}\cdot 200e^{-j90^\circ} = 40e^{-j45^\circ}$, В.

Миттєві значення:

$i_L(t) = 1{,}13\sin\omega t, A;\quad u_c(t) = 40\sin(\omega t - 45^\circ)$, В.

$i_L(0-) = 0, \quad u_c(0-) = 40\sin(-45^\circ) = -\frac{40}{\sqrt{2}} = -28{,}28, \quad B.$

Після комутації перехідні процеси відбуваються в двох незалежних контурах:

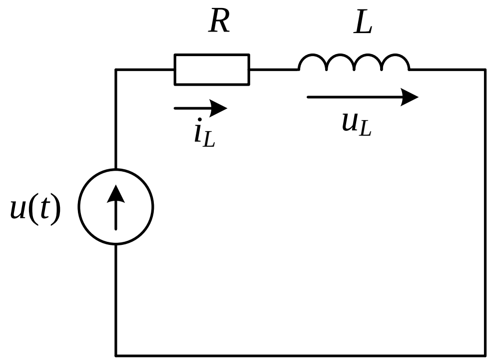


Рисунок 2.53

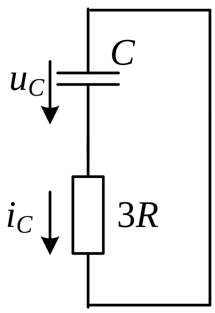


Рисунок 2.54

Для кола на рис. 2.53, відповідно до II закону Кірхгофа, маємо:

$$L\frac{di_L}{dt} + R\cdot i_L = u(t);$$

$$i_L(t) = i_{L_{\text{вим}}} + \mathrm{i}_{L_{\text{в}}};$$

$$i_{L_{\text{вим}}} = I_m sin(\omega t + \psi_i);$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{150}{\sqrt{50^2 + 100^2}} = \frac{150}{111{,}8} = 1{,}34 \quad A;$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R} = \mathrm{arctg}\frac{100}{50} = 63,4°;$$

$$\psi_i = \psi_U - \varphi = 45° - 63,4° = -18,4°;$$

$$i_{L_{\text{вим}}} = 1{,}34\sin(\omega t - 18,4°).$$

Форма вільної складової не залежить від напруги джерела енергії:

$$i_{L_{\text{в}}} = Ae^{-\frac{t}{\tau_L}};$$

$$\tau_L = \frac{L}{R} = \frac{1}{50} = 0{,}02\ \text{с}.$$

Розв'язання для струму:

$$i_L(t) = 1{,}34\sin(\omega t - 18,4°) + Ae^{-\frac{t}{\tau_L}};$$

для t = 0+ $i_L(0+) = 1{,}34\sin(0 - 18,4°) + A.$

Відповідно до I закону комутації $i_L(0+) = i_L(0-) = 0$.

Тоді: $A = 1{,}34 \cdot \sin 18,4° = 0{,}423.$

Отже, $i_L(t) = 1{,}34\,sin(\omega t - 18,4°) + 0{,}423e^{-\frac{t}{\tau_L}}$, А.

Напруга на індуктивності в перехідному процесі

$$u_L(t) = L\frac{dU}{dt} = u_{L_{\text{вим}}} + u_{L_{\text{в}}}.$$

Для усталеного режиму:

$$u_{L_{\text{вим}}} = I_m \cdot \omega L\sin(\omega t + \psi_i + 90°) = 1{,}34 \cdot 100\sin(\omega t - 18,4° + 90°) =$$
$$= 134\sin(\omega t + 71,6°),\quad \text{В},$$

$$u_{L_{\text{в}}} = L\frac{di_{L_{\text{в}}}}{dt} = -L \cdot 0{,}423 \cdot \frac{1}{\tau_L}e^{-\frac{t}{\tau_L}} = -21{,}15e^{-\frac{t}{\tau_L}},\quad \text{В}.$$

Після підстановки складових у вираз $u_L(t)$ маємо:

$$u_L(t) = 134\sin(\omega t + 71,6°) - 21{,}15e^{-\frac{t}{\tau_L}},\ \text{В}.$$

Для контуру на рис. 2.54:

$u_C(t) = u_{C\text{в}}$; $u_{C\text{вим}} = 0$, оскільки джерело напруги відсутнє.

$u_C(t) = u_{C_{\text{в}}} = A_1e^{-\frac{t}{\tau_C}}$, де: $\tau_C = C \cdot 3R = 50 \cdot 150 \cdot 10^{-6} = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$с.

Для $t = 0+ \quad u_C(0+) = A$.

Відповідно до II закону комутації $u_C(0+) = u_C(0-) = -28,28$, В.

Звідки $A_1 = -28,28$.

Отже, в перехідному процесі: $u_C(t) = -28{,}28 e^{-\frac{t}{\tau_C}} \; B$.

Струм через конденсатор:

$$i_C(t) = C\frac{du_c}{dt} = C \cdot 28{,}28 \cdot \frac{1}{\tau_C} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_C}} = \frac{28{,}28}{150} e^{-\frac{t}{\tau_C}} = 0{,}188 e^{-\frac{t}{\tau_C}} \text{ А.}$$

Побудуємо графіки залежностей $i_L(t)$ та $u_C(t)$, в довільно обраному масштабі.

Період гармонійної функції: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 6{,}28 \cdot 10^{-2}$ с; сталі часу кіл:

$$\tau_L = 0{,}02 \text{ с}, \tau_C = 0{,}75 \cdot 10^{-2} \text{ с.}$$

Отже, період T містить:

$$\frac{T}{\tau_L} = 3{,}14;\; T \approx 3\tau_L;\; \frac{T}{\tau_c} = \frac{6{,}28}{0{,}75} \cong 8;\; T \approx 8\tau_C.$$

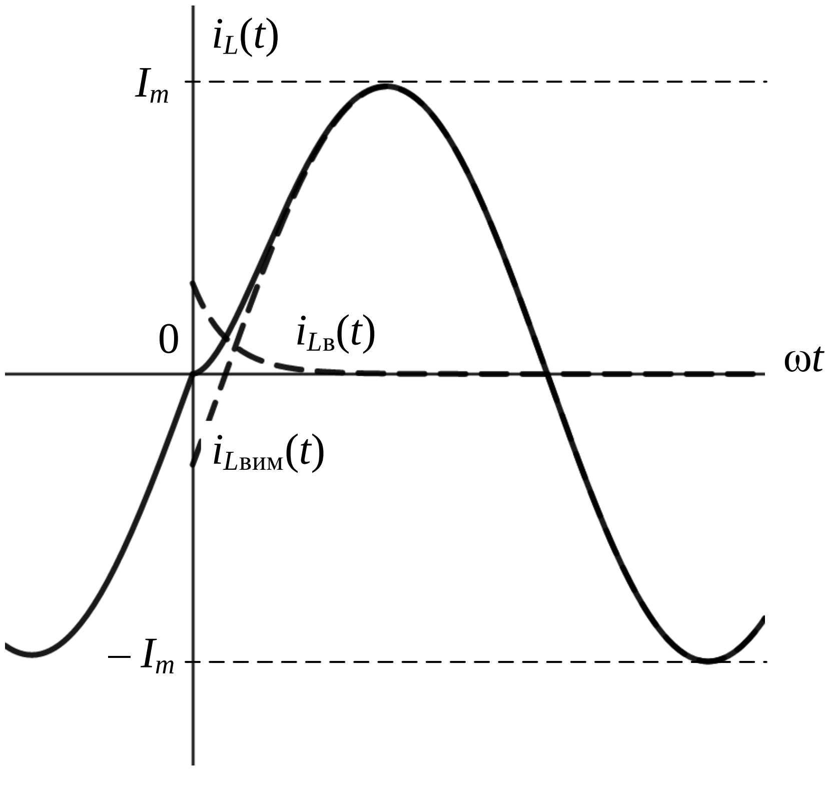


Рисунок 2.55

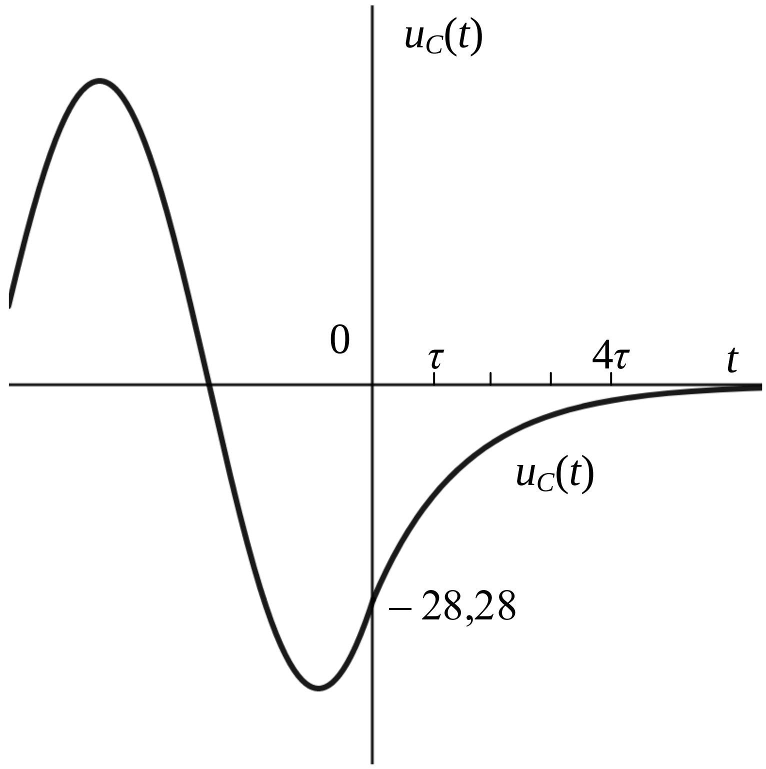


Рисунок 2.56

За імпульсного впливу, а також за дії постійної або синусоїдальної напруги на вхід кола, класичний метод розрахунку перехідних процесів полягає в складанні і розв'язанні диференціальних рівнянь, що описують роботу цього кола.

Порядок диференціального рівняння завжди збігається з кількістю накопичувачів енергії в колі. Обмежимося розглядом тільки схем першого порядку, тобто схем з одним накопичувачем енергії. (*L* або *C*).

Розв'язання диференціального рівняння записується як сума двох складових: вимушеної і вільної. Як відомо, вимушена складова шуканої величини є розв'язанням диференціального рівняння з правою частиною і залежить від наявності і характеру напруги джерела. Вільна складова шуканої величини є загальним рішенням диференціального рівняння без правої частини і для схем з одним накопичувачем енергії записується як експоненціальна функція $Ae^{-t/\tau}$. Стала інтегрування інтеграція *A* визначається за законами комутації.

Якщо вхідний сигнал є кусково безперервною функцією часу, з кожною зміною вхідної напруги необхідно перезаписувати диференціальне рівняння і ввести нову сталі інтегрування. Закон комутації слід застосовувати на початку кожної нової залежності $u_1(t)$:

$$i_L(t_k - 0) = i_L(t_k + 0);$$
$$u_c(t_k - 0) = u_C(t_k + 0),$$

де t_k – момент переходу з однієї ділянки залежності $u_1(t)$ на наступну ділянку; t_k–0 – момент часу, що безпосередньо передує t_k;
t_k+0 – момент часу, що слідує безпосередньо за t_k.

Наведемо приклади застосування запропонованої методики. У кожному завданні фактично будуть вирішені дві задачі, адже напруги визначаються як на резисторі, так і на реактивному елементі.

Приклад 8

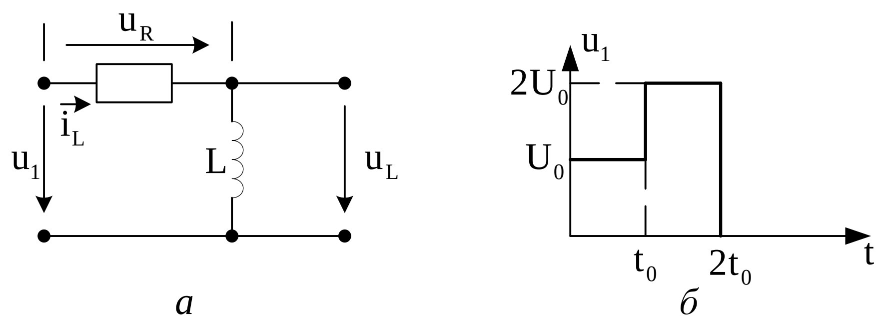


Рисунок 2.57

В цьому випадку слід записати рішення диференціального рівняння кола.

$$Ri_L + L\frac{di_L}{dt} = u_1(t)$$

на трьох ділянках:

I ділянка $0 \le t \le t_0$: $u_1(t)=U_0$;

II ділянка $t_0 \le t \le 2t_0$: $u_1(t)=2U_0$;

III ділянка $2t_0 \le t \le \infty$: $u_1(t)=0$.

На кожній ділянці потрібно спочатку знайти вираз струму i_L, оскільки він підпорядковується першому закону комутації, тобто зберігає безперервність при зміні вхідної напруги.

I ділянка: $i_L = i_{L\text{вим}} + i_{L\text{в}}$, где $i_{L\text{вим}} = \frac{U_0}{R}$; $i_{L\text{в}} = A_1 e^{-t/\tau}, \tau = \frac{L}{R}$.

$$i_L = \frac{U_0}{R} + A_1 e^{-t/\tau}; \qquad (2.179)$$

До подачі імпульсу на вхід кола були нульові початкові умови: $i_L(-0) = 0$. Тому, $i_L(0+) = \frac{U_0}{R} + A_1 = 0$ та $A_1 = -\frac{U_0}{R}$.

Таким чином, на першій ділянці маємо

$$i_L = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}; \tag{2.180}$$

$$u_R = R i_L = U_0 - U_0 e^{-t/\tau}; \tag{2.181}$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = -\frac{U_0}{R} \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) e^{-t/\tau} = U_0 e^{-t/\tau}. \tag{2.182}$$

В (2.182) враховано, що $\frac{1}{\tau} = \frac{R}{L}$.

Для переходу на II ділянку визначимо величину i_L в кінці I ділянки:

$$i_L(t_0 - 0) = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} e^{-t_0/\tau}. \tag{2.183}$$

II ділянка:

$$i_{L\text{вим}} = \frac{2U_0}{R}; i_{L\text{в}} = A_2 e^{-t/\tau};$$

$$i_L = \frac{2U_0}{R} + A_2 e^{-t/\tau}; \tag{2.184}$$

$$i_L(t_0 + 0) = \frac{2U_0}{R} + A_2 e^{-t_0/\tau}. \tag{2.185}$$

Згідно із законом комутації прирівнюємо (2.183) до (2.185) та визначаємо A_2:

$$\frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} e^{-t_0/\tau} = \frac{2U_0}{R} + A_2 e^{-t_0/\tau};$$

$$\frac{U_0}{R} - \frac{2U_0}{R} = \left(A_2 + \frac{U_0}{R}\right) e^{-t_0/\tau};$$

$$A_2 = \left(-\frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} e^{-t_0/\tau}\right) e^{t_0/\tau} = -\frac{U_0}{R}\left(1 + e^{t_0/\tau}\right). \tag{2.186}$$

Підставляємо (2.186) в (2.184) та отримуємо на II ділянці:

$$i_L = \frac{2U_0}{R} - \frac{U_0}{R}\left(1 + e^{t_0/\tau}\right) e^{-t/\tau}. \tag{2.187}$$

На цій же ділянці:

$$u_R = 2U_0 - U_0\left(1 + e^{t_0/\tau}\right) e^{-t/\tau}; \tag{2.188}$$

$$u_L = U_0\left(1 + e^{t_0/\tau}\right) e^{-t/\tau}. \tag{2.189}$$

Для переходу на III ділянку обчислимо

$$\begin{aligned} i_L(t_0 - 0) &= \frac{2U_0}{R} - \frac{U_0}{R}\left(1 + e^{t_0/\tau}\right) e^{-2t_0/\tau} = \\ &= \frac{U_0}{R}\left(2 - e^{-2t_0/\tau} - e^{-t_0/\tau}\right). \end{aligned} \tag{2.190}$$

III ділянка:

$$i_{L\text{вим}} = 0; i_L = i_{L\text{в}} = A_3 e^{-t/\tau}. \qquad (2.191)$$

За законом комутації

$$i_L(2t_0 - 0) = i_L(2t_0 + 0); i_L(2t_0 + 0) = A_3 e^{-2t_0/\tau}. \qquad (2.192)$$

Прирівнюючи (2.190) та (2.192), маємо:

$$A_3 = \frac{U_0}{R}\left(2 - e^{-2t_0/\tau} - e^{-t_0/\tau}\right)e^{2t_0/\tau} =$$
$$= \frac{U_0}{R}\left(2e^{2t_0/\tau} - 1 - e^{t_0/\tau}\right). \qquad (2.193)$$

Підставляємо (2.193) у (2.191) та отримуємо на III ділянці

$$i_L = \frac{U_0}{R}\left(2e^{2t_0/\tau} - 1 - e^{t_0/\tau}\right)e^{-t/\tau}, \qquad (2.194)$$

$$u_R = U_0\left(2e^{2t_0/\tau} - 1 - e^{t_0/\tau}\right)e^{-t/\tau}, \qquad (2.195)$$

$$u_L = -U_0\left(2e^{2t_0/\tau} - 1 - e^{t_0/\tau}\right). \qquad (2.196)$$

Побудуємо якісно графіки (рисунки 2.58, 2.59) зміни u_R та u_L, використовуючи вирази (2.181) та (2.182) на I ділянці, (2.188) та (2.189) на II ділянці, (2.195), (2.196) на III ділянці. При побудові графіків було прийнято, що $t_0=2\tau$.

Графік $u_R(t)$ (рисунок 1.63) безперервний, оскільки $u_R=Ri_L$ і струм в індуктивності визначає запас енергії магнітного поля і не може бути змінений у стрибкоподібно.

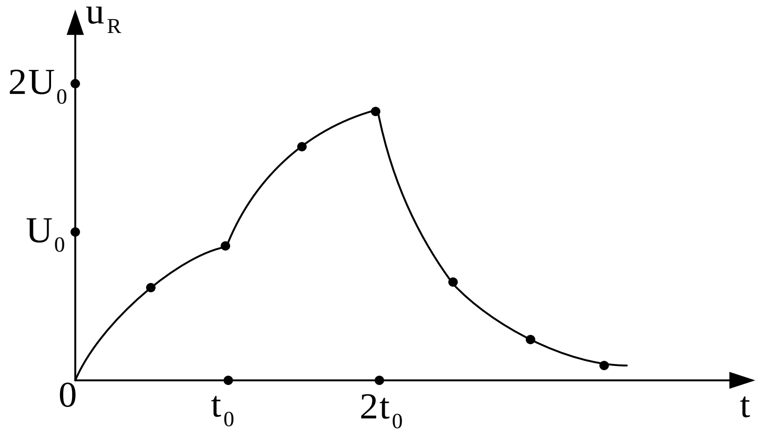


Рисунок 2.58

У той же час стрибки $u_1(t)$ відображені на графіку $u_L(t)$ – на величину U_0 в моменти 0 та t_0 і на величину $-2U_0$ в момент $2t_0$ (рисунок 2.59):

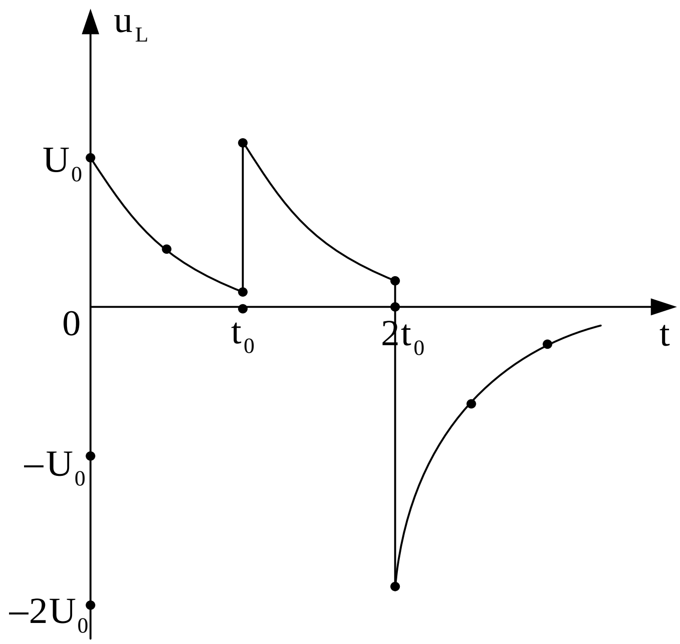


Рисунок 2.59

Приклад 9

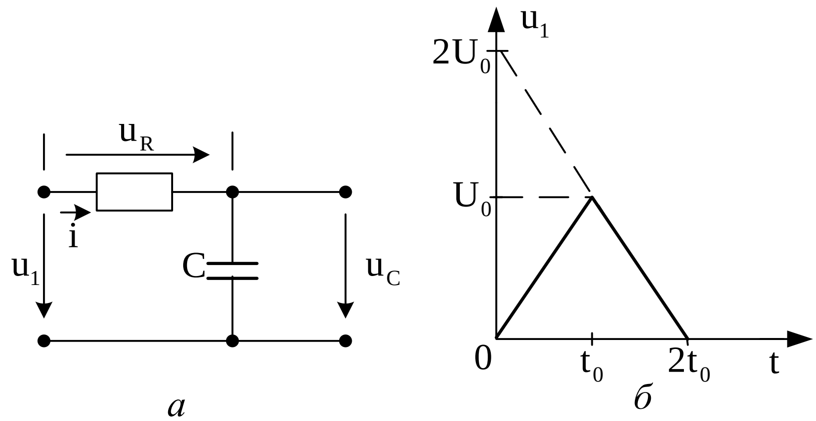


Рисунок 2.60

В даному випадку необхідно записати диференціальне рівняння кола відносно напруги на конденсаторі u_C, щоб потім можна було використовувати другий закон комутації для визначення сталих інтегрування:

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = u_1(t). \tag{2.197}$$

Розв’язання цього рівняння слід шукати на трьох ділянках зміни $u_1(t)$:

І ділянка $0 \le t \le t_0$: $\quad u_1(t) = \frac{U_0}{t_0}t,$

II ділянка $t_0 \le t \le 2t_0$: $\quad u_1(t) = 2U_0 - \frac{U_0}{t_0}t = \frac{U_0}{t_0}(2t_0 - t)$,

III ділянка $2t_0 \le t \le \infty$: u_1=0.

I ділянка: $u_C = u_{C\text{вим}} + u_{C\text{в}}$, де $u_{C\text{вим}}$ – частинне розв'язання диференціального рівняння з правою частиною і також повинне змінюватися лінійно, як і $u_1(t)$.

Шукатимемо $u_{C\text{вим}}$ у вигляді:

$$u_{C\text{вим}} = a_1 t + b_1; \frac{du_{C\text{вим}}}{dt} = a_1. \qquad (2.198)$$

Підставляючи (2.198) у (2.197) отримаємо:

$$RCa_1 + a_1 t + b_1 = \frac{U_0}{t_0}t. \qquad (2.199)$$

Позначимо $\tau = RC$ і прирівняємо в (2.199) величини, що містять множник t, і ті, що не містять такого множника в правій і лівій частинах:

$$a_1 = \frac{U_0}{t_0}; \tau a_1 + b_1 = 0; b_1 = -\tau a_1 = -\frac{U_0}{t_0}.$$

Отже, на I ділянці

$$u_{C\,\text{вим}} = \frac{U_0}{t_0}t - \frac{U_0}{t_0}\tau = \frac{U_0}{t_0}(t - \tau).$$

Вільна складова не залежить від наявності і типу напруги джерела і для диференціального рівняння першого порядку є експоненціальною функцією часу:

$$u_{C\text{в}} = A_1 e^{-t/\tau}.$$

Отже, на I ділянці

$$u_C = \frac{U_0}{t_0}(t - \tau) + A_1 e^{-t/\tau}. \qquad (2.200)$$

За другим законом комутації $u_C(0+) = u_C(-0)$;

$u_C(0+) = -\frac{U_0}{t_0}\tau + A_1; u_C(-0) = 0; -\frac{U_0}{t_0}\tau + A_1 = 0$, звідки $A_1 = \frac{U_0}{t_0}\tau$.

Підставивши A_1 в (2.200), отримуємо закон зміни напруги на конденсаторі в інтервалі $0 \le t \le t_0$:

$$u_C = \frac{U_0}{t_0}(t - \tau) + \frac{U_0}{t_0}\tau e^{-t/\tau}. \qquad (2.201)$$

Напруга резистора

$$u_R = RC\frac{du_C}{dt} = \tau\frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{t_0}\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \qquad (2.202)$$

Для переходу на II ділянку обчислимо u_C в кінці I ділянки:

$$u_C(t_0-0)=\frac{U_0}{t_0}(t_0-\tau)+\frac{U_0}{t_0}\tau e^{-t_0/\tau}. \qquad (2.203)$$

II ділянка

$$u_C=u_{C\text{вим}}+u_{C\text{в}},$$

де $u_{C\text{вим}}=a_2t+b_2$.

Диференціальне рівняння з правою частиною для вимушеної складової має вигляд:

$$\tau a_2+a_2t+b_2=\frac{U_0}{t_0}(2t_0-t). \qquad (2.204)$$

З (2.204) видно, що

$$a_2=-\frac{U_0}{t_0};\tau a_2+b_2=2U_0;b_2=2U_0-\tau a_2=U_0\left(2+\frac{\tau}{t_0}\right),$$

$$u_{C\text{вим}}=-\frac{U_0}{t_0}t+U_0\left(2+\frac{\tau}{t_0}\right). \qquad (2.205)$$

Вільна складова

$$u_{C\text{в}}=A_2e^{-t/\tau}.$$

Напруга на конденсаторі u_C:

$$u_C=-\frac{U_0}{t_0}t+U_0\left(2+\frac{\tau}{t_0}\right)+A_2e^{-t/\tau}. \qquad (2.206)$$

Знаходимо $u_C(t_0{+}0)$, підставляючи в (2.206) $t=t_0$:

$$u_C(t_0+0)=-U_0+2U_0+U_0\frac{\tau}{t_0}+A_2e^{-t_0/\tau}= \qquad (2.207)$$

$$=U_0\left(1+\frac{\tau}{t_0}\right)+A_2e^{-t_0/\tau}.$$

Згідно з другим законом комутації прирівнюємо (2.207) і (2.203):

$$U_0-U_0\frac{\tau}{t_0}+\frac{U_0\tau}{t_0}e^{-t_0/\tau}=U_0+\frac{U_0\tau}{t_0}+A_2e^{-t_0/\tau},$$

звідки

$$A_2=\left(-\frac{2U_0\tau}{t_0}+\frac{U_0\tau}{t_0}e^{-t_0/\tau}\right)e^{t_0/\tau}=\frac{U_0\tau}{t_0}-\frac{2U_0\tau}{t_0}e^{t_0/\tau}=\frac{U_0\tau}{t_0}\left(1-2e^{t_0/\tau}\right).$$

Отже, в інтервалі $t_0\le t\le 2t_0$ отримаємо вираз для напруги на конденсаторі:

$$u_C=-\frac{U_0}{t_0}t+U_0\left(2+\frac{\tau}{t_0}\right)+\frac{U_0\tau}{t_0}\left(1-2e^{t_0/\tau}\right)e^{-t/\tau}. \qquad (2.208)$$

Напруга на резисторі:

$$u_R=\tau\frac{du_C}{dt}=-\frac{U_0\tau}{t_0}-\frac{U_0\tau}{t_0}\left(1-2e^{t_0/\tau}\right)e^{-t/\tau}=$$

$$=\frac{U_0\tau}{t_0}\left[1+\left(1-2e^{t_0/\tau}\right)e^{-t/\tau}\right]. \qquad (2.209)$$

Для застосування закону комутації для t=2t_0 знайдемо значення u_C в кінці II ділянки:

$$u_C(2t_0-0)=-\frac{U_0}{t_0}\cdot 2t_0+U_0\left(2+\frac{\tau}{t_0}\right)+\frac{U_0\tau}{t_0}\left(1-2e^{t_0/\tau}\right)e^{-2t_0/\tau}=$$

$$=-2U_0+2U_0+\frac{U_0\tau}{t_0}+\frac{U_0\tau}{t_0}e^{-2t_0/\tau}-\frac{2U_0\tau}{t_0}e^{-t_0/\tau}=$$

$$=\frac{U_0\tau}{t_0}\left(1-2e^{-t_0/\tau}+e^{-2t_0/\tau}\right). \qquad (2.210)$$

III ділянка.

На цій ділянці $u_1(t)$=0, тому $u_{C\text{вим}}$=0 та

$$u_C=u_{C\text{в}}=A_3e^{-t/\tau}, \qquad (2.211)$$

$$u_C(2t_0+0)=A_3e^{-2t_0/\tau}.$$

За другим законом комутації $u_C\left(2t_0+0\right)=u_C\left(2t_0-0\right)$.

$$A_3e^{-2t_0/\tau}=\frac{U_0\tau}{t_0}\left(1-2e^{-t_0/\tau}+e^{-2t_0/\tau}\right);$$

$$A_3=\frac{U_0\tau}{t_0}\left(1-2e^{t_0/\tau}+e^{2t_0/\tau}\right). \qquad (2.212)$$

Підставляємо (2.212) у (2.211):

$$u_C=\frac{U_0\tau}{t_0}\left(1-2e^{t_0/\tau}+e^{2t_0/\tau}\right)e^{-t/\tau}. \qquad (2.213)$$

В інтервалі $2t_0 \le t \le \infty$.

$$u_R=\tau\frac{du_C}{dt}=-\frac{U_0\tau}{t_0}\left(1-2e^{t_0/\tau}+e^{2t_0/\tau}\right)e^{-t/\tau}. \qquad (2.214)$$

Будуємо графіки $u_C(t)$ згідно з (2.206), (2.208), (2.213) і $u_R(t)$ згідно з (2.202), (2.209), (2.214) (рис. 2.61).

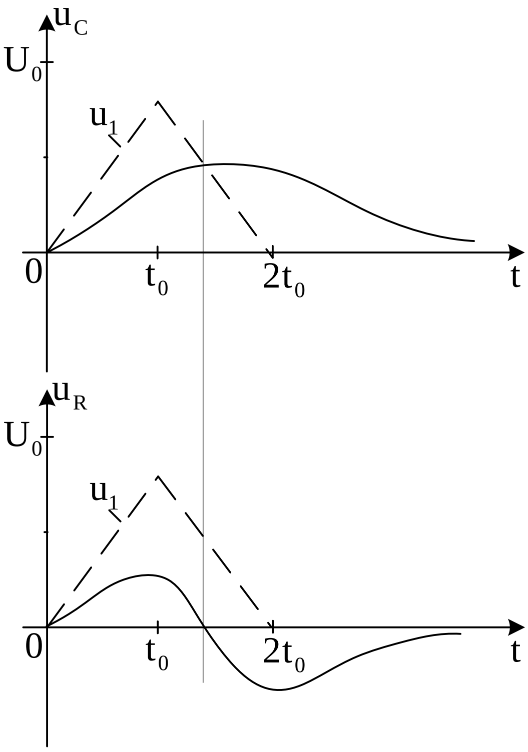


Рисунок 2.61

3. ЧАСОВИЙ МЕТОД (ІНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ)

Метод базується на принципі суперпозиції і на часових характеристиках електричних кіл. Це дозволяє звести розрахунки реакції кола на дію неперіодичного впливу складної форми до визначення його реакції на найпростіші впливи типу одиничної функції $1(t)$ або дельта-функції $\delta(t)$, за допомогою яких апроксимується вхідний сигнал. При цьому результуюча реакція лінійного кола (вихідний сигнал) визначається як сума реакцій на кожний елементарний вплив за нульових початкових умов.

3.1. Часові характеристики лінійних електричних кіл

Часові характеристики відображають динамічні властивості кіл, вони є реакціями на типові збудження за нульових початкових умов. Типовими впливами в часовій області є одинична східчаста функція $1(t)$ (функція Хевісайда) та дельта-функція $\delta(t)$ (функція Дірака).

Східчаста функція $1(t)$ (рис. 3.1) визначається таким чином:

$$1(t) = \begin{cases} 0, \text{коли } t < 0; \\ 1, \text{коли } t > 0. \end{cases}$$

Така функція є постійною напругою $U = 1$ В або постійним струмом $I = 1$ А, які діють на вхідних затискачах кола з моменту $t = 0+$.

В момент $t = 0$ ця функція зазнає розриву.

Одинична функція, помножена на постійний множник, тобто $A \cdot 1(t)$ називається функцією включення.

Дельта-функція зображується стрілкою, як подано на рис. 3.2., та визначається так:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, \text{коли } t < 0; \\ \infty, \text{коли } t = 0; \\ 0, \text{коли } t > 0. \end{cases}$$

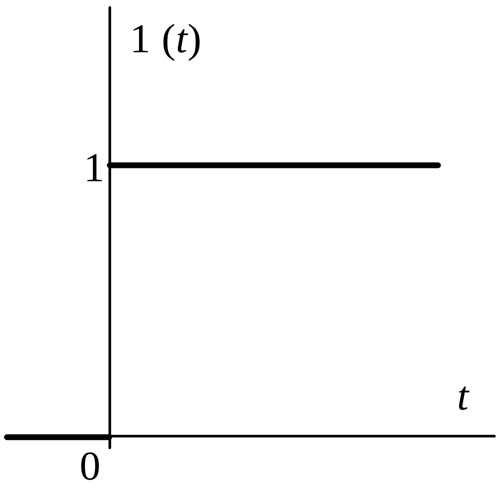


Рисунок 3.1

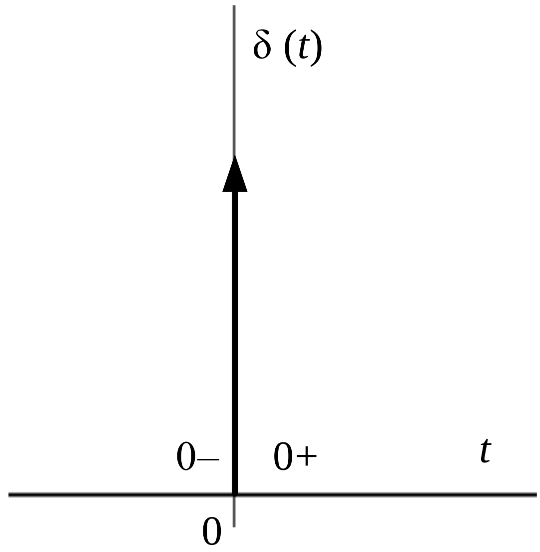


Рисунок 3.2

Визначимо площу дельта-функції:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t)dt = \int_{-0}^{+0} 1'(t)dt = 1(t)dt \Big|_{-0}^{+0} = 1 - 0 = 1.$$

Тобто дельта-функцію $\delta(t)$ можна розглядати як імпульс нескінченно великої амплітуди (висоти) і нескінченно малої тривалості, площа якого дорівнює одиниці. Із цього випливає рівність:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = 1(t),$$

а тому дельта-функцію можна розглядати як похідну від східчастої одиничної функції $1(t)$:

$$\delta(t) = 1'(t).$$

Одинична функція може бути зсунута відносно початку координат по осі часу праворуч або ліворуч на t_0. Тоді ця функція називається функцією із запізненням і позначається $1(t - t_0)$ за зсуву в правий бік і $1(t + t_0)$ за зсуву в лівий бік. Аналогічно введемо поняття дельта-функції з запізненням (рис.3.3, 3.4):

$$1(t - t_0) = \begin{cases} 0, \text{коли } t < t_0; \\ 1, \text{коли } t > t_0. \end{cases} \quad (3.1) \qquad 1(t + t_0) = \begin{cases} 0, \text{коли } t < -t_0; \\ 1, \text{коли } t > -t_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, \text{коли } t < t_0; \\ \infty, \text{коли } t = t_0; \\ 0, \text{коли } t > t_0. \end{cases} \quad (3.3) \qquad \delta(t + t_0) = \begin{cases} 0, \text{коли } t < -t_0; \\ \infty, \text{коли } t = -t_0; \\ 0, \text{коли } t > -t_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Розрізняють два типи часових характеристик електричних кіл: перехідну $h(t)$ та імпульсну $g(t)$.

Перехідна характеристика є відгуком кола на одиночну східчасту функцію $1(t)$, іншими словами це вихідний сигнал $y(t)$, якщо вхідний сигнал $x(t) = 1(t)$ за нульових початкових умов. Відгук (вихідний сигнал) $y(t)$ – струм або напруга на тій ділянці кола, яка нас цікавить. Цей відгук залежить виключно від схеми кола та параметрів елементів. На рис. 3.3 показаний відгук $y(t)$ від дії на коло одиничної східчастої функції $1(t)$, функції вмикання $A{\cdot}1(t)$ та функції вмикання із запізненням $A{\cdot}1(t-t_0)$. Вихідні сигнали для таких випадків очевидно такі: $h(t)$, $A{\cdot}h(t)$, $A{\cdot}h(t-t_0)$.

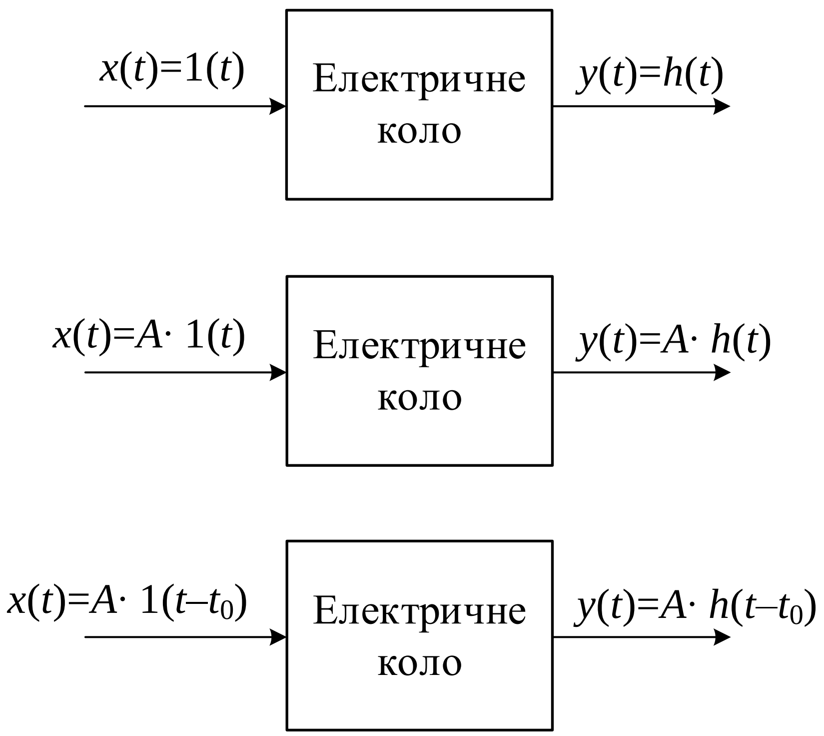


Рисунок 3.3

Розмірність перехідної характеристики визначається відношенням розмірності вихідного сигналу до розмірності вхідного. Перехідна характеристика може бути безрозмірною (вхідний сигнал і вихідний сигнал – напруги або струми), мати розмірність опору (вхідний сигнал – струм, вихідний сигнал – напруга), або розмірність провідності (вхідний сигнал – напруга, вихідний сигнал –струм). $[h(t)] = 1$; Ом; 1/Ом.

Імпульсну характеристику визначають як відгук електричного кола $y(t)$, на дельта-функцію $x(t) = \delta(t)$ за нульових початкових умов (рис. 3.4).

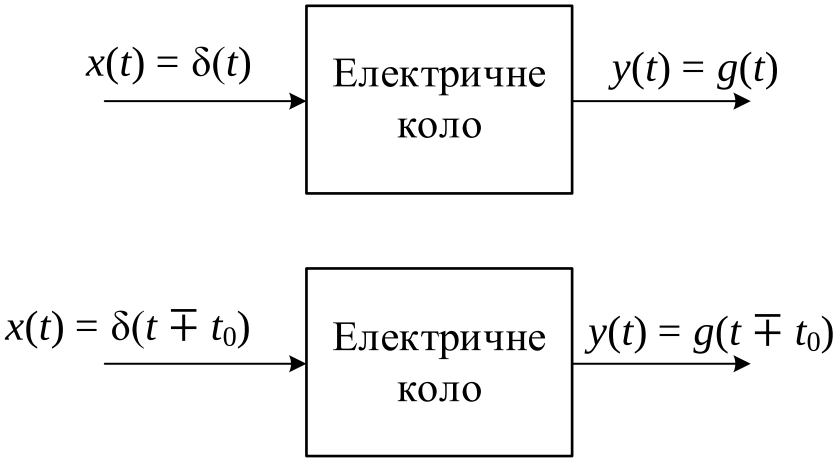


Рисунок 3.4

В лінійних колах співвідношення між впливами і відповідними їм відгуками однакові. Тому імпульсну характеристику можна отримати як похідну перехідної характеристики. Дійсно, якщо $\delta(t) = 1'(t)$, то $g(t) = h'(t)$. Тому розмірності імпульсної характеристики $k(t)$ визначаються, як розмірності перехідної характеристики, поділені на секунду: $[g(t)] = 1/\text{с}$; Ом/с; 1/Ом·с.

Розглянемо, як пов'язані між собою перехідна та імпульсна характеристики у випадку, коли перехідна характеристика в $t = 0$ має розрив.

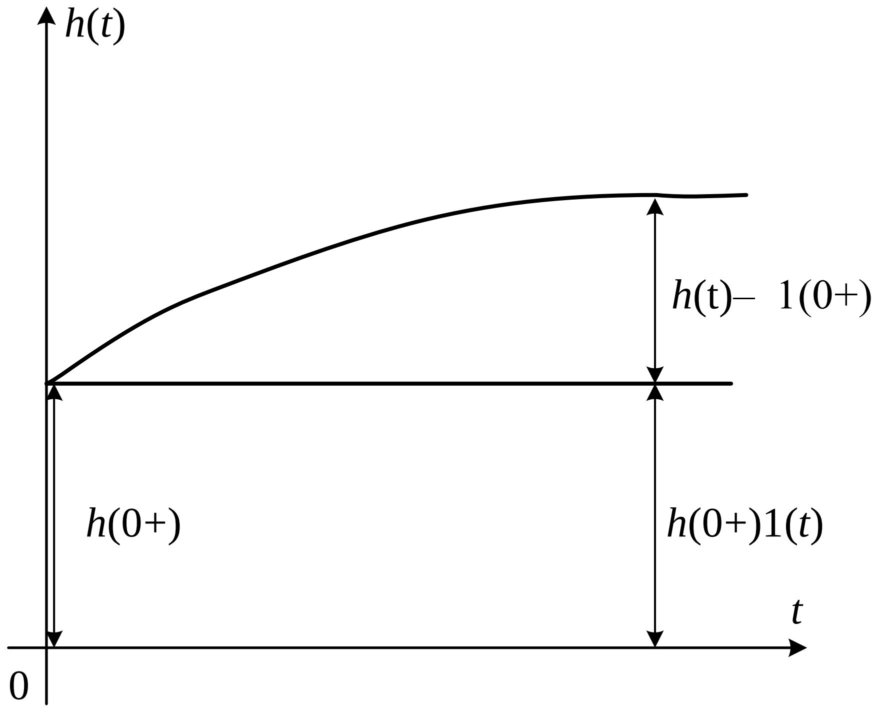


Рисунок 3.5

Представимо перехідну характеристику $h(t)$, наведену на рис. 3.5, у вигляді суми двох складових – функції включення $h(0+)1(t)$ і характеристики $h(t)$, зменшеній на величину стрибка $h(0+)$:

$$h(t) = h(0+)\cdot 1(t) + h(t) - h(0+), \qquad (3.5)$$

З виразу (3.5) отримаємо імпульсну характеристику:

$$g(t) = h'(t) = h(0+)\cdot 1'(t) + h'(t) = \delta(t)\cdot h(0+) + h'(t). \qquad (3.6)$$

Якщо стрибок $h(0+) = 0$, то

$$g(t) = h'(t). \qquad (3.7)$$

Перехідну характеристику можна знайти для будь-якої схеми пасивного двополюсника за допомогою класичного або операторного методу, вважаючи, що на вхідні затискачі кола подається постійна напруга $U = 1$В або постійний струм $I = 1$ А в залежності від постановки задачі.

Для прикладу складемо вирази для перехідної та імпульсної характеристик з аналітичних виразів функцій $i_L(t)$, $u_R(t)$, $u_L(t)$, отриманим за підключення кола RL до джерела постійної ЕРС:

$$i_L(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \text{отже } h_{i_L}(t) = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \;\; \mathrm{g}_{i_L}(t) = \frac{1}{\tau R}e^{-t/\tau},$$

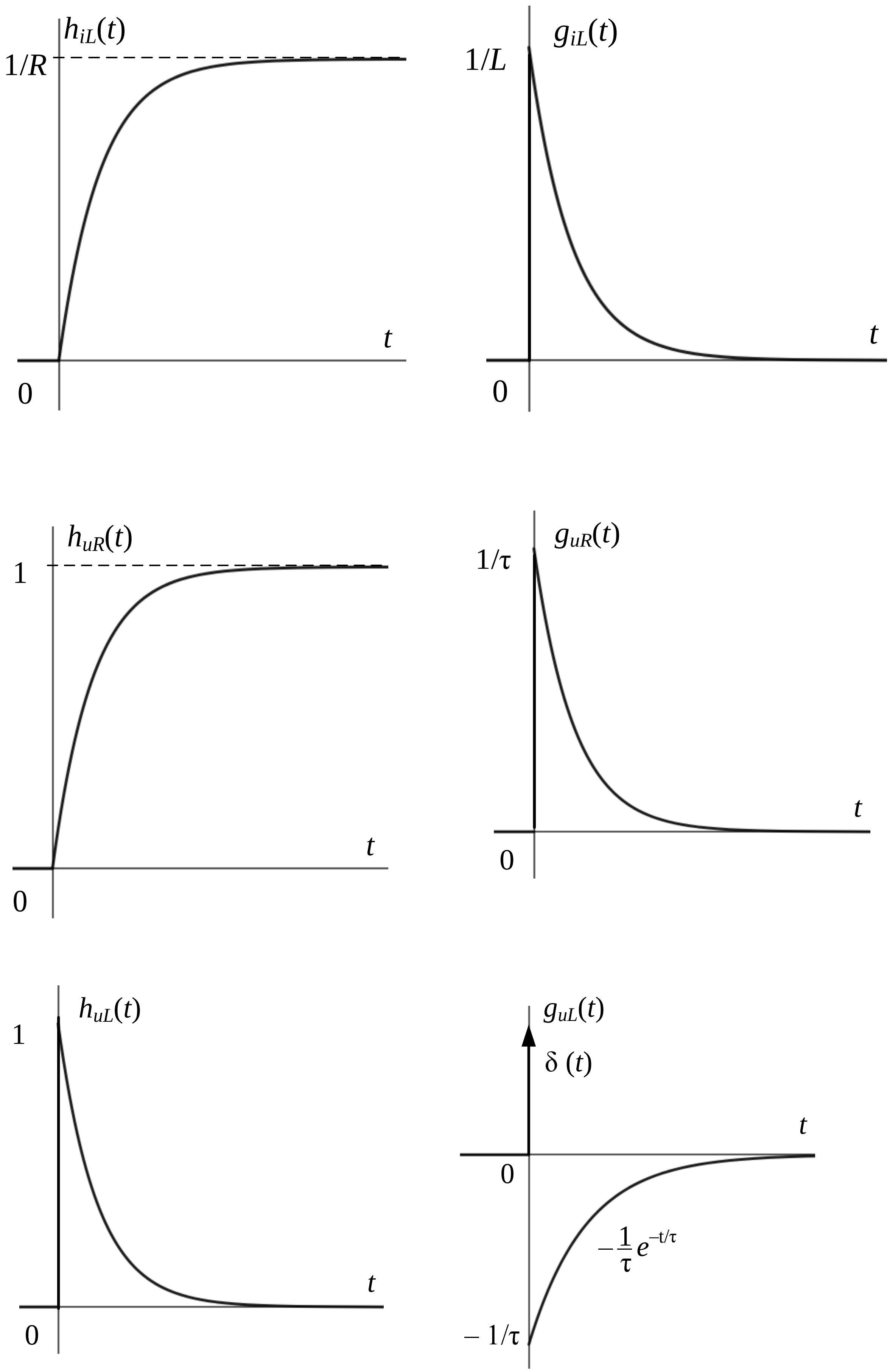
де $h_{iL}(t)$ – перехідна характеристика по струму, $g_{iL}(t)$ – імпульсна характеристика по струму.

$$u_R(t) = U\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \text{отже } h_{u_R}(t) = 1\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \;\; \mathrm{g}_{u_R}(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau},$$

де $h_{uR}(t)$ – перехідна характеристика по напрузі на резисторі u_R, $g_{uR}(t)$ – імпульсна характеристика по напрузі на резисторі u_R.

$$u_L(t) = Ue^{-t/\tau}, \text{отже } h_{u_L}(t) = 1e^{-t/\tau}, \;\; \mathrm{g}_{u_L}(t) = \delta(\mathrm{t}) - \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau},$$

де $h_{uL}(t)$ – перехідна характеристика по напрузі на котушці u_L, $g_{uL}(t)$ – імпульсна характеристика по напрузі на котушці u_L.



$h_{iL}(t)$
$1/R$
t
0
$g_{iL}(t)$
$1/L$
t
0
$h_{uR}(t)$
1
t
0
$g_{uR}(t)$
$1/\tau$
t
0
$h_{uL}(t)$
1
t
0
$g_{uL}(t)$
$\delta\,(t)$
t
0
$-\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$
$-\,1/\tau$

Рисунок 3.6

Подібним чином можна отримати перехідну $h(t)$ та імпульсну $g(t)$ характеристики для кола RC:

$$u_C(t) = U\left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

$$i_C(t) = \frac{U}{R}e^{-t/\tau}.$$

Перехідні характеристики:

$$h_{u_C}(t) = 1\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \qquad h_{i_C}(t) = \frac{1}{R}e^{-t/\tau}.$$

Імпульсні характеристики:

$$g_{u_C}(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}, \qquad \mathrm{g}_{i_C}(t) = \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R\tau}e^{-t/\tau},$$

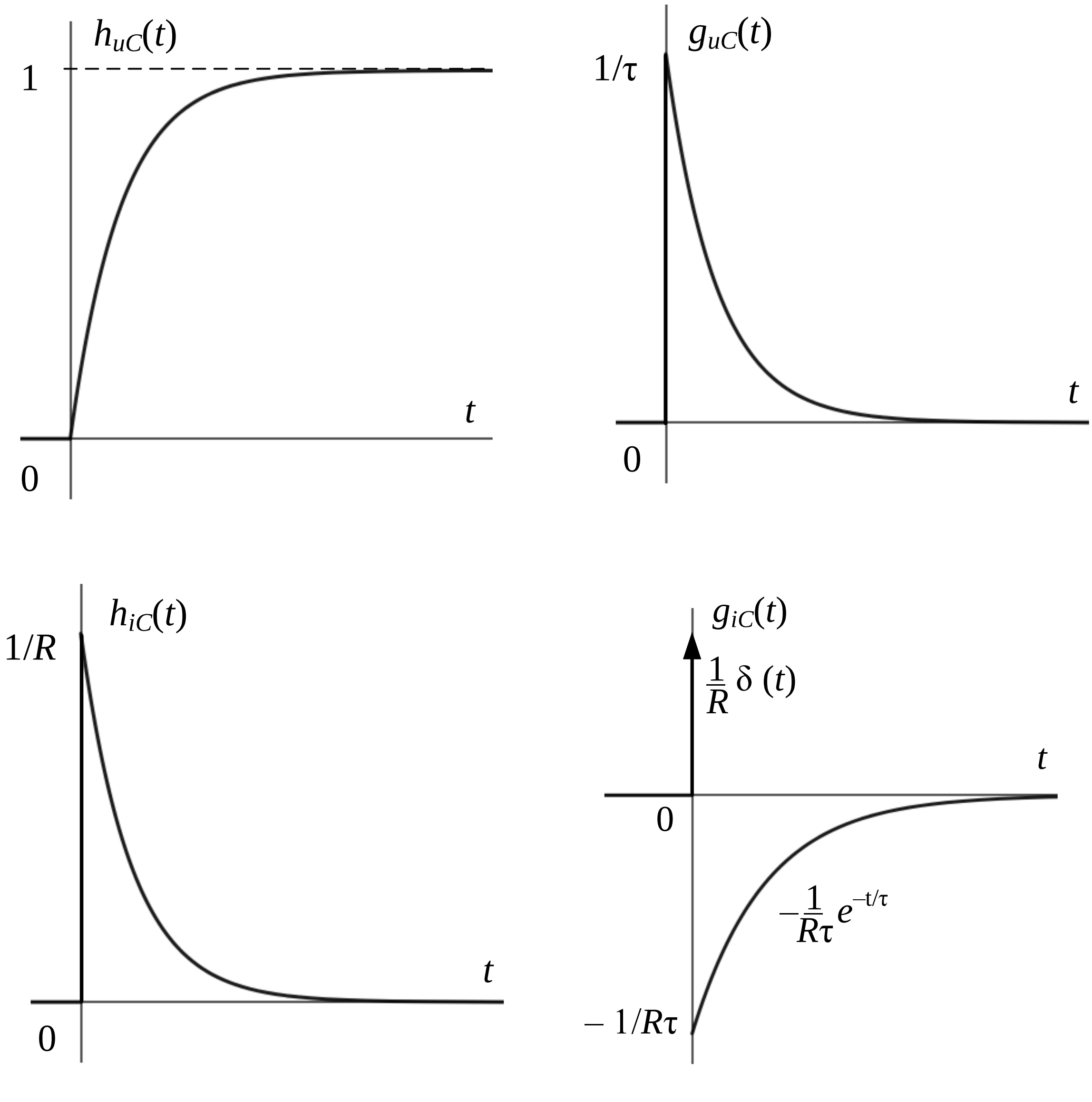


Рисунок 3.7

3.2. Інтеграли накладання з використанням перехідних характеристик

Існує декілька форм запису інтегралів накладання (Дюамеля). Отримаємо деякі з них. Момент спостереження і межі інтегрування позначатимемо літерою t, а змінну величину (аргумент) і змінну інтегрування – літерою θ (тобто t – це одне зі значень θ). Будемо вважати заданим вхідний вплив $x(\theta)$ як функцію часу, і перехідну характеристику $h(t)$ для вибраних входу і виходу. Неперервну функцію вхідного впливу $x(\theta)$ замінимо комбінацією (сумою) функцій включення із різним запізненням $\Delta x_i \cdot 1(t-\theta_i)$ (рис. 3.8).

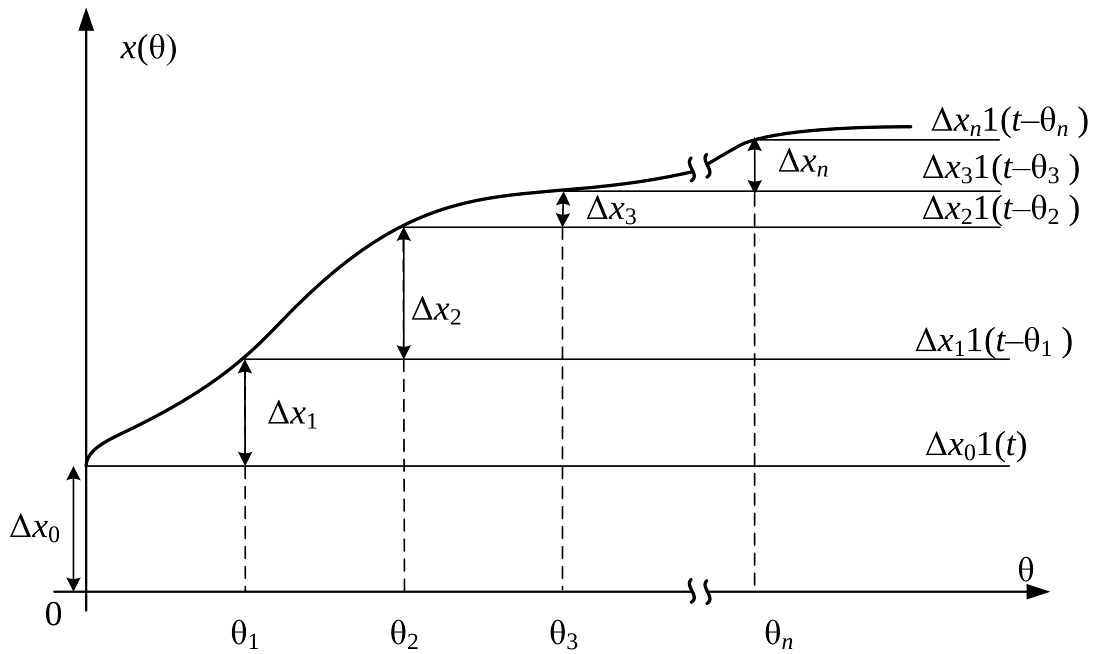


Рисунок 3.8

Відгук кола на такі елементарні впливи, відповідно до рис. 3.3, буде такий:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot h(t - \theta_i), \qquad (3.8)$$

де n відповідає останньому доданку для $\theta = t$.

Щоб перейти від наближеного розрахунку (3.8) до точного спрямуємо n до нескінченності, а крок Δx_i – до нуля, тобто: $n \to \infty$, $\Delta x_i \to 0$. Тоді:

$$\Delta x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta \theta_i} \Delta \theta_i \to x'(\theta) d\theta, \tag{3.9}$$

За цих умов дискретність зникає і сума перетворюється на інтеграл:

$$y(t) = \int_{0-}^{t} x'(\theta) h(t-\theta) d\theta. \tag{3.10}$$

Нижня межа –0 дозволяє врахувати перший стрибок $x(0+)\cdot 1(t)$, похідна від якого має вигляд:

$$[x(0+)\cdot 1(t)]' = x(0+)\cdot \delta(\theta). \tag{3.11}$$

Виділивши в (3.10) інтервал інтегрування від 0– до 0+ отримуємо:

$$\int_{0-}^{0+} x(0+)\delta(0+)\ h(t) d\theta = x(0+) h(t). \tag{3.12}$$

З урахуванням впливу першого стрибка вираз (3.10) набуває вигляду:

$$y(t) = x(0+) h(t) + \int_{0+}^{t} x'(\theta) h(t-\theta) d\theta. \tag{3.13}$$

Вираз (3.13) є інтегралом Дюамеля.

Функція вхідного впливу $x(\theta)$ може мати стрибок за будь-якого значення θ_i. Виявимо вплив кожного стрибка, використовуючи вираз (3.12).

На рис. 3.11 зображена функція $x(\theta)$, яка має декілька стрибків. Розглянемо стрибки в момент $t = \theta_i$ і представимо його у вигляді $\Delta x_i \cdot 1(\theta - \theta_i)$ і виділяємо інтервал інтегрування від $\theta_i - 0$ до $\theta_i + 0$. Похідна від $\Delta x_i \cdot 1(\theta - \theta_i)$ в точці θ_i утворює дельта-функцію $\delta(\theta - \theta_i)$, яка поза інтервалом від $\theta_i - 0$ до $\theta_i + 0$ дорівнює нулю. Тому

$$\int_{\theta-0}^{\theta+0} [\Delta x_i \cdot 1(\theta - \theta_i)]' h(t-\theta_i) d\theta =$$

$$= \int_{\theta-0}^{\theta+0} \Delta x_i \cdot \delta(\theta - \theta_i) h(t-\theta_i) d\theta = \Delta x_i \cdot h(t-\theta_i). \tag{3.14}$$

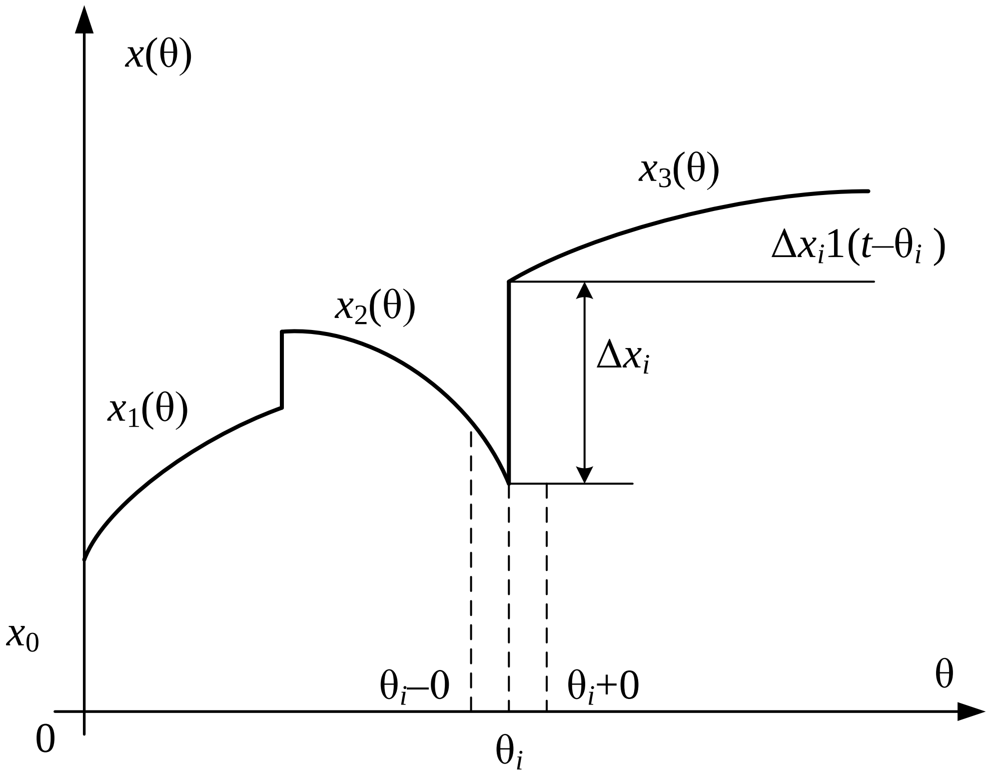


Рисунок 3.9

Таким чином, всі стрибки функції вхідного впливу $x(\theta)$ можна винести за знак інтеграла. Тоді під інтегралом залишається тільки ділянка з безперервними в часі змінами функції $x(\theta)$. Тоді (3.13) виглядатиме так:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot h(t - \theta_i) + \int_{0+}^{t} x'(\theta) h(t - \theta) d\theta. \qquad (3.15)$$

Крім виразів (3.13), (3.15) існує ще декілька форм інтегралів Дюамеля. Вибір тієї чи іншої форми цих інтегралів визначається зручністю та простотою обчислення інтегралів в залежності від конкретних умов завдання.

Розглянемо використання виразу (3.15) для отримання відгука $y(t)$ на поданий на вхід вплив у вигляді кусково-аналітичної функції, яка має в деяких точках стиків розриви першого роду. Будемо вважати, що перехідна характеристика кола $h(t)$ відома.

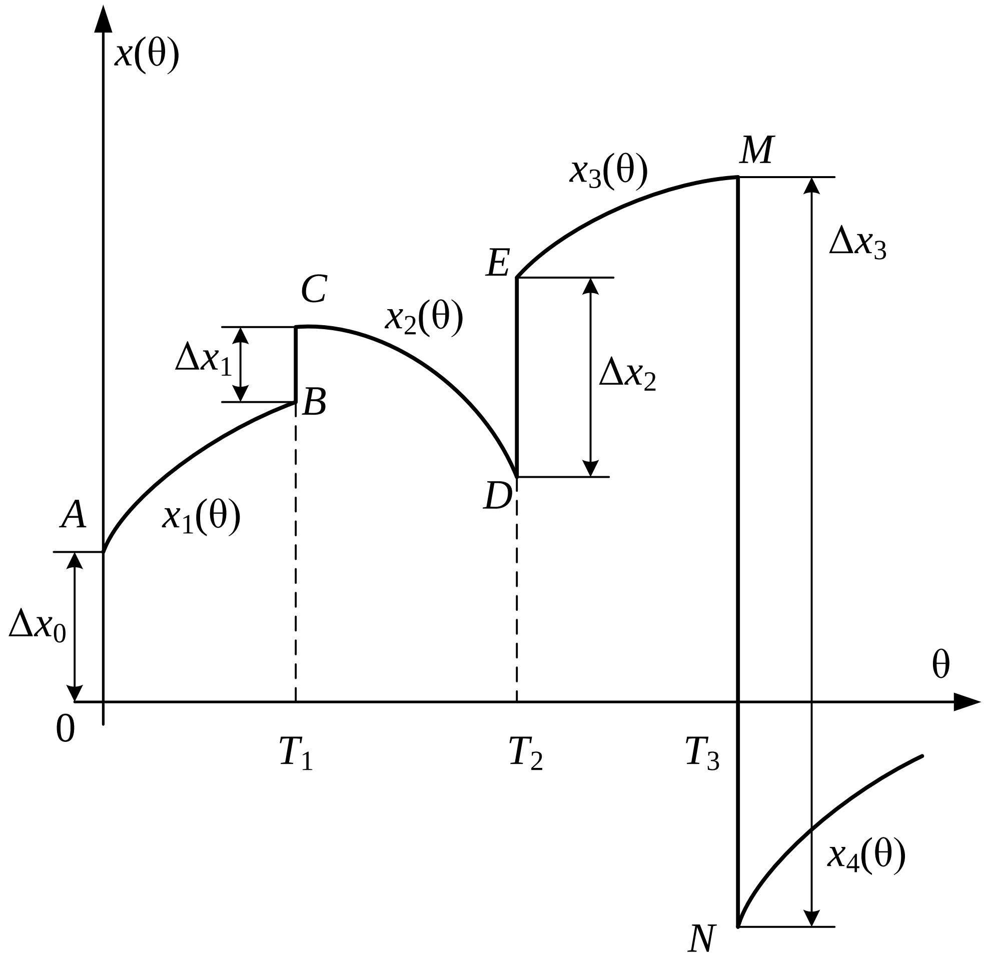


Рисунок 3.10

$\Delta x_0 \cdot = x_A - x_0 > 0$, $\theta_i = 0$;

$\Delta x_1 \cdot = x_C - x_B > 0$, $\theta_i = T_1$;

$\Delta x_2 \cdot = x_E - x_D > 0$, $\theta_i = T_2$;

$\Delta x_3 \cdot = x_N - x_M < 0$, $\theta_i = T_3$.

Складемо вирази для функції вихідного сигналу для кожного часового інтервалу:

$0 < t < T_1$

$$y(t) = \Delta x_0 h(t) + \int_0^t x'^{(\theta)}\, h(t - \theta) d\theta,$$

$T_1 < t < T_2$

$$y(t) = \Delta x_0 h(t) + \Delta x_1 h(t - T_1) + \int_0^{T_1} x_1'(\theta)\, h(t - \theta) d\theta +$$

$$+ \int_{T_1}^{t} x_2'(\theta)\, h(t - \theta) d\theta,$$

$T_2 < \mathrm{t} < T_3$ $\qquad y(t) = \Delta x_0 h(t) + \Delta x_1 h(t - T_1) + \Delta x_2 h(t - T_2) +$

$$+\int_0^{T_1} x_1{}'(\theta)\, h(t-\theta) d\theta + \int_{T_1}^{T_2} x_2{}'(\theta)\, h(t-\theta) d\theta + \int_{T_2}^{t} x_3{}'(\theta)\, h(t-\theta) d\theta,$$

$T_3 < t$ $\qquad y(t) = \Delta x_0 h(t) + \Delta x_1 h(t - T_1) + \Delta x_2 h(t - T_2) -$

$$-\Delta x_3 h(t - T_3) + \int_0^{T_1} x_1{}'(\theta)\, h(t-\theta) d\theta + \int_{T_1}^{T_2} x_2{}'(\theta)\, h(t-\theta) d\theta +$$

$$+\int_{T_2}^{T_3} x_3{}'(\theta)\, h(t-\theta) d\theta + \int_{T_3}^{t} x_4{}'(\theta)\, h(t-\theta) d\theta.$$

3.3. Інтеграл накладання з використанням імпульсної характеристики

Припустимо, що електричне коло, яке характеризується імпульсною характеристикою $g(t)$, знаходиться під впливом функції $x(t)$ довільної форми (рис. 3.11). Треба знайти відгук $y(t)$ на таку дію до моменту $t = \theta$. Для цього представимо вхідний вплив $x(\theta)$ у вигляді послідовності n імпульсів, кожний із яких має висоту x_k і тривалість $\Delta\theta = \theta_{k+1} - \theta_k \to 0$. За таких значень $\Delta\theta$ кожний такий імпульс еквівалентний дії на коло δ-функції в момент $t = k\Delta\theta$, а його площа $S_k = x_k\Delta\theta$. Відгук кола на дію кожного окремого імпульсу буде таким:

$$\Delta y = x_k \Delta\theta \mathrm{g}(t - k\Delta\theta), \tag{3.16}$$

де $g(t - k\Delta\theta)$ – імпульсна характеристика із запізненням на $k\Delta\theta$.

Відгук кола на збудження $x(\theta)$ до моменту часу t при цьому може розглядатися як суперпозиція відгуків на кожний імпульс послідовності, і може бути представлений у вигляді суми:

$$y(t) \cong \sum_{k=1}^{n} x_k \Delta\theta \mathrm{g}(t - k\Delta\theta). \tag{3.17}$$

Виконаємо граничний перехід $\Delta\theta \to 0$ і тоді $\Delta\theta \to d\theta$, $k\Delta\theta \to \theta$, а сума перетворюється на інтеграл, дискретність зникає, x_k стають безперервними:

$$y(t) = \int_{0}^{t} x(\theta)g(t-\theta)d\theta. \qquad (3.18)$$

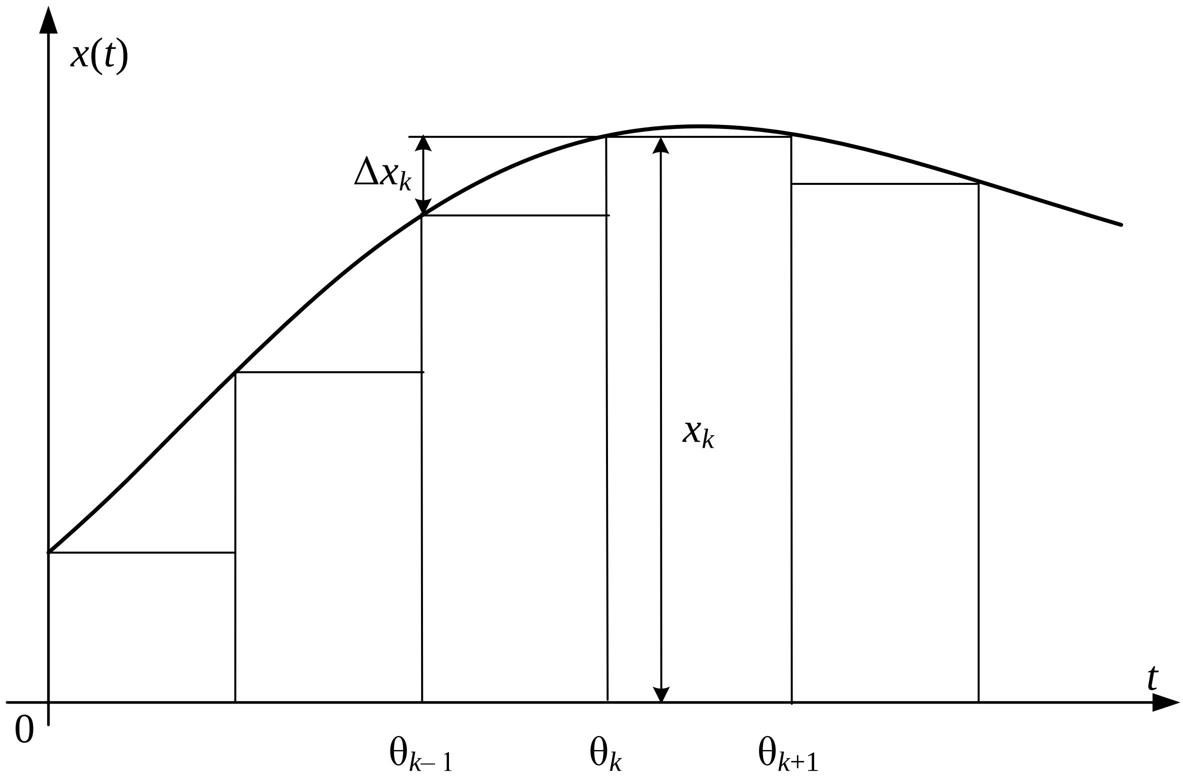


Рисунок 3.11

Отримаємо вирази для реакції кола на вплив у вигляді кусково-аналітичної функції, зображеної на рис. 3.10, використовуючи запис інтеграла Дюамеля через імпульсну часову характеристику виду (3.18). У цьому випадку стрибки функції вхідного впливу Δx_1, Δx_2, Δx_3 в моменти T_1, T_2, T_3 відповідно будуть враховані самими функціями $x_1(\theta)$, $x_2(\theta)$, $x_3(\theta)$ при інтегруванні. Таким чином, можна записати:

1) $0 < t < T_1$

$$y(t) = \int_{0}^{t} x_1(\theta)\, g(t-\theta)d\theta,$$

2) $T_1 < t < T_2$

$$y(t) = \int_{0}^{T_1} x_1(\theta)\, g(t-\theta)d\theta + \int_{T_1}^{t} x_2(\theta)\, g(t-\theta)d\theta,$$

3) $T_2 < t < T_3$

$$y(t) = \int_0^{T_1} x_1(\theta)\, g(t-\theta)d\theta + \int_{T_1}^{T_2} x_2(\theta)\, g(t-\theta)d\theta + \int_{T_2}^{t} x_3(\theta)\, g(t-\theta)d\theta$$

4) $T_3 < t$

$$y(t) = \int_0^{T_1} x_1(\theta)\, g(t-\theta)d\theta + \int_{T_1}^{T_2} x_2(\theta)\, g(t-\theta)d\theta + \int_{T_2}^{T_3} x_3(\theta)\, g(t-\theta)d\theta +$$

$$+ \int_{T_3}^{t} x_4(\theta)\, g(t-\theta)d\theta.$$

Крім виразу (3.18) також використовують іншу форму інтеграла Дюамеля, в якій вплив стрибка $h(0)$ перехідної характеристики враховано першим доданком:

$$y(t) = h(0)x(t) + \int_0^{t} x(\theta)\mathrm{g}(t-\theta)d\theta. \qquad (3.19)$$

У цьому виразі під інтегралом враховується тільки обмежена частина імпульсної характеристики $g(t)$.

3.4. Запитання для самоперевірки

На якому фундаментальному принципі лінійних електричних кіл базується часовий метод аналізу перехідних процесів?

Дайте визначення одиничної східчастої функції $1(t)$ і наведіть її основні властивості.

Що таке перехідна характеристика електричного кола $h(t)$ і який її фізичний сенс?

Які розмірності може мати перехідна характеристика?

Наведіть приклади розрахунку перехідних характеристик.

За якою методикою використовують перехідні характеристики для розрахунку перехідних процесів у випадку збудження складної форми на вході кола?

Наведіть приклади запису інтегралу Дюамеля для випадку монотонної зміни функції впливу і за наявності розривів першого роду.

Як визначається типова дія у вигляді δ-функції $\delta(t)$ і які її основні властивості?

Що таке імпульсна характеристика кола $g(t)$ і який її фізичний сенс?

Як пов’язані між собою перехідна $h(t)$ і імпульсна $g(t)$ характеристики?

Наведіть розмірності і методи визначення імпульсної характеристики кола.

Поясніть метод використання імпульсних характеристик для розрахунку перехідних процесів у випадку збудження складної форми на вході кола?

Наведіть приклади запису інтеграла Дюамеля через імпульсну характеристику за збуджень на вході кола, які мають монотонний та імпульсний характер.

3.5. Приклади застосування інтеграла накладання для розрахунку перехідних процесів

Приклад 1

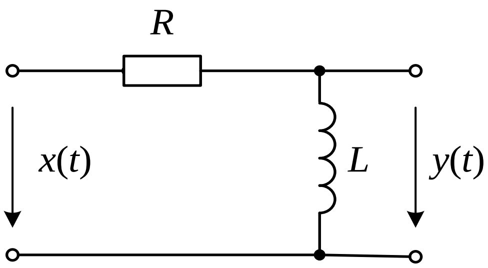


Рисунок 3.12

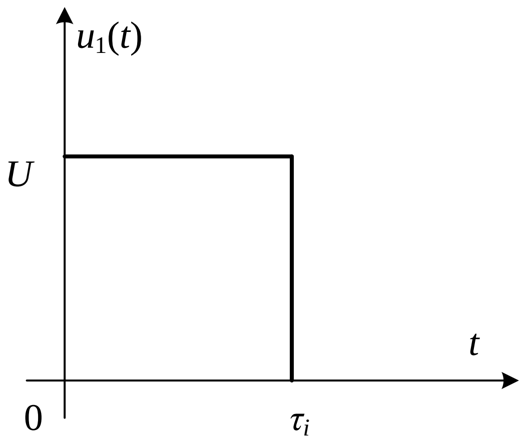


Рисунок 3.13

На вхід диференціюючої ланки (рис. 3.15) подана напруга $u_1(t)$, що має форму прямокутного імпульса (рис. 3.16). Знайти вихідну напругу $u_2(t)$, використовуючи перехідну характеристик кола $h(t) = e^{-t/\tau}$, з урахуванням, що $t > \tau_i$.

Розв’язання

$$u_1(t) = U\cdot 1(t) - U\cdot 1(t-\tau_i).$$

Інтеграл накладання розбивається на 3 інтервали: від 0– до 0+, від 0+ до $\tau_i - 0$, від $\tau_i - 0$ до $\tau_i + 0$. Для $t > \tau_i$, (починаючи з $\tau_i + 0$) підінтегральна функція дорівнює нулю.

В інтервалі від 0+ до $\tau_i - 0$ $u_1(t) = U$;

$$u_2(t) = \int_{-0}^{+0} [U \cdot 1(\theta)]' \; h(t) d\theta + \int_{\mp 0}^{\tau_i - 0} U' \; h(t-\theta) d\theta -$$

$$- \int_{\tau_i - 0}^{\tau_i + 0} [U \cdot 1(\theta - \tau_i)]' \; h(t-\tau_i) d\theta =$$

$$= Uh(t) \int_{-0}^{+0} \delta(\theta)\, d\theta + \int_{\mp 0}^{\tau_i - 0} 0 \cdot h(t-\theta) d\theta - Uh(t-\tau_i) \int_{\tau_i - 0}^{\tau_i + 0} \delta(\theta - \tau_i) d\theta =$$

$$= Uh(t) - Uh(t-\tau_i) = Ue^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t) - Ue^{-\frac{(t-\tau_i)}{\tau}}.$$

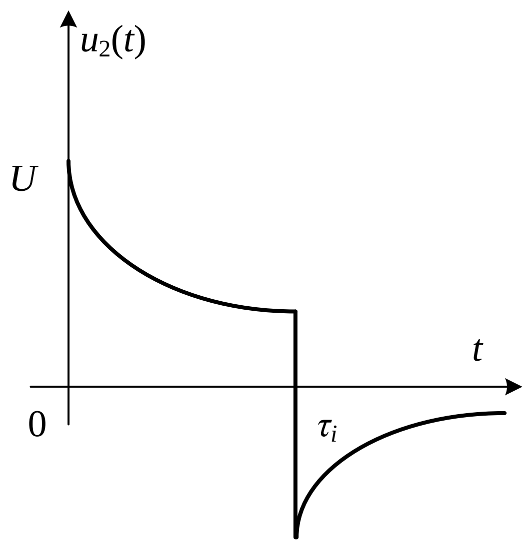


Рисунок 3.14

Приклад 2

Повторити розв’язання з використанням імпульсної характеристики кола.

Сигнал впливу можна представити як різницю двох функцій увімкнення

$u_1(t) = U \cdot 1(t) – U \cdot 1(t - \tau_i)$, де t – момент спостереження.

Імпульсна характеристика диференціюючої ланки

$$g(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Визначимо вихідну напругу використавши вираз (3.18):

$$y(t) = \int_{0-}^{t+0} x(\theta)g(t-\theta)d\theta = \int_{0-}^{t+0} x(\theta)\left[h(+\theta)\delta(\theta - t) + h'^{(t-\theta)}\right]d\theta.$$

$$u_2(t) = \int_{-0}^{t+0} U[1(t) - 1(t - \tau_i)]\left[\delta(\theta - t) - \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t-\theta}{\tau}}\right]d\theta =$$

$$= \int_{-0}^{t+0} U1(t)\delta(\theta - t)d\theta - \int_{-0}^{t+0} U1(t - \tau_i)\delta(\theta - t)d\theta - \int_{-0}^{t+0} U1(t)\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t-\theta}{\tau}}d\theta +$$

$$+ \int_{-0}^{t+0} U \cdot 1(t - \tau_i)\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t-\theta}{\tau}}d\theta.$$

У подальших перетвореннях цього виразу враховуємо, що функцію аргументу t ($1(t)$, $1(t-\tau_i)$, $e^{-t/\tau}$) можна виносити за знак інтегралу, а множник $1(t-\tau_i)$ дорівнює нулю за $t < \tau_i$. Тому за наявності цього множника нижня границя інтегрування τ_i та

$$\int_{t-0}^{t+0} \delta(t - \theta)d\theta = \int_{t-0}^{t+0} \delta(\theta - t)d\theta = 1;$$

$$u_2(t) = U1(t) - U1(t - \tau_i) - U1(t)\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\tau e^{\theta/\tau}|_{-0}^{t+0} +$$

$$+U1(t-\tau_i)\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\tau e^{\theta/\tau}|_{\tau_i}^{t+0} = U1(t) - U1(t - \tau_i) - U1(t)e^{-\frac{t}{\tau}}\left(e^{\frac{t}{\tau}}-1\right) +$$

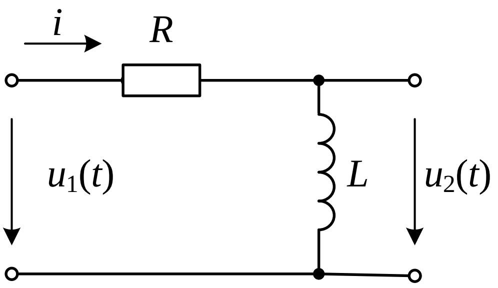
$$+U1(t-\tau_i)e^{-\frac{t}{\tau}}\left(e^{\frac{t}{\tau}}-e^{-\tau_i/\tau}\right) = U1(t) - U1(t - \tau_i)-U1(t)\left(1-e^{\frac{t}{\tau}}\right) +$$

$$+U1(t - \tau_i)\left(1-e^{\frac{tt-\tau_i}{\tau}}\right) = U1(t) - U1(t - \tau_i)-U1(t) + Ue^{-\frac{t}{\tau}}1(t) +$$

$$+U1(t-\tau_i)-Ue^{-\frac{t-\tau_i}{\tau}}1(t - \tau_i) = Ue^{-\frac{t}{\tau}}1(t)-Ue^{-\frac{t-\tau_i}{\tau}}1(t - \tau_i).$$

Приклад 3

На вхід диференціюючої ланки (рис. 3.18) подається імпульс напруги $u_1(t)$ (рис. 3.19). Параметри імпульсу і кола: U_0=10 В; $t_0=5\cdot10^{-3}$ c; R=20 Ом; L=200 мГн. Визначити $u_2(t)$ в перехідному процесі.



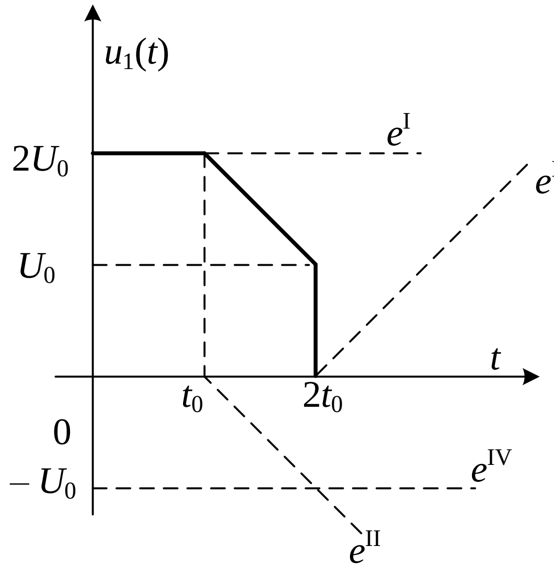


Рисунок 3.15

Рисунок 3.16

Імпульс вхідної напруги $u_1(t)$ представимо у вигляді суми функцій вмикання з запізненням (рис. 3.19). Тоді

$$e^I = 2U_0 \cdot 1(t)$$

$$e^{II} = -\frac{U_0}{t_0}(t - t_0)$$

$$e^{III} = \frac{U_0}{t_0}(t - 2t_0)$$

$$e^{IV} = -U_0 \cdot 1(t - 2t_0)$$

$$\sum e_k = 0$$

Визначимо перехідну характеристику по напрузі. Для цього запишемо вираз для вихідної напруги $u_2(t)$ в перехідному процесі, якщо напруга на вході u_1 = const.

$$u_2(t) = U_1 e^{-t/\tau}.$$

Вважаємо, що U_1=1, тоді перехідна характеристика за напругою:

$$h(t) = e^{-t/\tau}$$

Згідно з виразом (3.15) значення $u_2(t)$ в інтервалі часу $0 \leq t \leq t_0$ має вигляд:

$$u_2(t) = 2U_0 \cdot h(t) + \int_0^t u_1'(\theta) \cdot h(t - \theta) d\theta \qquad (3.20)$$

В цьому рівнянні $2U_0$ – стрибок вхідної напруги в момент t=0+.

Закон зміни вхідної напруги на інтервалі $0 \leq t \leq t_0$

$$u_1(\theta)=2U_0.$$

Похідна від u_1 за θ

$$u_1'(\theta) = 0.$$

Зсув перехідної характеристики за часом на величину θ:

$$h(t-\theta) = e^{-(t-\theta)/\tau}.$$

Підставимо отримані вирази в (20)

$$u_2(t) = 2U_0 e^{-t/\tau} = 20e^{-t/\tau} \text{ В}.$$

В інтервалі часу $t_0 \leq t \leq 2t_0$ напругу на виході електричного кола визначимо з виразу:

$$u_2(t) = 2U_0 \cdot h(t) + \int_{t_0}^{t} u_{11}'(\theta) \cdot h(t-\theta) d\theta. \qquad (3.21)$$

У формулі (3.21):

$u_{11}(\theta)$ – вхідна напруга в інтервалі $t_0 < t < 2t_0$ у вигляді функції змінної інтегрування θ замість t.

$$u_{11}(\theta) = 3U_0 - \frac{U_0}{t_0}\theta,$$

тоді

$$u_{11}'(\theta) = -\frac{U_0}{t_0}.$$

В результаті обчислення виразу (3.21) маємо:

$$u_2(t) = 2U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \int_{t_0}^{t} \left(-\frac{U_0}{t_0}\right) e^{-\frac{(t-\theta)}{\tau}} d\theta = -\frac{U_0}{t_0}\tau + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\left(2 + \frac{\tau}{t_0} e^{\frac{t_0}{\tau}}\right) =$$

$$= -20 + 52{,}96 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

В інтервалі $t \geq 2t_0$ вираз $u_2(t)$ визначаємо за формулою:

$$u_2(t) = 2U_0 \cdot h(t) + \int_{t_0}^{2t_0} u_{11}'(\theta) \cdot h(t-\theta) d\theta +$$

$$+[u_{111}(2t_0) - u_{11}(2t_0)] \cdot h(t-2t_0), \qquad (3.22)$$

де $u_{111}(t)$ – вхідна напруга в інтервалі $t>2t_0$.

Відповідно до графіку на рис.3.19,

$$u_{111}(2t_0) = 0; \qquad u_{11}(2t_0) = U_0.$$

Перехідна характеристика, зсунута в часі на $2t_0$:

$$h(t-2t_0) = e^{-\frac{(t-2t_0)}{\tau}}.$$

В результаті обчислення виразу (3.22) маємо:

$$u_2(t) = 2U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \int_{t_0}^{2t_0} -\frac{U_0}{t_0} e^{-\frac{(t-\theta)}{\tau}} d\theta - U_0 e^{-\frac{(t-2t_0)}{\tau}} =$$

$$= 2U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{U_0}{t_0} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \tau \left(e^{\frac{2t_0}{\tau}} - e^{\frac{t_0}{\tau}} \right) -$$

$$-U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} e^{\frac{2t_0}{\tau}} = -28{,}58 e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{В}.$$

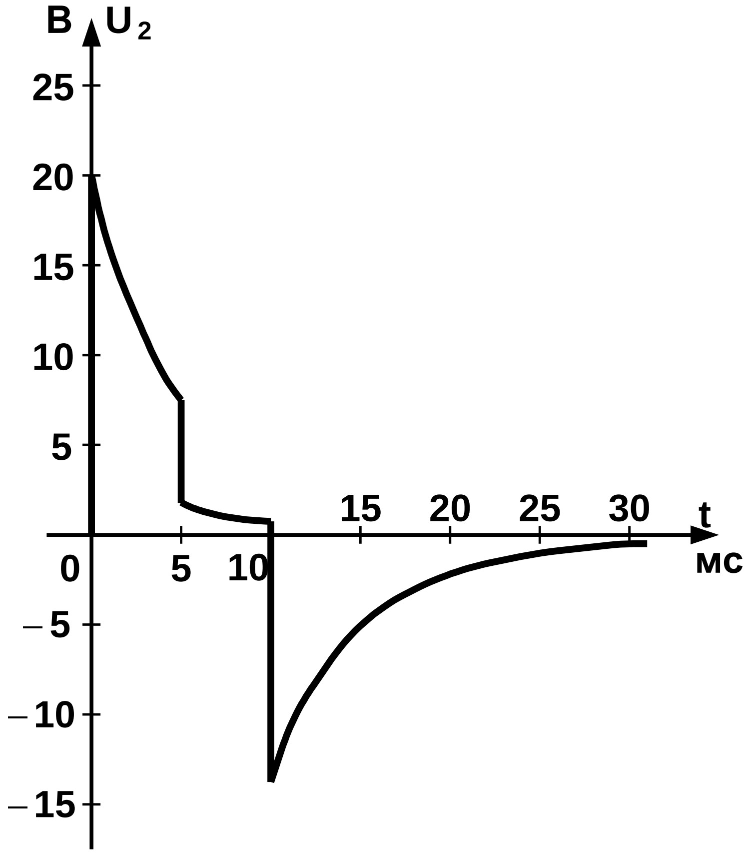
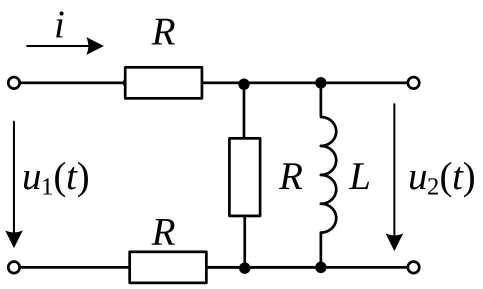


Рисунок 3.17

Приклад 4



R=10 Ом,
L=40/3 мГн,
t_0=1 мс,
U_0=10 В,
$u_2(t)$ – ?

Рисунок 3.18

Для визначення перехідної характеристики кола (рис.3.18) розглянемо її вмикання на постійну напругу u_1=1 В (рис.3.19).

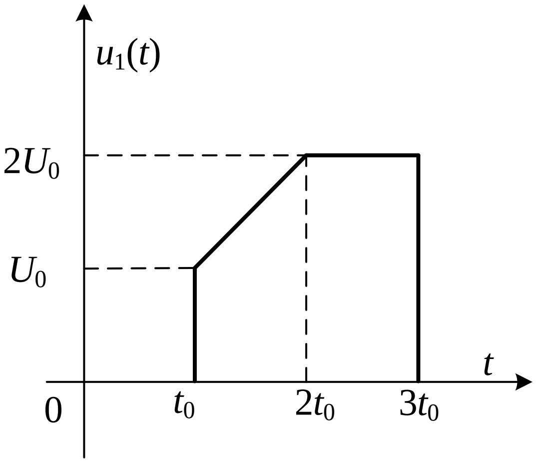


Рисунок 3.19

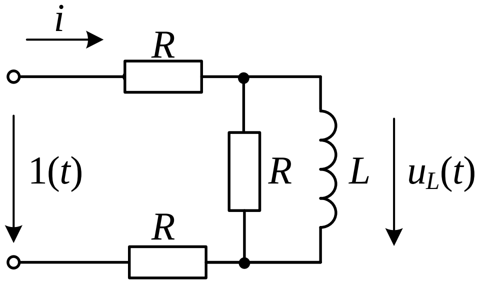


Рисунок 3.20

Зручно почати розрахунок з визначення величини, яка підкоряється закону комутації, тобто зі струму в котушці індуктивності: i_L.

$$i_L = i_{L\text{вим}} + i_{L\text{в}} = \frac{1}{2R} + Ae^{-\frac{t}{\tau_L}}; i_{L\text{вим}} = \frac{1}{2R} = 0{,}05;$$

оскільки для постійного струму індуктивність L еквівалентна перемичці,

$$L\frac{di_{L\text{вим}}}{dt} = 0;$$

Стала часу перехідного процесу

$$\tau_L = \frac{L}{R_{\text{e}L}}$$

де $R_{\text{e}L} = \frac{2R\cdot R}{3R} = \frac{2R}{3}$ – еквівалентний опір кола відносно затискачів котушки індуктивності.

$$\tau_L = \frac{3L}{2R} = \frac{3\cdot\frac{40}{3}\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10} = 2\cdot 10^{-3}\text{с}; \frac{1}{\tau_L} = 500\text{с}^{-1}; i_L = 0{,}05 + Ae^{-500t}.$$

Сталу інтегрування A визначимо за першим законом комутації: $i_L(0-) = i_L(0+)$, або $0 = 0{,}05 + A$, отже $A = -0{,}05$ та $i_L = 0{,}05 - 0{,}05e^{-500t}$.

Вихідна величина

$$u_2(t) = u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = \frac{40}{3}\cdot 10^{-3}\cdot(-0{,}05)(-500e^{-500t}) = \frac{1}{3}e^{-500t}.$$

Це і є перехідна характеристика кола:

$$H(t) = \frac{1}{3}e^{-500t}.$$

Розглянемо окремі ділянки залежності $u_1(t)$ (рис. 3.19).

$0 \le t \le t_0: u_1 = 0; u_2 = 0.$

$$t_0 \le t \le 2t_0 \colon \Delta u_1(t_0) = U_0 = 10\text{В}; u_1'(t) = \frac{U_0}{t_0} = 10^4\text{В/с}.$$

$$u_2(t) = \Delta u_1(t_0)\cdot H(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} u_1'(\theta) H(t - \theta) d\theta = 10 \cdot \frac{1}{3} e^{-500(t - t_0)} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} 10^4 \frac{1}{3} e^{-500(t-\theta)} d\theta = \frac{10}{3} e^{-500t} e^{500\cdot 1\cdot 10^{-3}} + \frac{20}{3} e^{-500t} \int_{t_0}^{t} 500\, e^{500\theta} d\theta =$$

$$= \frac{10}{3} e^{-500t} e^{0,5} + \frac{20}{3} e^{-500t} e^{500\theta}\Big|_{t_0}^{t} =$$

$$= \frac{10}{3} e^{-500t} e^{0,5} + \frac{20}{3} e^{-500t}\left(e^{500t} - e^{500\cdot 1\cdot 10^{-3}}\right) =$$

$$= \frac{10}{3} e^{-500t} e^{0,5} + \frac{20}{3} - \frac{20}{3} e^{-500t} e^{0,5} = 6{,}667 - 5{,}496 e^{-500t}, \text{В}.$$

$2t_0 \le t \le 3t_0$: стрибків $u_1(t)$ немає, $u'_1(t) = 0$, але треба врахувати, що попередня ділянка завершилася в момент $t = 2t_0$.

$$u_2(t) = 10 \cdot \frac{1}{3} e^{-500(t - t_0)} + \int_{t_0}^{2t_0} 10^4 \frac{1}{3} e^{-500(t-\theta)} d\theta =$$

$$= \frac{10}{3} e^{-500t} e^{0,5} + \frac{20}{3} e^{-500t} e^{-500\theta}\Big|_{t_0}^{2t_0} =$$

$$= \frac{10}{3} e^{-500t} e^{0,5} + \frac{20}{3} e^{-500t}\left(e^{500\cdot 2\cdot 10^{-3}} - e^{500\cdot 10^{-3}}\right) =$$

$$= \frac{10}{3} e^{-500t} e^{0,5} + \frac{20}{3} e^{-500t}(e^{1} - e^{0,5}) =$$

$$= 12{,}63 e^{-500t}, \text{В}.$$

$3t_0 \le t \le \infty$: в момент $3t_0$ відбувається стрибок вхідної напруги

$$\Delta u_1 = -20 \text{ В}.$$

Решта обчислень аналогічні попереднім.

$$u_2(t) = u_2(t)\big|_{2t_0 \le t \le 3t_0} - 20 \cdot \frac{1}{3} e^{-500(t - 3\cdot 10^{-3})} =$$

$$= 12{,}63 e^{-500t} - \frac{20}{3} e^{-500t} e^{1,5} = -17{,}25 e^{-500t}$$

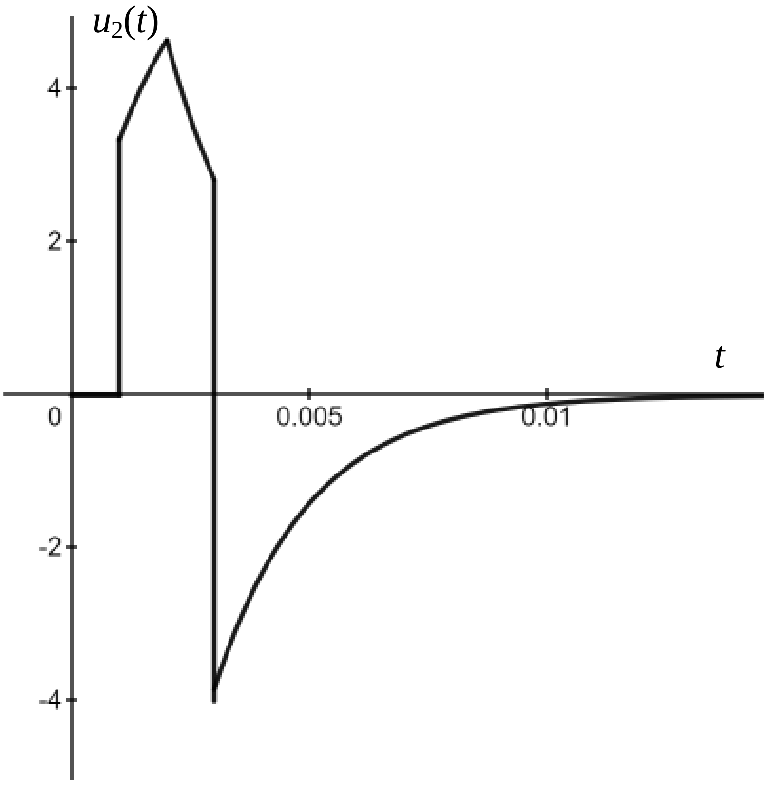


Рисунок 3.21

4. ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

Класичний метод аналізу перехідних процесів добре розкриває фізичну суть цих процесів та демонструє наочно зв'язки між електричними величинами, які виражаються диференціальними рівняннями Кірхгофа. В той же час цей метод потребує багаторазового розв'язання алгебраїчних рівнянь для визначення сталих інтегрування. З ускладненням електричних кіл та зі зростанням їхнього порядку об'єм розрахунків суттєво збільшується. Цих недоліків позбавлений операторний метод. Відповідно до нього рівняння перехідних процесів в лінійних колах, які є лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами, можна інтегрувати операторним методом, який базується на перетворенні Лапласа. Це перетворення дозволяє перенести розв'язання з області функції дійсної змінної t в область функції комплексної змінної $p = \delta + j\omega$. При цьому кожній часовій функції $f(t)$, яка називається оригіналом, ставиться у відповідність функція $F(p)$, названа зображенням. Внаслідок такої заміни диференціальні рівняння зводяться до алгебраїчних відносно зображень шуканої величини. Потім за зображенням знаходять оригінал.

Операторний метод, як і метод комплексних амплітуд, відноситься до символічних методів. Проте, у той час, як метод комплексних амплітуд застосовується тільки для гармонійних функцій, операторний метод є більш універсальним і застосовується до широкого класу функцій. Тому цей метод активно використовується в інженерній практиці для аналізу перехідних процесів, коли вплив на електричне коло описується різноманітними видами аналітичних функцій, в тому числі й імпульсними.

Припустимо, існує деяка функція часу $f(t)$, яку ми назвемо вихідною, що задовольняє умовам Діріхле:

1) має скінченну кількість максимумів і мінімумів в інтервалі інтегрування;

2) має скінченну кількість розривів першого роду, тобто скінченні межі при наближенні до розриву ліворуч і праворуч.

Всі функції $f(t)$, що використовуються в електротехніці, задовольняють умовам Діріхле.

Для такої функції завжди можна визначити інтеграл виду

$$\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt.$$

Цей інтеграл називають інтегралом Лапласа.

Функція $F(p)$, отримана в результате обчислення інтегралу, називається операторним зображенням оригіналу $f(t)$ за Лапласом, тобто

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt,$$

де $p = \delta + j\omega$ – комплексна змінна, що називається оператором Лапласа.

Символічний запис останньої рівності: $f(t) \leftrightarrow F(p)$, де «↔» – знак відповідності.

Це позначення означає, що оригіналу $f(t)$ відповідає операторне зображення $F(p)$. Іноді умовно записується пряме перетворення Лапласа.

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\mathrm{pt}}dt = F(p)$$

Перехід від зображення $F(p)$ до оригіналу може бути виконаний за допомогою зворотного перетворення Лапласа (інтеграла Бромвича).

Інтеграл

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(p)e^{pt}dp$$

позначається ще і так: $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$.

Властивості прямого перетворення Лапласа:

1) Зображення суми оригіналів дорівнює сумі зображень кожного оригіналу (властивість адитивності), тобто:

$$\int_0^{\infty} [f_1(t) + f_2(t) + \ldots + f_n(t)]e^{-pt}dt = F_1(p) + F_2(p) \ldots + F_n(p).$$

В компактній формі запису:

$$\int_0^{\infty} \sum f_k(t)e^{-pt}dt = \sum F_k(p).$$

Ця рівність витікає із властивості інтеграла (інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів).

2) Якщо оригінал помножити на постійну величину, то на цю ж постійну множимо і зображення оригіналу (властивість лінійності).

$$\int_0^{\infty} Af(t)e^{-pt}dt = AF(p).$$

4.1. Основні теореми прямого перетворення Лапласа

1. Теорема диференціювання

Визначимо, яке зображення буде мати $df(t)/d(t)$, якщо оригінал $f(t) \leftrightarrow F(p)$.

Для цього випадку в інтеграл Лапласа на місце оригіналу функції слід поставити похідну $df(t)/d(t)$, тобто

$$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt.$$

Цей інтеграл обчислимо частинами:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du.$$

Позначимо $dv = df(t)$, тоді $v = f(t)$, $u = e^{-pt}$; $du = -pe^{-pt}dt$.

$$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = \begin{vmatrix} e^{-pt} = u \\ df(t) = dv \\ v = f(t) \\ du = -pe^{-pt}dt \end{vmatrix} = e^{-pt} f(t) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty f(t) p e^{-pt} dt =$$

$$= 0 - f(0) + pF(p) = pF(p) - f(0).$$

Остаточно маємо:

$$df(t)/dt \leftrightarrow pF(p) - f(0),$$

де $f(0)$ – значення оригіналу для $t = 0$.

За нульових початкових умов

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow F(p)p.$$

Для похідної другого порядку:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \leftrightarrow p^2 \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} \right].$$

У випадку похідної n-го порядку:

$$\frac{df^n(t)}{dt^n} \leftrightarrow p^n \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \cdots - \frac{f^{n-1}(0)}{p^n} \right].$$

Якщо $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{n-1}(0) = 0$, тоді

$$\frac{df^n(t)}{dt^n} \leftrightarrow p^n F(p).$$

Таким чином, відповідно до теореми диференціювання, диференціювання в часовій області зводиться до множення зображення оригіналу на оператор p. При цьому знижується порядок математичних дій: замість диференціювання множимо зображення на оператор p.

2. **Теорема інтегрування**

Визначимо, яке зображення буде мати $\int_0^t f(t)dt$, якщо оригіналу $f(t)$ відповідає зображення за Лапласом $F(p)$.

В цьому випадку оригіналом буде $[\int\limits_0^t f(t)dt]$, тоді $\int\limits_0^\infty [\int\limits_0^t f(t)dt]e^{-pt}dt$.

Обчислимо цей інтеграл частинами. Позначимо:

$u = \int_0^t f(t)dt$; $du = f(t)dt$, $dv = e^{-pt}dt$, $v = (-1/p)\cdot e^{-pt}$.

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu = +\frac{1}{p}[(\int_0^t f(t)dt)e^{-pt}]\Big|_\infty^0 - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)f(t)dt =$$

$$= \frac{1}{p}\left[\int_0^0 f(t)dt - \left(\int_0^\infty f(t)dt\right)\cdot 0\right] + \frac{1}{p}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

В результаті маємо:

$$\int_0^t f(t)dt \leftrightarrow \frac{F(p)}{p},$$

тобто операції інтегрування функції часу відповідає ділення на оператор p її операторного зображення.

Таким чином, операція інтегрування замінюється алгебраїчною операцією ділення операторного зображення на оператор p.

3. **Теорема зсуву** (зсув в області комплексної змінної)

Нехай $f(t) \leftrightarrow F(p)$. Визначимо оригінал операторної функції $F(p + \lambda)$, що отримана з $F(p)$ шляхом заміни змінної p на $p + \lambda$, де λ – дійсне додатне число.

$$F(p+\lambda) = \int_0^\infty e^{-(p+\lambda)t}\cdot f(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt}\left[e^{-\lambda t}f(t)\right]dt \leftrightarrow e^{-\lambda t}\cdot f(t),$$

$$F(p\pm\lambda) \leftrightarrow e^{\mp\lambda t}f(t).$$

Таким чином, заміна в зображенні комплексної змінної p на $p \pm \lambda$ відповідає множенню оригіналу на показникову функцію $e^{\pm\lambda t}$.

4. **Теорема запізнювання** (зсуву в області дійсної змінної)

Визначимо оригінал, що відповідає зображенню $e^{-p\tau}\cdot F(p)$, де τ – додатній дійсний параметр. За допомогою зворотного перетворення Лапласа маємо:

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}[F(p)e^{-p\tau}]e^{pt}dp = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(p)e^{p(t-\tau)}dp;$$

$$f(t-\tau) \leftrightarrow e^{-p\tau}F(p).$$

Отриманий вираз показує, що множення зображення на $e^{-p\tau}$ зсуває графік оригіналу праворуч на τ.

Зображення найбільш поширених в електротехніці функцій

1) Зображення постійної $f(t) = A = \text{const}$.

Зображення за Лапласом:

$$F(p) = \int_0^{\infty} Ae^{-pt}dt = A\left(-\frac{1}{p}\right)e^{-pt}\Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p}.$$

Таким чином, $A \leftrightarrow A/p$.

Для визначення операторного зображення постійної величини достатньо постійну розділити на оператор p.

2) Зображення експоненціальної функції $f(t) = e^{\alpha t}$.

Операторне зображення:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t}\cdot e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} e^{-t(p-\alpha)}dt = -\frac{1}{p-\alpha}e^{-(p-\alpha)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha},$$

тобто $e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{p-\alpha}$. Очевидно, що $e^{-\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{p+\alpha}$.

3) Визначимо зображення функції $f(t) = 1 - e^{-\alpha t}$.

Згідно із властивістю адитивності

$$1 - e^{-\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\alpha} = \frac{\alpha}{p(p+\alpha)}.$$

Таким чином $1 - e^{-\alpha t} \leftrightarrow \frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$.

4) Зображення функції $f(t) = \sin \omega t$.

Відомо, що

$$\sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \leftrightarrow \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega}\right] =$$

$$= \frac{p+j\omega-p+j\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{2j} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2};$$

$$\sin\omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Аналогічно,

$$\cos\omega t \leftrightarrow \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

В таблиці 4.1 наведені найбільш поширені в електротехніці функції часу та їхні зображення за Лапласом.

Таблиця 4.1.

Оригінал	Операторне зображення
A	$\frac{A}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$	$\frac{p}{(p+\alpha)^2}$
$(1/\alpha)(1-e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{p(p+\alpha)}$
$\frac{1}{\alpha-\beta}\left(e^{\beta t}-e^{\alpha t}\right)$	$\frac{1}{(p+\beta)(p+\alpha)}$
$e^{j(\omega t+\psi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p-j\omega}$
$e^{\pm j\omega_0 t}$	$\frac{1}{p\mp j\omega_0}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t+\psi)$	$\frac{p\cos\psi-\omega\sin\psi}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t+\psi)$	$\frac{p\sin\psi+\omega\cos\psi}{p^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$

Зображення багатьох інших функцій наведені в довідниках з операційного числення [9], [11].

Важливо пам'ятати, що джерело синусоїдальної напруги $e(t) = E_m\sin(\omega t + \psi_e)$ можна представити операторним зображенням [6]:

$$\underline{E}(p) = \frac{\underline{E}_m}{p - j\omega}.$$

Тоді усі зображення джерел, включаючи додаткові джерела, що враховують ненульові початкові умови, в операторній схемі мають мати множник j для того, щоб їхня дія була врахована при визначенні оригіналу функції струму чи напруги в колі в перехідному режимі як уявної частини комплексу оригіналу.

4.2. Закон Ома в операторній формі

Розглянемо коло RLC, яке приєднане до джерела ЕРС $e_1(t)$, і в момент $t = 0$ перемикається на джерело ЕРС $e(t)$ (рис. 4.1).

Рівняння електричного кола після комутації (ключ в положенні 2):

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t idt + U_c(0-) = e(t) \qquad (4.1)$$

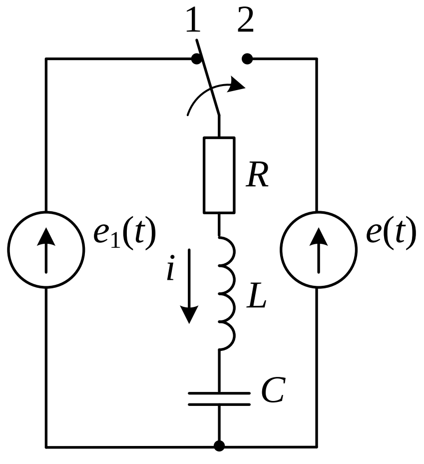


Рисунок 4.1

Це рівняння є лінійним і до нього можна застосувати перетворення Лапласа. Для цього помножимо обидві частини рівняння на e^{-pt} та візьмемо інтеграл від 0 до ∞, тобто

$$R\int_0^\infty e^{-pt}idt + L\int_0^\infty \left(\frac{di}{dt}\right)e^{-pt}dt + \frac{1}{C}\int_0^\infty \left[\int_0^t idt\right]e^{-pt}dt +$$

$$+\int_0^\infty U_c(0-)e^{-pt}dt = \int_0^\infty e(t)e^{-pt}dt. \qquad (4.2)$$

Для окремих доданків раніше отримані операторні зображення виду: $i(t) \leftrightarrow I(p)$; $L\frac{di}{dt} \leftrightarrow L[pI(p) - i(0-)]$; $\frac{1}{C}\int_0^t idt = \frac{I(p)}{pC}$; $U_C(0-) \leftrightarrow \frac{U_C(0)}{p}$; $e(t) \leftrightarrow E(p)$.

Після підстановки операторних зображень у рівняння (4.2) маємо

$$RI(p) + pLI(p) - Li(0-) + \frac{I(p)}{pC} + \frac{U_C(0-)}{p} = E(p).$$

В результаті перетворення Лапласа замість диференціально-інтегрального рівняння було отримано алгебраїчне рівняння, яке пов’язує зображення струму $I(p)$ зі зображенням ЕРС $E(p)$. Після відповідних перетворень можна записати::

$$I(p) = \frac{E(p) + Li(0-) - \frac{U_C(0-)}{p}}{R + pL + \frac{1}{pC}}.$$

Знаменник отриманого виразу є операторним опором простого послідовного з’єднання і позначається $Z(p)$*:*

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}.$$

Доданок Li(0–) є внутрішньою ЕРС, що обумовлена запасом енергії в магнітному полі котушки індуктивності внаслідок протікання через неї струму i(0–) безпосередньо перед комутацією. Позитивний напрямок цієї ЕРС обраний таким, що збігається з позитивним напрямком струму. Доданок $\frac{U_C(0-)}{p}$ є ЕРС, що обумовлена запасом енергії в електричному полі конденсатора внаслідок наявності напруги на ньому $U_C(0)$ безпосередньо перед комутацією. Позитивний напрямок цієї ЕРС є протилежним напрямку струму.

Остаточно закон Ома можна представити так:

$$I(p) = \frac{E(p) + Li(0-) - \frac{U_C(0-)}{p}}{Z(p)}.$$

Внутрішні, або розрахункові ЕРС, враховують початкові умови, тобто закони комутації. Тому в розрахунку операторним методом немає необхідності визначати сталі інтегрування, як в класичному методі аналізу.

За нульових початкових умов, тобто $i(0-) = 0$ та $u_C(0-) = 0$, закон Ома аналогічний закону Ома в комплексній формі:

$$I(p) = \frac{E(p)}{Z(p)}.$$

4.3. Закони Кірхгофа в операторній формі

Перший закон Кірхгофа для миттєвих значень струмів, що сходяться у вузлі розгалуження: алгебраїчна сума миттєвих значень струмів у вузлі електричного кола дорівнює нулю, тобто $i_1(t) + i_2(t) + \cdots + i_n(t) = 0$.

Застосувавши пряме перетворення Лапласа до цієї суми оригіналів і з урахуванням властивості адитивності маємо $\sum I_k(p) = 0$.

Перший закон Кірхгофа в операторній формі: алгебраїчна сума зображень струмів, що сходяться у вузлі розгалуження, дорівнює нулю.

Правило знаків зберігається таким самим, як і для оригіналів.

Другий закон Кірхгофа складається для контуру електричного кола. Для цього попередньо необхідно обрати позитивні напрямки струмів у гілках і напрямок обходу контуру.

Для будь-якого контуру, що складається з n гілок, 2-ой закон для миттєвих u, i, має вигляд:

$$\sum_{k=1}^{n} R_k i_k + \sum_{R=1}^{n} L_k \frac{di_k}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}\int_0^t i_k dt + \sum_{k=1}^{n} U_{Ck}(0-) = \sum_{k=1}^{n} e_k.$$

Застосовуючи до обох частин рівняння перетворення Лапласа з урахуванням отриманих раніше виразів, отримаємо другий закон Кірхгофа в операторній формі:

$$\sum_{k=1}^{n} R_k I_k(p) + \sum_{k=1}^{n} L_k[pI_k(p) - i_k(0-)] + \sum_{k=1}^{n} \frac{U_{Ck}(0-)}{p} + \sum_{k=1}^{n} \frac{I_k(p)}{pC_k} = \sum_{k=1}^{n} E_k(p)$$

або

$$\sum_{k=1}^{n} Z_k(p) I_k(p) = \sum_{k=1}^{n} \left[E_k(p) + L_k i_k(0-) - \frac{U_{Ck}(0-)}{p}\right].$$

Другий закон Кірхгофа в операторній формі: у контурі алгебраїчна сума зображень падінь напруг дорівнює алгебраїчній сумі зображень сторонніх ЕРС, що входять в цей контур і зображень додаткових ЕРС (внутрішніх) в цьому контурі, що враховують ненульові початкові умови.

Якщо початкові умови нульові, то другий закон Кірхгофа має вигляд:

$$\sum_{k=1}^{n} Z_k(p) I_k(p) = \sum_{k=1}^{n} E_k(p).$$

Правило знаків у запису другого закону Кірхгофа в операторній формі таке ж, як і для оригіналів.

4.4. Операторні схеми заміщення

У розрахунку перехідних процесів операторним методом операторна схема складається для режиму після комутації. Для цього треба виконати заміни:

1) всім змінним величинам (струми, напруги, ЕРС) в операторній схемі відповідають їхні зображення: $i(t) \leftrightarrow I(p)$, $u(t) \leftrightarrow U(p)$, $e(t) \leftrightarrow E(p)$, $j(t) \leftrightarrow J(p)$.

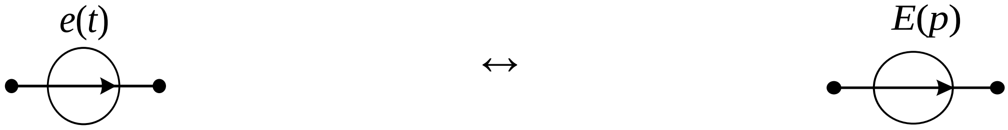


Рисунок 4.2

2) котушці індуктивності відповідає послідовне з'єднання операторного опору Lp та додаткового джерела напруги з ЕРС $L \cdot i_L(0-)$, спрямованого за струмом $i_L(t)$, яке враховує ненульові початкові умови, де $i_L(0-)$ – значення струму в котушці індуктивності в момент комутації (рис. 4.3);

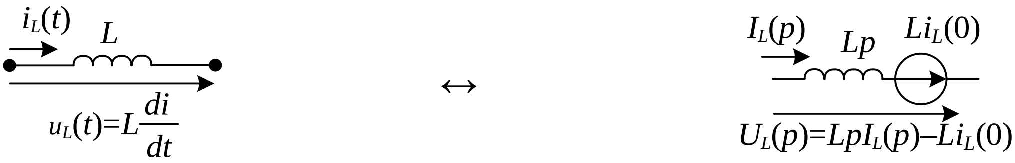


Рисунок 4.3

3) конденсатору з ємністю C відповідає послідовне з'єднання операторного опору $\frac{1}{pC}$ та джерела напруги з ЕРС $\frac{U_c(0-)}{p}$, спрямованого проти напруги на конденсаторі, де $U_c(0-)$ – значення напруги на конденсаторі в момент комутації (рис.4.4);

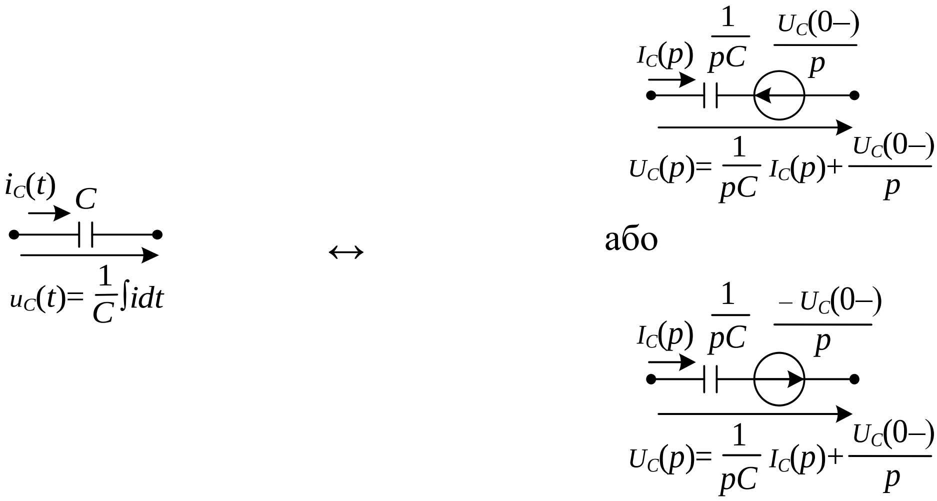


Рисунок 4.4

4) резистору з опором R відповідає операторний опір R (рис. 4.5)

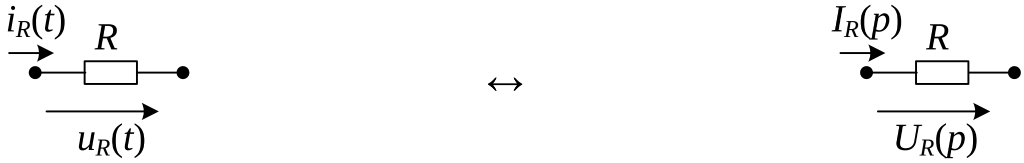


Рисунок 4.5

Зверніть увагу: напрямок ЕРС $L \cdot i_L(0-)$ збігається з напрямком струму
$i_L(t)$, а ЕРС $\frac{U_C(0-)}{p}$ спрямована проти напруги на конденсаторі $u_C(t)$.

Відповідно до вихідних схем складається операторна схема заміщення кола після комутації. З операторних схем заміщення визначають зображення шуканих функцій $I_k(p)$, $U_k(p)$ використовуючи при цьому будь-який з відомих методів розрахунку електричних кіл постійного та гармонійного струму (система рівнянь за законами Кірхгофа, метод вузлових потенціалів, контурних струмів, суперпозиції, еквівалентного генератора та ін.).

4.5. Методи переходу від зображення до оригіналу

Існує кілька методів такого переходу:

1) найбільш загальний метод – зворотне перетворення Лапласа по формулі:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(p)e^{pt}dp;$$

2) за допомогою формул відповідності (табличний метод).

Табличні методи переходу практично можна використовувати лише в колах з одним накопичувачем, але і це не завжди просто.

За наявності двох і більше накопичувачів енергії в колі перехід від зображення до оригіналу за допомогою формул відповідності практично не використовується. В цьому випадку використовують *теорему розкладання*.

Нехай в результаті перетворень операторне зображення шуканої величини є правильним дробом, чисельник і знаменник якого є поліномами:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + a_2 p^{m-2} + \ldots + a_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \ldots + b_n},$$

причому $n > m$, поліноми $F_1(p)$ і $F_2(p)$ не мають спільних коренів, a_k та b_k – дійсні числа.

Для визначення оригіналу $f(t)$ розкладемо раціональний дріб $\frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ на прості множники. Якщо всі n коренів рівняння $F_2(p) = 0$ різні, то матимемо:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \cdots + \frac{A_k}{p-p_k} + \cdots + \frac{A_n}{p-p_n} = \\ = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{p-p_k} \tag{4.3}$$

де p_k – не кратні корені рівняння $F_2(p) = 0$.

Визначимо коефіцієнти розкладання (A_k). Для цього ліву і праву частини рівняння (4.3) множимо на (p–p_k) та спрямуємо p до p_k:

$$\lim_{p\to p_k} \frac{F_1(p)(p-p_k)}{F_2(p)} = \lim_{p\to p_k} (p-p_k) \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{p-p_k}.$$

Тоді отримаємо:

$$F_1(p_k) \lim_{p\to p_k} \frac{p-p_k}{F_2(p)} = A_k.$$

Після підстановки p_k у вираз

$$\frac{p-p_k}{F_2(p)}$$

отримаємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Розкриємо невизначеність за правилом Лопіталя.

$$A_k = F_1(p_k) \lim_{p\to p_k} \frac{\frac{d}{dp}(p-p_k)}{F_2'(p)} = F_1(p_k) \frac{1}{F_2'(p_k)}.$$

Підставляючи значення A_k у формулу (4.3), отримаємо вираз:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \frac{1}{(p-p_k)}. \tag{4.4}$$

Згідно з табл. 4.1 зображенню $\frac{1}{p-p_k}$ відповідає оригінал $e^{p_k t}$. З урахуванням властивості адитивності і лінійності оригінал зображення (4.4) матиме вигляд вид

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \leftrightarrow f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \tag{4.5}$$

Вираз (4.5) теореми (формули) розкладання. Кількість доданків у цьому виразі дорівнює кількості коренів знаменника.

1. Якщо один з коренів знаменника дорівнює нулю, то шукана функція буде мати постійну вимушену складову.

2. Якщо знаменник дробу має корені p_k та $p_{k+1} = \pm j\omega$, тобто уявні, то шукана функція має синусоїдальну вимушену складову.
3. Якщо два корені знаменника комплексні спряжені, то постійні A_k та A_{k+1} теж будуть комплексними спряженими числами. Оскільки сума двох комплексно спряжених чисел дорівнює подвоєній дійсній частині, то достатньо в цьому випадку в теорему розкладання поставити один з комплексно спряжених коренів та взяти подвоєну дійсну частину комплексу, тобто

$$2\,\mathrm{Re}\left[\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}e^{p_k t}\right].$$

Якщо рівняння $F_2(p)$=0 має n пар комплексно спряжених коренів, то оригінал визначається за формулою

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}e^{p_k t}\right].$$

В усіх цих випадках знаменник зображення [$F_2(p)$] є характеристичним рівнянням кола, в якому розраховуємо перехідний процес.

Для знаходження початкового і кінцевого значення оригіналу можна скористатися граничними співвідношеннями:

$$f(0) = \lim_{p\to\infty} pF(p)\,, f(\infty) = \lim_{p\to 0} pF(p).$$

4.6. Порядок розрахунку перехідних процесів операторним методом

1. Розрахунок незалежних початкових умов, тобто $i_{Lk}(0-)$, $u_{Ck}(0-)$, із аналізу електричного кола до комутації.

2. Складання операторної схеми заміщення для кола, яке було отримано після комутації.

3. Складання рівнянь в операторній формі по схемі заміщення у відповідності до обраного методу розрахунку зображень шуканих функцій.

4. Розв’язування складених рівнянь відносно операторних зображень шуканих функцій.

5. Визначення оригіналів по отриманих зображеннях за допомогою таблиць відповідності або формули розкладання.

4.7. Операторні передавальні функції, характеристики лінійних електричних кіл та їхні властивості

Операторна передавальна функція (ОПФ) лінійного електричного кола $K(p)$ є відношенням операторного зображення вихідної величини $Y(p)$ до операторного зображення вхідної величини $X(p)$ за нульових початкових умов [4], [5], [7], [11]:

$$K(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \tag{4.6}$$

В електричному колі, де вхідний та вихідний сигнали за своєю фізичною суттю можуть бути струмом або напругою, існує лише три варіанти розмірності ОПФ: безрозмірна, операторна провідність і операторний опір. Якщо коло розглядається як чотириполюсник, то для нього можна скласти чотири види операторних передавальних функцій:

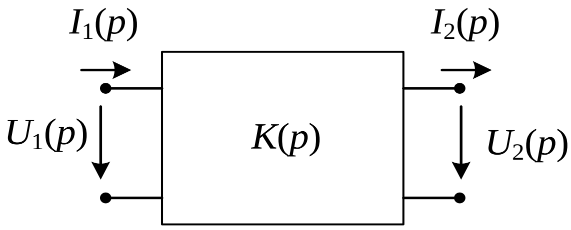


Рисунок 4.6

Операторна передавальна функція за напругою:

$$K_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}, \tag{4.7}$$

Операторна передавальна функція за струмом:

$$K_I(p) = \frac{I_2(p)}{I_1(p)}. \tag{4.8}$$

Операторний передатний опір:

$$K_{UI}(p) = Z_{21}(p) = \frac{U_2(p)}{I_1(p)}. \tag{4.9}$$

Операторна передатна провідність:

$$K_{IU}(p) = Y_{21}(p) = \frac{I_2(p)}{U_1(p)}. \tag{4.10}$$

У цих співвідношеннях вихідні операторні зображення $I_2(p)$ та $U_2(p)$ можуть бути взяті з будь-якого пасивного елемента кола.

Операторними передавальними функціями кола, яке розглядається як двополюсник, будуть операторний вхідний опір $Z(p)$ та операторна вхідна провідність $Y(p)$ (рис. 4.7).

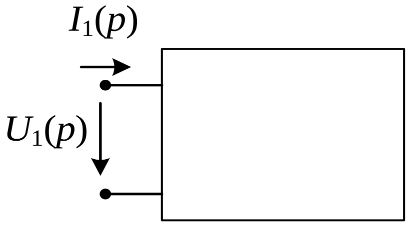


Рисунок 4.7

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)}, \tag{4.11}$$

$$Y(p) = \frac{I(p)}{U(p)}. \tag{4.12}$$

Операторні передавальні функції електричного кола $K(p)$ не залежать від зовнішніх впливів на коло, а визначаються виключно топологією схеми та параметрами її елементів. Тобто ОПФ – це характеристика самого кола.

Складаючи вираз $K(p)$ треба задати, які величини вважаються зовнішнім впливом, а які – відгуком. Після цього по операторному зображенню впливу $X(p)$ знаходять операторне зображення відгуку кола $Y(p)$,застосовуючи при цьому будь-який з відомих методів розрахунку лінійних електричних кіл з використанням в них змінних величин і параметрів в операторній формі. Операторну передавальну функцію $K(p)$ можна отримати з диференціального рівняння електричного кола. Як відомо, в загальному вигляді неоднорідне диференціальне рівняння електричного кола записується так:

$$\begin{gathered} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t). \end{gathered} \tag{4.13}$$

У випадку нульових початкових умов при диференціюванні членів $x(0–)$ та $y(0–)$ не буде. Застосовуючи до (4.13) теореми адитивності та диференціювання оригіналів переходимо від оригіналів до їхніх зображень і виносимо за дужки ліворуч $Y(p)$, а праворуч – $X(p)$:

$$\begin{gathered} Y(p)(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0) = \\ = X(p)(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0). \end{gathered} \tag{4.14}$$

З (4.14) отримуємо вираз $K(p)$ через коефіцієнти диференціального рівняння

$$K(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}. \tag{4.15}$$

Останнє співвідношення можна застосувати для складання диференціального рівняння по виразу $K(p)$. Чисельник $K(p)$ дає набір коефіцієнтів правої частини диференціального рівняння, а знаменник – лівої. Таким чином, ОПФ лінійного електричного кола в загальному вигляді можна подати у вигляді дробово-раціональної функції з дійсними коефіцієнтами. Степінь полінома чисельника не перевищує степеня полінома знаменника, тобто $m \le n$. Степінь полінома чисельника та знаменника залежить від кількості накопичувальних елементів кола. ОПФ широко використовується для дослідження властивостей лінійних кіл і систем, не розглядаючи самі впливи і відгуки на них. При цьому використовуються кореневі методи дослідження [4], [7], [11], в яких розглядають такі поняття як нулі (корені чисельника) і полюси (корені знаменника) ОПФ. Це дозволяє вираз (4.15) представити у такому вигляді:

$$K(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m}{a_n} \frac{(p - p_{01})(p - p_{02})\ldots(p - p_{0m})}{(p - p_{1\infty})(p - p_{2\infty})\ldots(p - p_{n\infty})}, \tag{4.16}$$

де $p_{01}, p_{02}, \ldots, p_{0m}$ – нулі ОПФ, при підстановці яких $K(p) = 0$;
$p_{1\infty}, p_{2\infty}, \ldots, p_{m\infty}$ – полюси ОПФ, при підстановці яких $K(p) \to \infty$.

Нулі і полюси операторної передавальної функції $K(p)$ є або дійсними числами, або комплексно-спряженими.

Якщо корені багаточленів чисельника і знаменника (нулі і полюси) відомі, то це дозволяє розрахувати $K(p)$ з точністю до постійного множника b_m/a_n. Знаючи розташування нулів та полюсів ОПФ у площині комплексної (узагальненої) частоти $p = \delta + j\omega$, можна отримати повну інформацію про властивості кола. Графічне розташування нулів і полюсів на цій площині називають полюсно-нульовою діаграмою. На цих діаграмах полюси позначають хрестиками, а нулі – кружечками.

Складемо такі діаграми і виявимо розташування нулів і полюсів на прикладі реальних аперіодичних диференційної та інтегруючої ланок на базі кола *RC*.

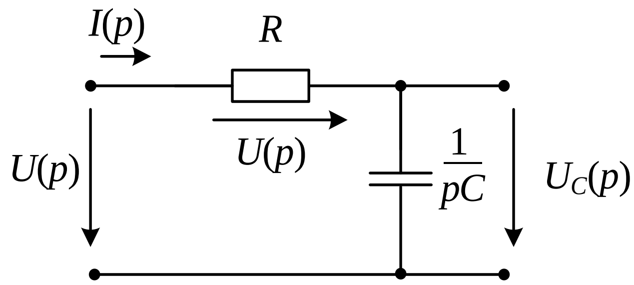


Рисунок 4.8

ОПФ диференційної ланки визначається співвідношенням

$$K(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{U_R(p)}{U(p)}=\frac{I(p)R}{I(p)\left(R+\frac{1}{pC}\right)}=\frac{pRC}{1+pRC}=$$
$$=\frac{pT}{1+pT}, \tag{4.17}$$

де $T = RC$ – стала часу ланки.

Для отримання ОПФ інтегруючої ланки складаємо такий вираз:

$$K(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{U_C(p)}{U(p)}=\frac{I(p)\frac{1}{pC}}{I(p)\left(R+\frac{1}{pC}\right)}=\frac{1}{1+pRC}=$$
$$=\frac{1}{1+pT}. \tag{4.18}$$

ОПФ диференційної ланки має один нуль $\beta = 0$ і один полюс $\alpha = -1/T$ (рис. 4.9).

ОПФ інтегруючої ланки нулів не має, а має один полюс $\alpha = -1/T$ (рис.4.10). Чим далі від початку координат розташований полюс, тим менша стала часу T і тим меншою є тривалість перехідного процесу.

Слід зауважити, що за відсутності нуля в ОПФ інтегруючої ланки відгук кола у вигляді функції $u_C(t)$ змінюється монотонно, без стрибків. У диференційному колі, ОПФ якого має нуль, відгук кола у вигляді функції $u_R(t)$ в момент $t = 0+$ має стрибок.

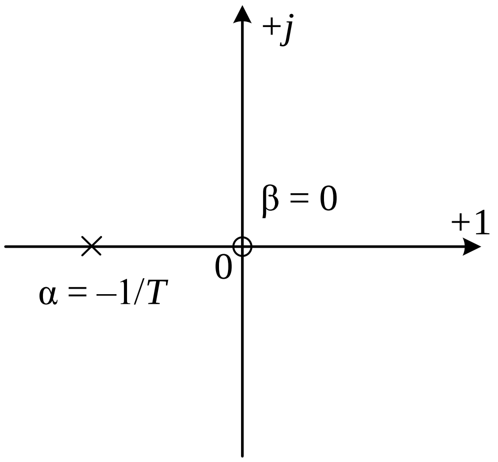


Рисунок 4.9

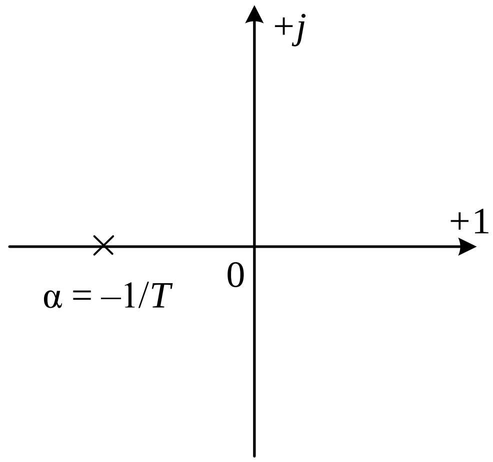


Рисунок 4.10

Кореневий аналіз ОПФ коливальної, диференційної та інтегруючої ланок проведено на прикладі послідовного коливального контуру (рис. 4.11), в якому активний опір $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, а коефіцієнт згасання $\delta = \frac{R}{2L}$ менший за резонансну частоту ω_0. Ці умови забезпечують коливальний режим роботи цієї ланки.

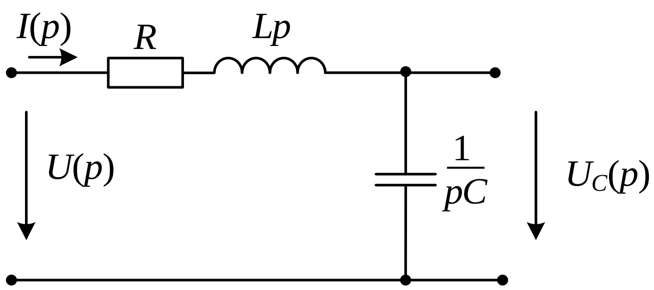


Рисунок 4.11

ОПФ коливальної інтегруючої ланки:

$$K(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{U_C(p)}{U(p)} = \frac{I(p)\frac{1}{pC}}{I(p)\left(R + pL + \frac{1}{pC}\right)} =$$
$$= \frac{1}{p^2LC + pRC + 1} = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2}. \quad (4.19)$$

ОПФ цієї ланки нулів не має (β = 0), а полюси комплексно-спряжені $\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega_в$ (рис. 4.12), де $\omega_в$ – частота власних згасаючих коливань.

ОПФ диференційної коливальної ланки:

$$K(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{U_R(p)}{U(p)} = \frac{I(p)R}{I(p)\left(R + pL + \frac{1}{pC}\right)} =$$
$$= \frac{pRC}{p^2LC + pRC + 1} = \frac{p\frac{R}{L}}{p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{2\delta p}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2}. \quad (4.20)$$

ОПФ цієї ланки має один нуль першого порядку і два комплексно-спряжені корені, як у попередньому випадку (рис. 4.13).

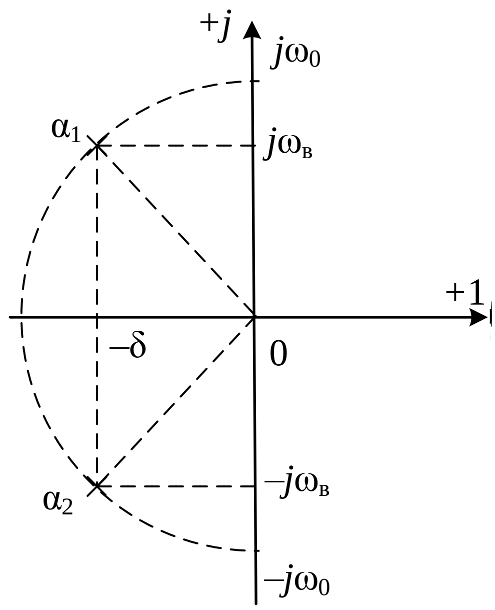


Рисунок 4.12

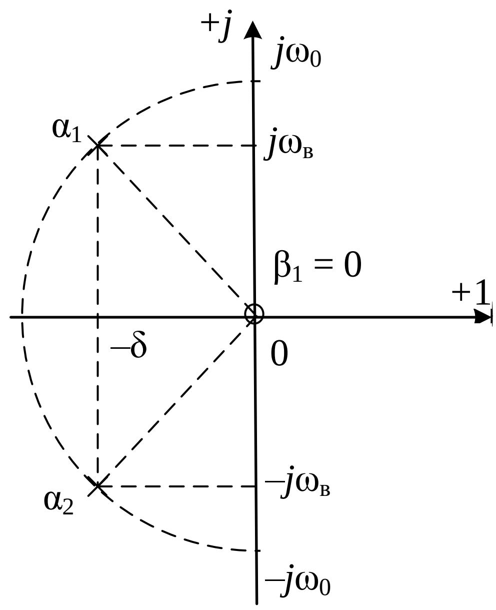


Рисунок 4.13

З наведених на рис. 4.12, 4.13 полюсно-нульових діаграм можна зробити висновок, що чим далі по осі абсцис від початку координат розташовані полюси, тим швидше згасає коливальний перехідний процес. Чим далі від осі абсцис в напрямку осі ординат розташовані полюси, тим більшою є частота власних згасаючих коливань $\omega_в$.

Таким чином, розташування нулів і полюсів ОПФ електричного кола або лінійних систем визначає динаміку перехідних процесів в них. Для стійких лінійних електричних кіл полюси ОПФ також містяться у лівій півплощині. Коло є стійким, якщо після припинення впливу джерела вільні коливання будуть згасати: e^{pt}, де $p = -\delta \pm j\omega$.

Якщо полюси ОПФ розташовані в правій півплощині, то таке коло є нестійким: e^{pt}, де $p = +\delta \pm j\omega$.

У випадку, коли полюси знаходяться на уявній осі, стан кола називають умовно стійким: e^{pt}, де $p = \pm j\omega$.

Якщо ОПФ не мають нулів у правій півплощині, то їх називають ОПФ мінімальної фази, а ОПФ, що мають нулі в правій півплощині, називають ОПФ немінімальної фази. Відповідно до цього і кола розділяють на кола мінімальної та немінімальної фази [7], [11]. Якщо поставити у відповідність багаточлену чисельника вектор $\overline{M}$, а багаточлену знаменника – вектор $\overline{N}$, то розташування для кола мінімальної та немінімальної фази нулів і полюсів ОПФ матиме такий вигляд (рис. 4.14):

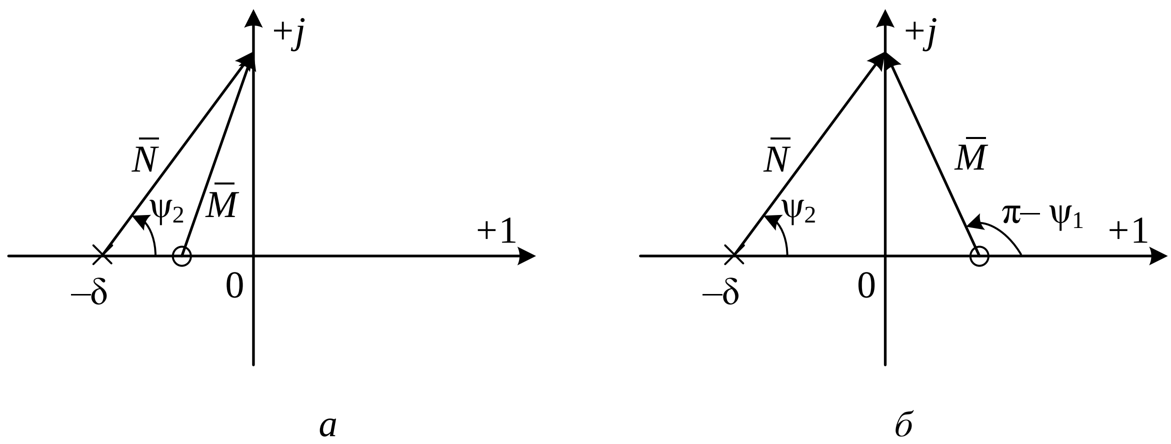


Рисунок 4.14

Як видно, різниця аргументів $\psi_2 - \psi_1$ для кола мінімальної фази завжди менша, ніж різниця $\psi_2 - (\pi - \psi_1)$ для кола немінімальної фази.

Немінімальнофазові кола мають особливі властивості – за зміни частоти їх фазо-частотна характеристика змінюється, а амплітудно-частотна залишається без змін. Якщо такі кола включати в складні кола або системи, то можна буде змінювати типи ФЧХ системи не змінюючи їхні АЧХ.

Питання, пов’язані з використанням ОПФ для дослідження властивостей кіл і систем, докладно розглядаються в підручниках і інших джерелах інформації, присвячених теорії автоматичного управління [4], [7], [11].

4.8. Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1

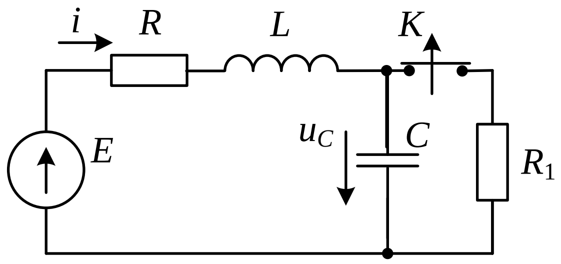


Рисунок 4.15

Дано:
E = 120 В; R = 250 Ом;
R_1 = 150 Ом; L = 0,125 Гн;
C = 12,5 мкФ.

Визначити закони зміни струму джерела $i(t)$, напруги на конденсаторі $u_C(t)$.

Розв'язання

Визначимо початкові умови:

$$i(0+) = i(0-) = \frac{E}{R+R_1} = \frac{120}{400} = 0{,}3 \text{ А},$$

$$u_C(0+) = i(0-) = \frac{ER_1}{R+R_1} = 45 \text{ В}.$$

Операторна схема з урахуванням початкових умов:

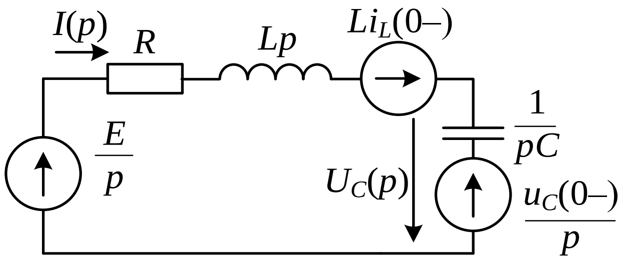


Рисунок 4.16

Операторне зображення струму джерела визначаємо з операторної схеми за законом Ома:

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p} + Li(0-) - \frac{u_C(0-)}{p}}{R + Lp + \frac{1}{Cp}} = \frac{E + pLi(0-) - u_C(0-)}{p\left(R + Lp + \frac{1}{Cp}\right)} =$$

$$= \frac{pC\big(E + pLi(0-) - u_C(0-)\big)}{p(RCp + LCp^2 + 1)} = \frac{E + pLi(0-) - u_C(0-)}{L\left(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}\right)} =$$

$$= \frac{600 + 0{,}3p}{p^2 + 2\cdot 10^3 p + 64\cdot 10^4} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Для отримання оригіналу струму джерела використаємо теорему розкладання:

$$F_1(p) = 600 + 0{,}3p;\ \ F_2(p) = p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 64 \cdot 10^4;$$

$$F_2'(p) = 2p + 2 \cdot 10^3;$$

Знайдемо корені рівняння $F_2(p) = 0$:

$$p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 64 \cdot 10^4 = 0,$$

$$p_{1,2} =- 10^3 \pm \sqrt{10^6 - 64 \cdot 10^4} = -1000 \pm 600;$$
$$p_1 = -400\ 1/\text{с};$$
$$p_2 = -1600\ 1/\text{с}.$$

$$F_1(p_1) = 480;\ \ F_1(p_2) = 120;\ \ F_2'(p_1) = 1200;\ F_2'(p_2) = -1200.$$

$$i(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{480}{1200} e^{-400t} + \frac{120}{-1200} e^{-1600t} =$$

$$= 0{,}4e^{-400t} - 0{,}1e^{-1600t}\ \text{А}.$$

Зображення напруги на конденсаторі за законом Ома для активної ділянки:

$$U_C(p) = I(p)\frac{1}{Cp} + \frac{u_C(0-)}{p} = \frac{600 + 0{,}3p}{12{,}5 \cdot 10^{-6} p(p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 64 \cdot 10^4)} + \frac{45}{p} =$$
$$= U_C'(p) + U_C''^{(p)}.$$

Використаємо властивість лінійності перетворення Лапласа:

$$U_C''(p) = \frac{45}{p} \leftrightarrow u_C''(t) = 45\ \text{В};$$

$$U_C'(p) = \frac{600 + 0{,}3p}{12{,}5 \cdot 10^{-6} p(p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 64 \cdot 10^4)} = \frac{48 \cdot 10^6 + 2{,}4 \cdot 10^4 p}{p(p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 64 \cdot 10^4)}.$$

$$F_1(p) = 48 \cdot 10^6 + 2{,}4 \cdot 10^4 p;\ F_2(p) = p(p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 64 \cdot 10^4).$$

Похідна від знаменника:

$$F_2'(p) = p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 64 \cdot 10^4 + p(2p + 2 \cdot 10^3).$$

Корені рівняння $F_2(p) = 0$:

$p_1 = 0;\ p_2 = -400\frac{1}{\text{c}};\ p_3 = -1600\frac{1}{\text{c}}.$

$$F_1(p_1) = \frac{600}{12{,}5} \cdot 10^6;\ \ F_1(p_2) = \frac{480}{12{,}5} \cdot 10^6; F_1(p_3) = \frac{120}{12{,}5} \cdot 10^6\ ;$$

$$F_2'(p_1) = 64 \cdot 10^4;\ F_2'(p_2) = -400 \cdot 1200;\ F_2'(p_3) = -1600 \cdot (-1200);$$

$$u_C(t) = \frac{600}{12{,}5 \cdot 64 \cdot 10^4} \cdot 10^6 e^{0t} + \frac{480}{12{,}5 \cdot (-400) \cdot 1200} \cdot 10^6 e^{-400t} +$$

$$+\frac{120}{12{,}5(-1600) \cdot (-1200)} \cdot 10^6 e^{-1600t} = 75 - 80e^{-400t} + 5e^{-1600t}\ \text{В}.$$

Остаточно:

$$u_C(t) = u_C^{\prime(t)} + u_C''(t) = 120 - 80e^{-400t} + 5e^{-1600t}\ \text{В}.$$

Графіки струму джерела і напруги на конденсаторі наведені на рис. 4.17, 4.18.

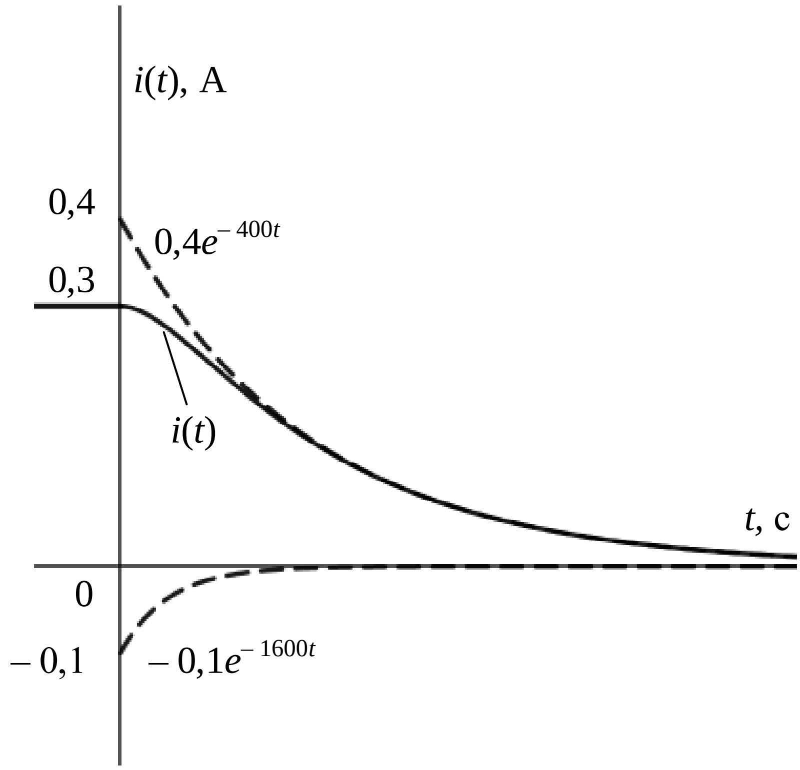


Рисунок 4.17

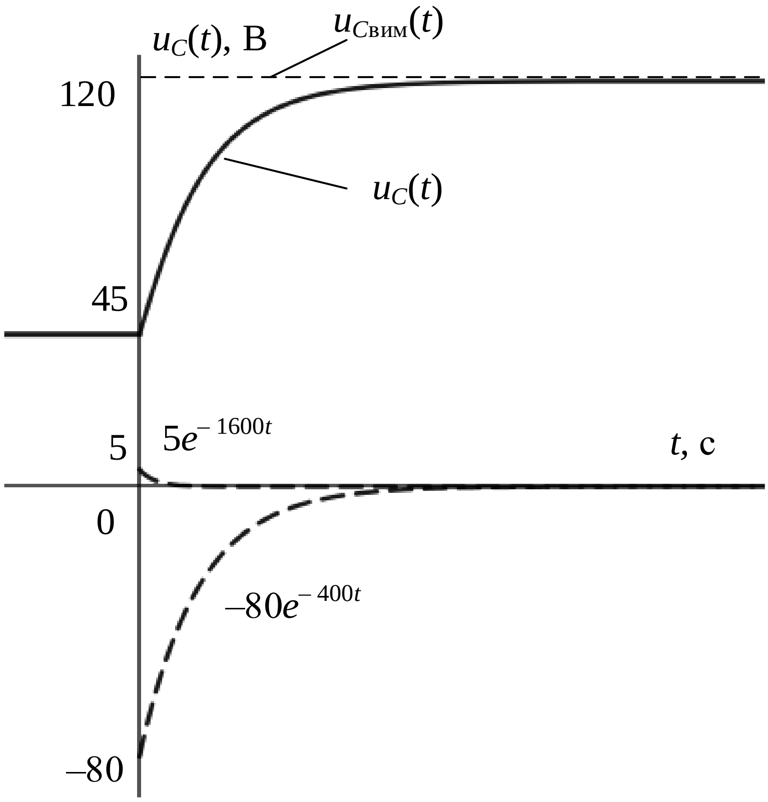


Рисунок 4.18

Приклад 2

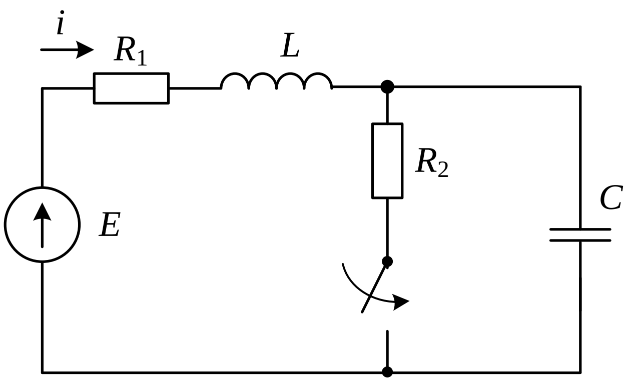


Рисунок 4.19

Дано:
E = 200 В; R_1 = R_2 = 10 Ом, L = 0,01 Гн, C = 100 мкФ.

Визначити закон зміни струму джерела $i(t)$ в перехідному процесі.

Розв’язання

Визначаємо початкові умови. $i(0–) = 0$; $u_C(0–) = E = 200$ В.

Складаємо операторну схему заміщення:

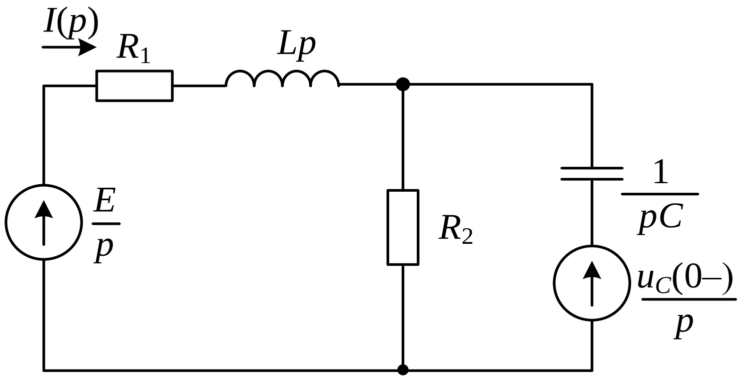


Рисунок 4.20

Зображення струму джерела знайдемо за методом накладання.

$$I(p) = I'(p) + I''(p).$$

За законом Ома отримаємо першу складову зображення струму:

$$I'(p) = \frac{E}{p\left(R_1 + pL + \dfrac{R_2\dfrac{1}{pC}}{R_2 + \dfrac{1}{pC}}\right)} = \frac{E}{p\left(R_1 + pL + \dfrac{R_2}{R_2pC + 1}\right)} =$$

$$= \frac{E(R_2pC + 1)}{p(R_2LCp^2 + p(L + R_1R_2C) + R_1 + R_2)};$$

За законом Ома і використавши дільник струмів отримаємо другу складову зображення струму:

$$I''(p) = \frac{E/p}{\dfrac{1}{pC} + \dfrac{R_2(R_1 + pL)}{R_2 + R_1 + pL}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_1 + pL} = \frac{ECR_2}{R_1 + R_2 + pL + R_2pC(R_1 + pL)};$$

$$I''(p) = \frac{ECR_2}{R_2CLp^2 + p(L + R_1R_2C) + R_1 + R_2}.$$

Остаточно:

$$I(p) = \frac{E(R_2Cp + 1 - R_2Cp)}{p(R_2CLp^2 + p(L + R_1R_2C) + R_1 + R_2)} =$$

$$= \frac{E}{R_2CLp\left(p^2 + p\left(\dfrac{L + R_1R_2C}{R_2CL}\right) + \dfrac{R_1 + R_2}{R_2CL}\right)} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^7}{p(p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^6)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Для визначення оригіналу струму використаємо теорему розкладання.

$$F_1(p) = 2 \cdot 10^7;\ F_2(p) = p(p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^6).$$

$$F_2'(p) = 3p^2 + 4 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^6.$$

Визначимо корені рівняння $F_2(p) = 0$; $p(p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^6) = 0$:

$$p_1 = 0;\ p_{2,3} = -10^3 \pm \sqrt{10^6 - 2 \cdot 10^6} = -10^3 \pm j10^3 = 10^3\sqrt{2}e^{\pm j135°}\ 1/\text{с}.$$

$$F_1(p_1) = F_1(p_2) = 2 \cdot 10^7;$$

$$F_2'(p_1) = 2 \cdot 10^6;\ F_2'(p_2) = 10^3\sqrt{2}e^{j135°}(-2 \cdot 10^3 + j2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3) =$$

$$= 10^3\sqrt{2}e^{j135°}(j2 \cdot 10^3) = 2 \cdot 10^6\sqrt{2}e^{j225°}.$$

$$i(t) = \frac{F_1(0)}{F_2'(0)} + 2\left[j\frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)}e^{p_2 t}\right]_{Jm} = \frac{2 \cdot 10^7}{2 \cdot 10^6} +$$

$$+ \left[e^{j90°}\frac{2 \cdot 10^7 \cdot e^{(-10^3 + j10^3)t}}{2 \cdot 10^6\sqrt{2}e^{j225°}}\right]_{Jm} =$$

$$= 10 + 14{,}1\left[e^{-j135°}e^{-1000t}e^{j1000t}\right]_{Jm} = 10 + 14{,}1e^{-1000t}\sin(1000t - 135°).$$

$$i(t) = 10 + 14{,}1e^{-1000t}\sin(1000t - 135°) = i_{\text{вим}}(t) + i_{\text{в}}(t).$$

Перехідний процес має коливальний характер, оскільки корені рівняння є комплексно-спряженими. Часова діаграма зміни струму в перехідному процесі наведена на рис. 4.21.

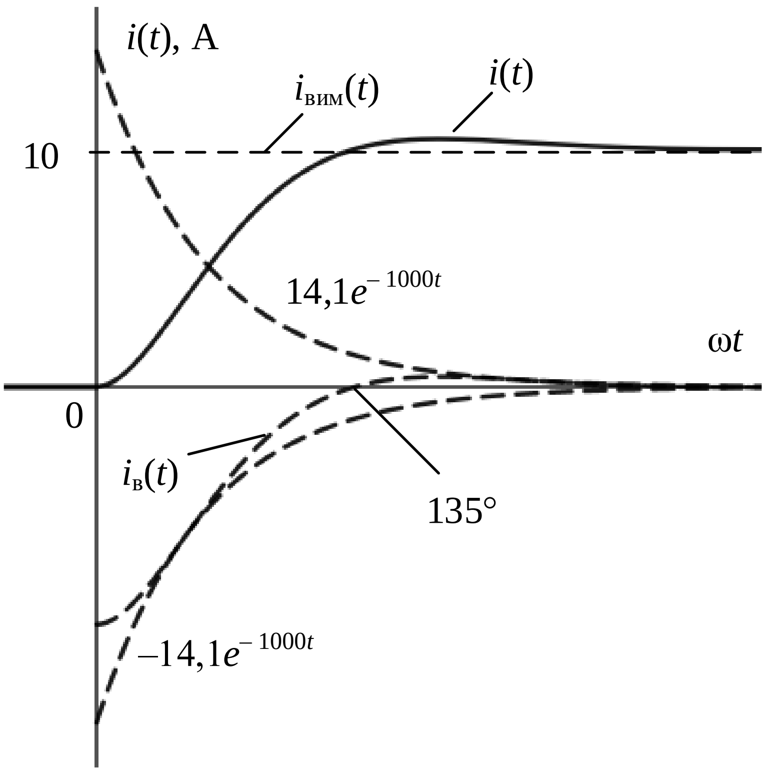


Рисунок 4.21

Приклад 3

Дано:

E = 100 В; R = 100 Ом, L = 0,1 Гн, C = 10 мкФ.

Визначити закон зміни напруги на конденсаторі в перехідному процесі.

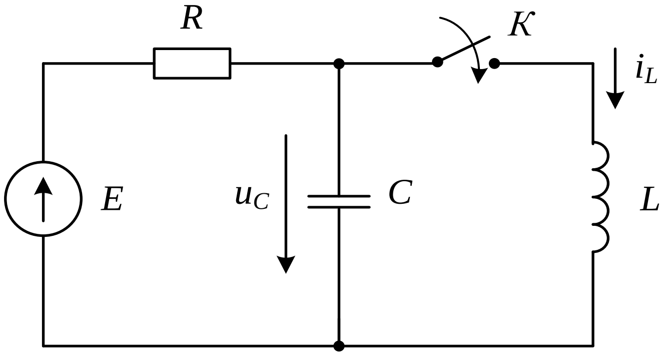


Рисунок 4.22

Розв'язання

Визначаємо початкові умови:

$$i_L(0–) = 0;\ u_C(0–) = E = 100\ \text{В}.$$

Операторна схема:

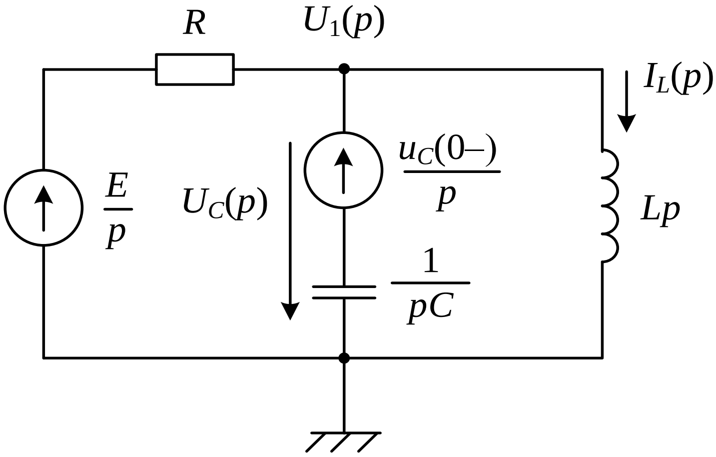


Рисунок 4.23

За методом вузлових потенціалів визначимо зображення напруги на конденсаторі:

$$U_C(p) = U_1(p) = \frac{\frac{E}{pR} + \frac{EpC}{p}}{\frac{1}{R} + pC + \frac{1}{Lp}} = \frac{\frac{E + EpRC}{pR}}{\frac{LCRp^2 + Lp + R}{LRp}} = \frac{EL(1 + pRC)}{LCRp^2 + Lp + R} =$$

$$= \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Для визначення оригіналу струму використаємо теорему розкладання.

$F_1(p) = EL(1 + pRC); F_2(p) = LCRp^2 + Lp + R; F_2'^{(p)} = 2pLCR + L.$

Визначимо корені рівняння $F_2(p) = 0;\ LCRp^2 + Lp + R = 0.$

$$p_{1,2} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - 4LCR^2}}{2LCR} = \frac{-0{,}1 \pm \sqrt{0{,}01 - 4 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-5} \cdot 10^4}}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-5} \cdot 10^2} =$$

$$= \frac{-0{,}1 \pm \sqrt{0{,}01 - 0{,}04}}{2 \cdot 10^{-4}} = 5000(-0{,}1 \pm j0{,}173)\ \left[\frac{1}{c}\right].$$

Корені рівняння комплексно-спряжені. У цьому випадку для отримання оригіналу доцільно скористатися такою версією теореми розкладання:

$$u_C(t) = 2\left[\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t}\right]_{\mathrm{Re}} = 2\left[j\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t}\right]_{\mathrm{Jm}},$$

де значки Re, Jm означають дійсну та уявну частину комплексних чисел;

$F_1(p_1)$ – значення поліному чисельника для $p = p_1$.

$F_2'(p_1)$ – значення похідної поліному знаменника для $p = p_1$.

$$F_1(p_1) = 100 \cdot 0{,}1[1 + 0{,}01(-500 + j866)] = 10(0{,}5 + j0{,}866) =$$

$$= 5 + j8{,}66 = 10e^{j60°},$$

$$F_2'(p_1) = 2 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-5} \cdot 10^2(-500 + j866) + 0{,}1 =$$

$$= -2 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^2 + j2 \cdot 10^{-4} \cdot 8{,}66 \cdot 10^2 + 0{,}1 =$$

$$= -0{,}1 + j0{,}173 + 0{,}1 = j0{,}173 = 0{,}173e^{j90°}.$$

$$u_C(t) = 2\left[\frac{10e^{j60°}}{0{,}173e^{j90°}} e^{-500t} \cdot e^{j866t}\right]_{\mathrm{Re}} = 57{,}8e^{-500t} \cdot 2\cos(866t + 30°) =$$

$$= 115{,}6e^{-500t}\cos(866t + 30°) = 115{,}6e^{-500t}\sin(866t + 120°)\ \text{В}.$$

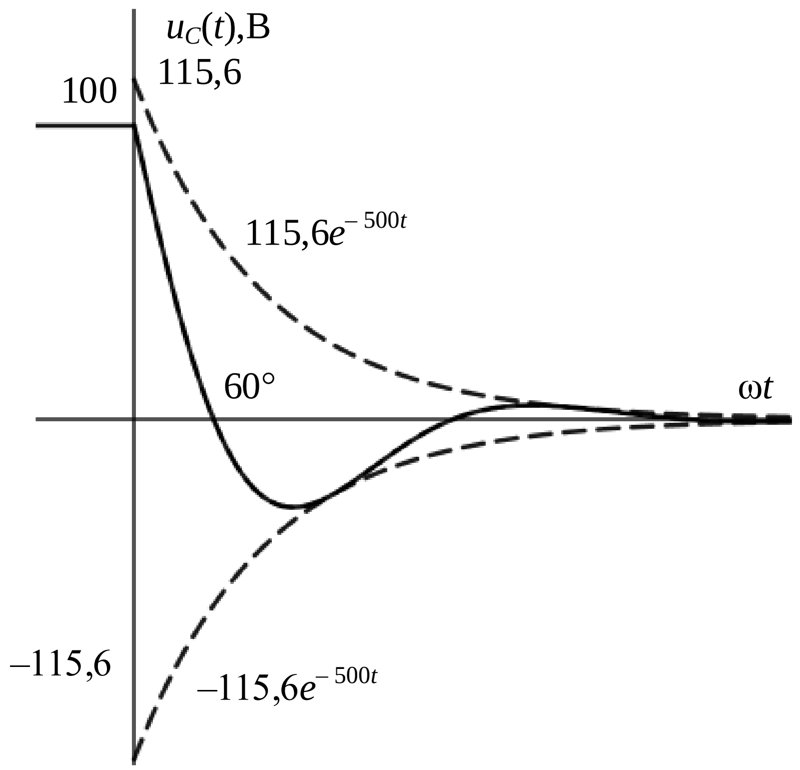


Рисунок 4.24

З графіку видно, що синусоїда згасає і вписується між двох експонент, які починаються в точках ±115,6 В.

В сталому режимі після комутації напруга на конденсаторі відсутня $u_{Cвим} = 0$, конденсатор закорочений котушкою. Перехідний процес має коливальний характер, оскільки корені характеристичного рівняння є комплексно-спряженими. До комутації та в момент комутації напруга на конденсаторі дорівнює ЕРС $u_C(0) = E = 100$ В, а після закінчення перехідного процесу $u_C(\infty) = u_{Cвим} = 0$. Такі результати можна отримати після підстановки у вираз $u_C(t)$ значення часу $t = 0$, $t \to \infty$.

Визначимо струм в котушці у перехідному процесі. За законом Ома в операторній формі отримаємо:

$$I_L(p) = \frac{U_C(p)}{Lp} = \frac{EL(1+pRC)}{(LCRp^2+Lp+R)Lp} = \frac{E(1+pRC)}{(LCRp^2+Lp+R)p} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

$$F_1(p) = E(1+pRC);\ F_2(p) = (LCRp^2+Lp+R)p.$$

Поліном знаменника прирівнюємо до нуля і знаходимо його корені:

$$F_2(p) = 0;\ (LCRp^2+Lp+R)p = 0.$$

$$p_{1,2} = 5000(-0{,}1 \pm j0{,}173) = 10^3 e^{\pm j120^\circ}\ \left[\frac{1}{c}\right], p_3 = 0.$$

Для комплексно спряжених коренів використовуємо такий варіант теореми розкладання:

$$i_L(t) = 2\left[j\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}e^{p_1 t}\right]_{Jm} + \frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)}e^{p_3 t}.$$

Знаменник запишемо таким чином:

$$F_2(p) = LCRp^3 + Lp^2 + Rp,$$

Його похідна дорівнює $F_2'(p) = 3LCRp^2 + 2Lp + R$.

Обчислимо значення $F_1(p)$ та $F_2'(p)$ для коренів p_1 та p_3:

$$F_1(p_1) = 100\big(1 + 100 \cdot 10^{-5} \cdot 5000(-0{,}1 + j0{,}173)\big) =$$

$$= 50 + j86{,}6 = 100e^{j60^\circ};$$

$$F_1(p_3) = 100\,;$$

$$F_2'(p_1) = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-5} \cdot 100 \cdot (-500 + j866)^2 + 2 \cdot 0{,}1 \cdot 10^3 e^{j120^\circ} + 100 =$$

$$= -150 - j86{,}6 = 173{,}4e^{j210^\circ};$$

$$F_2'(p_3) = 100.$$

Оригінал струму за теоремою розкладання:

$$i_L(t) = 2\left[j\frac{100e^{j60°}}{173{,}4e^{j210°}}e^{-500t}\cdot e^{j866t}\right]_{\text{Jm}} + \frac{100}{100} =$$

$$= \left[1{,}156\frac{e^{j60°}e^{j90°}}{e^{j210°}}e^{-500t}\cdot e^{j866t}\right]_{\text{Jm}} + 1 =$$

$$= \left[1{,}156\cdot e^{-j60°}\cdot e^{-500t}\cdot e^{j866t}\right]_{\text{Jm}} + 1 =$$

$$= 1{,}156\cdot e^{-500t}\sin(866t - 60°) + 1\ \text{А}.$$

Графік струму наведений на рис. 4.25.

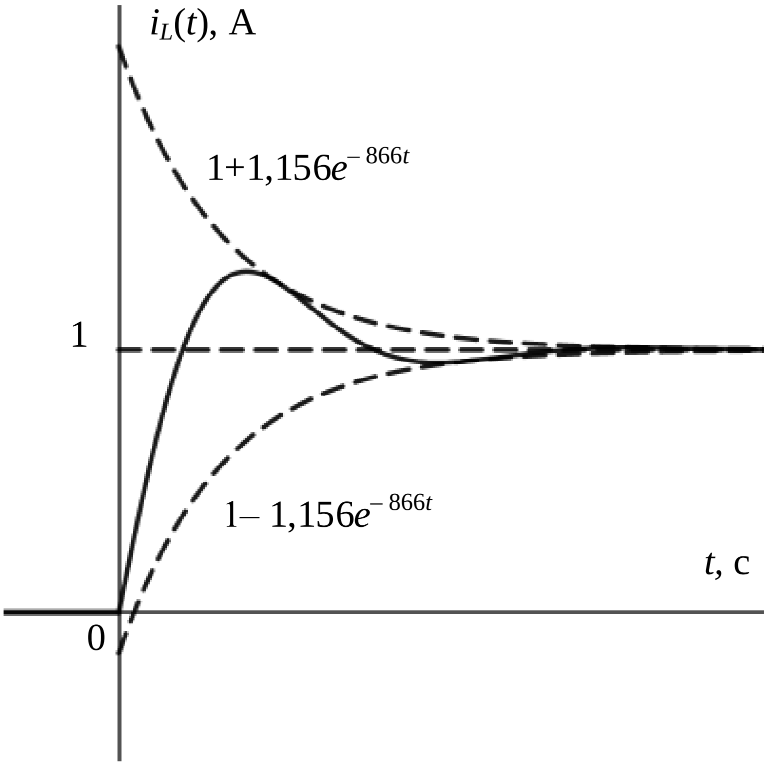


Рисунок 4.25

Приклад 4

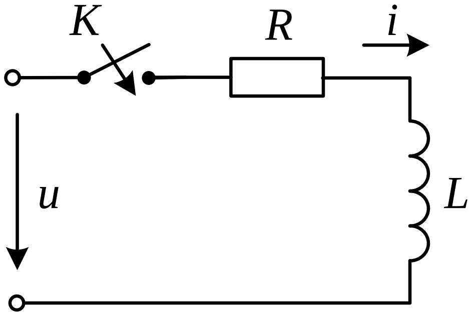


Рисунок 4.26

Дано:

$u = U_m\sin(\omega t + \psi_u)$; R; L.

Визначити закон зміни струму в колі в перехідному процесі.

Розглянемо схему після комутації.

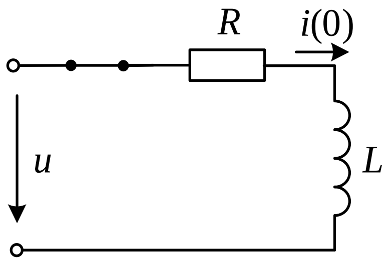


Рисунок 4.27

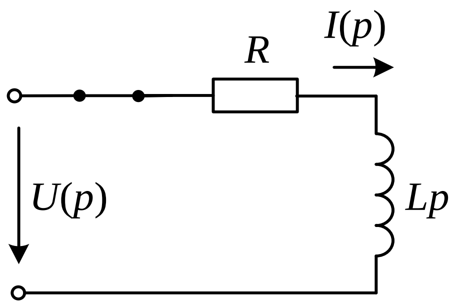


Рисунок 4.28

Оскільки до комутації струму в колі не було, то його не буде і в момент замикання ключа згідно з першим законом комутації. $i(0) = i(0–) = 0$, тобто в колі нульові початкові умови. Тому операторна схема заміщення не містить додаткових ЕРС і має такий вигляд, як показано на рис. 4.28.

Операторне зображення струму за законом Ома в операторній формі:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U(p)}{Lp + R},$$

$Z(p)$– операторний опір кол

$$U(p) = U_m \frac{\omega \cos \psi_u + p \sin \psi_u}{(p^2 + \omega^2)}$$ – операторне зображення напруги.

Таким чином:

$$I(p) = \frac{U_m(\omega \cos \psi_u + p \sin \psi_u)}{(p^2 + \omega^2)(Lp + R)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)},$$

де $F_1(p) = U_m(\omega \cos \psi_u + p \sin \psi_u),\ F_2(p) = (p^2 + \omega^2)(Lp + R)$.

Операторне зображення струму є раціональним дробом:

$$I(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)},$$

і оригінал струму $i(t)$ будемо визначати за теоремою розкладання:

$$i(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t},$$

де p_k – корені рівняння $F_2(p)$, тобто

$$(p^2 + \omega^2)(Lp + R) = p^3 L + \omega^2 pL + p^2 R + \omega^2 R = 0,$$

$$F_2'(p_k) = \left. \frac{dF_2(p)}{dp} \right|_{p\, =\, p_k}$$ – похідна знаменника для конкретних значень коренів.

У загальному вигляді ця похідна має вид:

$$F_2'(p) = 2p(Lp + R) + (p^2 + \omega^2)L.$$

Визначимо корені рівняння $(p^2 + \omega^2)(Lp + R) = 0$.

$$p^2 + \omega^2 = 0, \qquad Lp + R = 0.$$

$$p_1 = j\omega, \quad p_2 = -j\omega, \quad p_3 = -\frac{R}{L}.$$

Визначимо значення похідної знаменника для різних значень коренів:

$$F_2'(p_1) = 2j\omega(j\omega L + R) + (-\omega^2 + \omega^2)L = 2j\omega(j\omega L + R);$$

$$F_2'(p_2) = -2j\omega(-j\omega L + R) + (-\omega^2 + \omega^2)L = -2j\omega(-j\omega L + R);$$

$$F_2'(p_3) = -2\frac{R}{L}\left(-\frac{R}{L}L + R\right) + \left(\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2\right)L = \left(\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2\right)L;$$

Не будемо обчислювати окремо значення $F_1(p_1)$, $F_1(p_2)$ і $F_1(p_3)$, а одразу запишемо:

$$i(t) = \frac{U_m(j\omega \sin\psi_u + \omega\cos\psi_u)}{2j\omega(j\omega L + R)}e^{j\omega t} + \frac{U_m(-j\omega\sin\psi_u + \omega\cos\psi_u)}{-2j\omega(j\omega L + R)}e^{-j\omega t} +$$

$$+\frac{U_m\left(-\frac{R}{L}\sin\psi_u + \omega\cos\psi_u\right)}{\left(\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2\right)L}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Врахуємо в першому і другому доданках теореми розкладання наступне:

– згідно з формулою Ейлера

$$\cos\psi_u + j\sin\psi_u = e^{j\psi_u};$$

$$\cos\psi_u - j\sin\psi_u = e^{-j\psi_u};$$

– $R + j\omega L = Ze^{j\varphi}$; $R - j\omega L = Ze^{-j\varphi}$,

де $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$– повний опір кола, $\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{\omega L}{R}$ – зсув фаз між струмом і напругою в сталому режимі.

В третьому доданку з множником $e^{-\frac{R}{L}t}$ чисельник і знаменник множимо на індуктивність L, розкриємо дужки і врахуємо, що

$R^2 + (\omega L)^2 = Z^2$ – квадрат опору кола в усталеному режимі,

$\frac{U_m}{Z} = I_m$ – амплітуда вимушеної складової струму в колі.

Таким чином, отримаємо:

$$i(t) = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{2jZe^{j\varphi}}e^{j\omega t} + \frac{U_m e^{-j\psi_u}}{-2jZe^{-j\varphi}}e^{-j\omega t} + \frac{U_m(\omega L\cos\psi_u - R\sin\psi_u)}{R^2 + (\omega L)^2}e^{-\frac{R}{L}t} =$$

$$= \frac{I_m}{2j} e^{j(\omega t+\psi_u+\varphi)} - \frac{I_m}{2j} e^{-j(\omega t+\psi_u-\varphi)} + I_m \left(\frac{\omega L}{Z} \cos\psi_u \; - \frac{R}{Z} \sin\psi_u \right) e^{-\frac{R}{L}t} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \dfrac{\omega L}{Z} = \sin\varphi \\ \dfrac{R}{Z} = \cos\varphi \end{matrix} \right| =$$

$$= I_m \left[\frac{e^{j(\omega t+\psi_u+\varphi)} - e^{-j(\omega t+\psi_u-\varphi)}}{2j} \right] + I_m (\sin\varphi \cos\psi_u \; - \cos\varphi \; \sin\psi_u) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Якщо урахувати, що

$$\frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} = \sin\alpha\,; \; \frac{R}{L} = \tau; \; \psi_i = \; \psi_u - \varphi;$$

$$\sin\alpha \cos\beta \; - \cos\alpha \; \sin\beta = \sin(\alpha - \beta),$$

то остаточно маємо:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) - I_m \sin\psi_i \, e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Оскільки викладки маємо досить громіздкі, то за гармонійних ЕРС або напруги живлення доцільно оперувати миттєвою комплексною ЕРС або напругою (комплексною гармонікою), операторне зображення якої має вигляд:

$$\underline{U}_m(p) = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{p - j\omega}.$$

В цьому випадку комплексний оригінал за теоремою розкладання:

$$\underline{f}(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\underline{F_1}(p_k)}{\underline{F_2'}(p_k)} e^{p_k t}.$$

Знайдемо закон зміни струму в тому ж колі *RL* за підключення джерела синусоїдальної напруги. Операторна схема заміщення буде такою:

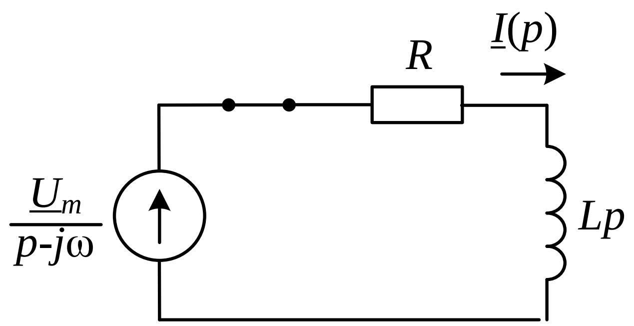


Рисунок 4.29

Згідно із законом Ома:

$$\underline{I}(p) = \frac{\underline{U_m}}{(p - j\omega)Z(p)} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{(p - j\omega)\ (Lp + R)} = \frac{\underline{F_1}(p)}{\underline{F_2}(p)};$$

$$\underline{F_1}(p) = U_m e^{j\psi_u};\ \ \underline{F_2}(p) = (p - j\omega)\ (Lp + R).$$

Корені рівняння $\underline{F_2}(p) = 0,\ (p - j\omega)(Lp + R) = 0.$

Звідки маємо:

$$p_1 = j\omega, \quad p_2 = -\frac{R}{L}.$$

Похідна знаменника:

$$F_2'(p) = \frac{dF_2(p)}{dp} = 2pL + R - j\omega L.$$

За конкретних значень коренів:

$$\underline{F_2'}(p_1) = \ R + j\omega L = Ze^{j\varphi};$$

$$\underline{F_2'}(p_2) = -R - j\omega L = -Ze^{j\varphi},$$

де

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}.$$

В цьому випадку $\underline{F_1}(p)$ не залежить від величини кореня p_k, тому

$$\underline{F_1}(p_1) = \underline{F_1}(p_2) = U_m e^{j\psi_u}.$$

Таким чином, згідно з теоремою розкладання в комплексній формі, маємо:

$$\underline{i}(t) = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{Ze^{j\varphi}}e^{j\omega\mathrm{t}} - \frac{U_m e^{j\psi_u}}{Ze^{j\varphi}}e^{-\frac{R}{L}\mathrm{t}} = \left|\frac{U_m}{Z} = I_m\right| =$$

$$= I_m e^{j(\omega\mathrm{t} + \psi_u - \varphi)} - I_m e^{j(\psi_u - \varphi)}e^{-\frac{R}{L}\mathrm{t}} =$$

$$= I_m\left(e^{j(\omega\mathrm{t} + \psi_u - \varphi)} - e^{j(\psi_u - \varphi)}e^{-\frac{R}{L}t}\right) =$$

$$= I_m\Big(\cos(\omega t + \psi_u - \varphi) + j\sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - \cos(\psi_u - \varphi)\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$- \sin(\psi_u - \varphi)\, e^{-\frac{R}{L}\mathrm{t}}\Big).$$

Уявна частина цього комплексу і є шуканим миттєвим струмом:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - I_m \sin(\psi_u - \varphi)\, e^{-\frac{R}{L}\mathrm{t}} =$$

$$= \left|\begin{matrix}\psi_i = \ \psi_u - \varphi \\ \dfrac{R}{L} = \tau\end{matrix}\right| = I_m \sin(\omega t + \psi_i) - I_m \sin(\psi_i)\, e^{-\mathrm{t}/\tau}.$$

Цей розрахунок є лаконічнішим і простішим за попередній.

Приклад 5

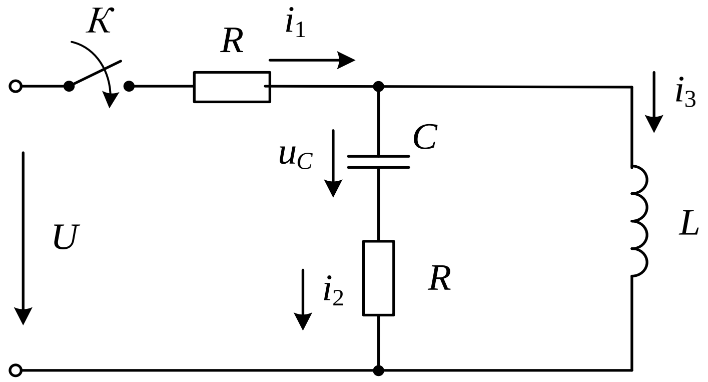


Рисунок 4.30

Дано:
U = 120 В;
R = 2,6 кОм;
L = 0,784 Гн;
C = 10 мкФ.

Визначити закон зміни струму $i_1(t)$ в перехідному процесі.

Початкові умови:

$i_3(0+) = i_3(0–) = 0$; $u_C(0+) = u_C(0–) = 0$.

$$i_1(0+) = \frac{U}{R+R} = \frac{120}{2600+2600} = 0{,}023 \text{ А}.$$

Операторна схема заміщення:

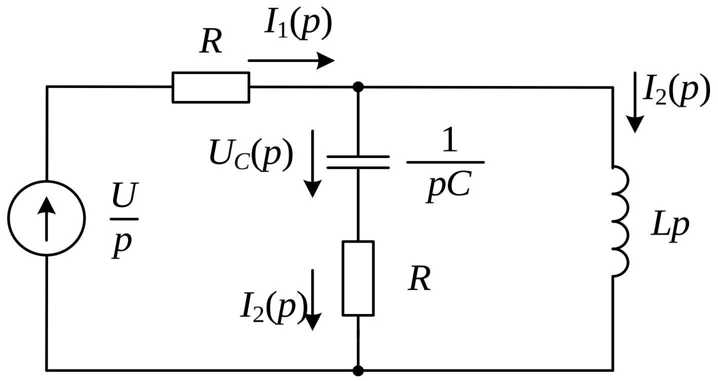


Рисунок 4.31

Зображення першого струму за законом Ома:

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{Z(p)},$$

$$I_1(p) = \frac{\frac{U}{p}}{R + \frac{pL\left(R + \frac{1}{pC}\right)}{R + \frac{1}{pC} + pL}}, =$$

$$= \frac{\frac{U}{p}}{R + \frac{pL(RpC+1)}{RpC + 1 + p^2LC}} = \frac{\frac{U}{p}(p^2LC + RpC + 1)}{p^2LCR + pR^2C + R + p^2LCR + pL} =$$

$$= \frac{U\left(p^2L + Rp + \frac{1}{C}\right)}{p\left(2p^2LR + p\left(R^2 + \frac{L}{C}\right) + \frac{R}{C}\right)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Для отримання оригіналу струму застосуємо теорему накладання.

$$F_1(p) = U\left(p^2L + Rp + \frac{1}{C}\right);$$

$$F_2(p) = p\left(2p^2LR + p\left(R^2 + \frac{L}{C}\right) + \frac{R}{C}\right) = 2p^3LR + p^2\left(R^2 + \frac{L}{C}\right) + p\frac{R}{C}.$$

Знайдемо корені рівняння:

$$F_2(p) = p\left(2p^2LR + p\left(R^2 + \frac{L}{C}\right) + \frac{R}{C}\right) = 0.$$

$$2p^2LR + p\left(R^2 + \frac{L}{C}\right) + \frac{R}{C} = 0.$$

$$p_{1,2} = \frac{-\left(R^2 + \frac{L}{C}\right) \pm \sqrt{\left(R^2 + \frac{L}{C}\right)^2 - 8RL\frac{R}{C}}}{4LR}.$$

$$p_1 = -38.92\ c^{-1};\ p_2 = -1638.47\ c^{-1};\ p_3 = 0\ c^{-1}.$$

Для отриманих значень коренів p_k знайдемо $F_1(p_k)$:

$$F_1(p_1) = -530{,}76;\ F_1(p_2) = -2{,}44 \cdot 10^8;\ F_1(p_3) = 1{,}2 \cdot 10^7.$$

Похідна від знаменника:

$$F_2'(p) = 6pRL + 2p\left(R^2 + \frac{L}{C}\right) + \frac{R}{C}.$$

Для конкретних значень коренів p_k знайдемо $F_2'(p_k)$:

$F_2'(p_1) = -2{,}53 \cdot 10^8$; $F_2'(p_2) = 1{,}068 \cdot 10^{10}$; $F_2'(p_3) = 2{,}6 \cdot 10^8$.

Отже, за теоремою розкладання:

$$i_1(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}e^{p_1t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)}e^{p_2t} + \frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)}e^{p_3t} =$$
$$= 2{,}09 \cdot 10^{-6}e^{-38.92t} - 0{,}023e^{-1638.47t} + 0{,}046\ \text{А}.$$

Виконаємо перевірку:

а) для $t = 0$ $i_1(0) = 0{,}023$ А;

б) для $t \to \infty$ $i_{1\text{вим}} = 0{,}046$ А.

Графік часової залежності наведений на рис. 4.32

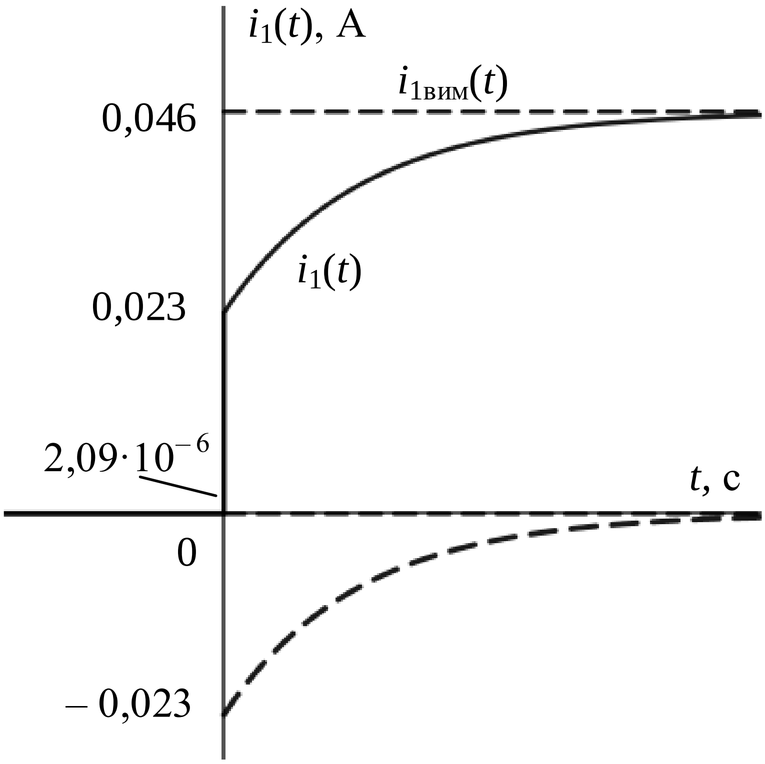


Рисунок 4.32

Приклад 6

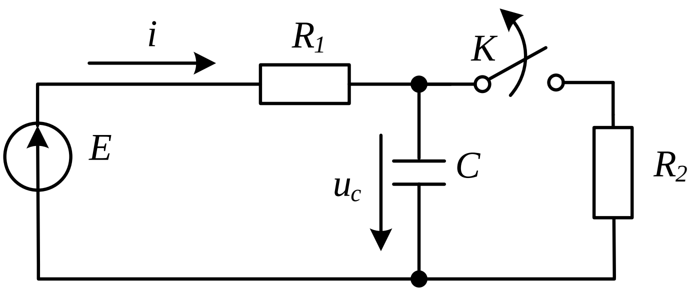


Рисунок 4.33

Дано:
E = 100 В;
R_1 = 5 Ом;
R_2 = 15 Ом;
C = 20 мкФ.

Знайти закон зміни струму і напруги на конденсаторі при розмиканні ключа K.

Розв'язання

Розглянемо схему до комутації $t < 0$ (ключ K замкнутий).

Напруга конденсаторі

$$U_C(0-) = \frac{E}{R_1 + R_2} \cdot R_2 = 75 \text{ В},$$

тобто початкові умови ненульові.

Складемо операторну схему (рис. 4.34) для кола після комутації (ключ K розімкнений).

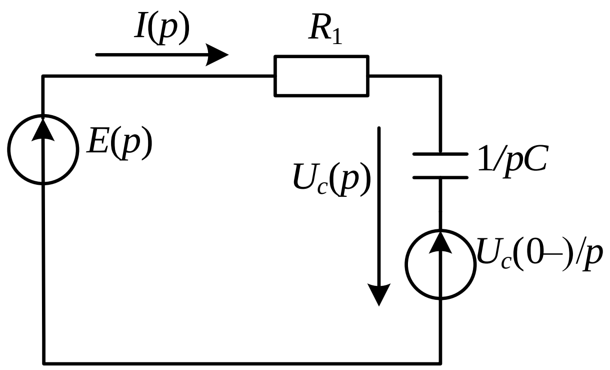


Рисунок 4.34

Послідовно з конденсатором вводимо додаткову ЕРС $\frac{U_C(0)}{p}$, яка враховує ненульові початкові умови.

Визначимо зображення струму за законом Ома в операторній формі:

$$I(p)=\frac{E(p)-\dfrac{U_C(0)}{p}}{R_1+\dfrac{1}{pC}}=\frac{\dfrac{E}{p}-\dfrac{ER_2}{p(R_1+R_2)}}{pR_1C+1}\cdot pC=\frac{ER_1C}{(R_1+R_2)(pR_1C+1)}=$$

$$=\frac{ER_1C}{(R_1+R_2)R_1C}\cdot\frac{1}{p+\dfrac{1}{R_1C}}=\frac{E}{R_1+R_2}\cdot\frac{1}{p+\dfrac{1}{R_1C}}.$$

Для визначення оригіналу струму скористаємося табличним методом (табл.4.1). Струм

$$i(t)=\frac{E}{R_1+R_2}e^{-\frac{t}{R_1C}}.$$

Використавши чисельні значення, отримаємо:

$$i(t)=\frac{100}{5+15}e^{-\frac{t}{5\cdot 20\cdot 10^{-6}}}=5e^{-10^4t}\text{А}.$$

Визначимо напругу на конденсаторі:

$$U_C(t)=E-iR_1=E-\frac{E}{R_1+R_2}R_1e^{-\frac{t}{R_1C}}=100-\frac{100}{5+15}\cdot 5e^{-\frac{t}{5\cdot 20\cdot 10^{-6}}}=$$

$$=(100-25e^{-10^4t})\ \text{В}.$$

Виконаємо перевірку:

за t = 0 $u_C(0)=100-25=75$В; $i(0)=5$ А;

за $t\to\infty$ $u_C(\infty)=E=100$В; $i(\infty)=0$ А,

що відповідає початковим і сталим значенням напруги і струму через конденсатор.

Приклад 7

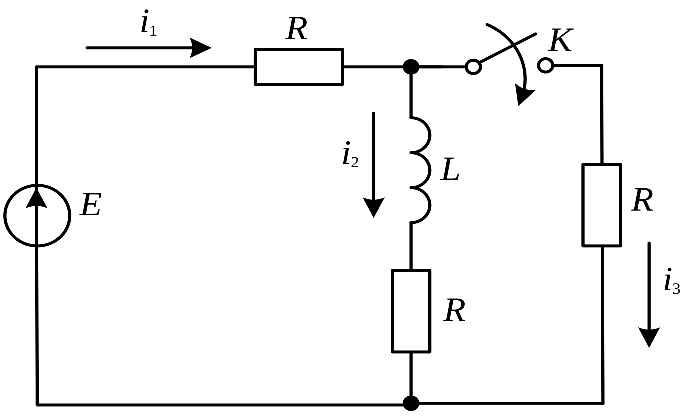


Рисунок 4.35

Дано: E = 300 В; R = 10 Ом; L = 0,15 Гн.

Знайти закон зміни струму в котушці $i_2(t)$.

Розв'язання

Розглянемо схему до комутації $t < 0$ (ключ K розімкнений).

Струм в котушці за законом Ома:

$$i_1(0-) = i_2(0-) = \frac{E}{2R} = \frac{300}{20} = 15 \text{ А}.$$

Складемо операторну схему (рис. 4.32) для стану кола після комутації (ключ K замкнутий.) Послідовно з котушкою індуктивності вводимо додаткову ЕРС Li_2 (0), яка враховує ненульові початкові умови.

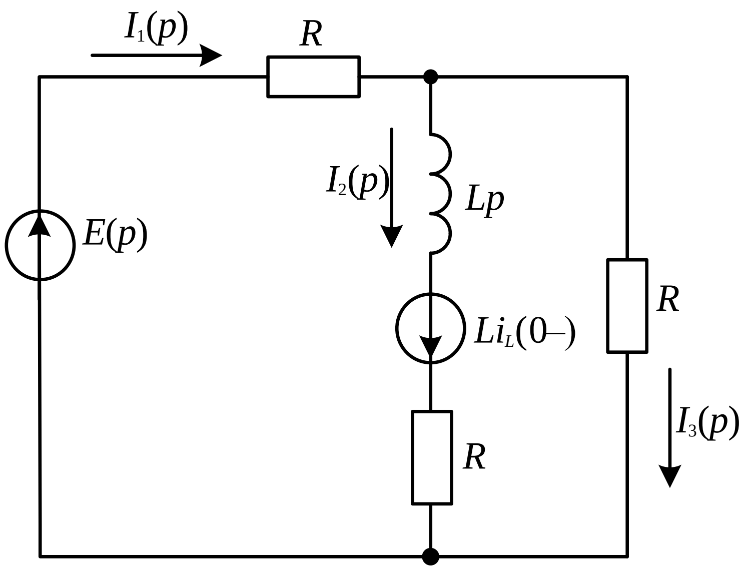


Рисунок 4.36

Знайдемо зображення струму в котушці індуктивності за допомогою методу накладання:

$$I_2(p) = I_2'(p) + I_2''(p),$$

де $I_2'(p)$ та $I_2''(p)$ – струми, викликані відповідно джерелами $E(p)$ і $Li_2(0)$.

$$I_2'(p) = \frac{E(p)}{R + \frac{(R+Lp)\cdot R}{R+Lp+R}} \cdot \frac{R}{R+Lp+R} = \frac{E \cdot R}{p[R(2R+Lp)+(R+Lp)R]} =$$

$$= \frac{E}{p(2R+Lp+R+Lp)} = \frac{E}{p(2Lp+3R)};$$

$$I_2''(p) = \frac{Li_2(0)}{R+Lp+\frac{R\cdot R}{2R}} = \frac{Li_2(0)}{R+Lp+\frac{3}{2}R} = \frac{2Li_2(0)}{2Lp+3R}.$$

Таким чином,

$$I_2(p) = \frac{E}{p(2Lp+3R)} + \frac{2Li_2(0)}{2Lp+3R} = \frac{E}{3R} \cdot \frac{\frac{3R}{2L}}{p\left(p+\frac{3R}{2L}\right)} + \frac{2Li_2(0)}{2L} \cdot \frac{1}{p+\frac{3R}{2L}}.$$

Для визначення оригіналу струму $i_2(t)$ скористаємося табличним методом. Згідно (табл.4.1)

$$i_2(t) = \frac{E}{3R}\left(1 - e^{-\frac{3R}{2L}t}\right) + i_2(0)e^{-\frac{3R}{2L}t} = \frac{E}{3R} - \frac{E}{3R}e^{-\frac{3R}{2L}t} + \frac{E}{2R}e^{-\frac{3R}{2L}t} =$$

$$= \frac{E}{3R} + \frac{E}{6R}e^{-\frac{3R}{2L}t}.$$

Використавши числові значення, отримаємо:

$$i_2(t) = \frac{300}{30} + \frac{300}{60}e^{-\frac{3\cdot 10}{2\cdot 0{,}15}t} = 10 + 5e^{-100t}.$$

Зробимо перевірку: за $t = 0$ $i_2(0) = 15$ А;

за $t = \infty$ $i_2(\infty) = 10$ А,

що відповідає початковому і сталому значенням струму.

Приклад 8

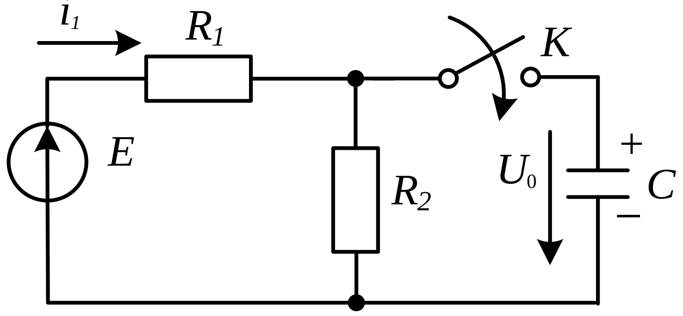


Рисунок 4.37

Дано: $E = 10$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $C = 1$ мкФ, $U_0 = 10$ В.

Знайти закон зміни струму нерозгалуженого кола при замиканні ключа K, що підключає конденсатор

C, попередньо заряджений до напруги U_0.

Розв'язання

До комутації (ключ *K* розімкнений) напруга на конденсаторі

$$U_C(0-) = U_0 = 10 \text{ В},$$

тобто початкові умови – нульові.

Складемо операторну схему (рис. 4.38) для стану кола після комутації (ключ *K* розімкнений).

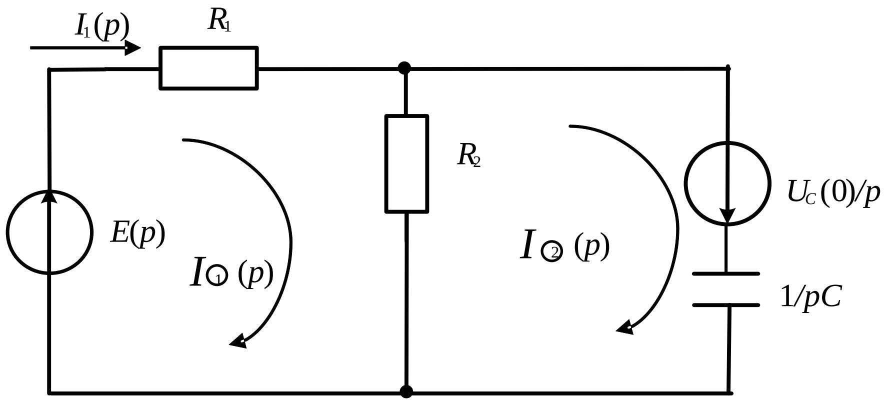


Рисунок 4.38

Визначимо зображення струму $I_1(p)$ за допомогою методу контурних струмів.

Запишемо в операторній формі рівняння згідно з методом контурних струмів,

$$z_{11}(p)I_{①}(p) + z_{12}(p)I_{②}(p) = E_{①}(p);$$
$$z_{21}(p)I_{①}(p) + z_{22}(p)I_{②}(p) = E_{②}(p),$$

де власні операторні опори контурів:

$$z_{11}(p) = R_1 + R_2 = 20;$$

$$z_{22}(p) = R_2 + \frac{1}{pC} = 10 + \frac{10^6}{p};$$

загальний операторний опір контурів:

$$z_{12}(p) = z_{21}(p) = -R_2 = -10.$$

Операторні контурні ЕРС:

$$E_{①}(p) = E(p) = \frac{E}{p} = \frac{10}{p};$$

$$E_{②}(p) = -\frac{U_C(0)}{p} = -\frac{U_0}{p} = -\frac{10}{p}.$$

Операторний визначник:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} z_{11}(p) & z_{12}(p) \\ z_{21}(p) & z_{22}(p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 10 + \dfrac{10^6}{p} \end{vmatrix} = 100 + \frac{2 \cdot 10^7}{p}.$$

Операторний контурний струм 1-го контуру:

$$I_1(p) = I_{①}(p) = \frac{10^5}{p(p + 2 \cdot 10^5)} = \frac{1}{2}\frac{2 \cdot 10^5}{p(p + 2 \cdot 10^5)}.$$

Оригінал струму $i_1(t)$ визначимо табличним методом.

$i_1(t) = \frac{10^5}{2 \cdot 10^5}\left(1 - e^{-2 \cdot 10^5 t}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2 \cdot 10^5 t}\right) = 0{,}5 - 0{,}5e^{-2 \cdot 10^5 t}$ А.

Напруга на конденсаторі

$$u_C(t) = E - i_1 R_1 = 10 - \left(0{,}5 - 0{,}5e^{-2 \cdot 10^5 t}\right) \cdot 10 = 10 - 5 + 5e^{-2 \cdot 10^5 t} =$$
$$= 5 + 5e^{-2 \cdot 10^5 t}.$$

Перевірка:

за $t = 0$ $u_C(0) = 10$ В;

за $t = \infty$ $u_C(\infty) = 5$ В,

з розрахунку схеми за $t = \infty$:

$$u_C(\infty) = i_2 R_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} R_2 = \frac{10}{20} \cdot 10 = 5\text{В}.$$

що підтверджує правильність результату.

Приклад 9

Дано: E=10 В; L = 0,01 Гн; R_1 =2 кОм; R_2=3 кОм; C = 10 мкФ.

Знайти закон зміни струму в конденсаторі.

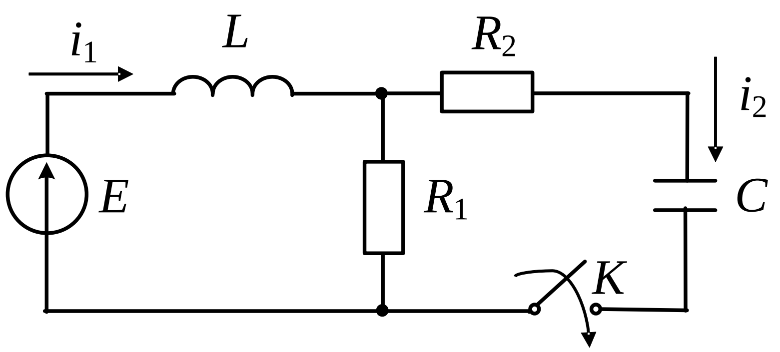


Рисунок 4.39

Розв'язання

Розглянемо схему до комутації ($t < 0$, ключ K розімкнений).

Струм через котушку індуктивності

$$i_L(0-)=\frac{E}{R_1}=\frac{10}{2\cdot 10^3}=5\cdot 10^{-3}\text{A},$$

напруга на конденсаторі $U_C(0-)=0$, тобто маємо нульові початкові умови для струму, що проходить через котушку, і нульові – для напруги на конденсаторі. Складемо операторну схему (рис. 4.40) (ключ K замкнутий).

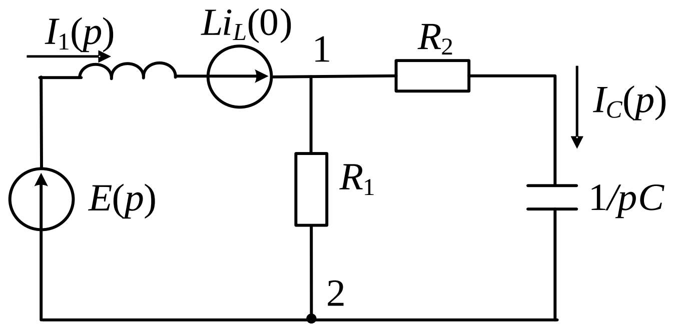


Рисунок 4.40

$$\varphi_2(p)=0.$$

Знайдемо зображення шуканого струму $I_C(p)$ за методом вузлових потенціалів:

$$I_C(p)=\varphi_1(p)\frac{1}{R_2+\dfrac{1}{pC}}=\frac{\varphi_1(p)pC}{pCR_2+1}=\frac{\dfrac{\dfrac{E}{p}+\dfrac{EL}{R_1}}{pL}\dfrac{pC}{pCR_2+1}}{\dfrac{1}{pL}+\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{pC}{pCR_2+1}}=$$

$$=\frac{EC(pL+R_1)}{p^2LC(R_1+R_2)+p(L+CR_1R_2)+R_1}=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Визначимо оригінал струму $i_C(t)$ за допомогою теореми розкладання.

$F_1(p)=10^{-6}p+0{,}2;$

$LC(R_1+R_2)=10^{-2}\cdot 10^{-5}\cdot 5\cdot 10^3 =\cdot 5\cdot 10^{-4};$

$L+CR_1R_2=0{,}01+10^{-5}\cdot 2\cdot 10^3\cdot 3\cdot 10^3=60{,}01;$

$F_2(p)=5\cdot 10^{-4}p^2+60{,}01p+2000;$

$F_2'(p)=10\cdot 10^{-4}p+60{,}01.$

Обчислимо корені рівняння $F_2(p)=0$:

$$5\cdot 10^{-4}p^2+60{,}01p+2000=0;$$

$$p_{1,2}=\frac{-60{,}01\pm\sqrt{(60{,}01)^2-20\cdot 10^{-4}\cdot 2\cdot 10^3}}{10\cdot 10^{-4}}=$$

$$=10^3\left(-60{,}01\pm\sqrt{3601{,}20-4}\right);$$

$p_1 = -1000\,\frac{1}{\text{c}},\ p_2 = -119988\,\frac{1}{\text{c}}.$

Обчислимо значення :

$F_1(p_1) = 10 \cdot 10^{-5}(-10 + 2000) = 0{,}199;$

$F_1(p_2) = 10 \cdot 10^{-5}(-1199 + 2000) = 0{,}08;$

$F_2'(p_1) = 0{,}001 \cdot (-1000) + 60{,}01 = 59{,}01;$

$F_2'(p_2) = 0{,}001 \cdot (-119988) + 60{,}01 = -59{,}978;$

$\dfrac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} = \dfrac{0{,}199}{59{,}01} = 0{,}00337;$

$\dfrac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} = \dfrac{0{,}08}{-59{,}978} = -0{,}001333;$

Для знаходження оригіналу використаємо отримані значення в формулі розкладання:

$$i_C(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)}e^{p_2 t} = 0{,}00337e^{-1000t} - 0{,}001333e^{-119988t}\ \text{А}.$$

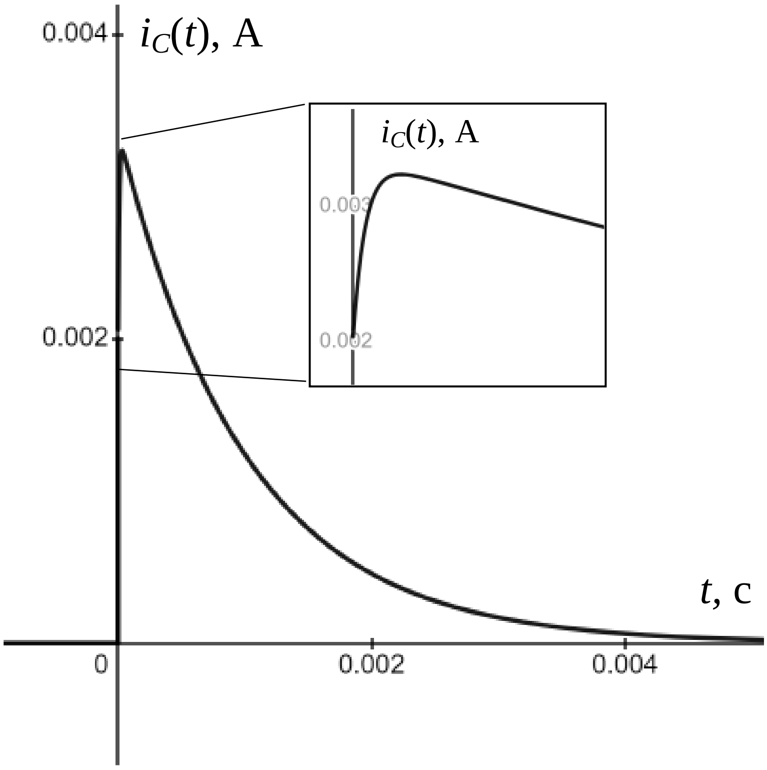


Рисунок 4.41

Перевірка:

за $t = 0$ $i_C(0) = 0{,}00337 - 0{,}001333 = 0{,}002$,

відповідно до схеми струм $i_L(0) = 10/2000 = 0{,}005$ А,

$$i_C(0) = i_L(0)\frac{R_2}{R_2+R_3} = 0{,}005\frac{2\cdot 10^3}{2\cdot 10^3 + 3\cdot 10^3} = 0{,}002\ A,$$

що задовольняє початковій умові.

Приклад 10

Дано: E = 125 В; L = 0,01 Гн; R_1 = 50 Ом; R_2= 200 Ом; R_3 = 250 Ом; С = 5 мкФ.

Знайти закон зміни струму в нерозгалуженій частині кола.

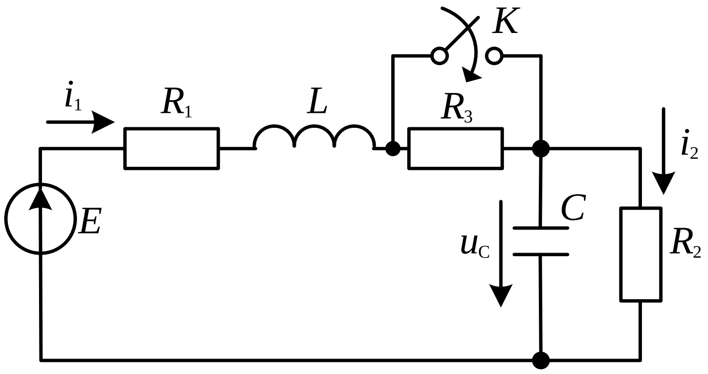


Рисунок 4.42

Розв'язання

Розглянемо схему до комутації t < 0 (ключ K розімкнений).

Струм через індуктивність:

$$i_1(0-) = i_2(0-) = \frac{E}{R_1+R_2+R_3} = \frac{125}{50+200+250} = 0{,}25\text{ А}.$$

напруга на конденсаторі $u_C(0-) = i_2(0-)R_2 = 0{,}25\cdot 200 = 50$ В, тобто маємо ненульові початкові умови.

Складемо операторну схему (рис. 4.43) (ключ K замкнутий).

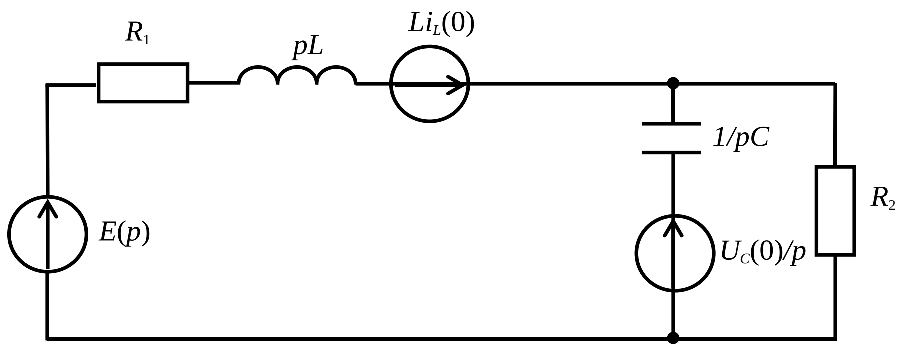


Рисунок 4.43

Визначимо зображення струму $I_1(p)$ за допомогою методу накладання:

$$I_1(p) = I_1'(p) + I_1''(p),$$

де I_1'(p) та I_1''(p) – струми, викликані відповідно ЕРС $E(p) + Li_L(0)$ та $\frac{U_C(0)}{p}$;

$$I_1'(p) = \frac{\dfrac{E}{p} + Li_L(0)}{R_1 + pL + \dfrac{R_2 \cdot \dfrac{1}{pC}}{R_2 + \dfrac{1}{pC}}} = \frac{(E + pLi_L(0))\left(R_2 + \dfrac{1}{pC}\right)}{p\left(R_1R_2 + R_1\dfrac{1}{pC} + pLR_2 + \dfrac{pL}{pC} + R_2\dfrac{1}{pC}\right)} =$$

$$= \frac{(E + pLi_L(0))(pCR_2 + 1)}{p(pCR_1R_2 + R_1 + p^2CLR_2 + pL + R_2)} = \frac{EpCR_2 + Ep^2LCR_2i_L(0) + pLi_L(0)}{p(p^2CLR_2 + p(CR_1R_2 + L) + R_1 + R_2)};$$

$$I_1''(p) = \frac{-\dfrac{U_C(0)}{p}}{\dfrac{1}{pC} + \dfrac{(R_1 + pL)R_2}{R_1 + pL + R_2}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + pL + R_2} =$$

$$= \frac{-U_C(0)R_2}{p\left[\dfrac{1}{pC}(R_1 + pL + R_2) + (R_1 + pL)R_2\right]} =$$

$$= \frac{-U_C(0)R_2C}{p^2LCR_2 + p(L + CR_1R_2) + R_1 + R_2}.$$

Таким чином,

$$I_1(p) = \frac{p^2LCR_2i_L(0) + p[ECR_2 + Li_L(0) - U_C(0) \cdot R_2C] + E}{p[p^2LCR_2 + p(L + CR_1R_2) + R_1 + R_2]} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Числові значення:

$F_1(p) = p^2 \cdot 0{,}01 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 0{,}25 +$

$+p(125 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 200 + 0{,}01 \cdot 0{,}25 - 50 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 200) + 125 =$

$= 2{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot p^2 + 0{,}0775p + 125;$

$F_2(p) = p[p^2 \cdot 0{,}01 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 200 + p(0{,}01 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot 200) +$

$+50 + 200] = p(10^{-5}p^2 + 0{,}06p + 250).$

Знайдемо похідну від $F_2(p)$:

$F'_2(p) = 3 \cdot 10^{-5}p^2 + 2p \cdot 0{,}06 + 250 = 3 \cdot 10^{-5}p^2 + 0{,}12 + 250.$

Визначимо оригінал струму $i_1(t)$ за допомогою теореми розкладання.

Для цього знайдемо корені рівняння $F_2(p) = 0$:

$p(10^{-5}p^2 + 0{,}06p + 250) = 0,$

$p_1 = 0,$

$$p_{2,3} = \frac{-0{,}06 \pm \sqrt{0{,}06^2 - 4 \cdot 10^{-5} \cdot 250}}{2 \cdot 10^{-5}} = \frac{-0{,}06 \pm j0{,}08}{2 \cdot 10^{-5}} = -3000 \pm j4000\frac{1}{\text{c}}.$$

$p_2 = -3000 + j4000$ 1/c, $p_3 = -3000 - j4000$ 1/c.

Визначимо значення функції $F_1(p)$ і похідної $F'_2(p)$ для $p = p_1$, $p = p_2$ та $p = p_3$.

$$F_1(p_1) = 125;$$

$$F_1(p_2) = 2{,}5 \cdot 10^{-6}(-3000 + j4000)^2 + 0{,}0775(-3000 + j4000) + 125 =$$
$$= -125 + j250;$$

$$F_1(p_3) = 2{,}5 \cdot 10^{-6}(-3000 - j4000)^2 + 0{,}0775(-3000 - j4000) + 125 =$$
$$= -125 - j250;$$

$$F'_2(p_1) = 250;$$

$$F'_2(p_2) = 3 \cdot 10^{-5}(-3000 + j4000)^2 + 0{,}12(-3000 + j4000) + 250 =$$
$$= 3 \cdot 10^{-5}(9 \cdot 10^6 + j2 \cdot 12 \cdot 10^6) - 360 + j480 + 250 = -3320 + j240;$$

$$F'_2(p_3) = 3 \cdot 10^{-5}(-3000 - j4000)^2 + 0{,}12(-3000 - j4000) + 250 =$$
$$= -320 - j240.$$

Для знаходження оригіналу скористаємося формулами розкладання:

$$i_1(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t}\right],$$

оскільки корінь p_1 – дійсний, а корені p_2 та p_3 – комплексно-спряжені.

Отримаємо:

$$i(t) = \frac{125}{250} + 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{(-125 + j250)}{-320 + j240} e^{(-3000 + j4000)t}\right\} =$$
$$= 0{,}5 + 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{281 e^{j116°30'}}{400 e^{j216°50'}} e^{-3000t} \cdot e^{j4000t}\right\} =$$
$$= 0{,}5 + \mathrm{Re}\left\{1{,}4 e^{j(4000t - 100°20')}\right\} e^{-3000t} =$$
$$= 0{,}5 + 1{,}4 e^{-3000t} \cos(4000t - 100°20') =$$
$$= 0{,}5 + 1{,}4 e^{-3000t} \sin(4000t - 10°20')\ \text{А}.$$

Перевірка: за $t = 0$ струм $i_1(0) = 0{,}5 + 1{,}4\sin(-10°20') = 0{,}25$ А, що задовольняє початковій умові.

Приклад 11

Дано: $u(t) = 200 \sin \omega t$ В,
$R = 10$ Ом, $L = 0{,}1$ Гн,
$\omega = 100$ с$^{-1}$.
Визначити струм $i(t)$.

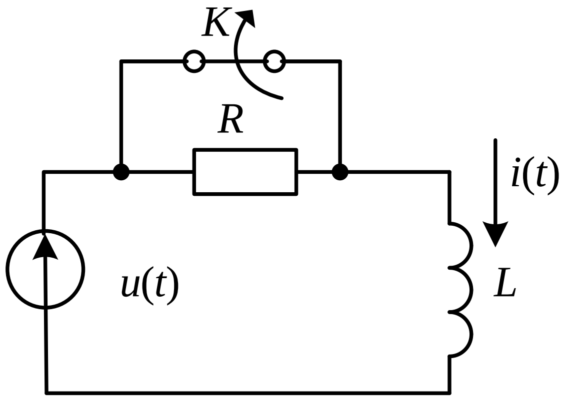


Рисунок 4.44

Розв'язання

Виконаємо аналіз схеми до комутації. Комплексним методом розрахуємо струм $i(t)$;

$$I_{\mathrm{m}} = \frac{U_{\mathrm{m}}}{Z},$$

де U_m = 200 В; $\underline{Z} = j\omega L = j10$ Ом.

Таким чином, $I_{\mathrm{m}} = \frac{200}{j10} = -j20$ А.

Переходимо до оригіналу: $i(t) = 20\sin(\omega t - 90^\circ)$ А.

Початкове значення струму: $i(0–) = 20\sin(–90^\circ) = –20$ А.

Аналіз схеми після комутації виконаємо трьома способами.

Спосіб 1

Загальний підхід.

Складемо операторну схему (рис. 4.50), де, згідно з табл.4.1,

$$U(p) = U_{\mathrm{m}} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{2 \cdot 10^4}{p^2 + 10^4}.$$

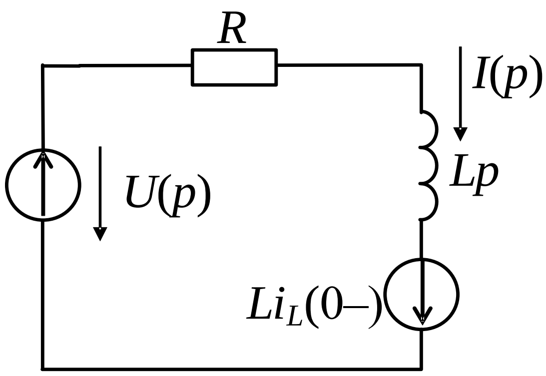


Рисунок 4.45

З операторної схеми знаходимо струм:

$$I(p) = \frac{U(p) + L \cdot i(0-)}{R + pL} = \frac{-2p^2}{(p^2 + 10^4)(10 + 0{,}1p)};$$

$$I(p) = \frac{-2p^2}{0{,}1p^3 + 10p^2 + 10^3 p + 10^5}.$$

Оригінал струму визначимо за теоремою розкладання.

У даному випадку

$F_1(p) = -2p^2$;

$F_2(p) = 0{,}1p^3 + 10p^2 + 10^3 p + 10^5$.

Обчислимо корені рівняння $F_2(p) = 0$:

$p_1 = j100$; $p_2 = -j100$; $p_3 = -100$.

Визначимо:

$F_1(p_1) = 2 \cdot 10^4$; $F_1(p_2) = 2 \cdot 10^4$; $F_1(p_3) = -2 \cdot 10^4$.

Оскільки $F_2'(p) = 0{,}3p^2 + 20p + 10^3$, то

$F_2'(p_1) = -2 \cdot 10^3 + j2 \cdot 10^3$;

$F_2'(p_2) = -2 \cdot 10^3 - j2 \cdot 10^3$;

$F_2'(p_3) = 2 \cdot 10^3$.

Для знаходження оригіналу підставимо отримані значення для дійсного кореня p_3 і для комплексних сполучених коренів p_1 і p_2 – в формулу розкладання.

Отримаємо:

$$i(t) = 2\,Re\left(\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t}\right) + \frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)} e^{p_3 t} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{2 \cdot 10^4 \cdot e^{j100t}}{-2 \cdot 10^3 + j2 \cdot 10^2}\right) - \frac{2 \cdot 10^4 \cdot e^{-100t}}{2 \cdot 10^3} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{10e^{j100t}}{-1+j}\right) - 10e^{-100t} = 10\sqrt{2}\sin(\,100t - 45°) - 10e^{-100t}.$$

Спосіб 2

Представимо функцію $u(t)$ в комплексній гармонійній формі:

$$\underline{u}(t) = 200e^{j100t}.$$

Складемо операторну схему (рис. 4.46), де, згідно табл.4.1, комплексна операторна напруга

$$\underline{U}(p) = \frac{200}{p - j100},$$

$$i(0\,-) = -20\text{ A},\;\; ji(0-) = -j20.$$

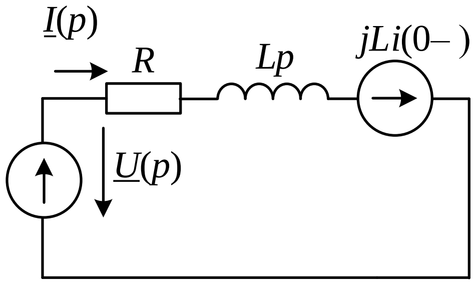


Рисунок 4.46

Із операторної схеми знаходимо комплексний операторний струм:

$$\underline{I}(p)=\frac{\underline{U}(p)+jLi(0-)}{R+pL}=\frac{\dfrac{200}{p-j100}+(-j20)\cdot 0{,}1}{10+0{,}1p}=\frac{-2jp}{(p-j100)(10+0{,}1p)}=$$

$$=\frac{-2jp}{0{,}1p^2+10p-10jp-j1000}.$$

Оригінал комплексного струму визначаємо за теоремою розкладання.

У даному випадку:

$F_1(p)=-2jp;$

$F_2(p)=0{,}1p^2+10p-10jp-j1000;$

$F_2'(p)=0{,}2p–j10+10.$

Обчислимо корені рівняння $F_2(p)=0$:

$p_1=j100;$

$p_2=-100.$

Визначимо:

$F_1(p_1)=200$; $F_1(p_2)=j200$; $F_2'(p_1)=10+j10$; $F_2'(p_2)=-10-j10.$

Підставимо отримані значення в формулу розкладання. Отримаємо комплексний струм.

$$i(t)=\frac{200}{10+j10}e^{j100t}-\frac{j200}{10+j10}e^{-100t}=$$

$$=\frac{200}{10\sqrt{2}e^{j45}}e^{j100t}-\frac{j200}{10\sqrt{2}e^{j45}}e^{-100t}=10\sqrt{2}e^{j(100t-45°)}-10\sqrt{2}e^{j45}e^{-100t}.$$

Знаходимо струм:

$$i(t)=\mathrm{Jm}[i(t)]=10\sqrt{2}\sin(100t-45°)-10e^{-100t}\text{ A}.$$

Спосіб 3

Отримаємо розв’язання у вигляді суми вимушеної і вільної складових:

$$i(t)=i_{\text{вим}}(t)+i_{\text{в}}(t).$$

Вимушену складову $i_{\text{вим}}(t)$ знаходимо комплексним, а вільну складову $i_{\text{в}}(t)$ – операторним методом.

Комплексна амплітуда струму:

$$\underline{I}_{\text{m}_{\text{вим}}} = \frac{U_m}{R + j\omega L};$$

$$\underline{I}_{\text{m}_{\text{вим}}} = \frac{200}{10 + j10} = \frac{200}{10\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 10\sqrt{2}e^{-j45^\circ}.$$

Оригінал струму

$$i_{\text{вим}}(t) = 10\sqrt{2}\sin(100t - 45^\circ).$$

Далі визначаємо $i_{\text{в}}(0+)$:

$$i_{\text{в}}(0+) = i(0+) - i_{\text{вим}}(0+),$$

де $i_{\text{вим}}(0+) = 10\sqrt{2}\sin(100t - 45^\circ)|t = 0 = -10.$

Таким чином, $i_{\text{в}}(0+) = -20 - (-10) = -10.$

Складемо операторну схему (рис. 4.47), в яку включимо тільки операторні ЕРС, що враховують початкові умови комутації, які визначаються через вільні складові струму індуктивності і напруги на ємності.

З операторної схеми знаходимо:

$$I_{\text{в}}(p) = \frac{L \cdot i_{\text{в}}(0+)}{R + pL} = \frac{10 \cdot 0{,}1}{10 + 0{,}1p};\ I_{\text{в}}(p) = \frac{10}{100 + p}.$$

Табличним методом згідно табл.4.1 визначимо $i_{\text{в}}(t) = -10e^{-100t}$.

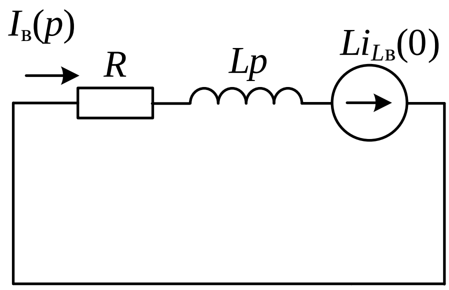


Рисунок 4.47

Таким чином, струм $i(t) = 10\sqrt{2}\,sin(100t - 45^\circ) - 10e^{-100t}$ А.

Перевірка: при t = 0+ струм i (0 +) = –20 А, що відповідає початковому значенню.

Приклад 12

На вхідні затискачі кола, схема якого зображена на рис. 4.48 а, поданий імпульс, зображений на рис. 4.48 б. Необхідно визначити реакцію кола на такий вплив у випадку зняття напруги з котушки та у випадку зняття напруги з резистора.

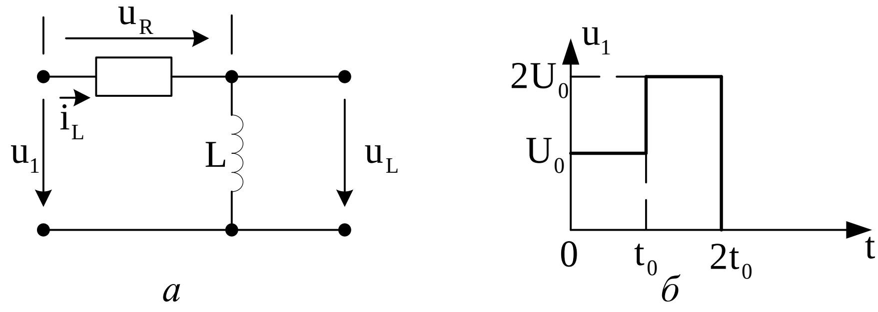


Рисунок 4.48

1. Розкладемо залежність $u_1(t)$, на елементарні впливи (рис. 4.49). На І ділянці $0 \le t \le t_0$: $u_1(t) = U_0 \cdot 1(t)$.

На ІІ ділянці $t_0 \le t \le 2t_0$: $u_1(t) = U_0 \cdot 1(t) + U_0 \cdot 1(t - t_0)$.

На ІІІ ділянці

$2t_0 \le t \le \infty$: $u_1(t) = U_0 \cdot 1(t) + U_0 \cdot 1(t - t_0) - 2U_0 \cdot 1(t - 2t_0)$.

Виконаємо перевірку:

$$u_1(3t_0) = U_0 + U_0 - 2U_0 = 0.$$

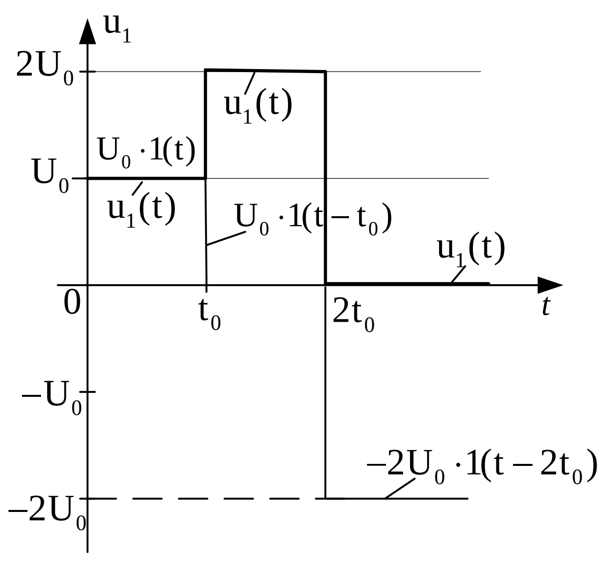


Рисунок 4.49

2. Зображення вхідного сигналу отримаємо з використанням табличних відповідностей (табл. 4.1):

$$0 \le t \le t_0 : U_1(p) = \frac{U_0}{p};$$

$$t_0 \le t \le 2t_0 : U_1(p) = \frac{U_0}{p} + \frac{U_0 e^{-pt_0}}{p};$$

$$2t_0 \le t \le \infty : U_1(p) = \frac{U_0}{p} + \frac{U_0 e^{-pt_0}}{p} - \frac{2U_0 e^{-2pt_0}}{p}.$$

3. Операторна схема кола наведена на рис. 4.50.

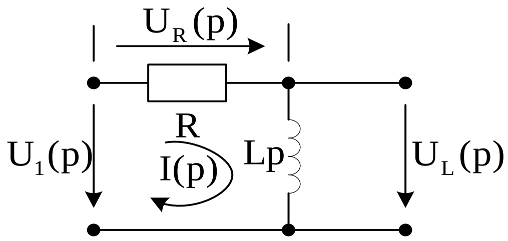


Рисунок 4.50

Операторний опір кола:

$$Z(p) = R + Lp.$$

Зображення струму:

$$I(p) = \frac{U_1(p)}{R + Lp}.$$

Зображення напруг на елементах кола:

$$U_R(p) = RI(p) = \frac{RU_1(p)}{R + Lp};$$

$$U_L(p) = LpI(p) = \frac{LpU_1(p)}{R + Lp}.$$

На окремих ділянках зміни вхідної напруги $u_1(t)$ отримаємо зображення вихідних напруг:

$$0 \le t \le t_0:$$

$$U_R(p) = \frac{RU_0}{p(R + Lp)} = \frac{\frac{R}{L}U_0}{p\left(p + \frac{R}{L}\right)} = U_0 \cdot \frac{\alpha}{p(p + \alpha)},$$

де $\alpha = \frac{R}{L}; \tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{L}{R}; \alpha = \frac{1}{\tau}.$

$$U_L(p) = \frac{LpU_0}{p(R + Lp)} = U_0 \frac{1}{p + \alpha}; \alpha = \frac{R}{L}.$$

$$t_0 \le t \le 2t_0:$$

$$U_R(p) = U_R(p)|_{t\le t_0} + \frac{RU_0 e^{-pt_0}}{p(R+Lp)} = U_R(p)|_{t\le t_0} + U_0 \cdot \frac{\alpha e^{-pt_0}}{p(p+\alpha)};$$

$$U_L(p) = U_L(p)|_{t\le t_0} + \frac{LpU_0 e^{-pt_0}}{p(R+Lp)} = U_L(p)|_{t\le t_0} + U_0 \cdot \frac{e^{-pt_0}}{p+\alpha}.$$

$$2t_0 \le t \le \infty:$$

$$U_R(p) = U_R(p)|_{t\le 2t_0} - \frac{2U_0 e^{-2pt_0} R}{p(R+Lp)} = U_R(p)|_{t\le 2t_0} - 2U_0 \cdot \frac{\alpha e^{-2pt_0}}{p(p+\alpha)}.$$

$$U_L(p) = U_L(p)|_{t\le 2t_0} - \frac{2U_0 e^{-2pt_0} Lp}{p(R+Lp)} = U_L(p)|_{t\le 2t_0} - 2U_0 \cdot \frac{e^{-2pt_0}}{p+\alpha}.$$

4. Виконаємо перехід від зображення до оригіналу використавши табличні відповідності (табл. 4.1).

$$0 \le t \le t_0:$$

$$u_R(t) = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

$$u_L(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

$$t_0 \le t \le 2t_0:$$

$$u_R(t) = u_R(t)|_{t\le t_0} + U_0\left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right) = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) +$$

$$+U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{\frac{t_0}{\tau}}\right) = 2U_0 - U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 + e^{\frac{t_0}{\tau}}\right).$$

$$u_L(t) = u_L(t)|_{t\le t_0} + U_0 \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{\frac{t_0}{\tau}} = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 + e^{\frac{t_0}{\tau}}\right).$$

$$2t_0 \le t \le \infty:$$

$$u_R(t) = u_R(t)|_{t\le 2t_0} - 2U_0\left(1 - e^{-\frac{t-2t_0}{\tau}}\right) =$$

$$= 2U_0 - U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 + e^{\frac{t_0}{\tau}}\right) - 2U_0 + 2U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{\frac{2t_0}{\tau}} =$$

$$= U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-1 - e^{\frac{t_0}{\tau}} + 2e^{\frac{2t_0}{\tau}}\right).$$

$$u_L(t) = u_L(t)|_{t\le 2t_0} - 2U_0 \cdot e^{-\frac{t-2t_0}{\tau}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 + e^{\frac{t_0}{\tau}} - 2e^{\frac{2t_0}{\tau}}\right).$$

Графіки вихідних напруг:

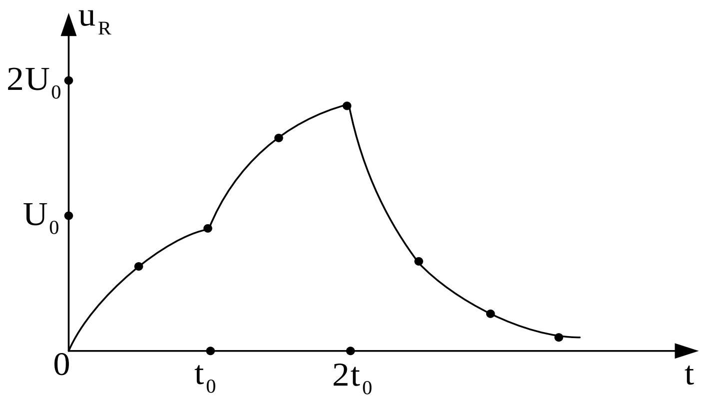


Рисунок 4.51

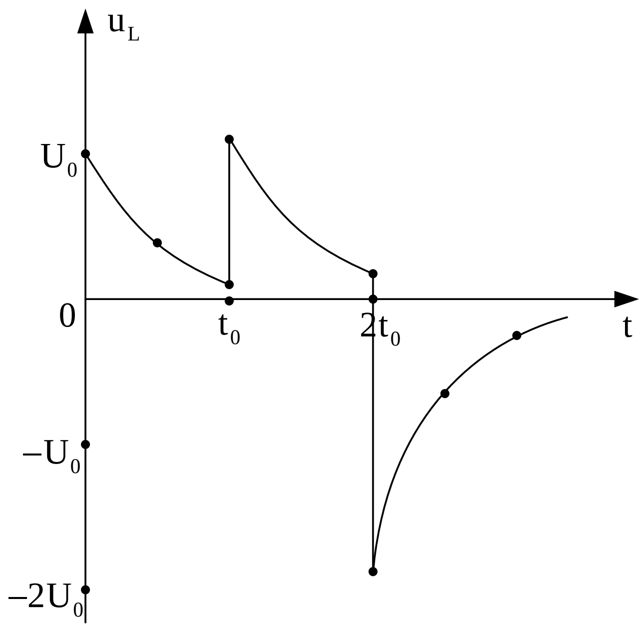


Рисунок 4.52

Приклад 13

На вхідні затискачі кола, схема якого зображена на рис. 4.53 а, поданий імпульс, зображений на рис. 4.53 б. Необхідно визначити реакцію кола на такий вплив у випадку зняття напруги з конденсатора та у випадку зняття напруги з резистора.

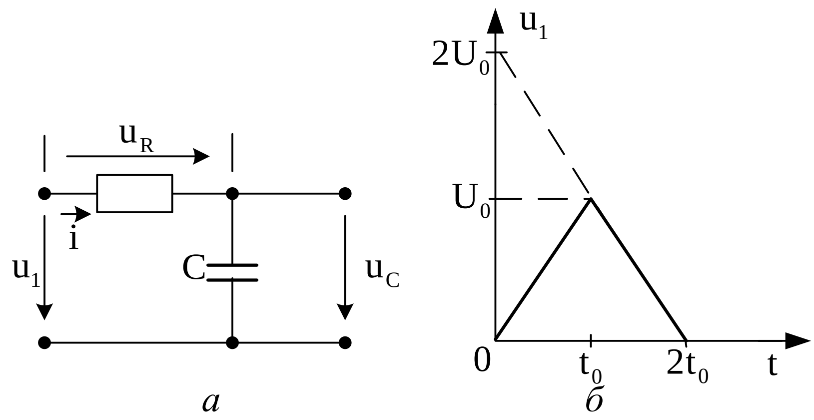


Рисунок 4.53

1. Розкладемо імпульс напруги $u_1(t)$,на елементарні впливи (рис. 4.54).

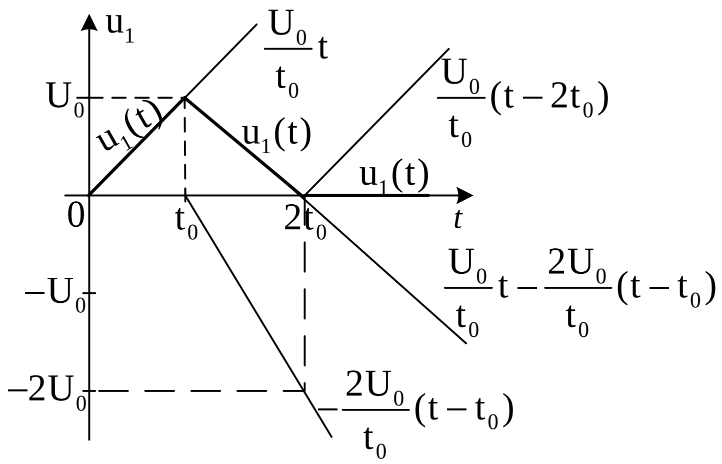


Рисунок 4.54

Напруга на різних проміжках складається з елементарних впливів:

$$0 \le t \le t_0 \colon u_1(t) = \frac{U_0}{t_0} t.$$

$$t_0 \le t \le 2t_0 \colon u_1(t) = \frac{U_0}{t_0} t - \frac{2U_0}{t_0}(t - t_0).$$

$$2t_0 \le t \le \infty \colon u_1(t) = \frac{U_0}{t_0} t - \frac{2U_0}{t_0}(t - t_0) + \frac{U_0}{t_0}(t - 2t_0).$$

Правильність отриманих виразів перевіряється для моменту $3t_0$: $u_1(3t_0) = 3U_0 - 4U_0 + U_0 = 0$.

2. Для визначених проміжків отримаємо зображення вхідної напруги згідно табл. 4.1.

$$0 \le t \le t_0: U_1(p) = \frac{U_0}{t_0 p^2};$$

$$t_0 \le t \le 2t_0: U_1(p) = \frac{U_0}{t_0 p^2} - \frac{2U_0 e^{-pt_0}}{t_0 p^2};$$

$$2t_0 \le t \le \infty: U_1(p) = \frac{U_0}{t_0 p^2} - \frac{2U_0 e^{-pt_0}}{t_0 p^2} + \frac{U_0 e^{-2pt_0}}{t_0 p^2}.$$

Операторна схема кола представлена на рисунку 4.55.

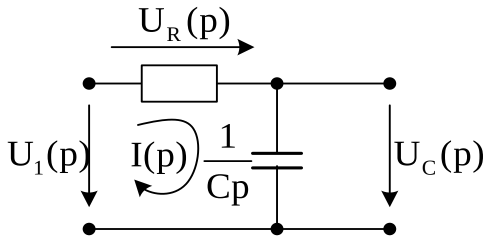


Рисунок 4.55

Опір кола:

$$Z(p) = R + \frac{1}{Cp} = \frac{RCp + 1}{Cp}.$$

Зображення струму:

$$I(p) = \frac{U_1(p)}{Z(p)} = \frac{U_1(p) \cdot Cp}{RCp + 1}.$$

Зображення напруг на елементах кола:

$$U_R(p) = RI(p) = \frac{U_1(p)RCp}{RCp + 1} = \frac{U_1(p) \cdot p}{p + \frac{1}{RC}};$$

$$\frac{1}{RC} = \alpha = \frac{1}{\tau}. \tag{4.21}$$

$$U_c(p) = \frac{1}{Cp} I(p) = \frac{U_1(p)Cp}{Cp(RCp + 1)} = \frac{U_1(p)}{RC(p + \alpha)} = \frac{U_1(p)\alpha}{p + \alpha} \tag{4.22}$$

Застосуємо формули (4.21), (4.22) на всіх ділянках залежності $u_1(t)$.

$$0 \le t \le t_0:$$

$$U_R(p) = \frac{U_0 \cdot p}{t_0 p^2 (p + \alpha)} = \frac{U_0}{\alpha t_0} \cdot \frac{\alpha}{p(p + \alpha)}.$$

$$U_c(p) = \frac{U_0}{t_0 p^2} \cdot \frac{\alpha}{p+\alpha} = \frac{U_0}{t_0\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{p^2(p+\alpha)}.$$

$$t_0 \le t \le 2t_0:$$

$$U_R(p) = U_R(p)|_{t \le t_0} - \frac{2U_0 e^{-pt_0} \cdot p}{t_0 p^2 (p+\alpha)} = U_R(p)|_{t \le t_0} - \frac{2U_0}{t_0\alpha} \cdot \frac{\alpha e^{-pt_0}}{p(p+\alpha)};$$

$$U_c(p) = U_c(p)|_{t \le t_0} - \frac{2U_0 e^{-pt_0} \cdot \alpha}{t_0 p^2 (p+\alpha)} = U_c(p)|_{t \le t_0} - \frac{2U_0}{t_0\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 e^{-pt_0}}{p^2(p+\alpha)};$$

$$2t_0 \le t \le \infty:$$

$$U_R(p) = U_R(p)|_{t \le 2t_0} + \frac{U_0 e^{-2pt_0} \cdot p}{t_0 p^2 (p+\alpha)} = U_R(p)|_{t \le 2t_0} + \frac{U_0}{t_0\alpha} \cdot \frac{\alpha e^{-2pt_0}}{p(p+\alpha)};$$

$$U_c(p) = U_c(p)|_{t \le 2t_0} + \frac{U_0 e^{-2pt_0} \cdot \alpha}{t_0 p^2 (p+\alpha)} = U_c(p)|_{t \le 2t_0} + \frac{U_0}{\alpha t_0} \cdot \frac{e^{-2pt_0}\alpha^2}{p^2(p+\alpha)}.$$

4. Виконаємо перехід від зображення до оригіналу.

$$0 \le t \le t_0:$$

$$u_R(t) = \frac{U_0}{t_0\alpha} \cdot (1 - e^{-\alpha t}) = U_0 \frac{\tau}{t_0}\left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

оскільки $\alpha = \frac{1}{\tau}$.

$$u_c(t) = U_0 \frac{1}{\alpha t_0} \cdot (\alpha t - 1 + e^{-\alpha t}) = \frac{U_0}{t_0}\left(t - \tau + \tau e^{-t/\tau}\right).$$

$$t_0 \le t \le 2t_0:$$

$$u_R(t) = u_R(t)|_{t \le t_0} - \frac{2U_0}{\alpha t_0}\left(1 - e^{-(t-t_0)\alpha}\right) = \frac{U_0\tau}{t_0} \cdot \left(1 - e^{-t/\tau} - 2 + 2e^{t_0/\tau} e^{-t/\tau}\right)$$

$$u_R(t) = \frac{U_0\tau}{t_0} \cdot \left[e^{-t/\tau}\left(2e^{t_0/\tau} - 1\right) - 1\right];$$

$$u_c(t) = u_c(t)|_{t \le t_0} - \frac{2U_0}{\alpha t_0} \cdot \left[\alpha(t - t_0) - 1 + e^{-\alpha(t-t_0)}\right] =$$

$$= \frac{U_0}{t_0} \cdot \left(t - \tau + \tau e^{-t/\tau} - 2t + 2t_0 + 2\tau - 2\tau \cdot e^{-t/\tau} \cdot e^{t_0/\tau}\right) =$$

$$= \frac{U_0}{t_0}\left[2t_0 - t + \tau\left(1 + e^{-t/\tau} - 2e^{-t/\tau} \cdot e^{t_0/\tau}\right)\right].$$

$$2t_0 \le t \le \infty:$$

$$u_R(t) = u_R(t)|_{t \le 2t_0} + \frac{U_0}{t_0\alpha}\left(1 - e^{-\alpha(t-2t_0)}\right) =$$

$$= \frac{U_0}{\alpha t_0} \cdot \left(-1 - e^{-\frac{t}{\tau}} + 2e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{\frac{t_0}{\tau}} + +1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{\frac{2t_0}{\tau}}\right) =$$

$$= \frac{U_0\tau}{t_0} e^{-t/\tau}\left(-1 + 2e^{t_0/\tau} - e^{2t_0/\tau}\right).$$

$$u_c(t) = u_c(t)|_{t \le 2t_0} + \frac{U_0}{\alpha t_0} \cdot \left[\alpha(t - 2t_0) - 1 + e^{-\alpha(t-2t_0)}\right] =$$

$$= \frac{U_0}{t_0} \cdot \left(2t_0 - t + \tau + \tau \cdot e^{-t/\tau} - 2\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{\frac{t_0}{\tau}} + t - 2t_0 - \tau + \tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{\frac{2t_0}{\tau}}\right) =$$

$$= \frac{U_0\tau}{t_0} e^{-t/\tau}\left(1 - 2e^{t_0/\tau} + e^{2t_0/\tau}\right).$$

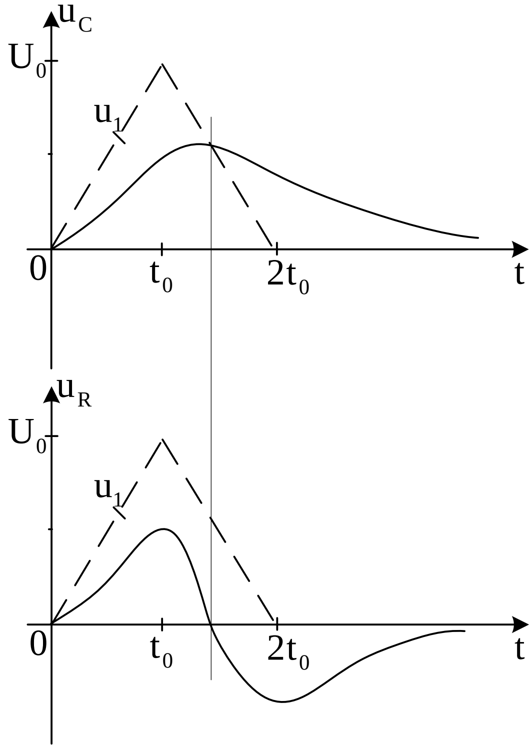


Рисунок 4.56

4.9. Запитання для самоперевірки

Поясніть суть інтегрального перетворення Лапласа і наведіть переваги операторного методу перед класичним.

Сформулюйте і запишіть основні властивості і теореми перетворення Лапласа.

Сформулюйте закон Ома в операторній формі та наведіть приклади його використання.

Сформулюйте і запишіть закони Кірхгофа в операторній формі. Наведіть приклади їх використання.

Опишіть методику складання операторних схем заміщення та наведіть способи знаходження операторних зображень шуканих функцій з їх використанням.

Перелічіть методи розрахунку складних електричних кіл, які можна використовувати в операторному методі для розрахунку перехідних процесів.

Які існують способи переходу від операторного зображення до оригіналів?

Опишіть алгоритм переходу від зображення до оригіналу за допомогою теореми розкладання.

Наведіть порядок (алгоритм) розрахунку перехідних процесів операторним методом.

Дайте визначення операторній передавальній функції (ОПФ) і перелічіть її властивості.

Як пов'язані між собою ОПФ та характеристичне рівняння кола?

Поясніть сутність кореневого методу аналізу. Наведіть приклади його використання.

Поясніть поняття мінімально- і немінімально-фазових кіл. Чим відрізняються фазо-частотні характеристики таких кіл?

5. СПЕКТРАЛЬНИЙ (ЧАСТОТНИЙ) МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

Сутність цього методу [4], [5], [12], [14]-[16] полягає в тому, що сигнал впливу на коло представляється у вигляді сукупності гармонійних впливів, а сигнал відгуку визначається як сума відгуків на кожну гармонійну складову впливу окремо. Гармонійні складові вихідного сигналу знаходяться по відомому спектру вхідного сигналу та частотним характеристикам кола. Таким чином, спектральний метод базується на двох відправних положеннях: спектри сигналів та частотні характеристики електричних кіл. Розглянемо основи цих положень.

5.1. Частотні характеристики електричних кіл

При впливі на вхід лінійного електричного кола гармонійного коливання з комплексною амплітудою $\underline{X}_m$ і частотою ω на виході кола вийде теж гармонійне коливання тієї ж частоти, але з іншою комплексною амплітудою $\underline{Y}_m$. Відношення комплексної амплітуди вихідної величини (реакції) до комплексної амплітуди вхідної величини (впливу) визначає *комплексну передавальну функцію* (КПФ) електричного кола і позначається $K(j\omega)$:

$$K(j\omega)=\frac{\underline{Y}_m}{\underline{X}_m}=\frac{\underline{Y}}{\underline{X}}=\frac{Y}{X}\cdot e^{j(\psi_{\text{вих}}-\psi_{\text{вх}})},\qquad \underline{Y}_m=\underline{X}_m\cdot K(j\omega).$$

При змінюванні частоти КПФ в загальному випадку змінюється, тобто вона є функцією частоти.

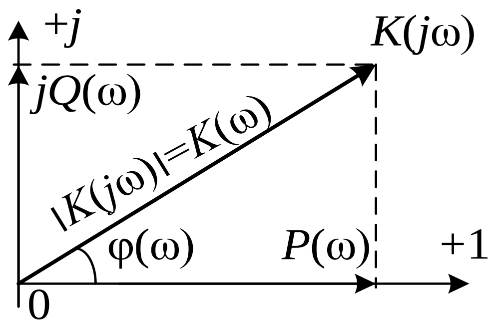


Рисунок 5.1

КПФ при даному значенні ω є вектором в площині комплексного змінного, що має амплітуду $K(j\omega)$ і фазу φ(ω) . Наведемо на рис.5.1 вектор і його дійсну та уявну складові в площині комплексного змінного для деякого значення частоти ω. При зміні частоти ω амплітуда і фаза вектора $K(j\omega)$ будуть змінюватися і кінець вектора буде описувати в площині комплексного змінного криву, що представляє собою амплітудно-фазову характеристику (АФХ). Разом з цим, при зміні частоти будуть змінюватися так само і величини $K(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $P(\omega)$ та $Q(\omega)$, що дає можливість побудувати частотні характеристики, які визначають зміни цих величин зі зміною частоти ω і представляють собою відповідно:

$K(\omega) = |K(j\omega)|$– амплітудно-частотну характеристику (АЧХ),

$\varphi(\omega) = \arg\big(K(j\omega)\big)$ – фазо-частотну характеристику (ФЧХ),

$P(\omega) = \mathrm{Re}\big(K(j\omega)\big)$ – дійсну частотну характеристику (ДЧХ),

$Q(\omega) = \mathrm{Jm}\big(K(j\omega)\big)$ – уявну частотну характеристику (УЧХ).

Співвідношення між цими характеристиками визначається очевидними виразами:

$$K(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)};$$

$$P(\omega) = |K(j\omega)| \cdot \cos\varphi(\omega)\,;$$

$$Q(\omega) = |K(j\omega)| \cdot \sin\varphi(\omega)\,;$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)},$$

які безпосередньо випливають з тригонометричних співвідношень, що характеризують вектор $K(j\omega)$.

Крім цих чотирьох частотних характеристик, у виразах яких частота присутня у явному вигляді, широкого вжитку набула і п’ята частотна характеристика – амплітудно-фазова характеристика (АФХ). В цій характеристиці частота у явному вигляді відсутня, і вона представляє собою залежність:

$$Q(\omega) = f[P(\omega)].$$

Отримаємо вираз КПФ для схеми на рис. 5.2, вхідною величиною є напруга $\underline{U}_1$, а вихідною є напруга $\underline{U}_2$.

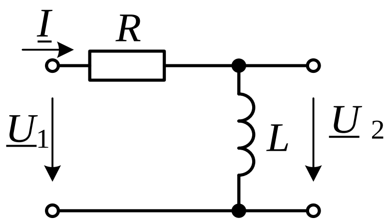


Рисунок 5.2

$$\underline{U}_2 = \underline{I} \cdot j\omega L = \frac{\underline{U}_1}{R + j\omega L} \cdot j\omega L = \underline{U}_1 \cdot \frac{j\omega L}{R + j\omega L}.$$

Отже, вираз для КПФ цієї ланки має вигляд:

$$K(j\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}.$$

Зауважимо, що при зміні частоти ω від 0 до ∞ $K(j\omega)$ змінюється в широких межах: від 0 до 1.

У загальному запису

$$\underline{U}_2 = K(j\omega) \cdot \underline{U}_1,,. \qquad (5.1)$$

де $K(j\omega)$ – це і є *комплексна передавальна функція* електричного кола, скорочено – КПФ.

З (5.1) виходить, що

$$K(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}. \qquad (5.2)$$

Таким чином комплексна передавальна функція – це функція частоти. Вона залежить виключно від вибору вхідних і вихідних величин, схеми та параметрів кола.

Множення комплексної амплітуди (або комплексу діючого значення чи комплексної гармоніки) вхідної величини на КПФ дає комплексну амплітуду вихідної величини, див. (5.1). Згідно зі співвідношенням (5.2) КПФ можна отримати як відношення комплексних амплітуд (або діючих значень) вихідної і вхідної величин. Розмірність КПФ визначається як відношення розмірності вихідної величини до розмірності вхідної величини, див. (5.2). Отже, КПФ може мати розмірність опору, провідності або бути безрозмірною. Останній варіант найбільш розповсюджений, оскільки зазвичай в ланках для обробки сигналів та в системах автоматичного управління вхідні і вихідні величини – це напруги. Далі позначатимемо:

комплекс діючого значення вхідної величини (вхідного сигнала) – $\underline{X}$, вихідної (вихідного сигнала) – $\underline{Y}$.

У загальному вигляді записи (5.1) і (5.2) приймають вигляд:

$$\underline{Y} = K(j\omega) \cdot \underline{X}; \quad (5.3)$$

$$K(j\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}}. \quad (5.4)$$

Зауважимо, що не слід ототожнювати (5.4) з поняттям КПФ, оскільки електричне коло має КПФ і при відсутності вхідної і вихідної величин ($\underline{X}$ =$\underline{Y}$ = 0), коли права частина (5.4) переходить в невизначеність. При фіксованій частоті ω_i КПФ перетворюється в комплексне число $K(j\omega_i)$, яке називають *комплексним коефіцієнтом передачі* (ККП). ККП дозволяє обчислити реакцію на заданий гармонійний вплив.

5.1.1. *Основні методи визначення комплексної передавальної функції (КПФ)*

Існує ряд методів визначення КПФ [5], [12]. Нижче наведені найпоширеніші з них: з використанням математичних виразів вхідної та вихідної величин, з використанням матриць чотириполюсників, з використанням властивостей двополюсників та експериментальний метод.

5.1.1.1. *Визначення КПФ за співвідношенням* $\boldsymbol{K(j\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}}}$

Співвідношення (5.4) $K(j\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}}$ дозволяє визначати КПФ, якщо відомі $\underline{X}$ і $\underline{Y}$ – вхідна і вихідна величини (сигнали). Можна задатися однією з цих величин і за конкретною схемою кола визначити іншу будь-яким методом, відомим з попередніх розділів курсу. Звичайно, при цьому величина, що визначається, буде виражена через ту, якою задалися.

У процесі виконання завдання реактивні опори гілок кола будуть не комплексними числами, а комплексними функціями частоти ($X_L = \omega L$, $X_C = 1/\omega C$). Якщо вхідну величину прийняти рівною одиниці ($\underline{X}$ = 1), то КПФ буде дорівнювати вихідний величині ($K(j\omega) = \underline{Y}$). Звичайно, при цьому $\underline{Y}$ буде функцією частоти, а розмірність КПФ визначатиметься як відношення розмірності $\underline{Y}$ до розмірності $\underline{X}$.

5.1.1.2. *Визначення КПФ за матрицями чотириполюсників*

КПФ можна визначити, розглядаючи коло після вибору пари вхідних і пари вихідних затискачів, як чотириполюсник, за матрицею цього чотириполюсника. Якщо відома матриця

$$\mathrm{A} = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix},$$

то КПФ за напругою

$$K_U(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2}.$$

Змінивши $\underline{I}_2$ на $\frac{U_2}{Z_{2H}}$, де $\underline{Z}_{2\text{Н}}$ – комплексний опір, підключений до вихідних вузлів, і поділивши чисельник і знаменник на $\underline{U}_2$, отримаємо:

$$K_U(j\omega) = \frac{1}{\underline{A}_{11} + \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{Z}_{2\text{Н}}}}. \quad (5.5)$$

На холостому ході, коли $\underline{Z}_{2\text{Н}} \to \infty$,

$$K_{U_0} = \frac{1}{\underline{A}_{11}}. \quad (5.6)$$

Приклад 1

Отримати $K_U(j\omega)$ чотириполюсника, зображеного на рис. 5.3.

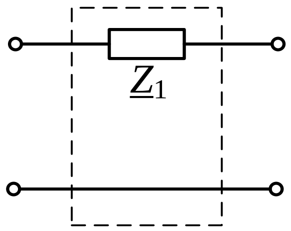


Рисунок 5.3

Розв’язання

Матрицю цього чотириполюсника можна отримати методом порівняння (див. [3], [7]):

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & \underline{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

За навантаження опором $\underline{Z}_{2\text{Н}}$

$$K_U(j\omega) = \frac{1}{\underline{A}_{11} + \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{Z}_{2\text{Н}}}} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_{2\text{Н}}}}. \quad (5.7)$$

За холостого ходу $\underline{Z}_{2\text{Н}} \to\infty$,

$$K_U(j\omega) = \frac{1}{\underline{A}_{11}} = 1. \tag{5.8}$$

Якщо коло (система) представлене у вигляді каскадного (послідовного) з’єднання чотириполюсників (рис. 5.4), то КПФ системи дорівнює добутку КПФ її ланок (чотириполюсників):

$$K(j\omega) = K_1(j\omega) \cdot K_2(j\omega) \cdot \ldots \cdot K_п(j\omega.) \tag{5.9}$$

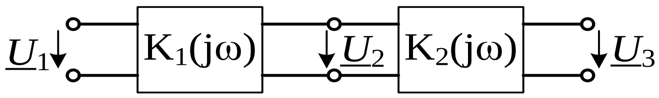


Рисунок 5.4

Доведення співвідношення (5.9), справедливого для будь-якої кількості ланок, достатньо навести для випадку двох ланок (рис. 5.4).

Згідно з рис. 5.4

$$K(j\omega) = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2} \cdot \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = K_{1U}(j\omega) \cdot K_{2U}(j\omega).$$

Співвідношення (5.9) дозволяє виявити роль кожної ланки системи та вимагає врахувати для КПФ кожної ланки навантаження її наступною ланкою ($\underline{Z}_{2Н}$).

Однак, у багатьох випадках опір наступної ланки великий і їм можна знехтувати (вважати його нескінченно великим). При вирішенні цього питання величина $\underline{Z}_{2Н}$, вхідний опір наступного чотириполюсника, порівнюється з елементами $\underline{A}_{11}$ і $\underline{A}_{12}$ матриці попереднього чотириполюсника за співвідношенням (5.10). Якщо в (5.7) $\underline{A}_{11} >> \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{Z}_{2H}}$, то доданок $\frac{\mathrm{A}_{12}}{\underline{\mathrm{Z}}_{2Н}}$ можна відкинути і тоді $K(j\omega)$ визначиться співвідношенням (5.8).

Нерівність $\underline{A}_{11} >> \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{Z}_{2H}}$ приводиться до нерівності

$$\underline{Z}_{2Н} >> \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}. \tag{5.10}$$

Приклад 2

Визначити $K(j\omega)$ двох каскадно (послідовно) з’єднаних чотириполюсників (рис. 5.5). КПФ $K_{u1}(j\omega)$ першого чотириполюсника отримана в прикладі 1.

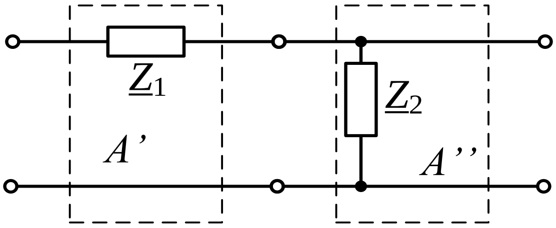


Рисунок 5.5

Розв'язання

$$K_{U_1}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}.$$

Матриця другого чотириполюсника $A_{11} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1/\underline{Z}_2 & 1 \end{Vmatrix}$.

Другий чотириполюсник не навантажений, і, відповідно до (5.8),

$$K_{U_2}(j\omega) = \frac{1}{\underline{A}_{11}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Навантаженням першого чотириполюсника є (див. рис. 5.5) опір $\underline{Z}_2$. Тому

$$K_U(j\omega) = K_{U_1}(j\omega) \cdot K_{U_2}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}} \cdot 1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

Якщо $\underline{Z}_1 = j\omega L$, а $\underline{Z}_2 = R\underline{Z}_2 = \mathrm{R}$, то

$$K_U(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L}.$$

Якщо $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L$, а $\underline{Z}_2 = R_2 - j\frac{1}{\omega C}$, то

$$K(j\omega) = \frac{R_2 - j\frac{1}{\omega C}}{R_1 + R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

5.1.2. *КПФ двополюсника*

В окремому випадку вхідні і вихідні вузли можуть збігатися і коло в цьому випадку є двополюсником. Вхідним сигналом може бути напруга або струм, а вихідним – відповідно струм або напруга. При цьому КПФ буде або вхідною провідністю, або вхідним опором.

Вхідний опір і вхідна провідність двополюсника були отримані під час розгляду теорем Тевенена і Нортона у вигляді виразів

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} \text{ і } \underline{Y}_{\text{вх}} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}.$$

У застосуванні до комплексних передавальних функцій записи цих співвідношень видозмінюються:

$$\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}, \qquad \underline{Y}_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}. \tag{5.11}$$

Звичайно, визначники Δ та Δ_{11} – не комплексні числа, а комплексні функції частоти ω. При запису визначника Δ розрахункові контури слід обирати так, щоб вхідні затискачі входили тільки до першого контуру. Δ_{11} отриманий з Δ викресленням першого рядка і першого стовпця.

Приклад 3

Отримати КПФ двополюсника, зображеного на рис. 5.6, вважаючи, що вхідний сигнал – струм, вихідний – напруга.

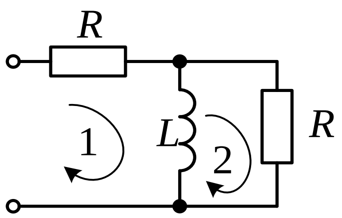


Рисунок 5.6

Розв’язання

У цьому випадку $K(j\omega) = \underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega)$.

Наносимо на схему розрахункові контури так, щоб вхідні затискачі входили тільки в перший контур. Записуємо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R + j\omega L & -j\omega L \\ -j\omega L & R + j\omega L \end{vmatrix}.$$

Викреслюючи перший рядок і перший стовпець, отримаємо

$$\Delta_{11} = R + j\omega L;$$

$$K(j\omega) = \underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \frac{(R + j\omega L)^2 + \omega^2 L^2}{R + j\omega L} = \frac{R^2 + j2R\omega L}{R + j\omega L}.$$

5.1.3. *Експериментальний метод визначення КПФ*

На вхідні затискачі подається гармонійний вплив (напруга, струм) з постійною комплексною амплітудою $\underline{X}_m = 1$ і змінною частотою ω. Зручно прийняти $\underline{X}_m = 1$ ($X_m = 1$, $\psi_k = 0$). Частота ω змінюється, і кожен раз зі зміною частоти вимірюється комплексна амплітуда $\underline{Y}_m$ (або комплекс діючого значення вихідного сигналу $\underline{Y}$). Для цього необхідні два прилади: вольтметр або амперметр (вихідним сигналом може бути або напруга, або струм) і фазометр (для вимірювання фази). КПФ визначається набором комплексних коефіцієнтів передачі $K(j\omega_i)$, відповідних набору частот ω_i. Значення ККП обчислюється за співвідношенням

$$K(j\omega_i) = \frac{\underline{Y}(\omega_i)}{\underline{X}(\omega_i)} = \frac{\underline{Y}_m(\omega_i)}{\underline{X}_m(\omega_i)}.$$

Для $\underline{X} = 1$ $K(j\omega_i) = \underline{Y}(\omega_i)$. Звичайно, розмірність $K(j\omega_i)$ буде не розмірністю $\underline{Y}(\omega_i)$, а відношенням розмірності $\underline{Y}(\omega_i)$ до розмірності $\underline{X}(\omega_i)$. Результат експериментального дослідження може бути оформлений у вигляді таблиці з графами $K(j\omega_i)$ і ω_i або у вигляді двох графіків АЧХ і ФЧХ.

Розглянуті методи ніяк не вичерпують всі можливі рішення поставлених завдань (визначення КПФ) і є лише найбільш поширеними.

5.1.4. *Частотні характеристики типових ланок*

В теорії автоматичного управління та в інформаційних системах прийнято ділити типові ланки на три основні групи. Критерієм, що визначає приналежність ланки до цієї чи іншої групи, є значення амплітудно-частотної характеристики при постійному режимі (при нульовій частоті), тобто значення $K(0)$.

5.1.4.1. *Класифікація ланок*

Перша група – пропорційні ланки:

$$K(0) = K, \tag{5.12}$$

де K – постійна величина, зокрема може дорівнювати 1, але не дорівнює 0.

Якщо АЧХ $K(\omega)$ ланки не залежить від частоти та за будь-якої частоти дорівнює K, тоді ланка називається *пропорційною*.

Якщо АЧХ ланки $K(\omega)$ залежить від частоти і схема електричного кола ланки містить один накопичувальний елемент (L або C), тоді ланка називається *пропорційною аперіодичною*.

Якщо АЧХ ланки $K(\omega)$ залежить від частоти і схема електричного кола ланки містить два різних накопичувальних елемента (L і C), що визначає можливість обміну енергією між електричними та магнітними полями і можливість виникнення резонансу, тоді ланка називається *пропорційною коливальною*.

Основна ознака ланок першої групи – пропорційність вихідної та вхідної величини при постійному режимі ($\omega = 0$).

Друга група – диференціюючі ланки.

Основна ознака:

$$K(0) = 0. \quad (5.13)$$

У постійному режимі такі ланки не пропускають сигнал – вихідна величина дорівнює нулю, що відповідає диференціюванню постійної величини. Якщо амплітудно-частотна характеристика – похила пряма, тоді ланка *ідеальна диференціююча*.

Якщо схема ланки містить один накопичувальний елемент, тоді ланка – *диференціююча аперіодична*, а якщо два різних – ланка *диференціююча коливальна*.

Третя група – інтегруючі ланки:

$$K(0) \to \infty. \quad (5.14)$$

Умова (5.13) відповідає нескінченному зростанню вихідної величини за постійної вхідної величини, що збігається з інтегралом від постійної величини:

$$\left(\int a dt = at \to \infty, t \to \infty\right).$$

Ланки третьої групи можуть бути ідеальними (в пасивних колах практично неможливо реалізувати) і реальними. Для реальних ланок критерій $K(0)\to\infty$ виконується наближено за певних умов.

1) Ідеальні пропорційні ланки.

Почнемо розгляд з одноелементного кола – резистору з опором R. Це коло є двополюсником. За вхідну величину приймаємо напругу $\underline{U}$. Вихідною величиною є струм $\underline{I}$.

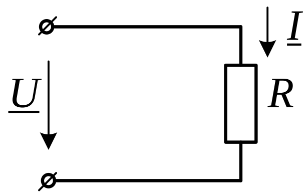


Рисунок 5.7

Комплексною передавальною функцією за визначенням буде

$$K(j\omega) = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{R} = K_0. \qquad (5.15)$$

Амплітудно-частотна характеристика

$$K(\omega) = \frac{1}{R} = K_0$$

має розмірність провідності і від частоти не залежить.

Фазо-частотна характеристика $\varphi(\omega) = 0$.

Отже, дійсна та уявна характеристики відповідно мають вигляд

$$P(\omega) = K(\omega)\cos\varphi(\omega) = K_0,$$

$$Q(\omega) = K(\omega)\sin\varphi(\omega) = 0.$$

Графіки частотних характеристик цього кола зображені на рис 5.8, де показані *а* – амплітудно-частотна характеристика (АЧХ), *б* – фазо-частотна характеристика, *в* – дійсна частотна характеристика, *г* – уявна частотна характеристика, *д* – амплітудно-фазова характеристика. Амплітудно-фазова характеристика (рис. 5.8, *д*), побудована на основі рис 5.8, *в* і 5.8, *г*, являє собою точку, що лежить на дійсній осі на відстані K_0 від початку координат.

Ланки систем автоматичного управління, як правило, є не двополюсниками, а чотириполюсниками, і вхідні та вихідні величини є напругами. Цьому умовно відповідає пропорційне коло, схема якого наведена на рис 5.9.

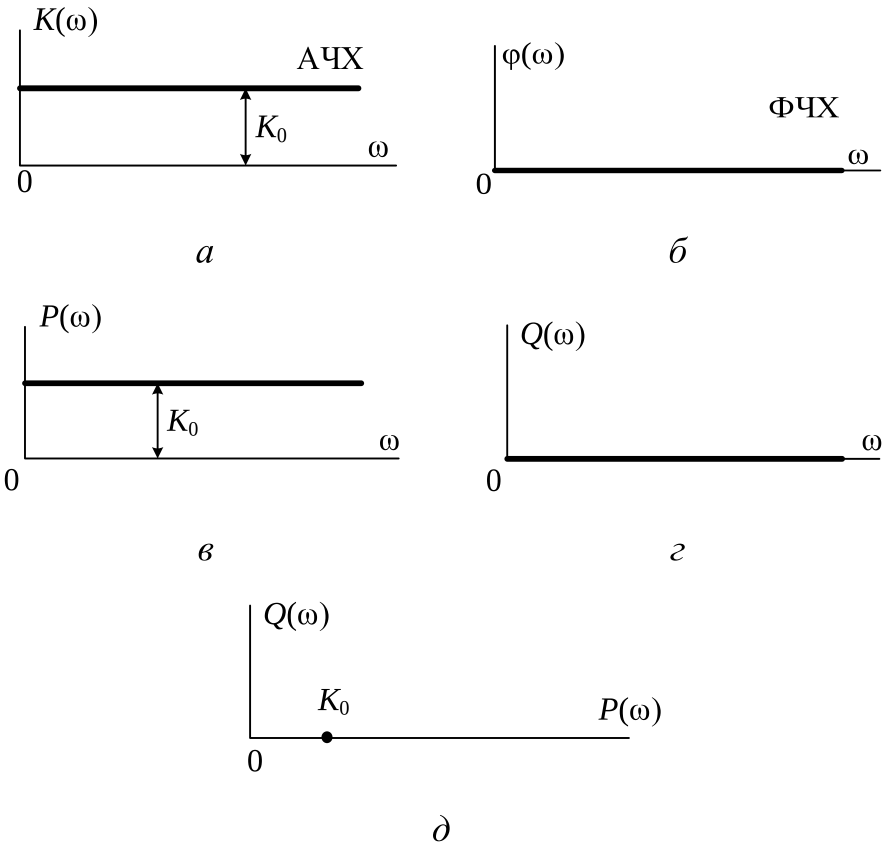


Рисунок 5.8

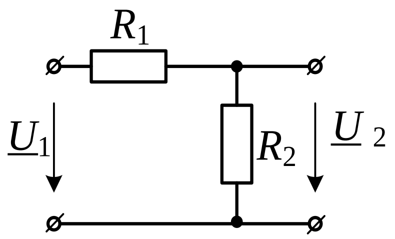


Рисунок 5.9

Коло є чотириполюсником. Вхідною величиною є напруга на вході $\underline{U}_1$, вихідною – напруга на виході $\underline{U}_2$.

КПФ:

$$K(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = K_0. \tag{5.16}$$

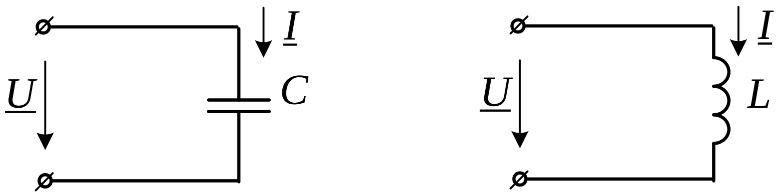
При цьому частотні характеристики, наведені на рис. 5.8, будуть відповідати і розглянутому випадку. Слід лише врахувати, що тут K_0 – величина безрозмірна.

У цьому випадку K_0 (коефіцієнт підсилення) менший за одиницю, оскільки $R_1 + R_2 > R_2$. У загальному випадку пропорційне коло може мати коефіцієнт посилення більший за одиницю. Для цього ланка має містити електронні підсилюючі пристрої. Смуга пропускання пропорційної ланки нескінченно велика ($\Delta\omega = 0 \div \infty$).

2) Ідеальні диференціюючі і інтегруючі ланки

Частотні характеристики ідеальної диференціюючої та інтегруючої ланок отримаємо, розглядаючи одноелементні кола з елементами C і L (рис. 5.10, а і б). Кожен з цих двополюсників виконує операцію диференціювання і інтегрування в залежності від того, яка величина (струм або напруга) прийнята за вхідну, а яка – за вихідну. Якщо вхідна величина – напруга, а вихідна – струм, тоді КПФ в елементі C:

$$K(j\omega) = Y(j\omega) = j\omega C = C\omega e^{j\pi/2}. \qquad (5.17)$$



а *б*

Рисунок 5.10

В елементі L подібні вирази отримаємо, вважаючи, що вхідна величина – струм, а вихідна – напруга. Тоді

$$K(j\omega) = Z(j\omega) = j\omega L = L\omega e^{j\pi/2}. \qquad (5.18)$$

У розглянутих випадках КПФ є добутком двох КПФ (див. (5.17) та (5.18)): КПФ пропорційної ланки (множники C і L) та ідеальної диференціюючої ланки (в області гармонійних функцій множник $j\omega$ є оператором диференціювання). Очевидно, умова (5.13), що визначає другу групу ланок, задовольняється. Звичайно, із елементів C і L не можна фізично виділити реальну диференціюючу ланку без пропорційної ланки (множники C і L), але зі співвідношень (5.17) та (5.18) можна отримати всі частотні характеристики ідеальної диференціюючої ланки.

Аналітичні вирази цих характеристик визначаються співвідношеннями (5.19) - (5.23):

$$K_д(j\omega) = j\omega = \omega e^{\frac{j\pi}{2}}, \qquad (5.19)$$

$$K_д(\omega) = \omega, \tag{5.20}$$

$$\varphi_д(\omega) = \pi/2, \tag{5.21}$$

$$P_д(\omega) = 0, \tag{5.22}$$

$$Q_д(\omega) = \omega. \tag{5.23}$$

Графіки частотних характеристик зображені на рис. 5.11.

Амплітудно-фазова характеристика являє собою позитивну вертикальну піввісь. Початок координат відповідає ω = 0.

Щоб отримати інтегруючу ланку, треба в елементі *C* вважати вихідною величиною напругу, вхідною – струм, а в елементі *L* – навпаки.

Тоді в елементі *C* КПФ має вигляд:

$$K(j\omega) = Z(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2}, \tag{5.24}$$

в елементі L:

$$K(j\omega) = Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{\omega L} e^{-j\pi/2}. \tag{5.25}$$

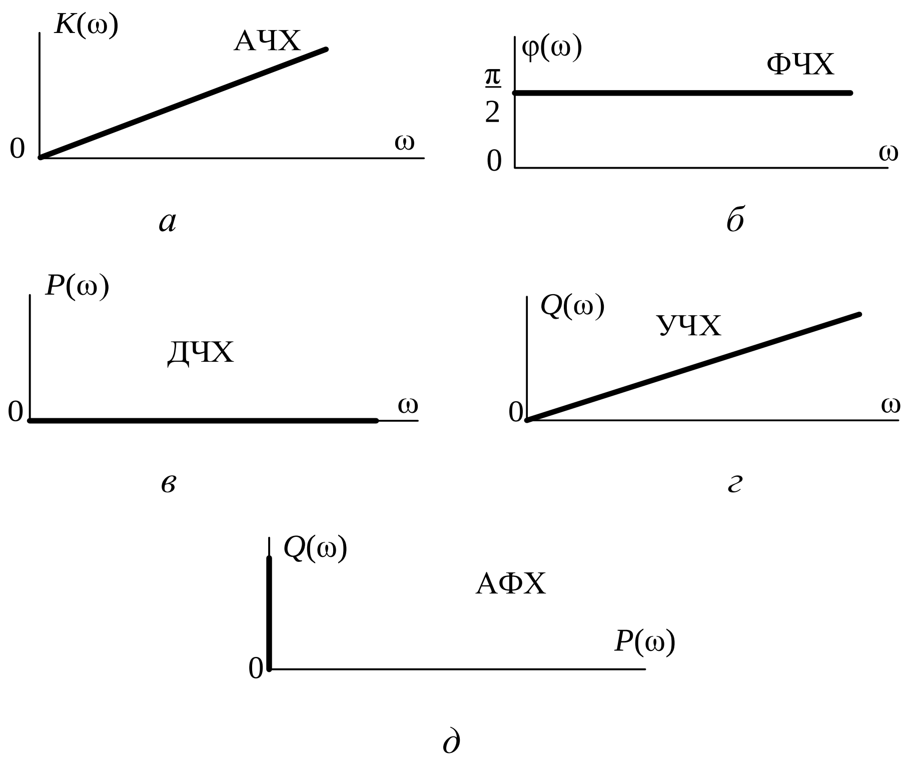


Рисунок 5.11

У правих частинах (5.24) та (5.25) записані добутки КПФ двох ланок: пропорційної $\left(\frac{1}{C}\right.$ та $\left.\frac{1}{L}\right)$ та ідеальної інтегруючої $\left(\frac{1}{j\omega}\right)$. Умова (5.14), що визначає третю групу ланок, задовольняється. Нижче записані аналітичні вирази всіх частотних характеристик інтегруючої ланки (5.25)-(5.30):

$$K_{\text{i}}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\pi/2}, \tag{5.26}$$

$$K_{\text{i}}(\omega) = \frac{1}{\omega}, \tag{5.27}$$

$$\varphi_{\text{i}}(\omega) = -\pi/2, \tag{5.28}$$

$$P_{\text{i}}(\omega) = 0, \tag{5.29}$$

$$Q_{\text{i}}(\omega) = -\frac{1}{\omega}. \tag{5.30}$$

Графіки частотних характеристик зображені на рис. 5.12.

Амплітудно-фазова характеристика являє собою негативну вертикальну піввісь. Початок координат відповідає ω→∞.

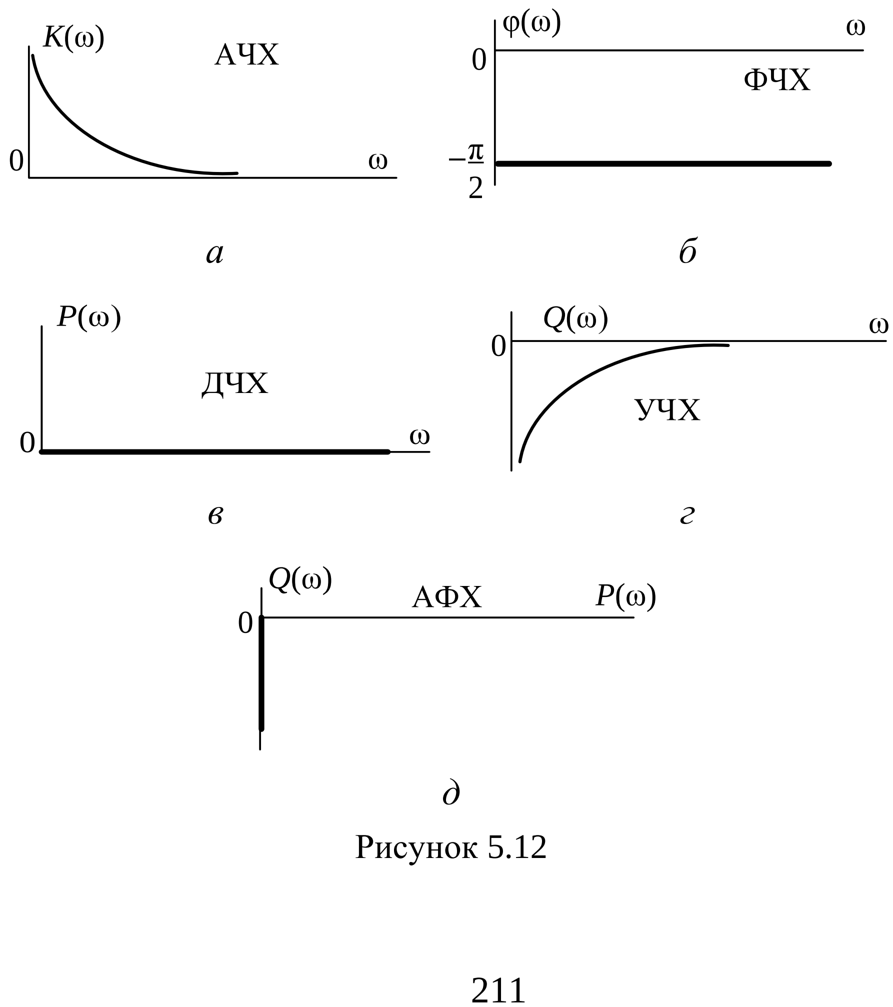


Рисунок 5.12

Оскільки максимум АЧХ для цих ланок не визначений, то поняття ширини смуги пропускання в такому випадку неможливо застосувати. Ці ідеальні ланки не можуть виконувати роль каналу зв'язку, їхнє призначення – виконувати операцію диференціювання або інтегрування вхідного сигналу на всьому діапазоні частот.

3) Інтегруюча ланка

Схема інерційної ланки зображена на рис. 5.13 *а*, *б*.

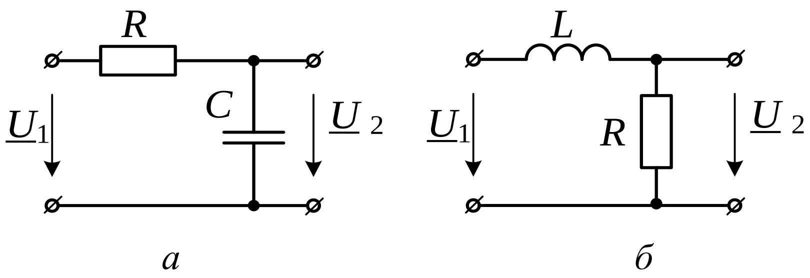


Рисунок 5.13

Комплексні передавальні функції кіл, зображених на рис. 5.13, а і 5.13, б, під час запису через постійну часу *T* однакові.

Для кола *RL*:

$$K(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega T}.$$

Для кола *RC*:

$$K(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega T}.$$

Таким чином, комплексна передавальна функція інтегруючої ланки має вигляд

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}. \qquad (5.31)$$

Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ)

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}. \qquad (5.32)$$

З (5.32) випливає, що за $\omega = 0$ значення $K(\omega) = 1$, а за $\omega \to \infty$ $K(\omega) = 0$.

Фазо-частотна характеристика (ФЧХ)

$$\varphi(\omega) = -\text{arctg}\omega T. \qquad (5.33)$$

Перемноживши чисельник і знаменник правої частини (5.31) на комплексно спряжену зі знаменником функцію отримаємо алгебраїчну форму виразу КПФ:

$$K(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2T^2} - j\frac{\omega T}{1+\omega^2T^2},$$

звідки

$$P(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2T^2}, \qquad (5.34)$$

$$Q(\omega) = -\frac{\omega T}{1+\omega^2T^2}. \qquad (5.35)$$

Межа смуги пропускання $\omega_\text{п}$ цієї ланки визначається з умови:

$$K(\omega_\text{п}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+{\omega_\text{п}}^2T^2}}.$$

Звідки $\frac{1}{{\omega_\text{п}}^2T^2} = 1$ та $\omega_\text{п} = \frac{1}{T}$.

Ширина смуги пропускання $\Delta\omega_\text{п} = \omega_\text{п} = \frac{1}{T}$.

Визначимо за (5.33) значення $\varphi(\omega_\text{п})$:

$$\varphi(\omega_\text{п}) = -\text{arctg}\omega_\text{п}T = -\text{arctg}\frac{1}{T}T = -\text{arctg}1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Підставляючи в (5.34) $\omega_\text{п}T = 1$, отримаємо $P(\omega_\text{п}) = \frac{1}{2}$.

Щоб побудувати уявну частотну характеристику $Q(\omega)$ знайдемо частоту ω_1, що відповідає мінімуму цієї характеристики.

$$Q'(\omega) = \frac{T(1+{\omega_1}^2T^2) - \omega_1 T \cdot 2\omega_1 T^2}{(1+{\omega_1}^2T^2)^2} = 0,$$

$$T(1+{\omega_1}^2T^2) - \omega_1 T \cdot 2\omega_1 T^2 = 0.$$

$$1 - {\omega_1}^2T^2 = 0,$$

$$\omega_1 = \frac{1}{T} = \omega_\text{п};$$

$$Q(\omega)|_{min} = Q(\omega_\text{п}) = Q(\omega_1) = -\frac{1}{2}.$$

Рівняння амплітудно-фазової характеристики (АФХ) отримаємо, прийнявши до уваги співвідношення, яке встановлюють зв’язок між КПФ, $P(\omega)$ і $Q(\omega)$ (див. рис. 5.1):

$$[K(\omega)]^2 = [P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2.$$

Для інтегруючої ланки $P(\omega) = [K(\omega)]^2$, тому

$$P(\omega) = [P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2.$$

Останньому співвідношенню можна поставити у відповідність вираз, який має відомий геометричний сенс:

$$\left[P(\omega) - \frac{1}{2}\right]^2 + [Q(\omega)]^2 = \left[\frac{1}{2}\right]^2.$$

Цей вираз є рівнянням кола з радіусом $r = 1/2$ і центром в точці з координатами $[P_0(\omega) = 1/2,\ Q_0(\omega) = 0]$. Оскільки для інтегруючої ланки позитивним частотам відповідають від'ємні значення $Q(\omega)$, то робочою частиною цього кола є нижнє півколо. При зміні частоти ω від 0 до ∞ АЧХ буде змінювати своє значення від 1 до 0.

Частотні характеристики інтегруючої ланки побудовані на рис. 5.14. Розташування точок $\omega = 0$, $\omega = \omega_п$, $\omega \to \infty$ на графіку АФХ відповідає значенням $P(\omega)$ та $Q(\omega)$ на цих частотах. За $\omega >> \omega_п$, тобто далеко від межі смуги пропускання (поза смугою пропускання), інтегруюча ланка більш точно виконує операцію інтегрування вхідного сигналу.

Умова $\omega >> \omega_п$ відповідає умові

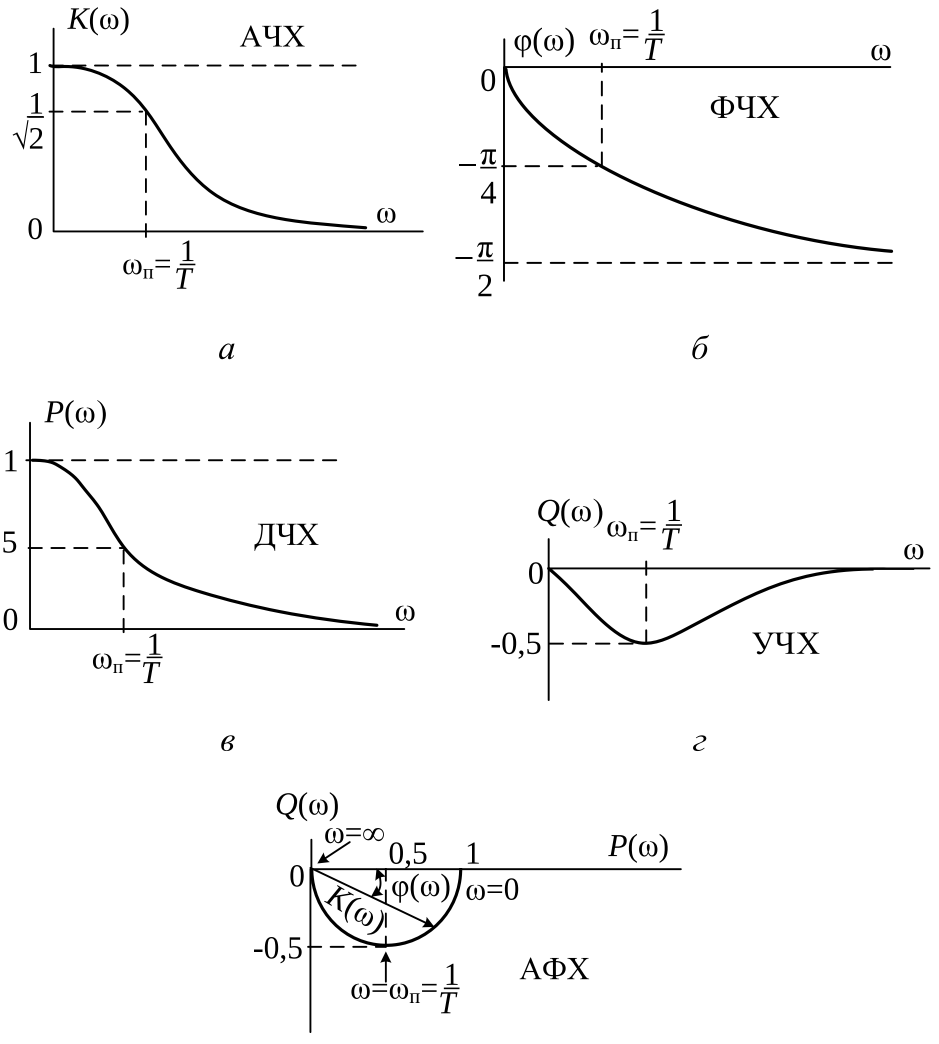
$$\omega >> \frac{1}{T} \text{ або } \omega T >> 1. \qquad (5.36)$$

При цьому

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} \cong \frac{1}{j\omega T} = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{j\omega}. \qquad (5.37)$$

Відповідно до умови (5.36), коло виконує операцію інтегрування, та інерційна ланка поводиться як каскадне з'єднання двох ланок: пропорційної $1/T$ та ідеальної інтегруючої $1/j\omega$.

Зауважимо, що чим більша T, тим сильніша нерівність (5.36) і тим точніша операція інтегрування, але і тим менша вихідна напруга (сильніше згасання).

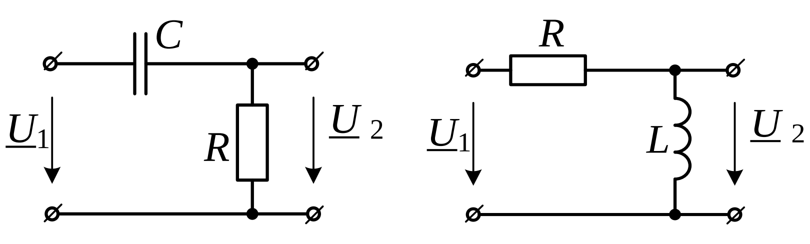


д

Рисунок 5.14

4) Реальна диференціююча аперіодична ланка.

Схема реальної диференціюючої ланки наведена на рис. 5.15, *а*, *б*.



а *б*

Рисунок 5.15

Комплексні передавальні функції кіл, зображених на рис 5.15, а і б, є однаковими, якщо їх записати через постійну часу T, що дорівнює L/R для кола RL, і дорівнює $R{\cdot}C$ для кола RC.

Для кола *RL*:

$$K(j\omega)=\frac{j\omega L}{R+j\omega L}=\frac{1}{1+\dfrac{R}{j\omega L}}=\frac{1}{1-j\dfrac{1}{\omega T}}.$$

Для кола *RC*:

$$K(j\omega)=\frac{R}{R+\dfrac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{j\omega RC}}=\frac{1}{1-j\dfrac{1}{\omega T}}.$$

Таким чином, КПФ реальної диференціюючої аперіодичної ланки має вигляд:

$$K(j\omega)=\frac{1}{1-j\dfrac{1}{\omega T}}. \qquad (5.38)$$

Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ)

$$K(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\omega^2T^2}}}. \qquad (5.39)$$

З (5.39) випливає, що за $\omega = 0$ значення $K(\omega) = 0$, а за $\omega\to\infty$ $K(\omega)=1$.

Фазо-частотна характеристика (ФЧХ)

$$\varphi(\omega)=0-\left(-\mathrm{arctg}\frac{1}{\omega T}\right)=\mathrm{arctg}\frac{1}{\omega T}. \qquad (5.40)$$

Помноживши чисельник і знаменник (5.38) на комплексно спряжену зі знаменником функцію, отримаємо вираз КПФ в алгебраїчній формі:

$$K(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega)=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\omega^2T^2}}+j\frac{\dfrac{1}{\omega T}}{1+\dfrac{1}{\omega^2T^2}},$$

звідки

$$P(\omega)=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\omega^2T^2}}, \qquad (5.41)$$

$$Q(\omega)=\frac{\dfrac{1}{\omega T}}{1+\dfrac{1}{\omega^2T^2}}. \qquad (5.42)$$

Межа смуги пропускання $\omega_п$ цієї ланки визначається з умови

$$K(\omega_п)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\omega_п{}^2T^2}}},$$

звідки

$$\frac{1}{\omega_п{}^2 T^2} = 1 \text{ та } \omega_п = \frac{1}{T}. \tag{5.43}$$

Слід звернути увагу, що гранична частота $\omega_п$ у реальних інтегруючої та диференціюючої ланок є зворотно пропорційною сталій часу ланки.

Смуга пропускання розташована праворуч від $\omega_п$ до $\omega \to \infty$.

Визначимо з (5.40) та (5.43) значення $\varphi(\omega_п)$:

$$\varphi(\omega_п) = \operatorname{arctg} \frac{1}{{}^1/_T \cdot T} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$P(\omega_п)$ визначається підстановкою $\frac{1}{\omega_п{}^2 T^2} = 1$ в (5.41) і дорівнює

$$P(\omega_п) = \frac{1}{2}.$$

Нескладно показати, що $Q(\omega_п) = \frac{1}{2}$ та є максимальним значенням уявної частотної характеристики.

Для цього знаходимо похідну (5.42) і, прирівнюючи її до нуля, визначаємо відповідне максимуму $Q(\omega)$ значення частоти ω_1:

$$Q'(\omega) = \frac{T(1 + \omega^2 T^2) - \omega T \cdot 2\omega T^2}{(1 + \omega^2 T^2)^2} = 0,$$

$$T(1 + \omega_1{}^2 T^2) - \omega_1 T \cdot 2\omega_1 T^2 = 0,$$

звідки

$$\omega_1 = \frac{1}{T} = \omega_п;$$

$$Q(\omega)|_{\max} = Q(\omega_п) = Q(\omega_1) = \frac{1}{2}.$$

Рівнянням амплітудно-фазової характеристики (АФХ) диференціюючої ланки, як і у випадку інтегруючої ланки, є рівняння кола з радіусом r =1/2 і центром в точці з координатами [$P_0(\omega)$ = 1/2, $Q_0(\omega)$ = 0]. Оскільки для диференціюючої ланки позитивним частотам відповідають додатні значення $Q(\omega)$, то робочою частиною цього кола є верхнє півколо. При зміні частоти ω від 0 до ∞ АЧХ буде змінювати своє значення від 0 до 1.

Частотні характеристики реальної диференціюючої аперіодичної ланки побудовані на рис. 5.16.

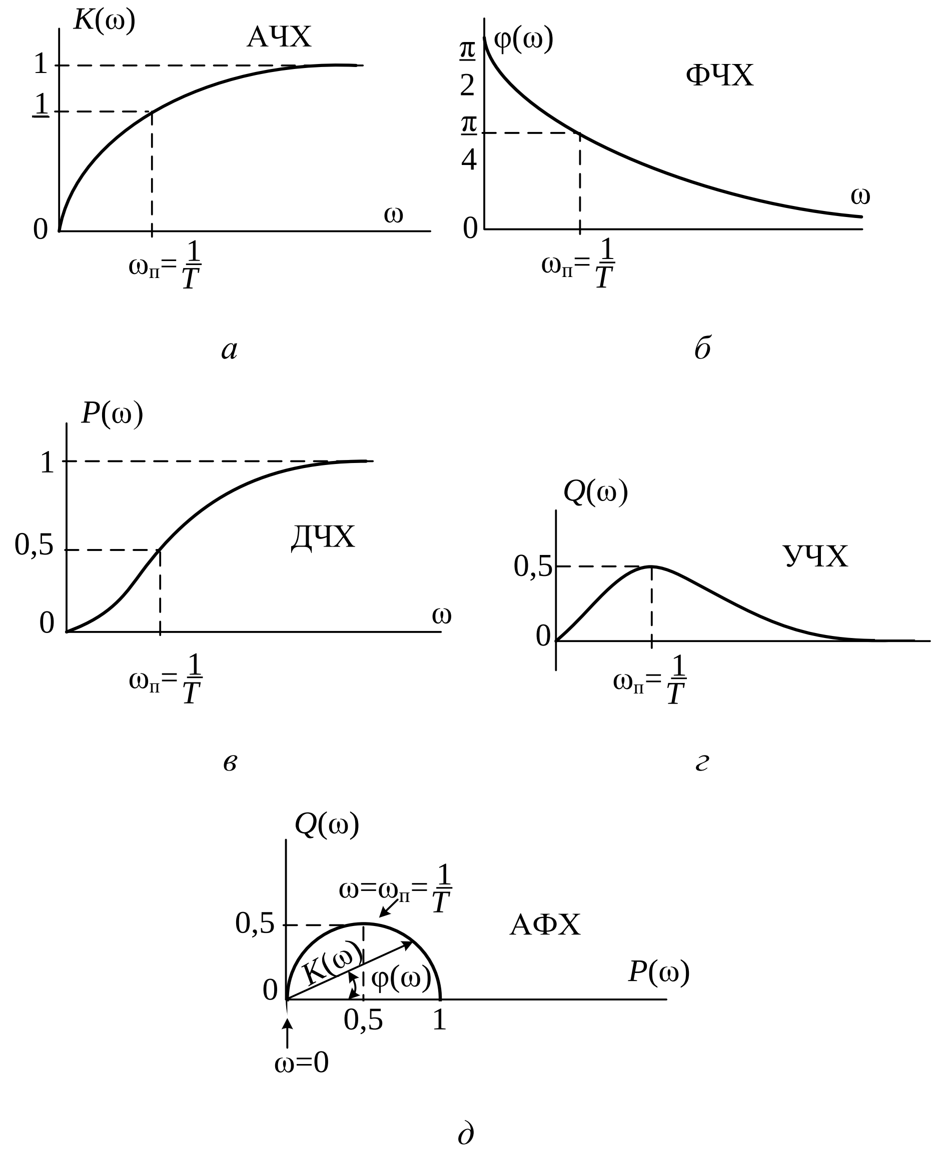


Рисунок 5.16

Розташування точок ω = 0, ω = $\omega_п$, ω→∞ на графіку АФХ відповідає значенням P(ω) і Q(ω) на цих частотах.

Зауважимо, що комплексну передавальну функцію реальної аперіодичної диференціюючої ланки можна представити як добуток трьох передавальних функцій: ідеальної диференціюючої ланки $j\omega$, пропорційної ланки T та інтегруючої ланки $\frac{1}{1+j\omega T}$, розглянутої вище.

Дійсно,

$$K(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T} = j\omega T \frac{1}{1 + j\omega T}.$$

При ω << $\omega_п$ коло виконує операцію диференціювання поданої на вхідні затискачі напруги. Умова ω << $\omega_п$ відповідає нерівності

$$\omega << \frac{1}{T} \text{ та } \frac{1}{\omega T} >> 1. \tag{5.44}$$

При цьому

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} \cong j\omega T.$$

Коло виконує операцію диференціювання ($j\omega$ – КПФ диференцюючої ланки), другий множник T відповідає пропорціній ланці. Чим меншим є T, тим сильнішою є нерівність (5.44) і точнішою є операція диференціювання, але більшим є згасання, тобто меншою є вихідна напруга.

5) Коливальна ланка – коло з двома різними накопичувачами енергії (L і C).

Обмежимося розглядом послідовного контуру (рис. 5.17, а і б). Вхідна величина – загальна напруга $\underline{U}_1$, вихідною величиною будемо вважати напругу на елементі R ($\underline{U}_R$).

В першому варіанті

КПФ:

$$K_R(j\omega) = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}, \tag{5.45}$$

АЧХ:

$$K_R(\omega) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{5.46}$$

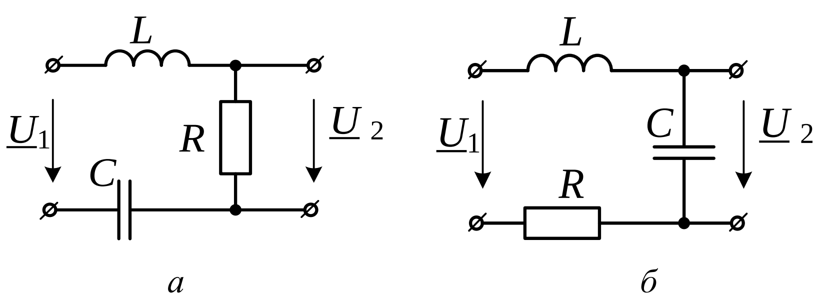


Рисунок 5.17

Як випливає з (5.46) , $K(0) = 0$ і, отже, розглянутий варіант (рис. 5.17, а) належить до групи диффеpенціюючих ланок.

ФЧХ:

$$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \tag{5.47}$$

АФХ побудована на рис. 5.18.

Знайдемо межі смуги пропускання – частоти ω_1 та ω_2, виходячи з умови

$$\left(\omega_{1,2}L - \frac{1}{\omega_{1,2}C}\right)^2 = R^2. \tag{5.48}$$

Оскільки за цієї умови

$$K_R(\omega_{1,2}) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + R^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

з (5.48) випливає

$$\omega_{1,2}L - \frac{1}{\omega_{1,2}C} = \pm R. \tag{5.49}$$

Зауважимо, що $\omega_1 < \omega_р$, $\omega_2 > \omega_р$ та $\omega_р = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, (див. резонанс в послідовному контурі).

За $\omega = \omega_0$ $\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$ $K_R(\omega_0) = K_R(\omega)_{\max}$.

Якщо $\omega < \omega_0$, то реактивний опір $\omega L - \frac{1}{\omega C} < 0$, оскільки у цьому випадку $\omega L < \frac{1}{\omega C}$.

Якщо $\omega > \omega_0$, то $\omega L - \frac{1}{\omega C} > 0$.

Звідси випливає, що

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = -R, \ \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R.$$

Відповідно до (5.47)

$$\varphi(\omega_1) = \frac{\pi}{4}, \ \varphi(\omega_2) = -\frac{\pi}{4}.$$

Маємо рівняння другого порядку:

$$\omega_{1,2}^2 LC - 1 = \pm\omega_{1,2}RC,$$

$$\omega_{1,2}^2 \pm \frac{R}{L}\omega_{1,2} - \omega_0^2 = 0.$$

Розв’язуючи це рівняння, знаходимо межі смуги пропускання:

$$\omega_{1,2} = \mp\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2}.$$

У другому доданку рішення зі знаком «–» відкидається, оскільки при цьому виходить від’ємна частота, що не має фізичного сенсу.

Отже,

$$\omega_{1,2} = \mp\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2}. \tag{5.50}$$

Ширина смуги пропускання

$$\Delta\omega_п = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}.$$

Помноживши чисельник і знаменник останнього виразу на ω_0 і враховуючи, що $\omega_0 L = \rho$ (хвильовий опір), а $\frac{\rho}{R} = Q$ (добротність контуру), отримаємо ширину смуги пропускання

$$\Delta\omega_п = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Чим більша добротність, тим вужча смуга пропускання і краща вибірковість (налаштування на потрібний діапазон частот) контуру.

Щоб отримати дійсну $P(\omega)$ та уявну $Q(\omega)$ характеристики, помножимо чисельник і знаменник правої частини (5.45) на комплексний вираз, спряжений знаменнику. Тоді

$$K_R(j\omega) = \frac{R^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - j\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \tag{5.51}$$

Отже,

$$P_R(\omega) = \frac{R^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \tag{5.52}$$

$$Q_R(\omega) = \frac{-R\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \tag{5.53}$$

Дійсна і уявна частотні характеристики побудовані на рис. 5.18. Для побудови графіків цих характеристик обчислені значення $P(\omega)$ та $Q(\omega)$ на частотах 0, ω_1, ω_0, ω_2, ∞:

$$P_R(0) = Q_R(0) = 0,$$

$$P_R(\omega_{1,2}) = \frac{R^2}{2R^2} = \frac{1}{2}.$$

$$Q_R(\omega_{1,2}) = \pm\frac{1}{2},$$
$$P_R(\omega_0) = 1,\, Q_R(\omega_0) = 0,$$
$$P_R(\infty) = Q_R(\infty) = 0.$$

Неважко показати, що похідна $Q'(\omega)$ на $\omega = \omega_{1,2}$ дорівнює нулю, отже, на цих частотах уявна характеристика $Q(\omega)$ має екстремальні значення $\frac{1}{2}$ та $-\frac{1}{2}$:

$$Q'(\omega) = -R\frac{\left(L + \frac{1}{\omega^2 C}\right)\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right] - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\left(L + \frac{1}{\omega^2 C}\right)}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^2}.$$

Підставляємо в цей вираз

$$\left(\omega_{1,2}L - \frac{1}{\omega_{1,2}C}\right)^2 = R^2$$

і отримаємо

$$Q'(\omega)|_{\omega=\omega_{1,2}} = -R\frac{\left(L + \frac{1}{\omega_1^2 C}\right)\cdot(2R^2 - 2R^2)}{(R^2 + R^2)^2} = 0.$$

Амплітудно-фазовою характеристикою цієї ланки є рівняння кола з радіусом $r = \frac{1}{2}$ і центром в точці $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Уявна характеристика (див. рис.5.18) може мати і додатні, і від’ємні значення. Тому АФХ коливальної ланки представляє з себе все коло. Розташування точок з частотами $\omega = 0$, $\omega = \omega_1$, $\omega = \omega_0$, $\omega = \omega_2$, $\omega \to \infty$ на графіку АФХ відповідає значенням $P(\omega)$ та $Q(\omega)$ на цих частотах. Ця ланка в діапазоні частот $\Delta\omega = 0\text{-}\omega_0$ має властивості диференціюючої ланки, а при $\omega > \omega_0$ вона може виконувати роль інтегруючої ланки.

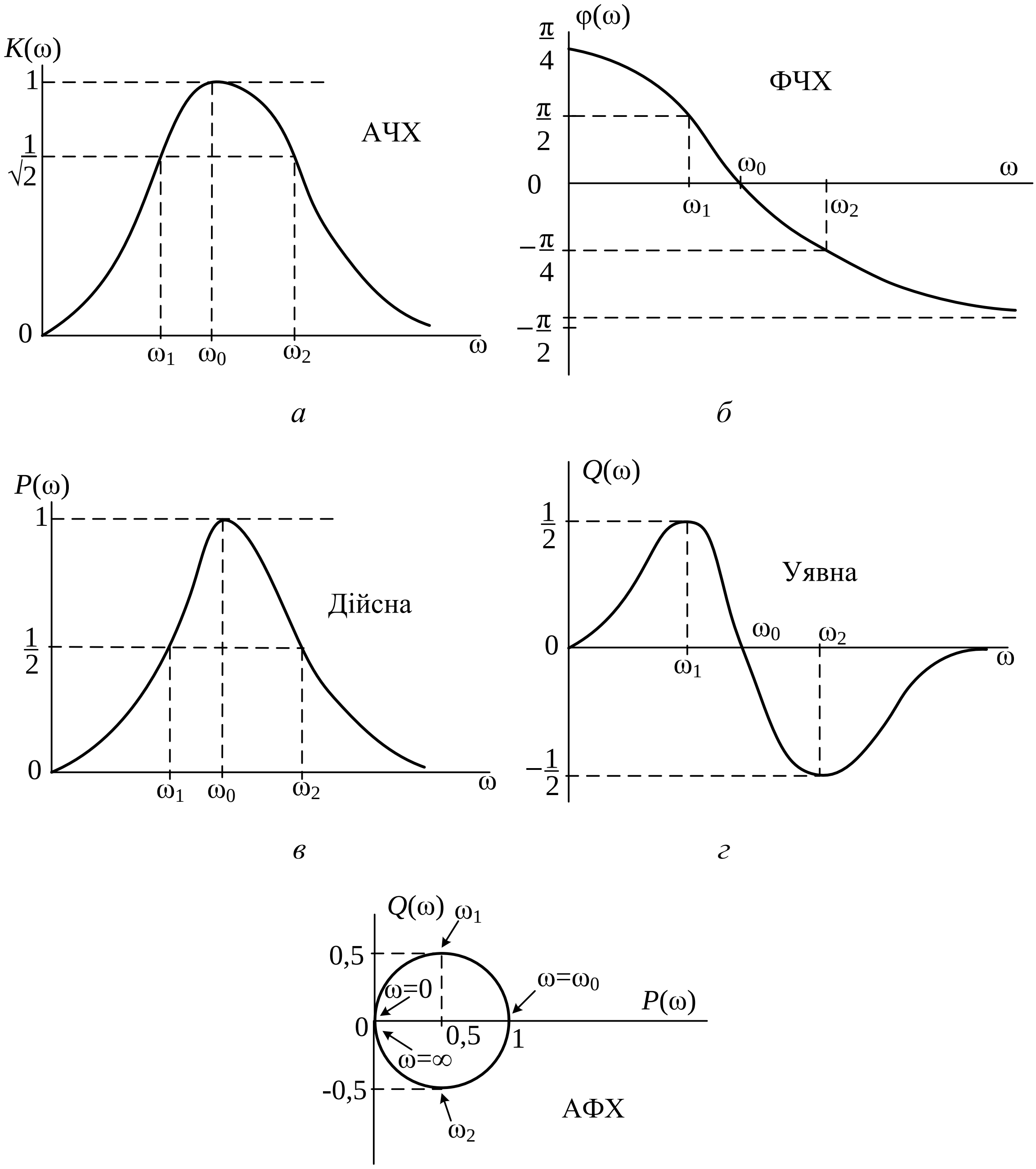


Рисунок 5.18

5.2. Частотні спектри електричних сигналів

Сигнал – це змінний у часі фізичний процес, який містить в собі інформаційне повідомлення. Найбільшого вжитку в наш час набули електричні сигнали, в яких носіями інформації служать такі електромагнітні величини як змінні напруги, струми і вектори напруженості електричного $\vec{E}$ і магнітного $\vec{H}$ полів. Класифікація електричних сигналів та методи математичного опису детально розглядається в [4], [5], [12], [15]. В подальшому будуть розглядатися тільки детерміновані сигнали. Параметри таких сигналів можна передбачити безпомилково з імовірністю, що дорівнює одиниці.

Фізична величина, яка характеризує сам сигнал, завжди представляється функцією часу $S(t)$, і це – природна математична модель сигналу. Але крім звичного часового опису сигналів широко застосовується також опис функціями частоти через суму ортогональних складових, що утворюють систему гармонік. Це інша математична модель опису сигналів $F(\omega)$, що має назву частотного спектру сигналу. Якщо функції $S(t)$ і $F(\omega)$ описують один і той самий сигнал, то вони мають бути між собою пов'язані. Спектр сигналу існує, якщо сигнал $S(t)$ можна розкласти у вигляді суми гармонійних коливань в ряд Фур'є [13]. Представлення $S(t)$ у вигляді суми гармонійних коливань називається спектральним розкладом Фур'є.

5.2.1. *Частотний спектр періодичного сигналу*

Складний періодичний сигнал $a(t)$ можна описати рядом Фур'є в тригонометричній формі у вигляді суми гармонійних складових з частотами кратними частоті сигналу [8], [13], [14], [16]:

$$
\begin{aligned}
a(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{mk} \cdot \cos(k\Omega t + \psi_k) = \\
&= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \cdot \cos(k\Omega t + \psi_k),
\end{aligned}
\tag{5.54}
$$

де $\Omega = 2\pi F$– кругова частота сигналу,

$F = 1/T$– циклічна частота сигналу,

$k = 0\text{-}\infty$ – натуральне число,

A_{mk}, ψ_k– амплітуда і початкова фаза відповідно k-ї гармонійної складової.

Кожна складова виразу (5.54) називається гармонікою, номер якої визначається числом k.

Перша гармоніка A_{m1} для $k = 1$ називається основною, нульова гармоніка A_0 для $k = 0$ визначає постійну в часі складову сигналу. Для $k > 1$ отримуємо вищі гармоніки. В залежності від форми сигналу деякі гармоніки можуть бути відсутні.

Сукупність гармонійних складових, якою може бути представлений сигнал, називають його спектром. Повний спектральний опис сигналу складається з спектру частот (Ω_0, Ω_1,…), спектру амплітуд (A_0, A_{m1}, A_{m2},…) та спектру фаз (ψ_1, ψ_2,…). Графічною ілюстрацією спектрів є побудова амплітудно-частотного (АЧС) та фазо-частотного (ФЧС) спектрів. Спектр періодичного сигналу – дискретний (лінійчатий) і тому його зображають на графіку за допомогою спектральних ліній на відповідних частотах $k\Omega$. Довжини ліній АЧС дорівнюють значенням амплітуд A_{mk}, а ФЧС – значенням ψ_k, а по осі частот відкладається циклічна або кутова частота.

Приклад 5.1

Побудуємо АЧС та ФЧС періодичного сигналу:

$$a(t) = 10 + 6\cos\left(628t + \frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(2\cdot 628t + \frac{\pi}{3}\right) +$$
$$+ 3\cos\left(3\cdot 628t - \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(5\cdot 628t - \frac{\pi}{4}\right). \qquad (5.55)$$

Спектр цього сигналу містить постійну складову ($A_0 = 4$) і чотири гармонійні: першу ($A_{m1} = 6$, $\psi_1 = \frac{\pi}{4}$), другу $A_{m2} = 4$, $\psi_2 = \frac{\pi}{3}$), третю ($A_{m3} = 3$, $\psi_3 = -\frac{\pi}{3}$) та п'яту ($A_{m5} = 2$, $\psi_5 = -\frac{\pi}{4}$).

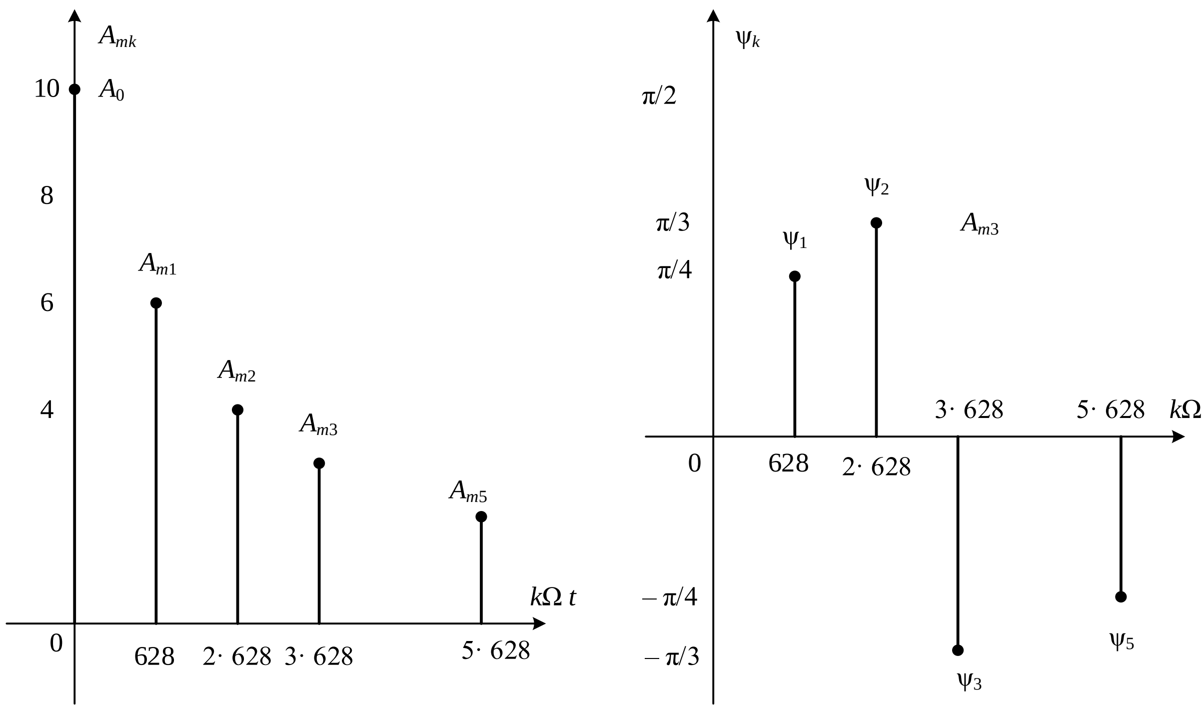


Рисунок 5.19

5.2.1.1. *Комплексна форма ряду Фур'є*

В якості узагальненої моделі гармонійного коливання з частотою $k\Omega$, амплітудою A_{mk} та початковою фазою ψ_k можна використати комплексне коливання (комплексну гармонійну функцію), яку можна представити в показниковій та алгебраїчній формах за допомогою формули Ейлера [5], [9], [17] :

$$\underline{A}_{mk} e^{jk\Omega t} = A_{mk} \cdot \cos(k\Omega t + \psi_k) + jA_{mk} \cdot \sin(k\Omega t + \psi_k), \qquad (5.56)$$

де $\underline{A}_{mk} = A_{mk} e^{j\psi_k}$ – комплексна амплітуда, а $e^{jk\Omega t}$– оператор обертання.

Графічно комплексну гармоніку можна представити на комплексній площині у вигляді вектору, що обертається (рис. 5.20).

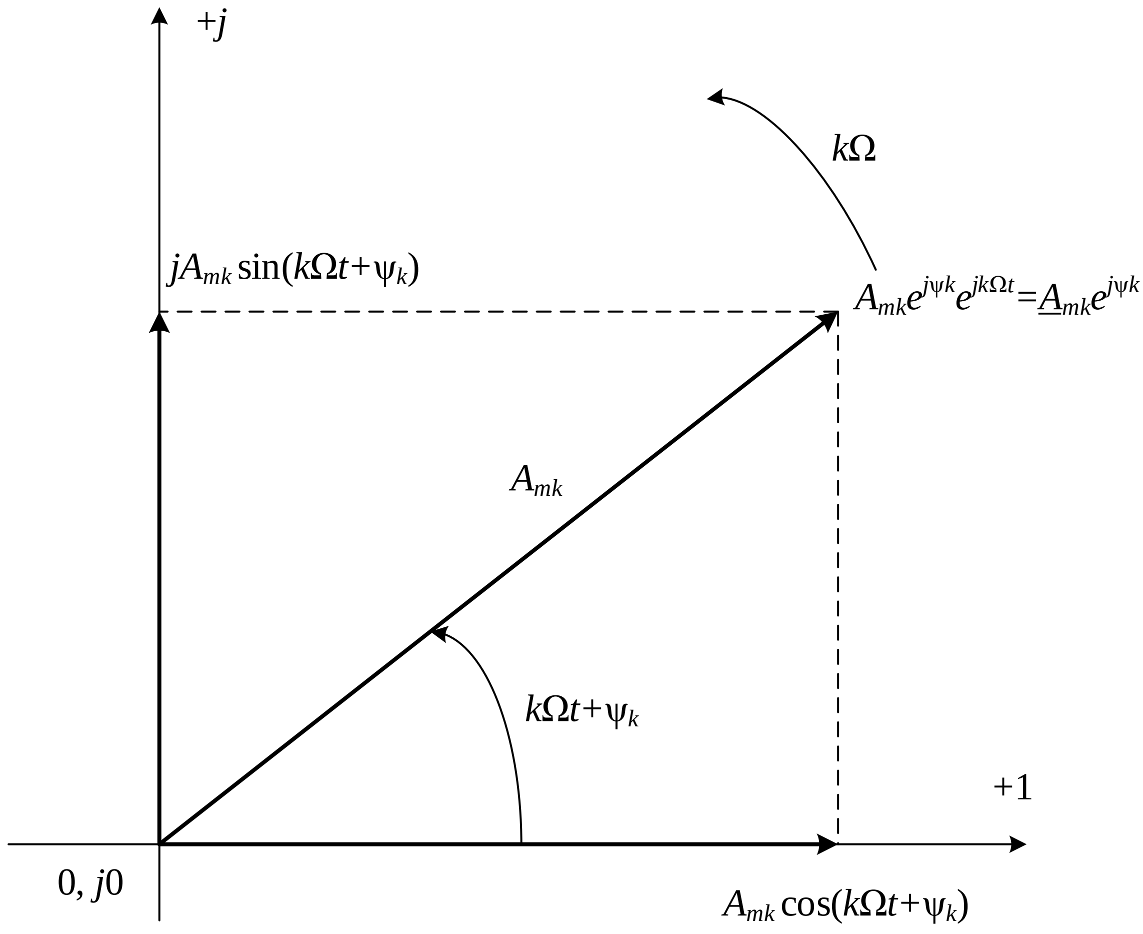


Рисунок 5.20

Проекція цього вектору на дійсну вісь є записаною через косинус функцією миттєвого значення функції $a(t)$. Таким чином, косинусоїдальне коливання – це дійсна частина комплексной гармонійної функції.

$$A_{mk} \cdot \cos(k\Omega t + \psi_k) = \mathrm{Re}\left[A_{mk} e^{j\psi_k}\right]. \qquad (5.57)$$

Дійсну частину можна виділити використовуючи комплексне спряження за формулою Ейлера:

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}.$$

В нашому випадку $\alpha = k\Omega t + \psi_k$, отже:

$$A_{mk} \cdot \cos(k\Omega t + \psi_k) = A_{mk} \frac{e^{j(k\Omega t+\psi_k)} + e^{-j(k\Omega t+\psi_k)}}{2} =$$

$$= \frac{A_{mk} \cdot e^{j(k\Omega t+\psi_k)} + A_{mk} \cdot e^{-j(k\Omega t+\psi_k)}}{2} = \frac{\underline{A}_{mk} \cdot e^{jk\Omega t} + \underline{A}_{mk} \cdot e^{-jk\Omega t}}{2} =$$

$$= \underline{S}_{mk} \cdot e^{jk\Omega t} + \underline{S}^*_{mk} \cdot e^{-jk\Omega t}, \qquad (5.58)$$

де $\underline{S}_{mk} = S_{mk} e^{j\psi_k}$, $\underline{S}^*_{mk} e^{j\psi_k} = S_{mk} e^{-j\psi_k}$ – комплексно спряжені; $e^{jk\Omega t}$, $e^{-jk\Omega t}$ – оператори обертання.

На рис. 5.21 зображені дві комплексні гармоніки, амплітуди яких вдвічі менші за амплітуди гармонік $a_k(t)$, тобто $S_{mk} = \frac{1}{2} A_{mk}$.

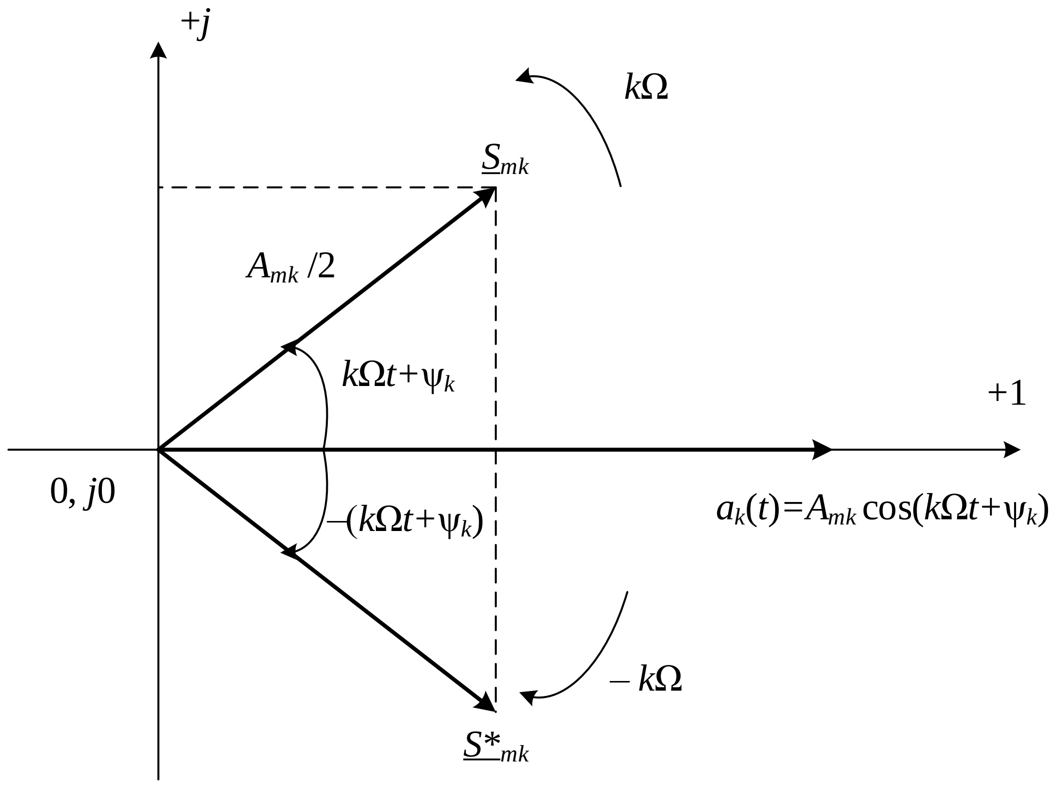


Рисунок 5.21

Вектори, які відображають на комплексній площині складові $\underline{S}_{mk}$ і $\underline{S}^*_{mk}$ виразу (5.58), обертаються в протилежних напрямках, і тому їхні проекції на дійсну вісь додаються, а на уявну – віднімаються і взаємно компенсують одна одну.

Складемо запис ряду Фур'є у комплексній формі, використавши знакову функцію:

$$\operatorname{sign} k = \begin{cases} 1, \text{якщо } \ k > 0, k\Omega > 0, \text{обертання проти годинникової стрілки,} \\ \ 0, \text{якщо } k = 0, \\ -1, \text{якщо } \ k < 0, k\Omega < 0, \text{обертання за годинниковою стрілкою.} \end{cases}$$

Тепер замість (5.56) можна записати:

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} S_{mk}\, e^{j\operatorname{sign} k\psi_k} e^{jk\Omega t} =$$

$$= S_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{k=\infty} S_{mk}\, e^{j\operatorname{sign} k\psi_k} e^{jk\Omega t}, \qquad (5.59)$$

де $S_0 = A_0$, $S_{mk} = \frac{A_{mk}}{2}$.

У випадку комплексної форми ряду Фур'є число членів ряду подвоюється за рахунок від'ємної частоти ($-k\Omega$), а амплітуди гармонік при цьому зменшуються у два рази порівняно з амплітудами складових ряду, записаного в дійсній формі. Постійна складова (нульова гармоніка) залишається без зміни, як і значення початкових фаз коливання ψ_k.

У комплексній формі ряду Фур'є вісь абсцис (вісь частот) отримує додатково від'ємну піввісь, і тому можна сказати, що АЧС – це парна функція частоти, а ФЧС – непарна. Тому рисунок АЧС буде симетричним відносно осі ординат, а рисунок ФЧС буде симетричним відносно початку координат. Від'ємна частота фізичного сенсу не має. Це – формальний (математичний) прийом, який дозволяє оперувати не проекціями, а самими комплексними гармоніками, що суттєво спрощує розрахунки.

Побудуємо спектр періодичного сигналу, наведеного в прикладі 5.1, для комплексної форми ряду Фур'є, взявши до уваги, що кожна гармоніка (крім нульової) буде представлена у вигляді суми двох складових на частотах $k\Omega$ та $-k\Omega$. АЧС представлена на рис. 5.22 , ФЧС – на рис. 5. 23.

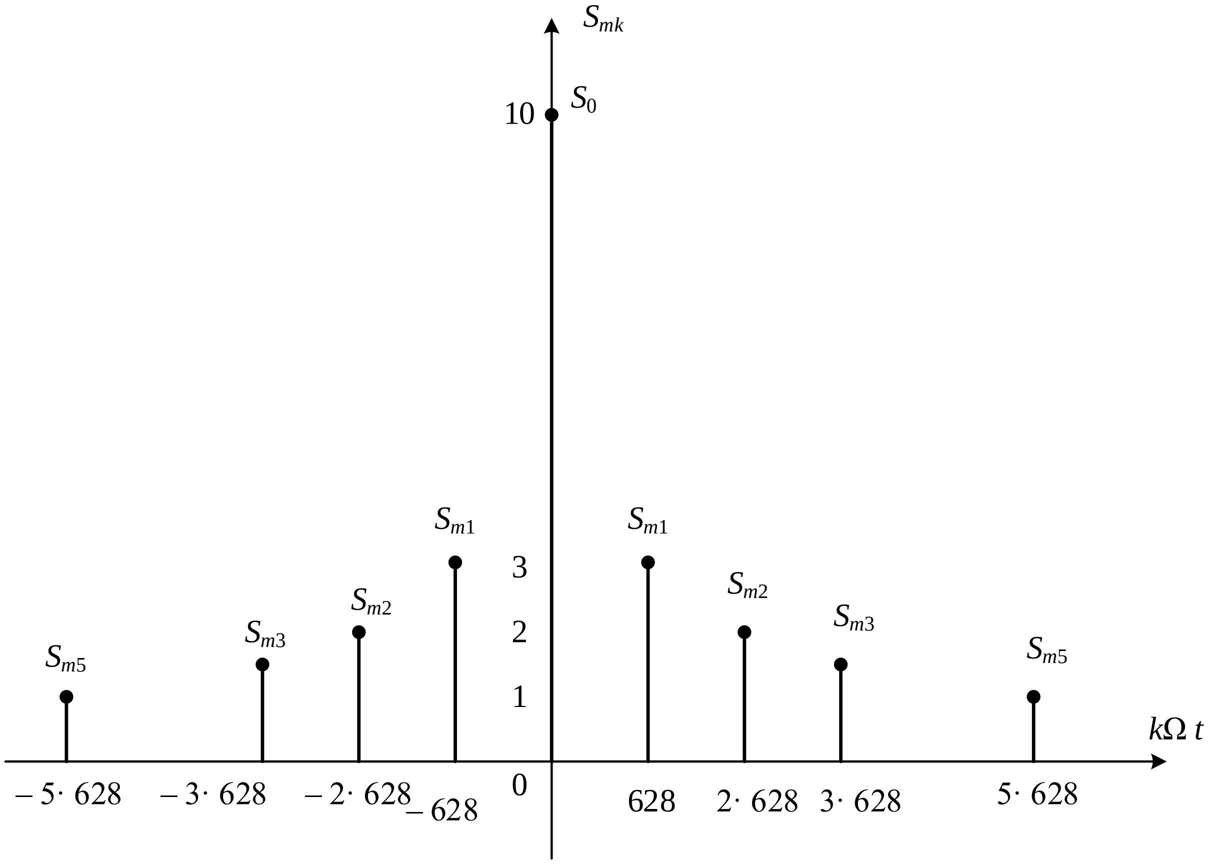


Рисунок 5.22

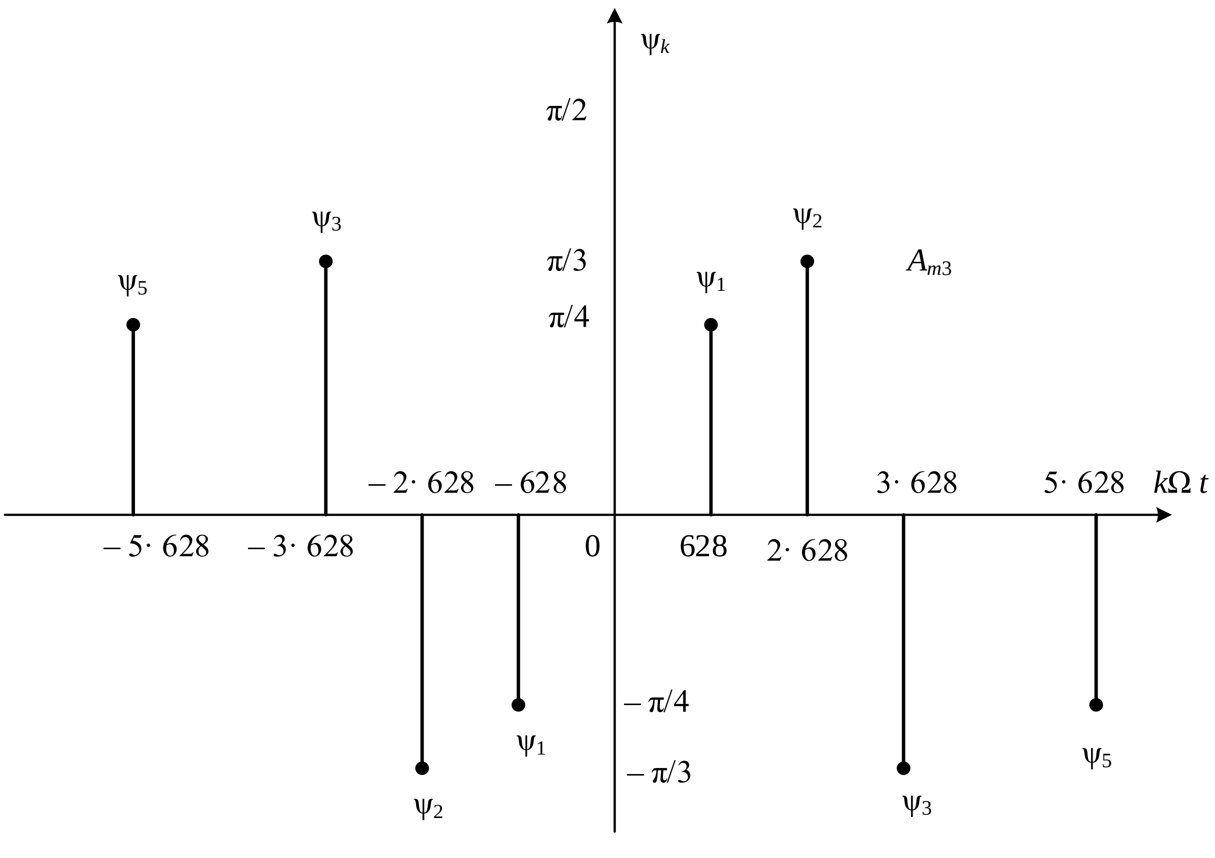


Рисунок 5.23

У комплексній формі ряду Фур'є довжина спектральних ліній АЧС (крім постійної складової) зменшується вдвоє, а для ФЧС залишається незмінною, але для області від'ємних частот змінюють знак на протилежний.

5.2.1.2. ***Розрахунок (визначення) комплексних гармонік періодичного сигналу***

З (5.59) шляхом перетворень можна отримати співвідношення для розрахунку комплексних гармонік ряду Фур'є для заданого виразу періодичної функції часу $a(t)$.

Для цього проведемо заміну індексу k на індекс l та помножимо обидві частини виразу (5.59) на оператор обертання $e^{-jk\Omega t}$, де k – одне з позитивних значень l.

$$a(t)e^{-jk\Omega t} = \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} S_{ml}\, e^{j\mathrm{sign}\, l\psi_l} e^{j(l-k)\Omega t}. \qquad (5.60)$$

З виразу (5.60) візьмемо інтеграл за часом в межах від $-T/2$ до $+T/2$, де T – період функції $a(t)$.

$$\int_{-T/2}^{+T/2} a(t)e^{-jk\Omega t}dt = \int_{-T/2}^{+T/2} \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} S_{ml}\, e^{j\mathrm{sign}\, l\psi_l} e^{j(l-k)\Omega t}dt. \qquad (5.61)$$

Складові підінтегрального виразу правої частини $S_{ml}e^{j\mathrm{sign}\, l\psi_l}$ не є функцією часу, оскільки представляє собою комплексну амплітуду гармоніки, отже її можна винести за знак інтегралу. Якщо $(l - k) \neq 0$, то

$$e^{j(l-k)\Omega t} = \cos(l-k)\Omega t + j\sin(l-k)\Omega t,$$

а інтеграл за період від цього виразу, що складається з гармонійних функцій часу, дорівнює нулю. Таким чином, тільки за умови $l = k$ в правій частині (5.60) залишається один доданок, оскільки $e^{j0\Omega t} = 1$. Тому права частина з урахуванням того, що $k > 0$ та $\mathrm{sign}\, k = +1$, має вигляд:

$$S_{mk}e^{j\,\psi_k} \int_{-T/2}^{+T/2} dt = \underline{S}_{mk}T. \qquad (5.62)$$

Ліва ж частина рівняння (5.61) залишається без змін, і тому остаточно отримуємо вираз для розрахунків комплексних гармонік періодичних функцій часу:

$$\underline{S}_{mk} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} a(t) e^{-jk\Omega t} dt. \qquad (5.63)$$

Як сигнал у вигляді комплексного ряду Фур'є, так і спектр у вигляді безлічі комплексних амплітуд мають комплексну форму і широко використовуються в теоретичних дослідженнях.

5.2.2. *Частотний спектр неперіодичного (одиночного) сигналу*

Ряд Фур'є є основою спектрального аналізу періодичних сигналів, але його можна застосовувати також і для випадку неперіодичних (одиночних) сигналів. Щоб застосувати для них спектральний метод виконаємо граничний перехід від періодичного сигналу до неперіодичного при прагненні періоду T до нескінченності, тобто $T \to \infty$. При цьому основна частота функції $\Omega = 2\pi F = 2\pi / T \to 0$, а різниця частот сусідніх гармонік $(k+1)\Omega - k\Omega = 0$. Тому відстань по осі частот між спектральними лініями, яка дорівнює Ω, прагне до нуля, а спектр стає суцільним, безперервним, а не дискретним. Комплексна амплітуда кожної гармоніки, відповідно до (5.63), є нескінченно малою і втрачає фізичний сенс. Це ж стосується також дискретної частини гармоніки $k\Omega$, яка переходить в безперервну змінну частоту ω. Межі інтегрування в (5.63) змінюються на $-\infty$ і $+\infty$, оскільки $T \to \infty$. Одиночний сигнал є, таким чином, сумою коливань усіх частот, тому він має безперервний спектр. Розрахунковою величиною, яка визначає спектр неперіодичного сигналу, є інтеграл, який відповідає прямому перетворенню Фур'є. Цю величину називають спектральною щільністю:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) e^{-j\omega t} dt. \qquad (5.64)$$

Спектральна щільність сигналу $S(j\omega)$ є комплексною функцією частоти ω і може бути представлена в показниковій формі:

$$S(j\omega) = S(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \qquad (5.65)$$

де $S(\omega)$ – модуль спектральної щільності $S(j\omega)$, який визначає амплітудно-частотний спектр періодичного сигналу, $\varphi(\omega)$ – аргумент спектральної щільності $S(j\omega)$, який визначає фазо-частотний спектр неперіодичного сигналу.

Слід зауважити, що як і для періодичного сигналу, АЧС неперіодичного сигналу є парною, а ФЧС – непарною функцією частоти. При цьому АЧС і ФЧС неперіодичного сигналу є суцільними спектрами, а не лінійчатими, оскільки неперіодичний сигнал не має окремих (дискретних) гармонік. Для побудови АЧС на осі ординат відкладається модуль спектральної щільності , а для побудови ФЧС – її аргумент. По осі абсцис відкладаються частоти ω або f. Функція $S(j\omega)$ обчислюється по співвідношенню (5.64). Для того, щоб інтеграл правої частини цього співвідношення сходився, сигнал повинен мати скінченну величину.

Використовуючи зворотне інтегральне перетворення Фур'є за частотним спектром сигналу можна отримати його часовий вираз:

$$a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}df = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \qquad (5.66)$$

Вираз (5.64) називають прямим перетворенням Фур'є, а вираз (5.66) – зворотним перетворенням Фур'є. У випадку дискретного частотного спектру вираз, аналогічний (5.66) має вигляд (5.59).

Варто зазначити, що математична обробка одиничного сигналу простіша за періодичного, оскільки з інтегралами працювати зручніше, ніж з рядами.

В зв'язку з цим частотний спектр періодичного сигналу простіше отримати не з виразу (5.63), а з використанням виразу (5.65) для спектральної щільності. Перший вираз відрізняється від другого множником $1/T$ та заміною безперервної частоти ω на дискретну $k\Omega$. Звідси випливає, що для періодичної функції комплексна амплітуда її k-ої гармоніки може бути отримана з виразу для спектральної щільності для такої ж неперіодичної функції шляхом її ділення на T і заміни ω на $k\Omega$:

$$\underline{S}_{mk} = \frac{1}{T}S(j\omega)\Big\lceil_{\omega\,\to\,k\Omega}. \qquad (5.67)$$

Можливий і зворотній перехід – отримання виразу спектральної щільності з виразу комплексної амплітуди k-ої гармоніки $\underline{S}_{mk}$. Для цього треба вираз комплексної амплітуди помножити на T і замінити $k\Omega$ на ω.

$$S(j\omega) = T\underline{S}_{mk}\Big\lceil_{k\Omega\,\to\,\omega}. \qquad (5.68)$$

В [14] за допомогою виразу (5.63) був отриманий частотний спектр періодичної послідовності прямокутних імпульсів:

$$\underline{S}_{mk} = \frac{A\tau_{\text{і}}}{T} \frac{\sin\dfrac{k\pi\tau_{\text{і}}}{2}}{\dfrac{k\pi\tau_{\text{і}}}{2}},$$

де A – амплітуда імпульсу, $\tau_{\text{і}}$ – тривалість імпульсу, T – період прямування імпульсної послідовності.

Використовуючи вираз (5.68), знаходимо спектральну щільність одиночного прямокутного імпульсу:

$$S(j\omega) = T\underline{S}_{mk}\Big|_{k\Omega \to \omega} = A\tau_{\text{і}} \frac{\sin\dfrac{\omega\tau_{\text{і}}}{2}}{\dfrac{\omega\tau_{\text{і}}}{2}}. \qquad (5.69)$$

Виконаємо тепер по (5.67) перетворення останнього виразу:

$$\underline{S}_{mk} = \frac{1}{T} S(j\omega)\Big|_{\omega \to k\Omega} = \frac{A\tau_{\text{і}}}{T} \frac{\sin\dfrac{k\Omega\tau_{\text{і}}}{2}}{\dfrac{k\Omega\tau_{\text{і}}}{2}} = \frac{A}{q} \frac{\sin\dfrac{k\pi\tau_{\text{і}}}{T}}{\dfrac{k\pi\tau_{\text{і}}}{T}} =$$

$$= \frac{A}{q} \frac{\sin\dfrac{k\pi}{q}}{\dfrac{k\pi}{q}}, \qquad (5.70)$$

де $q = \frac{T}{\tau_{\text{і}}}$ – шпаруватість імпульсів.

5.2.3. *Основні теореми перетворення Фур'є*

Відповідність між сигналом $a(t)$ і його зображенням за Фур'є $S(j\omega)$ будемо зображати символом $\xrightarrow{F}$.

Наведемо деякі теореми перетворення Фур'є, якими будемо в подальшому користуватися.

1) Теорема адитивності.

Лінійна комбінація оригіналів відповідає лінійній комбінації зображень.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t) \xrightarrow{F} \sum_{i=0}^{n} S_i(j\omega). \qquad (5.71)$$

2) Теорема лінійності.

Постійний множник можна виносити за знак перетворення Фур'є.

$$C \cdot a(t) \xrightarrow{F} C \cdot S(j\omega). \tag{5.72}$$

3) Теорема диференціювання.

Операції диференціювання сигналу $a(t)$ відповідає операція множення на $j\omega$ зображення $S(j\omega)$:

$$a'(t) \xrightarrow{F} j\omega S(j\omega). \tag{5.73}$$

Для доведення теореми виконаємо інтегрування частинами:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a'(t)e^{-j\omega t}dt = a(t)e^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - (-j\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} a(t)e^{-j\omega t}dt =$$

$$= a(+\infty)e^{-j\omega\infty} - a(-\infty)e^{-j\omega(-\infty)} - (-j\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} a(t)e^{-j\omega t}dt =$$

$$= j\omega\int_{-\infty}^{+\infty} a(t)e^{-j\omega t}dt = j\omega S(j\omega). \tag{5.74}$$

$a(+\infty)e^{-j\omega\infty} - a(-\infty)e^{-j\omega(-\infty)} = 0$ з умови збіжності інтеграла Фур'є.

4) Теорема інтегрування.

Операції інтегрування сигналу $a(t)$ відповідає операція ділення на $j\omega$ зображення $S(j\omega)$:

$$\int_{-\infty}^{t} a(t)dt \xrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}S(j\omega). \tag{5.75}$$

Теорему інтегрування можна розглядати як зворотну теоремі диференціювання.

5) Теорема про зсув в часовій області (запізнення).

Зсуву сигналу в часі на $\mp t_0$ відповідає множення спектральної щільності на $e^{\mp j\omega t_0}$:

$$a(t \mp t_0) \xrightarrow{F} S(j\omega)e^{\mp j\omega t_0}. \tag{5.76}$$

Як видно, зсув сигналу в часі не змінює модуля спектральної щільності (АЧС), а до його аргументу (ФЧС) додається доданок $\pm\omega t_0 = \pm 2\pi f t_0$.

6) Теорема зсуву в області частот.

Множенню оригіналу на $e^{\pm j\omega_0 t}$ відповідає зсув його зображення по осі частот на $\mp\omega_0$:

$$a(t)e^{\pm j\omega_0 t} \xrightarrow{F} S[j(\omega \mp j\omega_0)]. \quad (5.77)$$

Це означає, що спектр сигналу при цьому не змінюється, а зсувається по осі абсцис відносно її нульової точки на ω_0 праворуч ($\omega' = \omega - \omega_0 = 0$ для $\omega = \omega_0$), або ліворуч $\omega' = \omega + \omega_0 = 0$ для $\omega = -\omega_0$).

5.2.4. *Частотні спектри дельта-функції та одиничної функції*

Область визначення та властивості цих функцій були детально розглянуті в розділі 3.1.

Розглянемо спочатку частотний спектр дельта-функції, який достатньо просто можна визначити за прямим інтегральним перетворенням Фур'є (5.64):

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t)e^{-j\omega_0}dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t)dt = 1 \quad (5.78)$$

Амплітудно-частотний спектр δ-функції (рис. 5.24)

$$S(\omega) = 1.$$

Фазо-частотний спектр δ-функції (рис. 5.25)

$$\varphi(\omega) = 0.$$

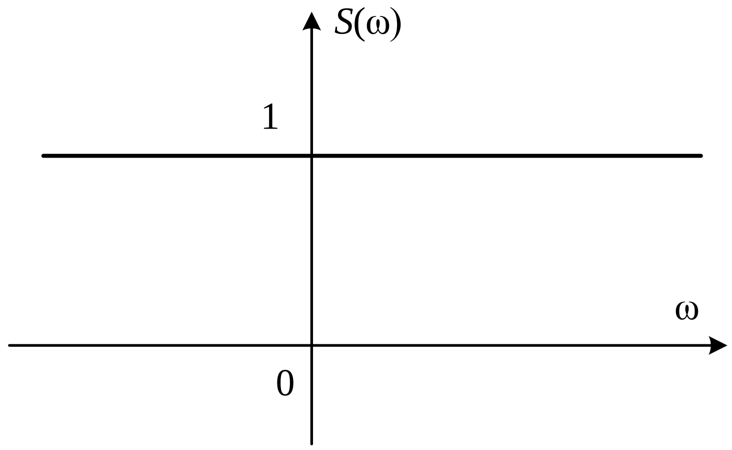


Рисунок 5.24

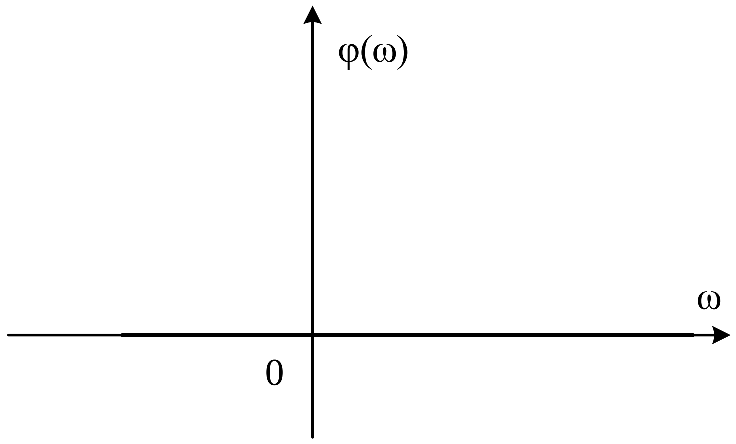


Рисунок 5.25

Частотний спектр δ-функції із запізненням $\delta(t \mp t_0)$ отримаємо використовуючи теорему зсуву (запізнення):

$$\delta(t \mp t_0) \xrightarrow{F} e^{\mp j\omega t_0}. \qquad (5.79)$$

АЧС такої δ-функції залишається без зміни ($S(\omega) = 1$), а ФЧС змінюється:

$$\varphi(\omega) = \mp t_0\omega = \mp 2\pi f t_0. \qquad (5.80)$$

При цьому ФЧС описується прямою (рис. 5.26), яка проходить через початок координат з кутом нахилу $\mp\mathrm{arctg}\, t_0$ (для частоти ω) або $\mp\mathrm{arctg}\, 2\pi t_0$ (для частоти f).

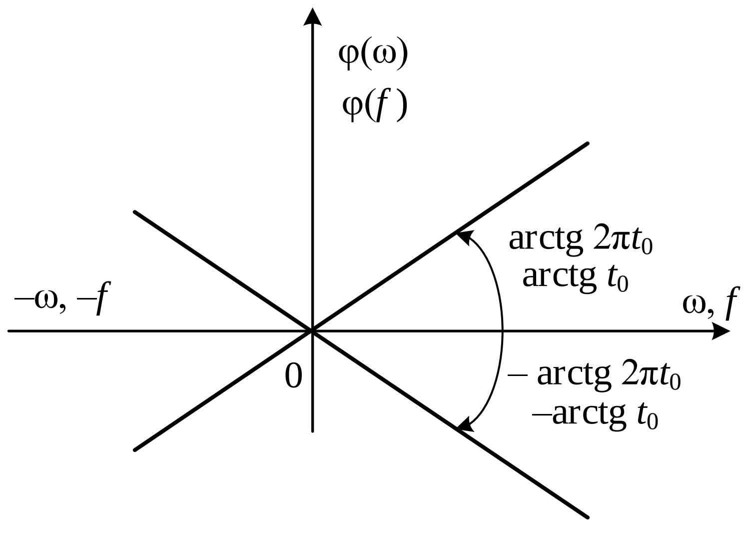


Рисунок 5.26

Частотний спектр одиничної функції $1(t)$ неможливо отримати безпосередньо з (5.64), оскільки ця функція в часі нескінченна і інтеграл від неї взяти неможливо. Тому спектральну щільність одиничної функції знаходять, беручи до уваги, що $\delta(t) = 1'(t)$, отже $1(t) = \int \delta(t)\,dt$. Використовуючи теорему інтегрування, по спектру дельта-функції (5.78) можна отримати спектральну щільність одиничної функції $1(t)$:

$$S(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega}. \qquad (5.81)$$

З цього виразу випливає, що АЧС одиничної функції:

$$S(\omega) = \frac{1}{|\omega|}, \qquad (5.82)$$

а її ФЧС :

$$\psi(\omega) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \text{ для } \omega > 0, \\ \dfrac{\pi}{2} \text{ для } \omega < 0. \end{cases} \qquad (5.83)$$

Графіки АЧС та ФЧС одиничної функції наведені на рис. 5.27, 5.28.

У випадку зсуву одиничної функції в часі праворуч ($-t_0$) або ліворуч ($+t_0$) АЧС не зміниться, а ФЧС змінюється (рис. 5.30), і до цього спектру додаються доданки $-\omega t_0$ або $+\omega t_0$ відповідно. У першому випадку в області позитивних частот $\psi(\omega) = -\pi/2 - \omega t_0$, а в області від'ємних частот $\psi(\omega) = \pi/2 + \omega t_0$. В другому випадку відповідно: $\psi(\omega) = -\pi/2 + \omega t_0$, а в області від'ємних частот $\psi(\omega) = \pi/2 - \omega t_0$.

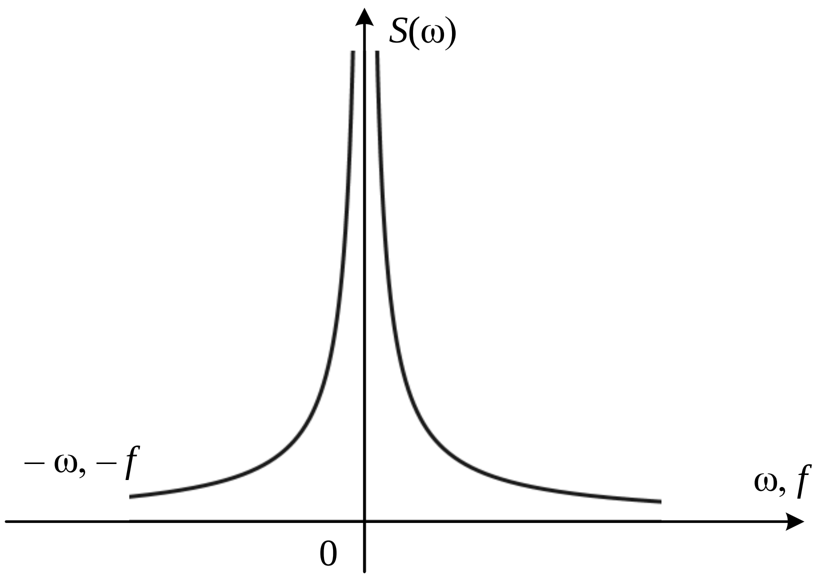


Рисунок 5.27

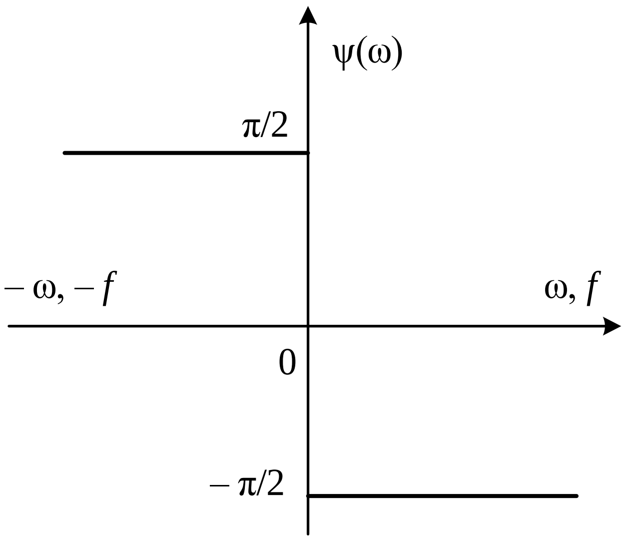


Рисунок 5.28

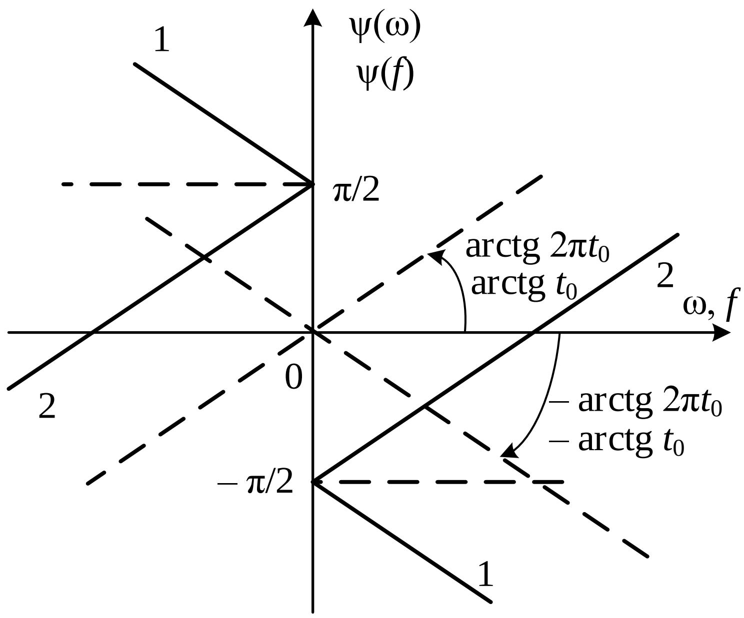


Рисунок 5.29

5.2.5. ***Частотний спектр окремого прямокутного імпульсу***

Розглянемо окремий прямокутний симетричний імпульс $a(t)$, який має амплітуду A та тривалість τ_i, як різницю двох функцій включення (рис. 5.30):

$$a(t) = A \cdot 1\left(t + \frac{\tau_i}{2}\right) - A \cdot 1\left(t - \frac{\tau_i}{2}\right). \qquad (5.84)$$

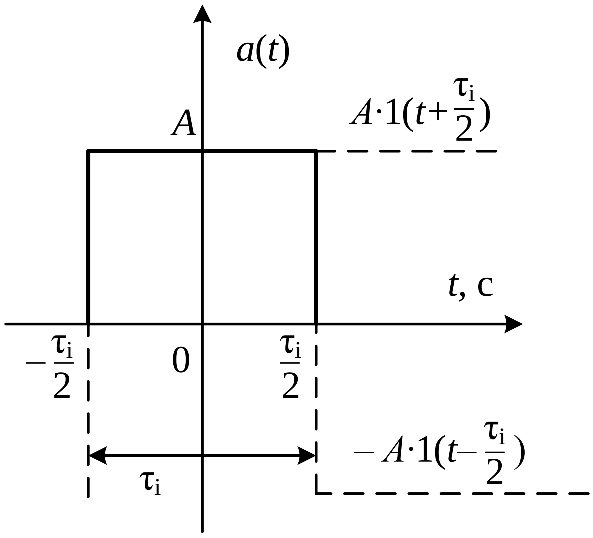


Рисунок 5.30

При цьому функція $a(t)$ визначається так:

$$a(t) = \begin{cases} A \text{ для } -\frac{\tau_і}{2} < \mathrm{t} < \frac{\tau_і}{2}, \\ 0 \text{ для } -\frac{\tau_і}{2} > \mathrm{t} > \frac{\tau_і}{2}. \end{cases} \tag{5.85}$$

Спектральну щільність цього імпульсу отримаємо зі спектральної щільності одиничної функції (5.81), використовуючи теорему однорідності та запізнення. Спектральною щільністю функції включення, яка зсунута ліворуч на $\frac{\tau_і}{2}$, буде $\frac{A}{j\omega}e^{-j\omega\frac{\tau_і}{2}}$, а спектральною щільністю функції, яка зсунута праворуч на $\frac{\tau_і}{2}$, буде $\frac{A}{j\omega}e^{j\omega\frac{\tau_і}{2}}$. Спектральна щільність прямокутного імпульсу, відповідно до (5.84), матиме вигляд:

$$a(t) \xrightarrow{F} \frac{A}{j\omega}e^{j\omega\frac{\tau_і}{2}} - \frac{A}{j\omega}e^{-j\omega\frac{\tau_і}{2}} = \frac{A}{j\omega}\left(e^{j\omega\frac{\tau_і}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau_і}{2}}\right). \tag{5.86}$$

Використовуючи формулу Ейлера $\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{j2}$, після нескладних перетворень отримаємо вираз для спектральної щільності прямокутного імпульсу:

$$a(t) \xrightarrow{F} \frac{A}{j\omega}2j\sin\frac{\omega\tau_і}{2} = \frac{A\tau_і}{\frac{\omega\tau_і}{2}}\sin\frac{\omega\tau_і}{2}. \tag{5.87}$$

Якщо позначити $\frac{\omega\tau_і}{2} = x$, то вираз для визначення спектральної щільності прямокутного імпульсу набуває компактного вигляду:

$$S(j\omega) = A\tau_\text{і}\frac{\sin x}{x}, \tag{5.88}$$

де $A\,\tau_\text{і}$ – площа імпульсу.

Спектральна щільність цього імпульсу визначається особливостями функції $\frac{\sin x}{x}$. Невизначеність цієї функції у $x = 0$ $\left(\frac{\sin x}{x}\Big|_{x=0} \to \frac{0}{0}\right)$ розкривається за правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\Big|_{x=0} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}\Big|_{x=0} = 1.$$

Функція $\frac{\sin x}{x}$ має нульові значення, коли $\sin x = 0$, (крім точки $x = 0$), що відповідає $x_0 = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, n\pi$. Графіком цієї функції, починаючи з $x = \pi$, є синусоїда з амплітудою, яка зменшується по мірі зростання x, як $1/x$ (рис. 5.31).

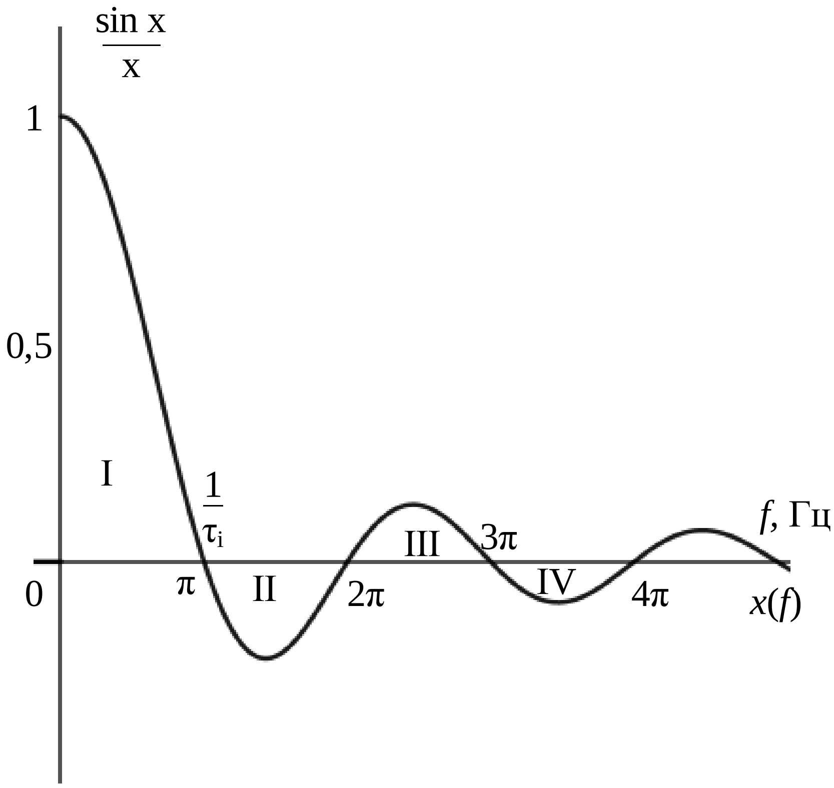


Рисунок 5.31

Перша нульова точка відповідає частоті f_{01}, яка визначається зі співвідношення $\frac{\omega_{01}\tau_\text{і}}{2} = \frac{2\pi f_{01}\tau_\text{і}}{2} = \pi$, звідки випливає, що $f_{01} = \frac{1}{\tau_\text{і}}$. Частоти наступних нульових точок: $f_{02} = \frac{2}{\tau_\text{і}}$, $f_{03} = \frac{3}{\tau_\text{і}}$, ..., $f_{0n} = \frac{n}{\tau_\text{і}}$. Ділянка спектру, яка знаходиться між двома сусідніми нульовими точками, називається пелюсткою. Перша пелюстка має межі (по частоті) від 0 до $\frac{1}{\tau_i}$, друга – від $\frac{1}{\tau_i}$ до $\frac{2}{\tau_i}$, третя – від $\frac{2}{\tau_i}$ до $\frac{3}{\tau_i}$ і т.д.

АЧС прямокутного імпульсу:

$$S(\omega) = |S(j\omega)| = A\tau_i \frac{|\sin x|}{x}. \qquad (5.89)$$

В межах пелюсток з непарними номерами $\frac{\sin x}{x} > 0$, і тому аргумент спектральної щільності $\psi(\omega) = 0$, оскільки $e^{j0} = +1$. Для пелюсток з парними номерами $\frac{\sin x}{x} < 0$, і тому для них $\psi(\omega) = \pi$, оскільки $e^{j\pi} = -1$.

Тому вираз для ФЧС прямокутного імпульсу можна скласти в такому вигляді:

$$\psi(\omega) = (n-1)\pi, \qquad (5.90)$$

де n – номер пелюстки.

На рис. 5.32 наведені графік АЧС і ФЧС прямокутного симетричного імпульсу.

У випадку зсуву в часі прямокутного імпульсу $a(t \pm t_0)$ його АЧС не зміниться, а до ФЧС (5.90) додається доданок $\pm\omega t_0$, тобто

$$\psi(\omega) = (n-1)\pi \pm \omega t_0.$$

Доданок ωt_0 має знак «плюс» у випадку зсуву імпульсу ліворуч, і знак «мінус» за його зсуву праворуч.

Таким чином, ФЧС імпульсу із запізненням обчислюється так:

$$\begin{aligned} \psi(\omega) &= (n-1)\pi - \omega t_0, \text{ якщо } \omega > 0, \\ \psi(\omega) &= (n-1)\pi + \omega t_0, \text{ якщо } \omega < 0. \end{aligned} \qquad (5.91)$$

Кут нахилу доданку ωt_0:

$$\alpha = -\operatorname{arctg} t_0, \text{ якщо } \omega > 0,$$
$$\alpha = \operatorname{arctg} t_0, \text{ якщо } \omega < 0.$$

Аналогічні вирази для ФЧС імпульсу з випередженням:

$$\begin{aligned} \psi(\omega) &= (n-1)\pi + \omega\, t_0, \text{ якщо } \omega > 0, \\ \psi(\omega) &= (n-1)\pi - \omega\, t_0, \text{ якщо } \omega < 0. \end{aligned} \qquad (5.92)$$

Кут нахилу доданку ωt_0:

$$\alpha = \operatorname{arctg} t_0, \text{ якщо } \omega > 0,$$
$$\alpha = -\operatorname{arctg} t_0, \text{ якщо } \omega < 0.$$

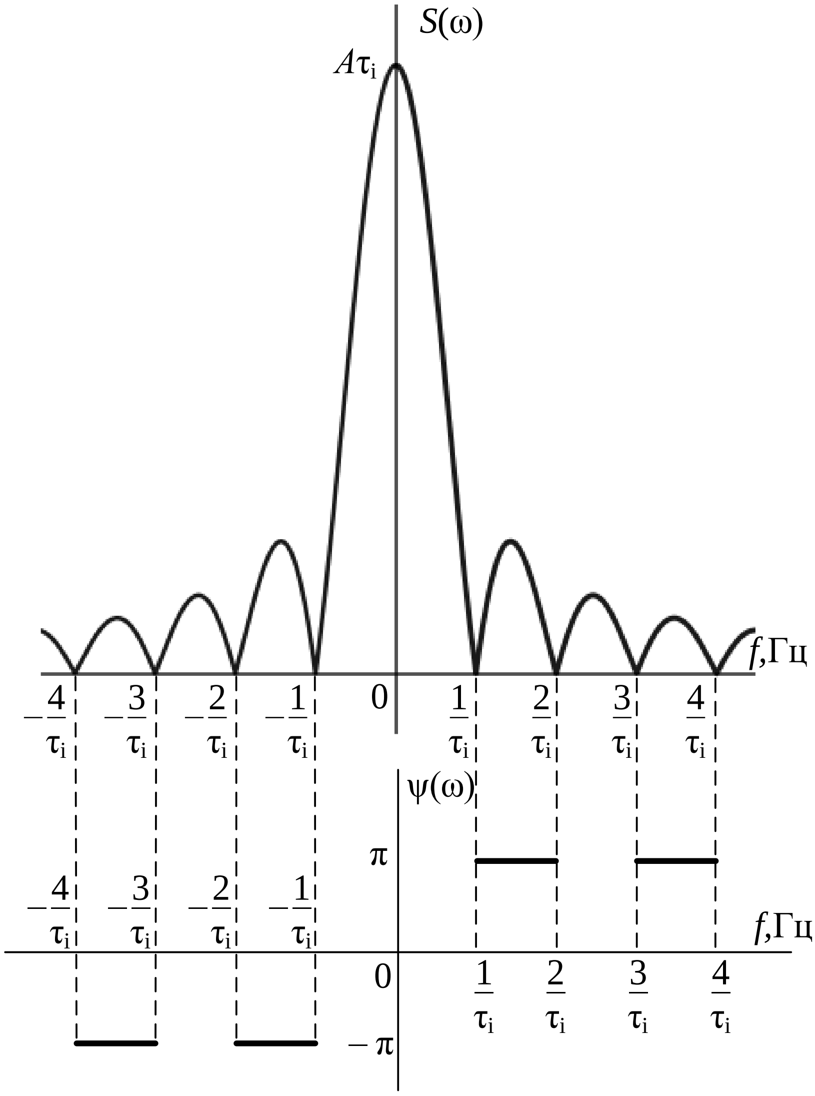


Рисунок 5.32

Графіки ФЧС наведені на рис. 5.33.

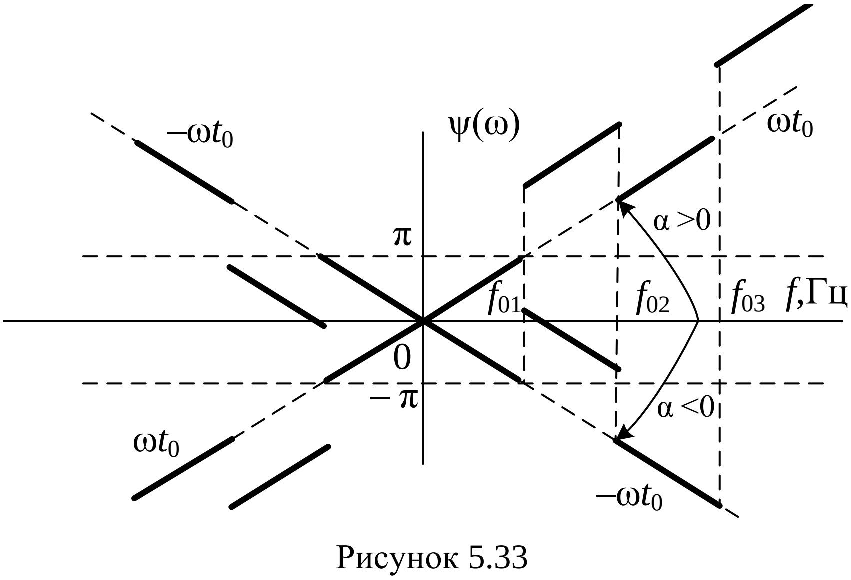


Рисунок 5.33

Приклад

Побудувати частотний спектр одиничного прямокутного імпульсу, якщо A = 20 В, $\tau_і = 5 \cdot 10^{-6}$ с, $t_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ с.

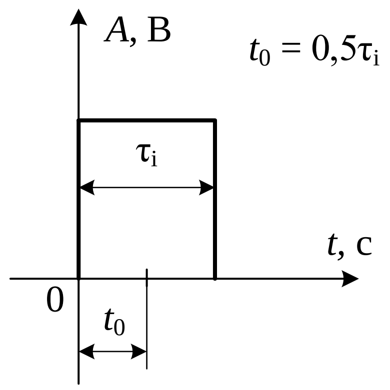


Рисунок 5.34

Розв'язання

Для такого виду імпульсів АЧС має вигляд:

$$S(\omega) = |S(j\omega)| = A\tau_і \frac{|\sin x|}{x}.$$

Площа імпульсу дорівнює $A \cdot \tau_і = 20 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 10^{-4}$ В·с.

Частота границі першої пелюстки $f_{01} = 1/\tau_і = 1/5 \cdot 10^{-6} = 200$ кГц, другої – $f_{02} = 400$ кГц, третьої – $f_{03} = 600$ кГц, і т.д.

ФЧС цього зсунутого вправо на t_0 імпульсу:

$$\psi(\omega) = (n - 1)\pi + 2\pi \cdot f \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-6} = (n - 1)\pi + 5\pi \cdot 10^{-6} \cdot f,$$

де $[f]$ = Гц,

або $\psi(\omega) = (n - 1)\pi + 5\pi \cdot 10^{-3} \cdot f$, де $[f]$ = кГц.

Другий доданок цих виразів – це рівняння прямих, які проходять через початок координат. Тому їх можна побудувати по двох точках: перша – з координатами $\psi(\omega) = 0$, $f = 0$; друга – з координатами $\psi(\omega) = 5\pi \cdot 10^{-3} \cdot 200 = -\pi$, $f = f_{01} = 200$ кГц.

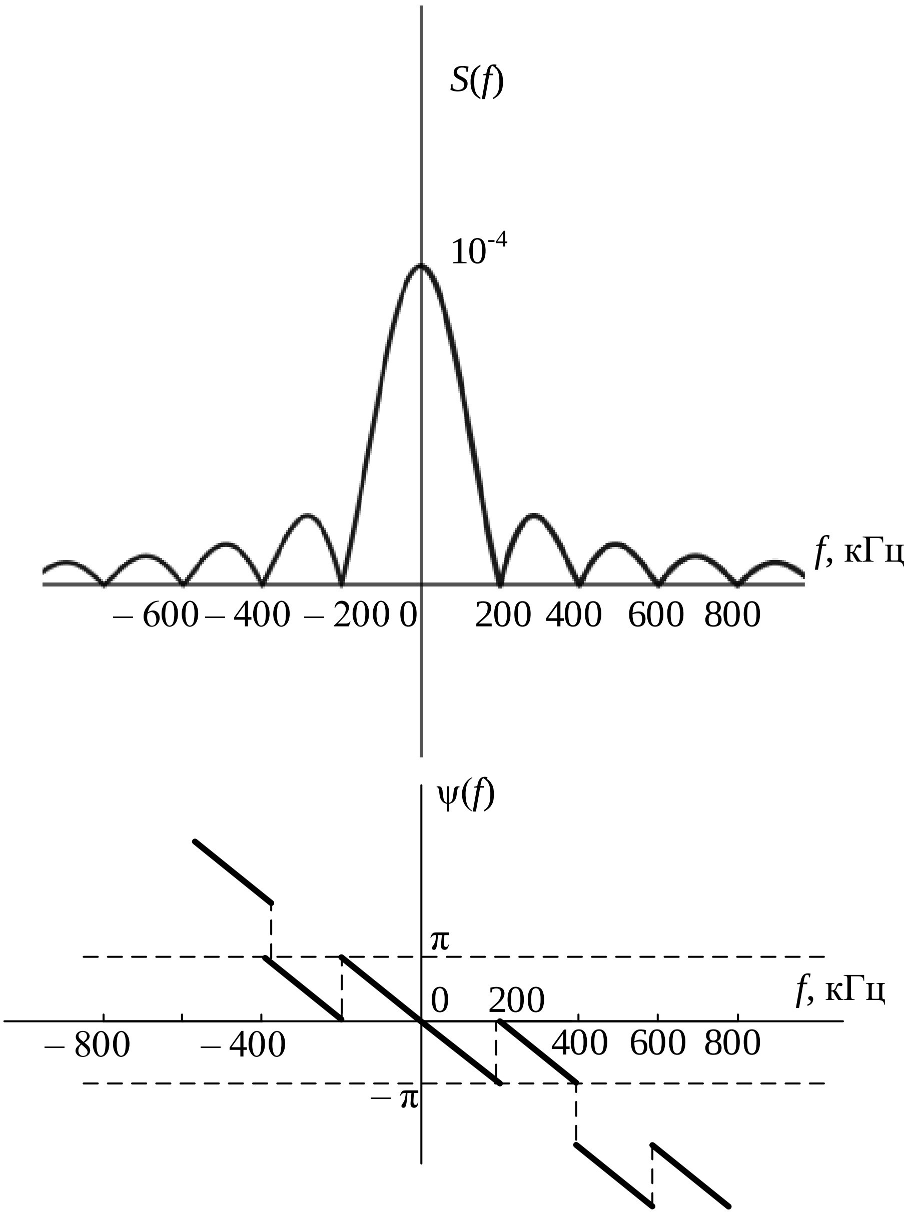


Рисунок 5.35

5.2.6. *Ширина суцільного частотного спектру*

Ширина спектру є одним із найважливіших параметрів сигналу. Неперіодичний сигнал має суцільний спектр, який займає частоти від нуля до нескінченності. Такий спектр оцінюють з енергетичної точки зору не потужністю, а енергією. Ширина спектру такого сигналу визначається як інтервал частот, в якому зосереджена найбільша частина (90%-95%)енергії сигналу. Розрахунок енергії сигналу проводиться на основі теореми Релея – рівності Ляпунова-Парсеваля для інтегралу Фур’є:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt = 2\int_{0}^{\infty} [S(jf)]^2 df \qquad (5.93)$$

Залежність $[S(jf)]^2 = S^2(f)$ або $[S(j\omega)]^2 = S^2(\omega)$ називають енергетичним спектром сигналу. Для отримання ширини спектру, якій відповідає певна частина енергії сигналу, треба змінити межі інтегрування правої частини (5.93), замінивши нескінченність на конкретну частоту f_1. При цьому буде враховуватися не вся енергія сигналу, а тільки якась її частина. Позначимо через E% відношення цієї енергії до повної енергії сигналу:

$$E\% = \frac{\int_0^{f_1} S^2(f)df}{\int_0^{\infty} S^2(f)df}. \qquad (5.94)$$

Якщо прирівняти це співвідношення до 90% або до 95%, то отримаємо ширину спектру сигналу для врахування відповідної долі енергії.

Виконаємо оцінку ширини спектру одиничного прямокутного імпульсу для E% = 90 ÷ 95% (рис. 5.36).

Для прямокутного імпульсу з висотою A і тривалістю $\tau_і$ згідно з (5.89) можна записати

$$S^2(f) = (A\tau_і)^2 \frac{\sin^2 x}{x^2}, \qquad (5.95)$$

де $x = \frac{\omega\tau_і}{2} = \frac{2\pi f\tau_і}{2} = \frac{\pi f_0}{f_{01}}$, $f_{01} = 1/\tau_і$.

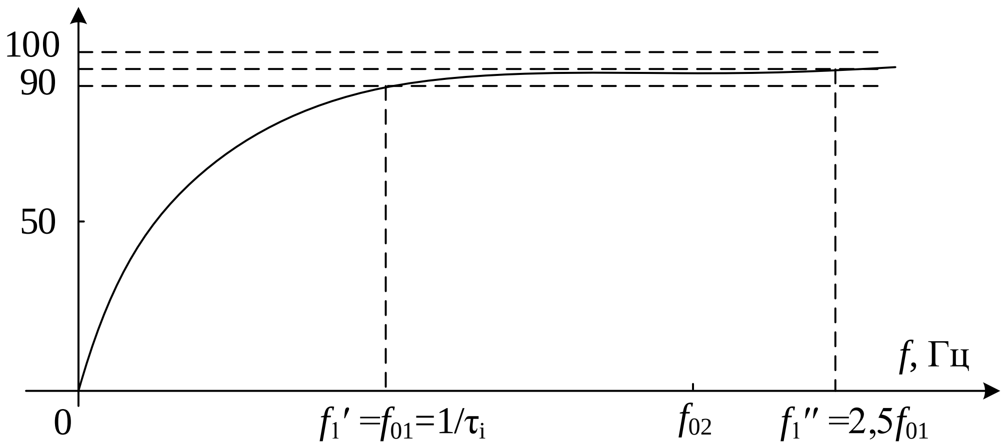


Рисунок 5.36

Для прямокутного імпульсу 90% його енергії зосереджено в межах першої пелюстки:

$$f_1' = \frac{1}{\tau_i} = f_{01}. \qquad (5.96)$$

Для врахування 95% енергії сигналу ширина спектру збільшиться і сягає

$$f_1'' = \frac{2{,}5}{\tau_i}. \qquad (5.97)$$

З наведених даних можна зробити висновок, що чим більшою є тривалість імпульсу, тим меншою є енергія його спектру і навпаки. Так, спектр дельта-функції, у якої $\tau_i \to 0$, має нескінченну ширину $\Delta f_c \to \infty$. Ширина спектру постійної величини, яку можна розглядати як імпульс нескінченної тривалості, – $\Delta f_c \to 0$.

5.2.7. *Спектр періодичної послідовності прямокутних імпульсів*

Періодична послідовність таких імпульсів наведена на рис. 5.37.

Періодична послідовність імпульсів характеризується шпаруватістю:

$$q = \frac{T}{\tau_i}. \qquad (5.98)$$

Спектр періодичної послідовності прямокутних імпульсів отримаємо зі спектральної щільності одиночного імпульсу (5.88), використовуючи співвідношення:

$$\underline{S}_{mk} = \frac{1}{T} S(j\omega)\Big|_{\omega \to k\Omega}. \qquad (5.99)$$

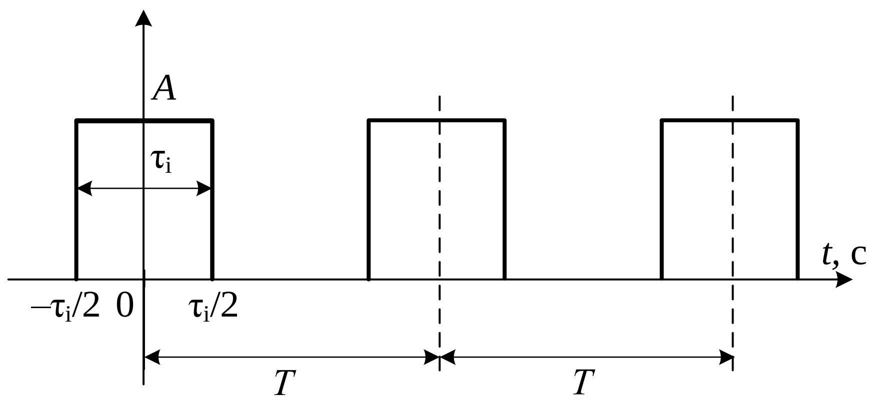


Рисунок 5.37

Вираз для отримання спектру періодичної послідовності прямокутних імпульсів:

$$\underline{S}_{mk} = \frac{A\tau_{\text{i}}}{T}\frac{\sin\frac{k\Omega\tau_{\text{i}}}{2}}{\frac{k\Omega\tau_{\text{i}}}{2}}. \qquad (5.100)$$

Перетворюємо $\frac{k\Omega\tau_{\text{i}}}{2} = \frac{k2\pi F\tau_{\text{i}}}{2} = k\pi\frac{\tau_{\text{i}}}{T} = \frac{k\pi}{q}$, де $\frac{\tau_{\text{i}}}{T} = \frac{1}{q}$.

Отже, вираз для розрахунку спектру періодичної послідовності прямокутних імпульсів:

$$\underline{S}_{mk} = \frac{A}{q}\frac{\sin\frac{k\pi}{q}}{\frac{k\pi}{q}} = \frac{A}{q}\frac{\sin x}{x}, \qquad (5.101)$$

де $x = \frac{k\pi}{q}$.

Із порівняльного аналізу виразів (5.88) і (5.101) випливає, що частотний спектр періодичної послідовності прямокутних імпульсів подібний спектру одиночного прямокутного імпульсу, але між цими обома спектрами існує істотна відмінність. Так, в першому спектрі $x = \frac{\omega\tau_{\text{i}}}{2}$ і є безперервною функцією частоти, а в другому аргумент $x = \frac{k\pi}{q}$ ($k = 0, 1, 2, 3,\ldots$) є дискретною функцією частоти. Тому перший спектр – суцільний і тому визначається спектральною щільністю $S(j\omega)$, а другий – дискретний і визначається дискретним набором комплексних гармонік $\underline{S}_{mk}$.

При побудові дискретного спектру (АЧС, ФЧС) використовуються обвідні комплексних амплітуд гармонік, які визначаються виразами $\frac{A}{q}\frac{|\sin x|}{x}$ (АЧС) і $\psi(\omega) = (n-1)\pi \pm \omega t_0$ (ФЧС). Ці обвідні обмежують довжину спектральних ліній амплітуд комплексних гармонік S_{mk} (АЧС) та початкових фаз коливання ψ_k (ФЧС). Нульові точки спектру (границі пелюсток) визначаються такими виразами:

$$\frac{k_{01}\pi}{q} = \pi,$$

звідки $k_{01} = q$, $f_{01} = qF = q/T = 1/\tau_{\text{i}}$, де F – частота проходження імпульсів;

$$\frac{k_{02}\pi}{q} = 2\pi,$$

звідки $k_{02} = 2q$, $f_{02} = 2qF = 2/\tau_{\text{i}}$;

$$\frac{k_{0n}\pi}{q} = n\pi,$$

звідки $k_{0n} = nq$, $f_{0n} = nqF = n/\tau_і$.

Дискретний спектр можна будувати і для дійсної форми. При цьому побудова обмежується областю позитивних частот ($\omega > 0$) і амплітуди гармонік, крім нульової збільшуються в два рази.

5.2.8. *Потужність періодичного сигналу і ширина дискретного сигналу*

Потужність періодичного сигналу виражається через діючі значення напруг та струмів. Ця ж потужність може бути виражена через діючі значення гармонік сигналу. Потужність сигналу з дискретним спектром визначається за допомогою співвідношення Парсеваля для комплексного ряду Фур'є:

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[a(t)]^2dt = \sum_{-\infty}^{\infty} S_{mk}^2, \qquad (5.102)$$

Ліва частина цього співвідношення – це квадрат діючого значення періодичного сигналу A^2, а права частина – це сума квадратів нульової гармоніки ($A_0 = S_0$) і квадратів половин амплітуд основних гармонік ($S_{mk} = A_{mk}/2$). Замінюючи нижню межу суми на $k = 1$ і множачи суму на два, отримуємо:

$$A^2 = A_0^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A_{mk}}{2}\right)^2, \qquad (5.103)$$

Складові суми A_{mk} в (5.103) виразимо через діючі значення $A_{mk} = \sqrt{2}A_k$ і отримаємо:

$$A^2 = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} {A_k}^2, \qquad (5.104)$$

а звідси маємо вираз для розрахунку діючого значення періодичного сигналу:

$$A = \sqrt{A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} {A_k}^2}. \qquad (5.105)$$

Від діючого значення періодичного сигналу можна перейти до розрахунку його потужності. Припустимо, що сигнал – струм в резисторі з опором R. Тоді, відповідно до (5.105), потужність сигналу:

$$P = RI^2 = RI_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} R{I_k}^2.$$

Якщо кількість гармонік, що враховуються, обмежена і дорівнює n, то

$$P = P_0 + \sum_{k=1}^{n} R{I_k}^2.$$

Таким чином, активну потужність періодичного сигналу можна представити у вигляді суми потужностей його постійної та гармонійних складових.

Ширина спектру періодичного сигналу – це область частот, в межах якої зосереджена певна частина усієї потужності сигналу. Зазвичай обмежуються урахуванням 90% потужності сигнала і тому кількість гармонік обмежена. Так, для періодичної послідовності прямокутних імпульсів 90% потужності сигналу зосереджені у першій пелюстці, а 95% – у 2,5 пелюстках. Тому за урахування 90% потужності сигналу ширина частотного спектру періодичної послідовності прямокутних імпульсів складає: $\Delta f_c = 1/\tau_i$ або $\Delta\omega_c = 2\pi/\tau_i$.

5.3. Зв'язок між спектрами сигналів на вході та виході лінійного електричного кола

Частотні спектри сигналів на вході та виході лінійного електричного кола зв'язані між собою лінійною залежністю, яка розглядалась в розділі 5.1 «Частотні характеристики електричних кіл»:

$$\underline{Y}_m = K(j\omega) \cdot \underline{X}_m \,, \qquad (5.106)$$

де $K(j\omega)$ – комплексна передавальна функція;

$\underline{X}_m$, $\underline{Y}_m$ – комплексні амплітуди вхідної і вихідної величин відповідно, які змінюються за гармонійним законом. У випадку періодичного сигналу, спектр якого дискретний, для кожної гармонійної складової вираз (5.106) набуває вигляду:

$$\underline{Y}_{mk} = K(jk\Omega) \cdot \underline{X}_{mk} \,, \qquad (5.107)$$

де $K(j\omega)$ – комплексний коефіцієнт передачі для k-ої гармоніки спектру;

$\underline{X}_{mk}$, $\underline{Y}_{mk}$ – комплексні амплітуди вхідної і вихідної величин k-ої гармоніки відповідно.

Кожну складову співвідношення (5.107) представимо у показниковій формі:

$$Y_{mk}e^{j\psi_{k\text{вих}}} = X_{mk}e^{j\psi_{k\text{вх}}}K(k\Omega)e^{j\varphi_k} = \\ = X_{mk}K(k\Omega)e^{j(\varphi_k+\psi_{k\text{вх}})}. \tag{5.108}$$

Таким чином, для отримання спектру амплітуд (АЧС) сигналу на виході необхідно амплітуду кожної k-ої гармоніки спектру сигналу на вході помножити на модуль комплексної передавальної функції (АЧХ) на частоті даної гармоніки. Для отримання ФЧС вихідного сигналу треба до значення фази k-ої гармоніки спектру сигналу на вході додати значення аргументу комплексної передавальної функції кола (ФЧХ) на частоті даної гармоніки.

У випадку неперіодичного сигналу із суцільним спектром вираз (5.106) набуває вигляду:

$$Y(j\omega) = K(j\omega)X(j\omega)\,, \tag{5.109}$$

де $Y(j\omega)$, $X(j\omega)$ – спектральна щільність сигналу на виході та вході відповідно.

За аналогією з (5.108) для суцільного спектру можна записати:

$$Y(\omega)e^{j\psi(\omega)_{\text{вих}}} = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}X(\omega)e^{j\psi(\omega)_{\text{вх}}} = \\ = K(\omega)X(\omega)e^{j[\varphi(\omega)+\psi(\omega)_{\text{вх}}]}, \tag{5.110}$$

звідки випливає, що

$$Y(\omega) = K(\omega)X(\omega)\,, \tag{5.111}$$

$$\psi(\omega)_{\text{вих}} = \varphi(\omega) + \psi(\omega)_{\text{вх}}\,. \tag{5.112}$$

Тобто, для отримання модуля спектральної щільності вихідного сигналу треба помножити модуль спектральної щільності вхідного сигналу на модуль комплексної передавальної функції (АЧХ). Для отримання фазо-частотного спектру вихідного сигналу треба до аргументу спектральної щільності вхідного сигналу додати аргумент комплексної передавальної функції (ФЧХ).

В узагальненому вигляді можна підсумувати, що для отримання частотного спектру вихідного сигналу треба помножити частотний спектр вхідного сигналу на комплексну передавальну функцію. Для дискретного спектру – це набір дискретних співвідношень, а для суцільного спектру – це безперервна функція частоти.

5.4. Порядок розрахунку перехідних процесів спектральним (частотним) методом

Використовуючи частотний метод слід дотримуватися такої послідовності дій:

1. З часового виразу вхідного сигналу $x(t)$ визначаються комплексні амплітуди гармонік для дискретного спектру зі співвідношення:

$$\underline{S}_{mk} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-jk\Omega t} dt, \tag{5.113}$$

а для суцільного спектру знаходять спектральну щільність у відповідності з виразом

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \tag{5.114}$$

2. Визначається потрібна комплексна передавальна функція для кола $K(j\omega)$ у випадку суцільного спектру. Для дискретного спектру з виразу $K(j\omega)$ визначають набір комплексних коефіцієнтів передачі для необхідної кількості гармонік.

3. Розраховується спектр вихідного сигналу по (5.108) для дискретного спектру, а по (5.109) для суцільного. В разі необхідності зі спектра вихідного сигналу можна визначити його часовий вираз за допомогою зворотного перетворення Фур'є: для дискретного спектру з виразу

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} Y_{ml}\, e^{j\operatorname{sign} k \psi_k} e^{jk\Omega t}. \tag{5.115}$$

а для суцільного спектру з виразу

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{5.116}$$

5.5. Поняття про неспотворююче електричне коло

Проходячи через електричне коло сигнал може змінювати свою форму, тобто спотворюватися, що є дуже шкідливим для передачі інформації. Якщо вважати, що інформація, яку несе сигнал, відображається його формою, то неспотвореною передачею сигналу вважають збереження його форми [5], [8],

[14] , [15]. При цьому є припустимою пропорційна зміна рівня сигналу на виході (зменшення або збільшення) у K_0 разів та його затримка на час t_0 порівняно з вхідним (рис. 5.38). Умовою неспотвореної передачі є співвідношення

$$y(t) = K_0 x(t - t_0). \qquad (5.117)$$

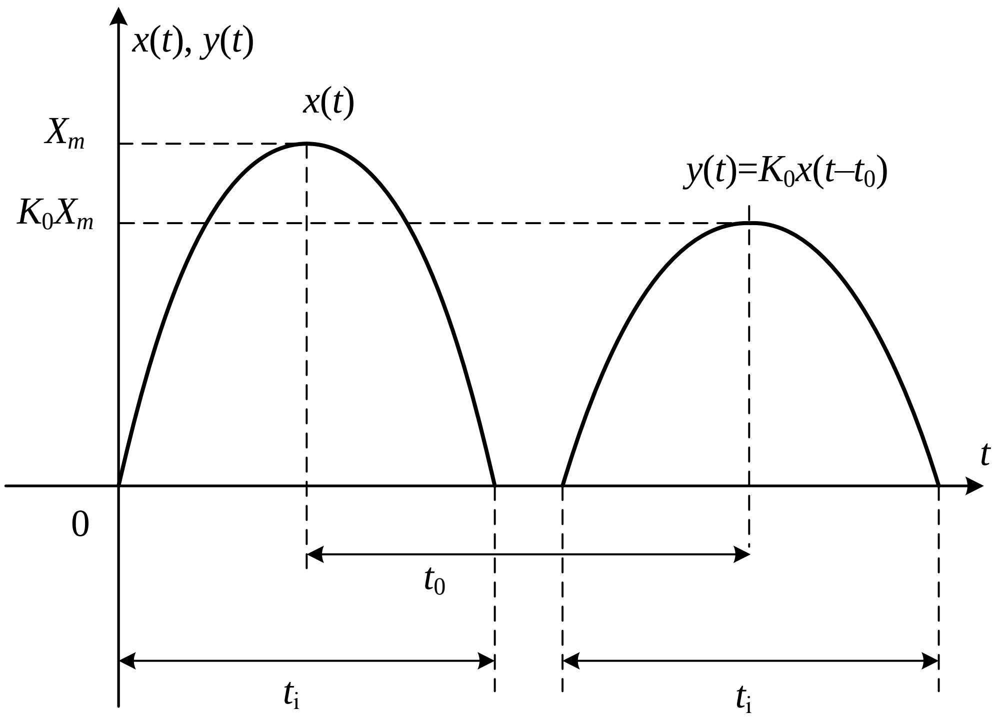


Рисунок 5.38

Знайдемо тепер комплексну передавальну функцію кола $K(j\omega)$, яка відповідає цим умовам. Для цього перейдемо від часових виразів сигналів на вході і виході до їхніх зображень за Фур'є. Якщо спектральна щільність вхідного сигналу відома, тобто $x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)$, то користуючись теоремою запізнення і виразом (5.112) спектральна щільність вихідного сигналу може бути представлена у вигляді:

$$Y(j\omega) = K_0 X(j\omega) e^{-j\omega t_0} = K_0 e^{-j\omega t_0} X(j\omega)\,. \qquad (5.118)$$

З (5.117) випливає, що комплексна передавальна функція неспотворюючого кола визначається так:

$$K(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = K_0 e^{-j\omega t_0}\,, \qquad (5.119)$$

тобто амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) такого кола:

$$K(\omega) = K_0\,, \qquad (5.120)$$

а його фазо-частотна характеристика (ФЧХ):

$$\varphi(\omega) =- \omega t_0\,. \qquad (5.121)$$

Таким чином, електричне коло не спотворюватиме сигнал, що транслює, якщо його АЧХ незмінна на усьому діапазоні частот, а його ФЧХ – лінійна функція частоти (рис. 5.40).

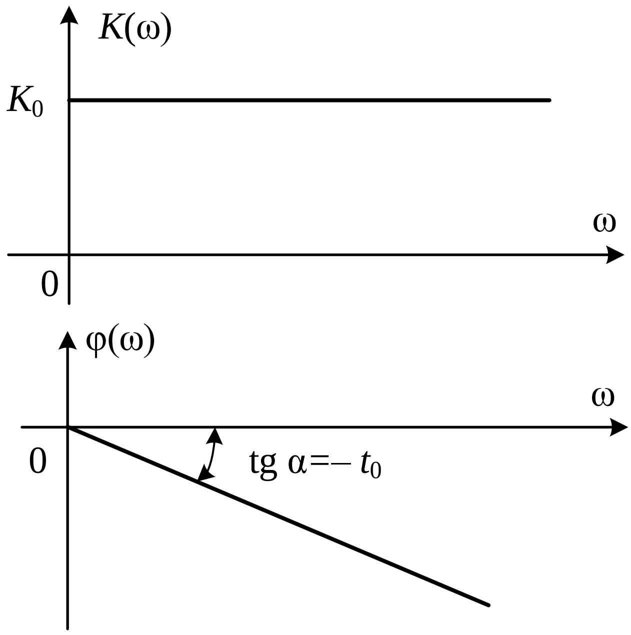


Рисунок 5.39

Умовам неспотворюваної передачі відповідають резистивні кола, в яких $t_0 = 0$. В колах з накопичувальними елементами умови передачі без спотворень реалізувати неможливо в діапазоні частот $\Delta\omega = 0 \div \infty$. Але в реальних умовах це і не потрібно, оскільки сингали мають скінченну ширину спектру, і тому достатньо, щоб частотні характеристики кола (АЧХ та ФЧХ) були наближені до ідеальних тільки в межах спектру частот вхідного сигналу.

Внаслідок неідеальної АЧХ амплітудні співвідношення гармонійних складових спектра сигналу на виході і вході будуть відрізнятися, що призводить до зміни форми. Такі зміни форми сигналів, зумовлені неідеальністю АЧХ , називаються частотними спотвореннями. Нелінійність ФЧХ призводить до зміни фазових співвідношень спектральних складових у вихідному сигналі кола. Викликані цим зміни форми негармонійного коливання називають фазовими спотвореннями.

Частотні і фазові спотворення притаманні лінійним електричним колам, до складу яких входять накопичувачі енергії. Варто зауважити, що такі спотворення не змінюють спектральний склад сигналу.

5.6. Зв'язок між операторними, часовими та частотними характеристиками лінійних електричних кіл

Операторні та частотні передавальні функції, як і часові характеристики $h(t)$ і $g(t)$ електричного кола не залежать від зовнішніх впливів. Вони визначаються виключно схемою електричного кола та параметрами її елементів, тобто вони характеризують саме коло, і тому пов'язані одна з одною. Розглянемо зв'язок між операторною передавальною функцією $K(p)$ та комплексною передавальною функцією $K(j\omega)$. Пряме інтегральне перетворення Фур'є є окремим випадком перетворення Лапласа за умови, що дійсна частина комплексного оператора $p = \delta + j\omega$ дорівнює нулю, і він перетворюється в уявний оператор $j\omega$. Таким чином, перехід від ОПФ до КПФ електричного кола здійснюється заміною оператора p на $j\omega$, і навпаки при переході від КПФ до ОПФ:

$$K(p)\underset{j\omega\to p}{\overset{p\to j\omega}{\rightleftarrows}}K(j\omega). \qquad (5.122)$$

Зв'язок між ОПФ і часовими характеристиками $h(t)$ і $g(t)$ можна встановити безпосередньо із визначень цих характеристик і зв'язку операторних зображень вихідної величини $Y(p)$ і вхідної величини $X(p)$ (рис. 5.40):

$$Y(p) = K(p)X(p). \qquad (5.123)$$

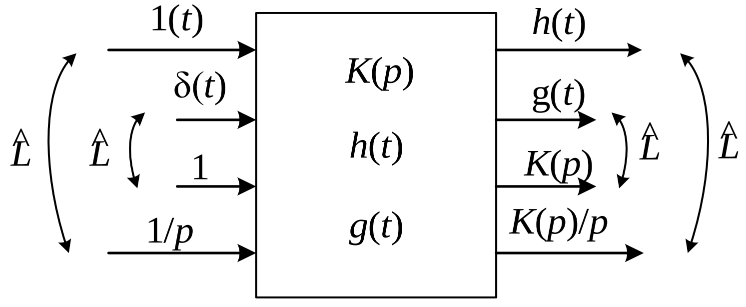


Рисунок 5.40

Перехідна характеристика визначається як відгук кола на вплив одиничної функції $1(t)$ за нульових початкових умов. Зображення цього впливу за Лапласом відоме:

$$1(t) \xrightarrow{\hat{L}} \frac{1}{p}. \tag{5.124}$$

Згідно з визначенням ОПФ операторне зображення перехідної характеристики матиме вигляд:

$$h(t) \xrightarrow{\hat{L}} \frac{K(p)}{p}. \tag{5.125}$$

Якщо на вхід лінійного електричного кола за нульових початкових умов подати збудження у вигляді дельта-функції $\delta(t)$, то відгуком на його виході буде імпульсна характеристика $g(t)$. Зображення за Лапласом дельта-функції $\delta(t) \xrightarrow{\hat{L}} 1$, і тому операторне зображення самої імпульсної характеристики матиме вигляд:

$$g(t) \xrightarrow{\hat{L}} K(p). \tag{5.126}$$

Тобто зображенням імпульсної характеристики є її операторна передавальна функція.

З отриманих співвідношень (5.124)-(5.126) випливає, що по ОПФ $K(p)$ кола можна достатньо просто визначити його перехідну і імпульсну характеристики. Для цього треба знайти оригінали зображень $\frac{K(p)}{p}$ та $K(p)$, які визначають перехідну $h(t)$ та імпульсну $g(t)$ характеристики відповідно. Можна вирішити і зворотну задачу – визначити ОПФ $K(p)$ по часових характеристиках $h(t)$ і $g(t)$.

Зв’язок між часовими характеристиками і комплексною передавальною функцією $K(j\omega)$ можна отримати шляхом формальної заміни оператора p на $j\omega$ у виразах (5.124), (5.126). При цьому замінюється зображення перетворення за Лапласом на зображення перетворення за Фур’є:

$$h(t) \xrightarrow{\hat{F}} \frac{K(j\omega)}{j\omega}, \tag{5.127}$$

$$g(t) \xrightarrow{\hat{F}} K(j\omega). \tag{5.128}$$

Проаналізуємо зв’язок між $K(j\omega)$ і часовими характеристиками більш детально. Для цього розглянемо коло з відомою комплексною передавальною функцією $K(j\omega)$, на вхід якого подана одинична функція $1(t)$ (рис. 5.42).

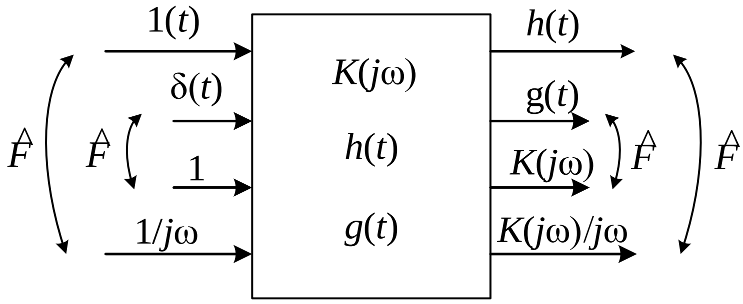


Рисунок 5.41

Спектральна щільність цієї функції $1(t) \xrightarrow{\hat{F}} 1/j\omega$. Відгуком кола на цей вплив буде перехідна характеристика, спектральна щільність якої буде:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} K(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{j\omega}. \qquad (5.129)$$

Якщо до $H(j\omega)$ застосувати зворотне перетворення Фур'є, то можна отримати співвідношення, яке пов'язує перехідну характеристику $h(t)$ з комплексною передавальною функцією:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega. \qquad (5.130)$$

Якщо на теж саме коло подати вплив у вигляді δ-функції, спектральна щільність якої $\delta(j\omega) = 1$, то його відгук буде імпульсною характеристикою $g(t)$. Визначимо спектральну щільність відгуку:

$$S(j\omega) = \delta(j\omega) K(j\omega) = K(j\omega), \qquad (5.131)$$

де $S(j\omega)$ – спектральна щільність імпульсної характеристики $g(t)$.

Тобто спектральна щільність відгуку на δ-функцію дорівнює комплексній передавальній функції цього кола.

Якщо до спектральної щільності імпульсної характеристики $g(t)$ застосувати зворотне перетворення Фур'є , то отримаємо вираз:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \qquad (5.132)$$

На підставі прямого перетворення Фур'є можна записати

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt. \qquad (5.133)$$

Порівняльний аналіз спектральних щільностей відгуків кола на вплив у вигляді одиничної функції $1(t)$ і δ-функції дає такий зв'язок:

$$H(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{j} = \frac{S(j\omega)}{j\omega}, \qquad (5.134)$$

де $S(j\omega)$ – спектральна щільність імпульсної характеристики $g(t)$.

Якщо вираз (5.134), складений для частотної області, записати в часовій області, то отримаємо зв'язок між перехідною і імпульсною характеристиками кола:

$$h(t) = \int_0^t \mathrm{g}(t)\,dt, \qquad (5.135)$$

а звідси:

$$\mathrm{g}(t) = h'(t). \qquad (5.136)$$

Вираз (5.136) дозволяє отримати комплексну передавальну функцію кола по аналогії з (5.133) через перехідну характеристику:

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h'(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \qquad (5.137)$$

Наведені дані та отримані співвідношення показують, що часові характеристики та комплексна передавальна функція $K(j\omega)$ пов'язані між собою перетвореннями Фур'є.

5.7. Приклади розв'язання задач

Для періодичної послідовності позитивних прямокутних імпульсів з параметрами, зазначеними у даних, необхідно виконати наступні розрахунки:

1. Обчислити значення АЧС і ФЧС вхідного сигналу в межах першої пелюстки.

2. Отримати аналітичний вираз для комплексної передавальної функції (КПФ) та значення комплексного коефіцієнта передачі на частотах, що дорівнюють частотам гармонік спектру першої пелюстки. Знайти ширину смуги пропускання і порівняти її з шириною спектру сигналу.

3. Записати аналітичні вирази АЧС і ФЧС вихідного сигналу та розрахувати амплітуди і фази гармонік спектру на виході електричного кола в межах першої пелюстки. За отриманими даними побудувати АЧС і ФЧС сигналу на виході електричного кола.

4. Сформулювати висновок про те, як впливає досліджуване коло на спектр вихідного сигналу. Розрахувати і порівняти діюче значення сигналу на вході і виході електричного кола.

5. Записати ряд Фур'є для вхідного і вихідного сигналів у тригонометричній та комплексній формах.

Приклад 1

Схема кола та його параметри наведені на рис. 5.42:

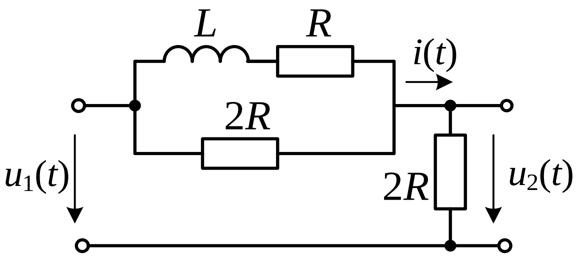


Рисунок 5.42

$x(t)=u_1(t)$,

$y(t)= u_2(t)$,

$R = 2$ кОм,

$L = 1$ мГн.

Вхідним сигналом $u_1(t)$ є періодична послідовність прямокутних імпульсів (див. рис.5.43) з параметрами:

$A = 30$ В,

$\tau_i = 0{,}8$ мкс,

$T = 4{,}8$ мкс,

$t_0 = 0{,}2$ мкс.

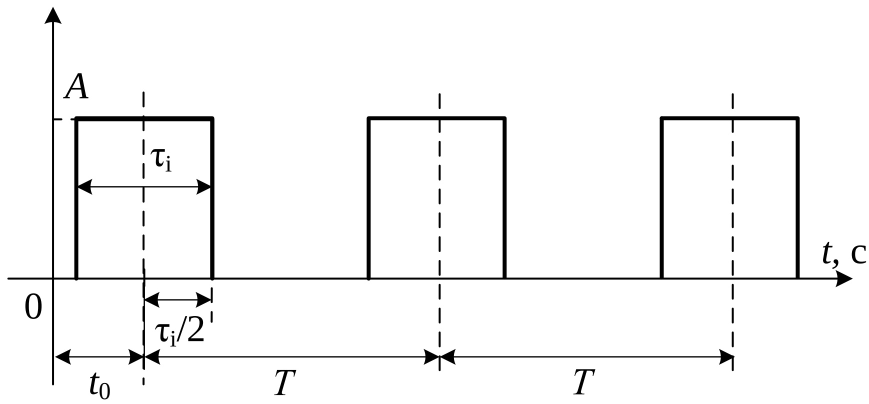


Рисунок 5.43

1. Знаходимо аналітичні вирази амплітудно-частотного спектра (АЧС) і фазо-частотного спектра (ФЧС) вхідної напруги.

У комплексній формі запису амплітуди гармонік ряду Фур'є записуються наступним чином:

$$S_{mk} = \frac{A}{q} \cdot \frac{|\sin x|}{|x|},$$

де q – шпаруватість послідовності імпульсів;

$x = \frac{k\pi}{q}$;

k – номер гармоніки.

Фази гармонік ряду: $\psi_k = (n-1)\pi - 2\pi f t_0$,

де n – номер пелюстки спектра;

t_0 – зсув середини центрального імпульсу відносно початку координат;

f – частота повторювання імпульсів.

В даному випадку шпаруватість послідовності імпульсів

$$q = \frac{T}{\tau_і} = \frac{4{,}8}{0{,}8} = 6; \quad \frac{\pi}{q} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ.$$

Основна частота – частота першої гармоніки:

$$F = \frac{1}{T} = \frac{1}{4{,}8 \cdot 10^{-6}} = 208{,}3 \text{ кГц}.$$

Ширина першої пелюстки спектра:

$$f_{01} = \frac{1}{\tau_і} = \frac{1}{0{,}8 \cdot 10^{-6}} = 1250 \text{ кГц}.$$

В першій пелюстці – шість спектральних ліній (включно з нульовою складовою), в інших пелюстках – по п'ять.

У дійсній формі запису ряду Фур'є $A_{mk} = 2S_{mk}$, крім постійної складової, коли $k = 0$.

Таким чином, для заданого вхідного сигнала маємо:

$$S_{mk} = \frac{30}{6} \cdot \frac{\left|\sin\frac{k\pi}{6}\right|}{\frac{k\pi}{6}} = 30 \cdot \frac{\left|\sin k \cdot 30^\circ\right|}{k\pi} \text{ В}.$$

Циклічна частота першої гармоніки

$$\Omega = 2\pi F = 1{,}309 \cdot 10^6 \ \text{с}^{-1}.$$

Для k-тої гармоніки $\omega_k = k\Omega$.

$$\Omega t_0 = 1{,}309 \cdot 10^6 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6} = 0{,}262 \text{ рад}.$$

Фаза гармонік спектру: $\psi_{k_{\text{вх}}} = (n-1)\pi - k\Omega t_0$;

в межах першої пелюстки $n = 1$ і $\psi_{k_{\text{вх}}} = -k \cdot 0{,}262 = -k\frac{\pi}{12} = -k \cdot 15^\circ$.

Розрахунки АЧС і ФЧС вхідного сигнала зводимо в таблицю 5.1.

Таблиця 5.1

k	$\omega, 10^6$ с$^{-1}$	$S_{mk\text{вх}}$, В	$A_{mk\text{вх}}$, В	$\psi_{k\text{вх}}$
0	0	5	5	0
1	1,31	4,77	9,54	–0,262 = –15°
2	2,62	4,13	8,26	–0,524 = –30°
3	3,93	3,18	6,36	–0,785 = –45°
4	5,24	2,07	4,14	–1,047 = –60°
5	6,54	0,95	1,90	–1,309 = –75°
6	7,85	0	0	1,571 = –90° → 1,571 = 90°
7	9,163	0,68	1,36	1,309 = 75°
8	10,472	1,03	2,06	1,047 = 60°
9	11,781	1,06	2,12	0,785 = 45°
10	13,090	0,83	1,66	0,524 = 30°
11	14,399	0,43	0,86	0,262 = 15°
12	15,708	0	0	0 → –π = –180°

На рис. 5.44 *а*, *б* побудовані графіки АЧС і ФЧС вхідного сигналу в комплексній формі запису ряду Фур'є, а на рис. 5.45 *а*, *б* – у дійсній формі.

Знайдемо діюче значення вхідного сигналу двома способами.

Для періодичної функції:

$$U_{1\text{т}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}A^2\tau} = A\sqrt{\frac{1}{T}} = \frac{A}{\sqrt{q}} = \frac{30}{\sqrt{q}} = 12{,}25\text{ В}.$$

Якщо обмежитися першою пелюсткою спектру вхідного сигналу, то

$$U_{1\text{ наб}} = \sqrt{A_0^2 + \frac{1}{2}\left(A_{m_1}^2 + A_{m_2}^2 + A_{m_3}^2 + A_{m_4}^2 + A_{m_5}^2\right)} =$$

$$= \sqrt{5^2 + \frac{1}{2}(9,54^2 + 8,26^2 + 6,36^2 + 4,14^2 + 1,9^2)} = 11{,}63\text{ В}.$$

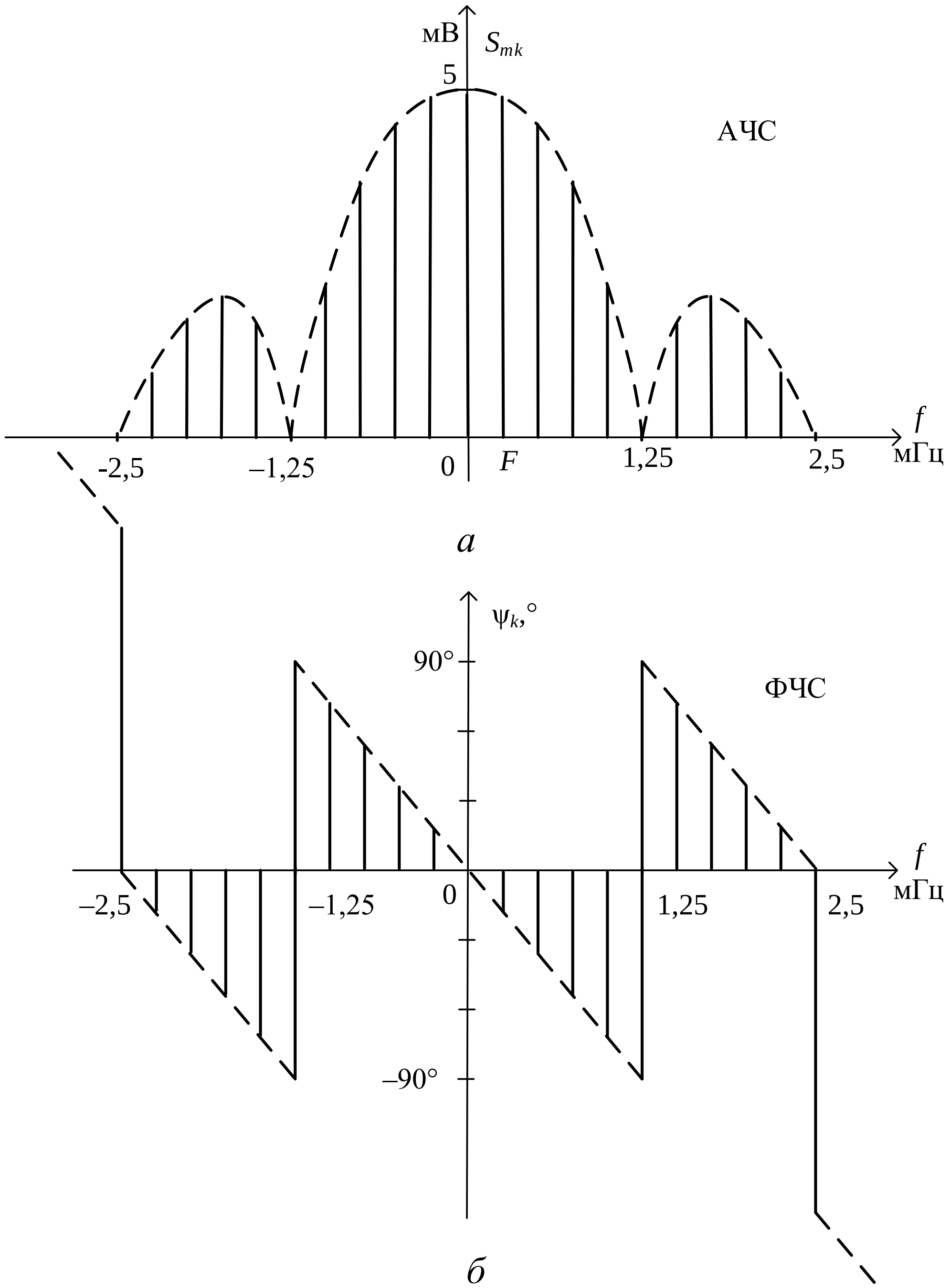


Рисунок 5.44

Наближене значення, знайдене за допомогою спектра, по відношенню до точного значення становить

$$\frac{U_{1\text{ наб}}}{U_{1\text{ т}}} = \frac{11,63}{12,25} = 0,95.$$

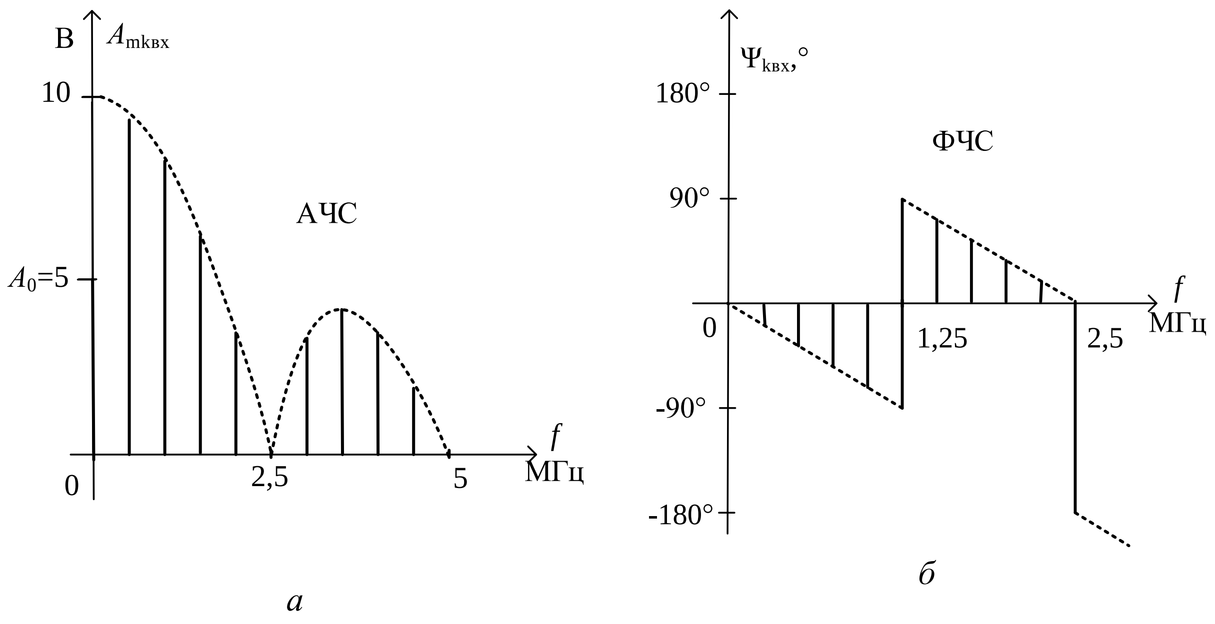


Рисунок 5.45

2. Знайдемо комплексну передавальну функцію кола (КПФ) $K(j\omega)$ і виразимо з неї амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) – $K(\omega)$ і фазо-частотну характеристику (ФЧХ) – $\varphi(\omega)$.

Виразимо в комплексній формі $\underline{U}_2$ через $\underline{U}_1$:

$$\underline{U}_2 = \underline{I} \cdot 2R = \frac{\underline{U}_1}{\dfrac{(R + j\omega L)2R}{3R + j\omega L} + 2R} \cdot 2R = \frac{\underline{U}_1\, 2R(3R + j\omega L)}{(R + j\omega L + 3R + j\omega_L)2R} =$$

$$= \frac{\underline{U}_1(3R + j\omega L)}{2(2R + j\omega L)};$$

$$K(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{3R + j\omega L}{2(2R + j\omega L)} = \frac{\dfrac{3R}{L} + j\omega}{2\left(\dfrac{2R}{L} + j\omega\right)} = \frac{6 + j\omega \cdot 10^{-6}}{2(4 + j\omega \cdot 10^{-6})};$$

$$K(\omega) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6^2 + \omega^2 \cdot 10^{-12}}{4^2 + \omega^2 \cdot 10^{-12}}} \;-\; \text{безрозмірна величина.}$$

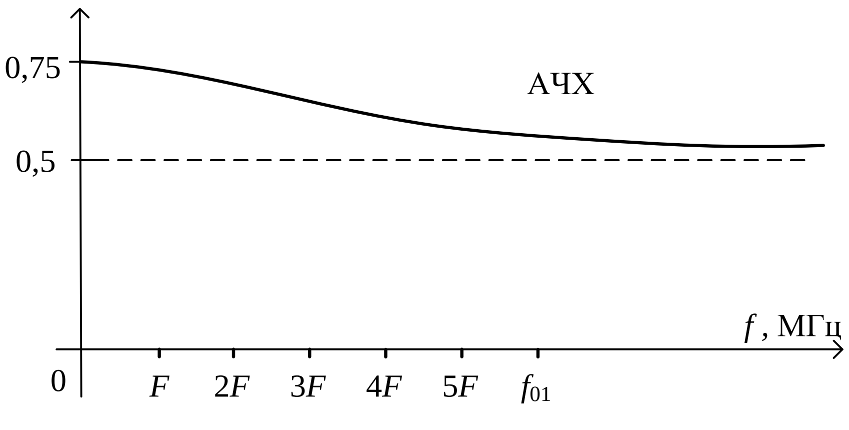
$$\varphi(\omega) = \text{arctg}\frac{\omega \cdot 10^{-6}}{6} - \text{arctg}\frac{\omega \cdot 10^{-6}}{4} < 0.$$

Значення $K(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ для частот гармонік першої пелюстки спектра наведені в таблиці 5.2.

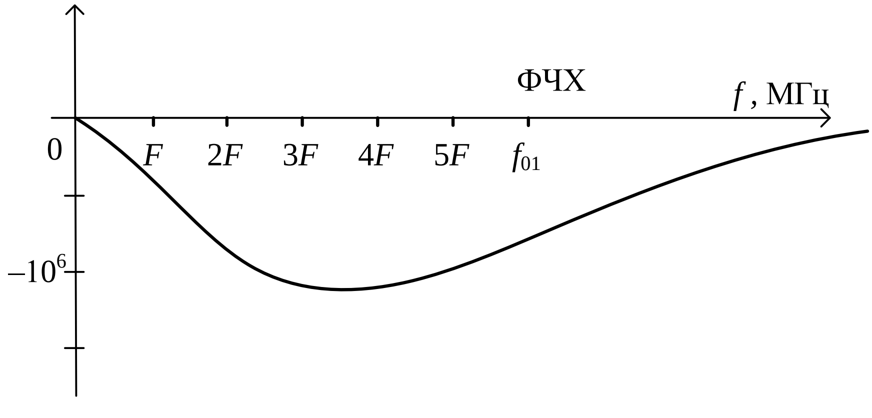
Графіки АЧХ і ФЧХ представлені на рис. 5.46. На графіках по осі абсцис відкладені не кутові частоти ω, а циклічні частоти f.

Таблиця 5.2

k	$\omega, 10^6$ с$^{-1}$	$K(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	0	0,75	0
1	1,309	0,73	–5,8°
2	2,618	0,68	–9,6°
3	3,927	0,64	–11,3°
4	5,236	0,60	–11,5°
5	6,545	0,58	–11,1°
6	7,854	0,56	–10,4°
∞	∞	0,5	0



а



б

Рисунок 5.46

3. Знаходимо амплітуди і фази гармонік вихідного сигналу при комплексній і дійсній формі запису ряду Фур'є.

Комплексна гармоніка вихідного сигналу:

$$\underline{S}_{mk_{\text{вих}}}(j\omega) = \underline{S}_{mk_{\text{вх}}}(j\omega) \cdot K(j\omega).$$

Амплітуди вихідних гармонік:

$$S_{mk_{\text{вих}}} = S_{mk_{\text{вх}}} K(\omega).$$

$$A_{mk_{\text{вх}}} = 2S_{mk_{\text{вих}}}, \text{ крім } \; k = 0$$

Фази вихідних гармонік:

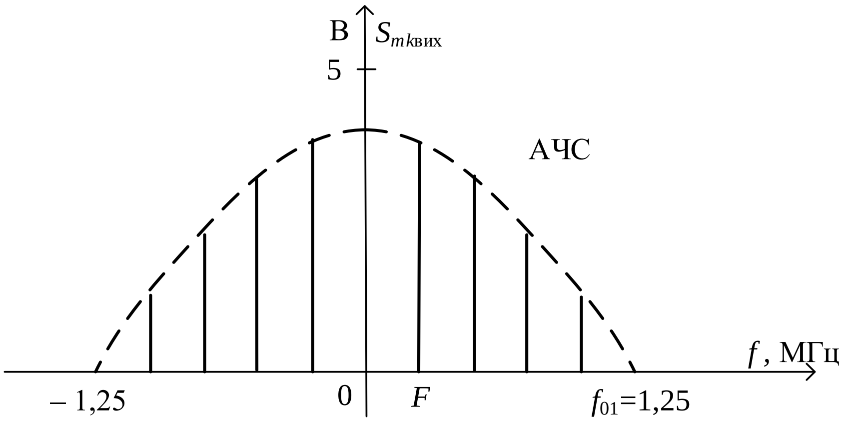
$$\psi_{\text{вих}}(\omega) = \psi_{\text{вх}}(\omega) + \varphi(\omega).$$

Значення вихідних величин для першої пелюстки спектру зведені в таблицю 5.3.

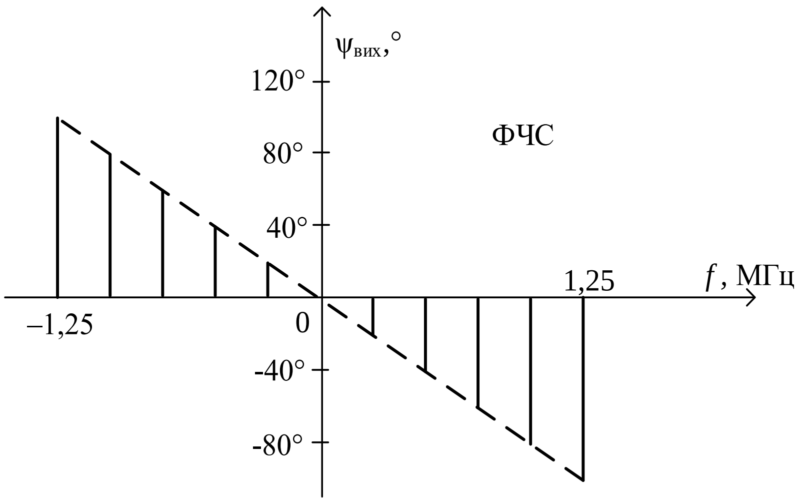
Таблиця 5.3

k	$\omega, 10^6$ с$^{-1}$	$S_{mk_{\text{вих}}}$, В	$A_{mk_{\text{вих}}}$, В	$\psi_{\text{вих}}, ^\circ$
0	0	3,75	3,75	0
1	1,309	3,48	6,96	–20.8°
2	2,618	2,81	5,62	–39.6°
3	3,927	2,03	4,06	–56.3°
4	5,236	1,24	2,48	–71.5°
5	6,545	0,55	1,10	–86.1°
6	7,854	0	0	–100.4°

Спектри вихідного сигналу представлені на рис. 5.47 *а*, *б* і 5.48 *а*, *б* для комплексної і дійсної форм запису ряду Фур'є відповідно.

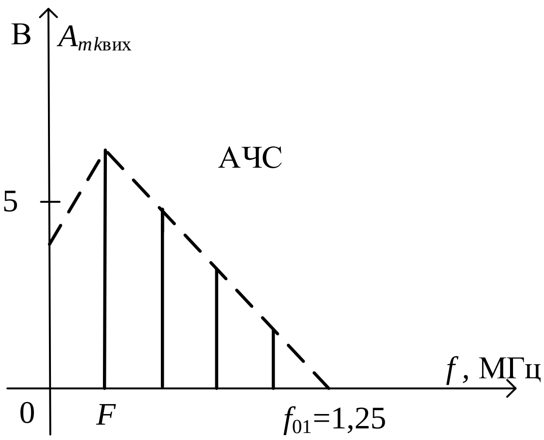


а

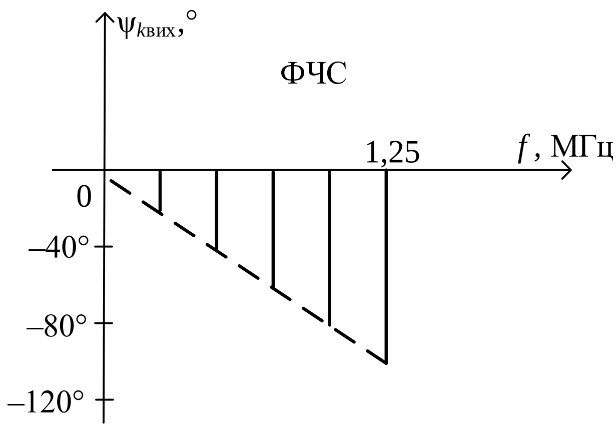


б

Рисунок 5.47



а



б

Рисунок 5.48

Приклад 2

Схема кола та її параметри представлені на рис. 5.49.

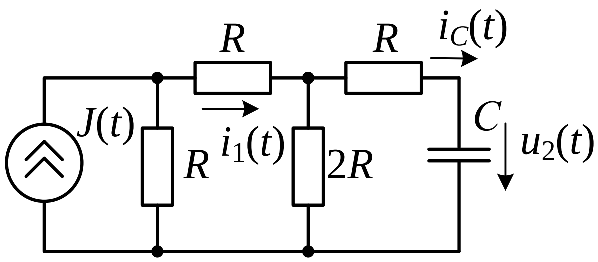


Рисунок 5.49

C = 250 пФ,

R = 2 кОм,

$x(t) = J(t)$,

Визначити $y(t) = u_2(t)$.

1. Вхідний сигнал – періодична послідовність прямокутних імпульсів струму з наступними характеристиками: A = 40 мА; $\tau_і$= 0,4 мкс; T= 2 мкс; t_0 = 0,3 мкс.

Шпаруватість імпульсу:

$$q = \frac{T}{\tau_і} = \frac{2}{0{,}4} = 5, \qquad \frac{\pi}{q} = \frac{\pi}{5} = 36° .$$

Частота першої гармоніки

$$F = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}} = 0{,}5 \cdot 10^{6} \text{ Гц},$$

$$\Omega = 2\pi F = 3{,}142 \cdot 10^{6} \text{ с}^{-1} .$$

Ширина першої пелюстки спектра

$$f_{01} = \frac{1}{\tau_і} = \frac{1}{0{,}4 \cdot 10^{-6}} = 2{,}5 \cdot 10^{6} \text{ Гц}.$$

$$S_{mk\text{вх}} = 40 \cdot \frac{|\sin(k \cdot 36°)|}{k\pi},$$

$$A_{mk\text{вх}} = 2S_{mk\text{вх}}, \text{ крім } k = 0.$$

$$\psi_{k\text{вх}} = (n-1)\pi - 2\pi F t_0 = (n-1)\pi - k\Omega t_0;$$

$$\Omega t_0 = 3{,}142 \cdot 10^{6} \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-6} = 0{,}942 .$$

$$\psi_{k\text{вх}} = (n-1)\pi - k \cdot 0{,}942(\text{рад}) = (n-1)\pi - k \cdot 54.$$

У таблиці 5.4 наведені розрахунки по АЧХ і ФЧХ вхідного сигналу.

Таблиця 5.4

k	$\omega, 10^6$ с$^{-1}$	$S_{mk\text{вх}}$, В	$A_{mk\text{вх}}$, В	$\psi_{k\text{вх}}$, °
0	0	8	8	0
1	3,142	7,48	14,96	–54°
2	6,283	6,05	12,10	–108°
3	9,425	4,04	8,08	–162°
4	12,566	1,87	3,74	–216°
5	15,708	0	0	–270° → –90°
6	18,850	1,25	2,50	–144°
7	21,911	1,73	3,46	–198°
8	25,133	1,51	3,02	–252°
9	28,274	0,83	1,66	–306°
10	31,416	0	0	–360° → 0

На рис. 5.50 *а*, *б* і 5.51 *а*, *б* наведені АЧС і ФЧС вхідної послідовності для комплексної і дійсної форм запису ряду Фур'є.

Визначимо точне і наближене діюче значення вхідного сигналу:

$$J_\text{т} = \frac{A}{\sqrt{q}} = \frac{40}{\sqrt{5}} = 17{,}89 \text{ мА}.$$

$$J_\text{наб} = \sqrt{8^2 + \frac{1}{2}(14{,}96^2 + 12{,}10^2 + 8{,}08^2 + 3{,}74^2)} = 16{,}99 \text{ мА}; \quad \frac{J_\text{наб}}{J_\text{т}} = 0{,}95.$$

2. Знаходимо КПФ $K(j\omega)$ яка в даному випадку має розмірність опору.

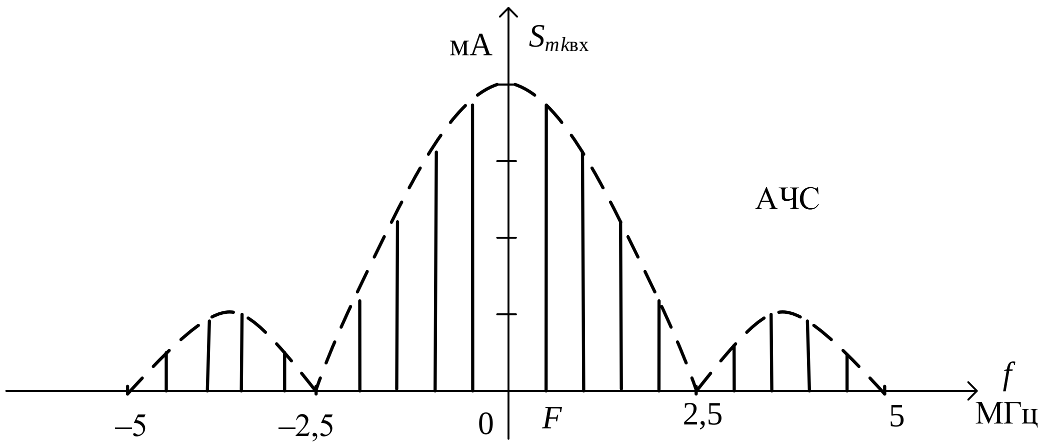
$$K(j\omega) = \frac{\underline{U_2}(j\omega)}{J(j\omega)};$$

$$\underline{I_1} = \underline{J} \cdot \frac{R}{2R + \dfrac{2R\left(R + \dfrac{1}{j\omega C}\right)}{3R + \dfrac{1}{j\omega C}}} = \underline{J} \cdot \frac{R}{2R + \dfrac{2R(1 + j\omega CR)}{1 + j3\omega RC}} = \underline{J} \cdot \frac{1 + j3\omega RC}{2(2 + 4j\omega CR)},$$

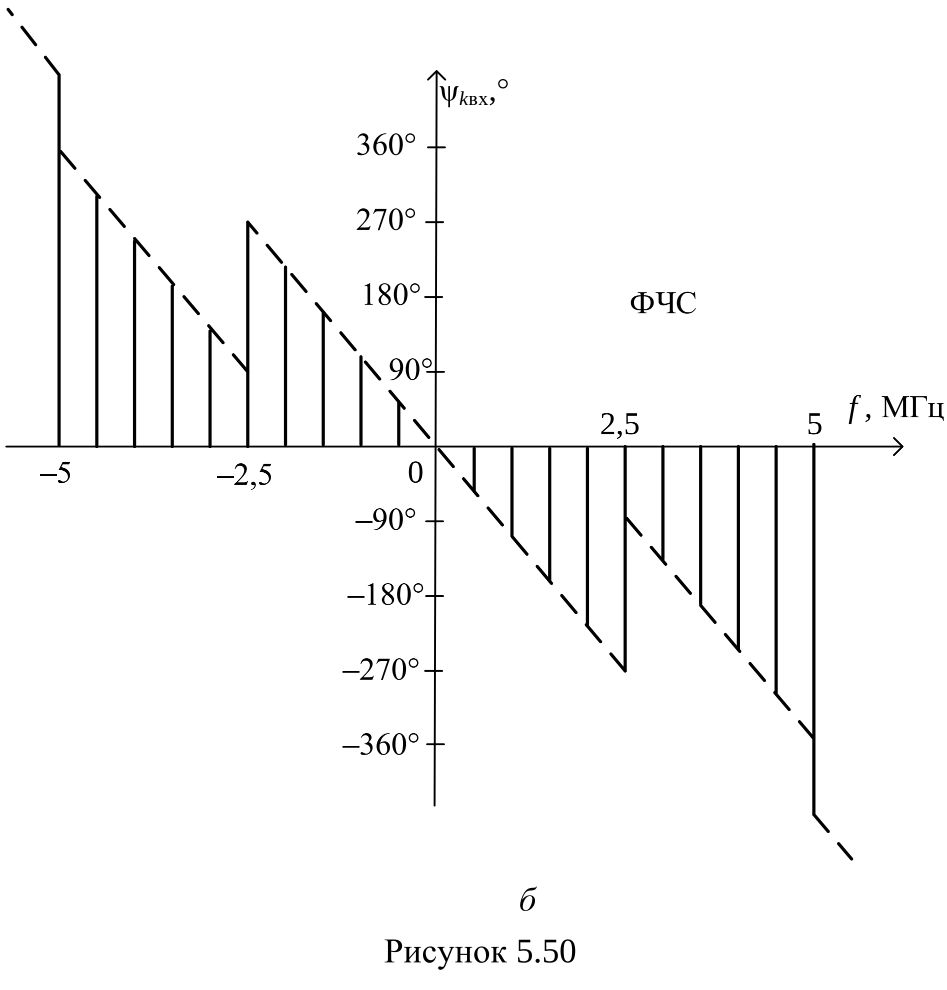
$$\underline{I_C} = \underline{I_1} \cdot \frac{2R}{3R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \underline{I_1} \cdot \frac{j2R\omega C}{1 + j3R\omega C} = J \cdot \frac{j2R\omega C}{4 \cdot (1 + j2\omega CR)},$$

$$\underline{U_2} = \underline{I_C}\,\frac{1}{j\omega C} = \underline{J} \cdot \frac{R}{2(1 + j2\omega CR)},$$

$$K(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{J}} = \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{1 + j2\omega CR}.$$

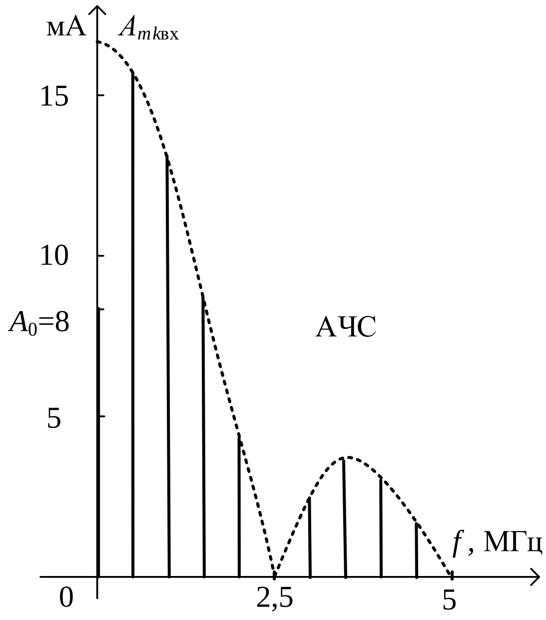


а

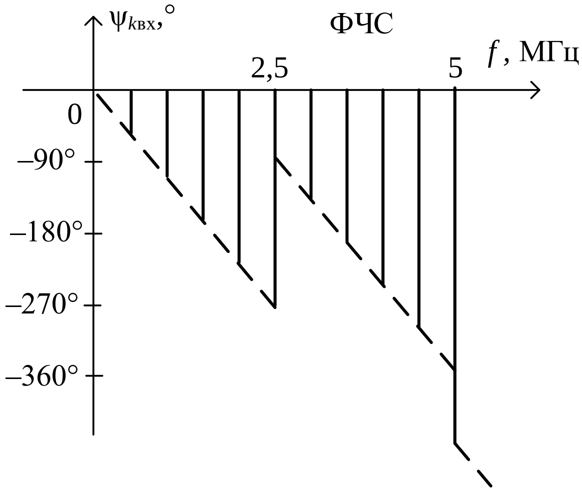


б

Рисунок 5.50



а



б

Рисунок 5.51

$$\text{АЧХ:}\quad K(\omega) = \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (2\omega CR)^2}}.$$

ФЧХ: $\varphi(\omega) = -\text{arctg}(2\omega CR)$.

$RC = 2 \cdot 10^3 \cdot 250 \cdot 10^{-12} = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ с.

$2RC = 1 \cdot 10^{-6}$.

Результати розрахунків наведені в таблиці 5.5.

Таблиця 5.5

k	$\omega, 10^6$ с$^{-1}$	f, МГц	$K(\omega)$, кОм	$\varphi(\omega)$°
0	0	0	1	0
	1	0,159	0,707	–45°
	2	0,318	0,477	–63,4°
1	3,142	0,5	0,303	–72,4°
2	6,283	1,0	0,157	–81°
3	9,425	1,5	0,105	–83,9°
4	12,566	2,0	0,079	–85,4°
5	15,708	2,5	0,040	–86,4°
∞	∞	∞	0	–90°

Графіки $K(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ представлені на рис. 5.52.

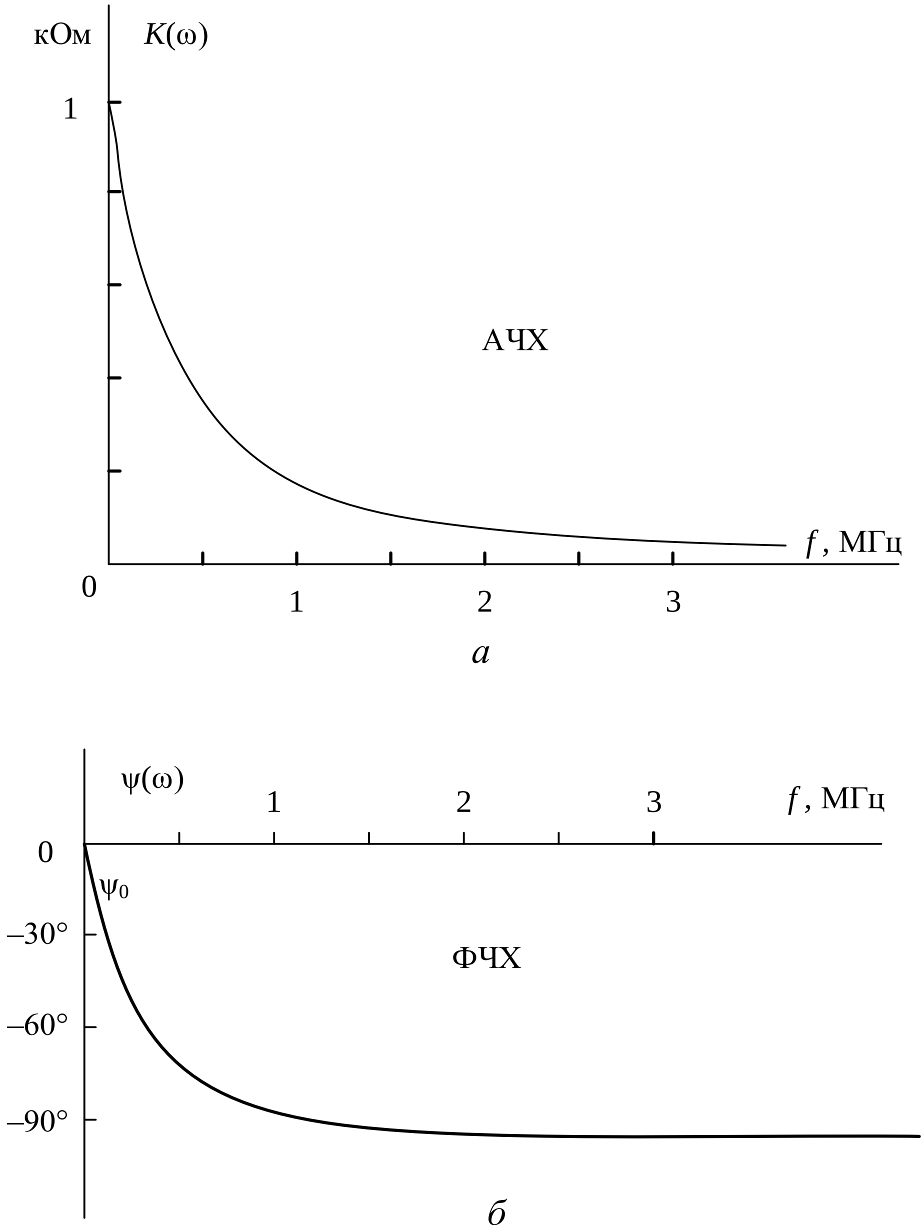


Рисунок 5.52

3. Знаходимо амплітуди і фази гармонік вихідного сигнала при комплексній і дійсній формі запису ряду Фур’є (таблиця 5.6).

Графіки представлені на рис. 5.53 а, б, 5.54 а, б (в межах першої пелюстки спектру).

$$S_{mk\text{вих}} = S_{mk\text{вх}} K(\omega);$$

$$\psi_{k\text{вих}}(\omega) = \psi_{k\text{вх}}(\omega) + \varphi(\omega);$$

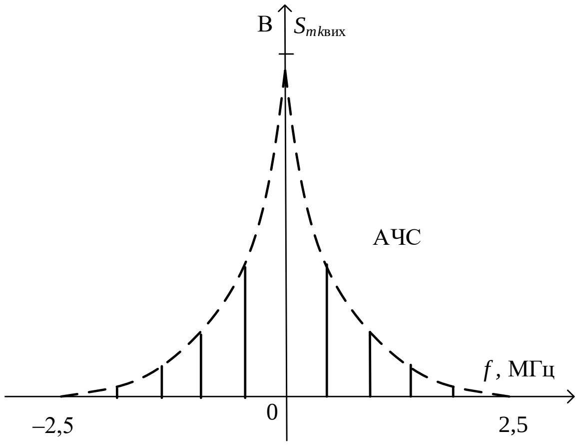
$$A_{mk\text{вих}} = 2S_{mk\text{вих}}, \text{ крім } k = 0.$$

Таблиця 5.6

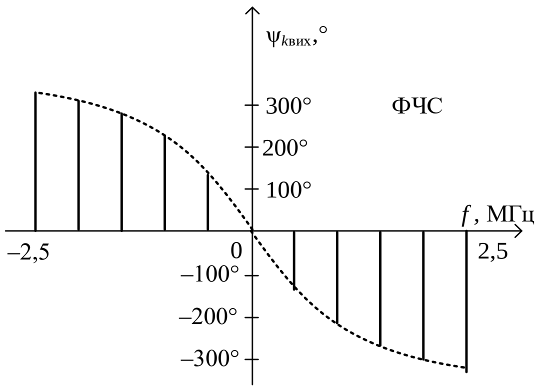
k	$\omega, 10^6$ с$^{-1}$	$S_{mk\text{вих}}$, В	$A_{mk\text{вих}}$, В	$\psi_{k\text{вих}}$, °
0	0	8	8	0
1	3,142	2,27	4,54	–126,4°
2	6,283	0,95	1,90	–189°
3	9,425	0,42	0,84	–245,9°
4	12,566	0,15	0,30	–301,4°
5	15,708	0	0	–356,4°

Діюче значення вихідного сигналу (в межах першої пелюстки спектру):

$$U_2 = \sqrt{8^2 + \frac{1}{2}(4,54^2 + 1,90^2 + 0,84^2 + 0,30^2)} = 8,75 \text{ В}.$$

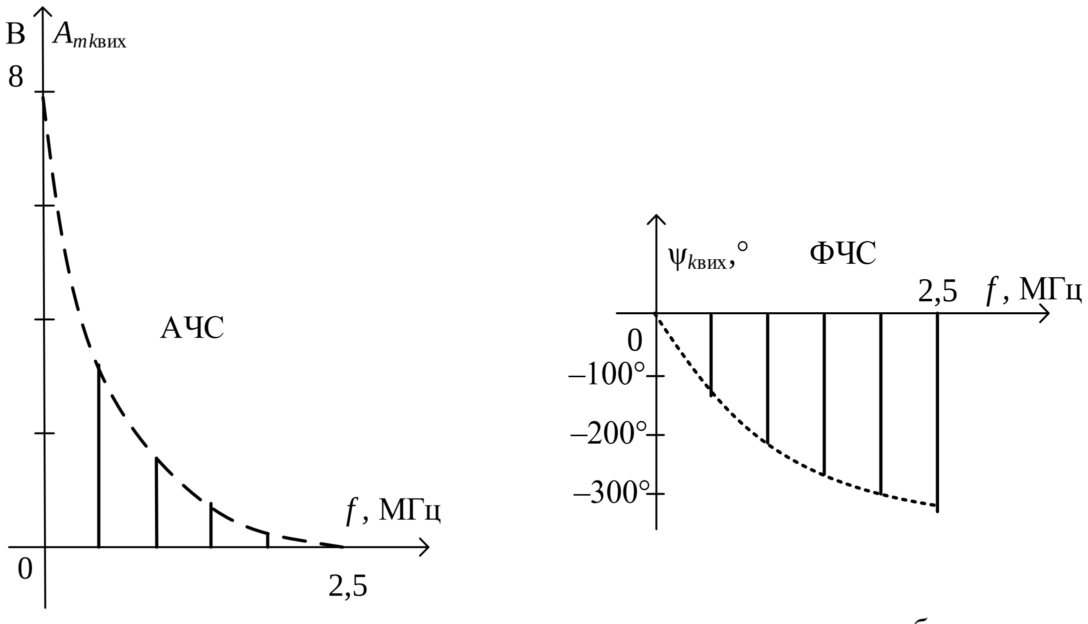


а



б

Рисунок 5.53



а

б

Рисунок 5.54

5.8. Запитання для самоперевірки

Дайте визначення комплексної передавальної функції кола та наведіть методи її розрахунку.

Чим відрізняється комплексний коефіцієнт передачі від комплексної передавальної функції?

Які розмірності в електричних колах може мати комплексна передавальна функція?

Перелічіть і дайте визначення всіх частотних характеристик електричного кола.

Напишіть, як частотні характеристики аналітично пов’язані між собою.

Укажіть, яка з частотних характеристик визначає частотно-вибіркові властивості кола? Дайте визначення терміну «смуга пропускання».

Поясніть сутність частотного опису сигналів.

В яких формах запису використовується ряд Фур’є для визначення частотного спектру періодичного сигналу?

Поясніть, чому ширшого застосування набула комплексна, а не тригонометрична форма запису ряду Фур’є?

Запишіть формулу для розрахунку комплексних гармонік S_{mk} по часовому виразу $a(t)$ періодичного сигналу і поясніть її структуру.

Як перейти від частотного спектру, що відповідає тригонометричній формі запису ряду Фур’є, до спектру, що відповідає комплексній формі запису ряду Фур’є?

Опишіть пряме інтегральне перетворення Фур’є та наведіть його основні властивості.

Як по спектральній щільності одиничного імпульсу знайти комплексні амплітуди гармонік періодичної послідовності таких же імпульсів?

Які частотні спектри мають одинична $1(t)$ та дельта-функція $\delta(t)$?

Який частотний спектр має одиничний прямокутний імпульс з центром в точці $t = 0$?

Який частотний спектр має періодична послідовність прямокутних імпульсів?

В чому полягає різниця між спектрами періодичних і неперіодичних сигналів?

Як визначити діюче значення і потужність періодичного сигналу по його частотному спектру?

Що називають шириною частотного дискретного спектру сигналу?

Як визначається ширина суцільного частотного спектру?

Як пов’язані між собою ширина частотного спектру сигналу з його тривалістю?

Запишіть співвідношення між частотними спектрами вхідного і вихідного сигналів через комплексну передавальну функцію.

Яке електричне коло називають неспотвореним і який вигляд мають його частотні характеристики?

Опишіть зв’язок між часовими, частотними та операторними характеристиками електричного кола.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гумен М. Б. Основи теорії електричних кіл. У 3 кн. Кн. 1. Аналіз лінійних електричних кіл. Часова область : підручник / М. Б. Гумен, А. М. Гуржій, В. М. Співак; за ред. М. Б. Гумена. – Київ : Вища школа, 2003. – 339с.
2. Розрахунок перехідних процесів у лінійних електричних колах із зосередженими та розподіленими параметрами : навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / І. А. Курило, В. П. Грудська, Л. Ю. Спінул, М. А. Щерба. – Київ : НТУУ «КПІ», 2013. – 289 с.
3. Маляр В. С. Теоретичні основи електротехніки. Електричні поля : навч. посібник / В. С. Маляр. – Львів : Видавництво Львівської політехніки. 2012. – 312 с.
4. Основи теорії електронних кіл: підручник / Ю. Я. Бобало, Б. А. Мандзій, П. Г. Стахів, Л. Д. Писаренко, Ю. І. Якіменко ; за ред. Ю. Я. Бобала. – Львів : Видавництво національного університету «Львівська політехніка», 2008. – 332с.
5. Основи теорії кіл: Підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч.2 / Ю. О. Коваль, Л. В. Гринченко, І. О. Милютченко, О. І. Рибін / За заг. редакцією В.М. Шокола та В.І. Правди. – Харків : Компанія СМІТ, 2008. – 560 с.
6. Теорія електричних та магнітних кіл : конспект лекцій. Розділ «Перехідні процеси в лінійних електричних колах із зосередженими параметрами» / укладач А.В. Булашенко. Суми : Сумський державний університет. – 232 с.
7. Мількевич Є. О. Основи теорії кіл. Аналіз лінійних та нелінійних кіл в перехідному та усталеному режимі: Навчальний посібник. Ч. 2. Основи теорії кіл. / Є. О. Мількевич, Д. В. Максюта, В. Д. Карлов. – Харків : ХУПС, 2005.– 268 с.
8. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола : підручник /

Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацив, Вінниц. нац. техн. ун-т; За ред. Ю. О. Карпов.– Херсон : Олді-Плюс, 2014.– 455 с.

9. Поляков М.Г. Математичні основи теоретичної електротехніки : навч. посібн. : у 2-ох ч., ч. 1 / М. Г. Поляков, Л. Я. Фомичова, С. О. Сушко. – Дніпропетровськ : НГАУ, 2001. – 210 с.

10. Теорія електричних і магнітних кіл [Електронний ресурс] : підручник / С. В. Панченко, О. М. Ананьєва, М. М. Бабаєв та ін. – 2-ге вид., випр. та допов. – Харків : УкрДУЗТ, 2020. – 246 с.

11. Арбузнікова Н. Ф. Часові та операторні методи аналізу електричних кіл: Навч. посібник з дисципліни «Теорія електричних кіл та сигналів». Ч. 1 та 2. / Н. Ф. Арбузнікова, А. Ю. Калашніков, А. В. Шкуліпа. – Одеса : ВЦ ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2008. — 90 с.

12. Гумен М. Б. Основи теорії електричних кіл. У 3 кн. Кн. 2. Аналіз лінійних електричних кіл. Частотна область: Підручник. / М. Б. Гумен, А. М. Гуржій, В. М. Співак; За ред. М. Б. Гумена. – Київ : Вища шк., 2004. – 358с.

13. Стрелковська І. В., Паскаленко В. М. Ряди Фур'є. Інтеграл Фур'є : навч. посіб. для фахівців у галузі зв'язку – Одеса : 2021. – 122 с.

14. Теорія електричних кіл та сигналів. Основи розрахунку електричних кіл : конспект лекцій / укладачі: О. М. Кобяков, І. Є. Бражник. – Суми : Сумський державний університет, 2016. – 168 с.

15. Основи теорії кіл, сигналів та процесів в системах технічного захисту інформації : підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч.1. / Ю. О. Коваль, І. О. Милютченко, А. М. Олейніков, В. М. Шокало та ін.; за заг. редакцією В.М. Шокала. – Харків : НТМТ , 2011. – 544 с.

16. Основи теорії процесів в інформаційних системах: підручник (у 2-х кн.). Кн.1. Аналіз детермінованих процесів / М. Б. Гумен, В. М., Співак, С. К. Мещанінов, Г. Г. Власюк, Т. Ф. Гумен. – 2-е вид., зі змінами і доповн. – Київ : Кафедра, 2017. − 281 с.

17. Теорія сигналів. Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи. Частина 3. Спектральний аналіз неперіодичних сигналів.

[Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів вищих навчальних закладів спеціальності 125 «Кібербезпека», освітня програма «Системи технічного захисту інформації» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: С. М. Кущ, Д. О. Прогонов, Смирнов В. П. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 31 с.

18. Мандзій Б. А. Основи теорії сигналів : навч. посібник / Б. А. Мандзій, П. І. Женяк. – Львів : АДКР «Атлас», 2003. – 152 с.

19. Методичні вказівки до самостійної роботи за темою «Частотні характеристики лінійних електричних кіл» з дисциплін «Теорія електричних кіл та сигналів», «Теорія електричних кіл», «Теорія електромагнітних кіл», «Основи електротехніки та електроніки» для студентів спеціальностей 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», 171 «Електроніка», 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка», 123 «Комп'ютерна інженерія» / уклад.: М. М. Резинкіна, А. В. Гетьман, Б. І. Кубрик, С. А. Литвиненко – Харків : НТУ «ХПІ», 2020. – 48 с.

Навчальне видання

КУБРИК Борис Іванович
ГЕТЬМАН Андрій Володимирович
БОРИСЕНКО Анатолій Миколайович
ЛИТВИНЕНКО Світлана Анатоліївна

АНАЛІЗ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ У ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

Навчальний посібник
для студентів електротехнічних спеціальностей

Відповідальний за випуск д.т.н. Костюков І. О.

Роботу до видання рекомендував проф. Заполовський М. Й.

В авторській редакції

План 2023 р., поз. 44

Підп. до друку 2025р. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 12,6.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.

Електронне видання