

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

А. А. Босва, С. М. Решетнікова, І. А. Малькова, М. В. Мезерна

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів
усіх форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 3 від 24.10.2024 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2025

УДК 517.9

Д 50

Рецензенти:

М. Є. Резуненко, канд. техн. наук, завідувачка кафедри вищої математики та фізики, Український державний університет залізничного транспорту;

І. М. Жовтоніжко, канд. пед. наук, доц. кафедри вищої математики та інформатики, Харківський державний університет ім. В. Н. Каразіна

Д 50 Диференціальні рівняння : навч. посіб. для студентів вищих навчальних закладів усіх форм навчання / А. А. Боєва, С. М. Решетнікова, І. А. Малькова, М. В. Мезерна. – Харків : НТУ «ХПІ», 2025. – 123 с.

ISBN 978-617-05-0537-8

Навчальний посібник містить теоретичні відомості з тем курсу теорії диференціальних рівнянь: «Найпростіші диференціальні рівняння», «Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку», «Диференціальні рівняння у повних диференціалах», «Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку» та інші. Розібрано багато прикладів задач, надано завдання для аудиторних занять і самостійної роботи студентів, а також 30 варіантів індивідуальних розрахункових завдань.

Призначено для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання.

Іл. 10. Бібліогр. 3 назв.

УДК 517.9

ISBN 978-617-05-0537-8

© Боєва А. А., Решетнікова С. М.,
Малькова І. А., Мезерна М. В., 2025
© НТУ «ХПІ», 2025

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1. Загальні поняття, визначення, приклади	6
2. Диференціальні рівняння 1 порядку. Теорема Коші	7
3. Найпростіші диференціальні рівняння	10
3.1. Диференціальні рівняння вигляду $y' = f(x)$	10
3.2. Диференціальні рівняння вигляду $x' = f(y)$	12
3.3. Рівняння з відокремлюваними змінними	13
3.4. Однорідні рівняння	15
Аудиторне заняття до тем 1-3	19
Самостійна робота до тем 1-3	20
Відповіді до самостійної роботи до тем 1-3	21
4. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку	22
4.1. Метод варіації довільної сталої	22
4.2. Рівняння Бернуллі	24
Аудиторне заняття до тем 4.1-1.2	26
Самостійна робота до тем 4.1-4.2	26
Відповіді до самостійної роботи до тем 4.1-4.2	27
4.3. Лінійні диференціальні рівняння у повних диференціалах	27
4.4. Інтегруючий множник	30
Аудиторне заняття до тем 4.3-4.4	33
Самостійна робота до тем 4.3-4.4	33
Відповіді до самостійної роботи до тем 4.3-4.4	33
5. Особливі точки диференціального рівняння	34
Аудиторне заняття до теми 5	38
Самостійна робота до теми 5	38
Відповіді до самостійної роботи до теми 5	39
6. Диференціальні рівняння вищих порядків	39
Аудиторне заняття до теми 6	42
Самостійна робота до теми 6	42
Відповіді до самостійної роботи до теми 6	42
7. Лінійні диференціальні рівняння n – го порядку	45
7.1. Лінійна незалежність системи функцій	45
7.2. Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку	46
Аудиторне заняття до теми 7	48
Самостійна робота до теми 7	49
Відповіді до самостійної роботи до теми 7	49

8.	Лінійне диференціальне рівняння із сталими коефіцієнтами.....	49
	Аудиторне заняття до теми 8	57
	Самостійна робота до теми 8	57
	Відповіді до самостійної роботи до теми 8	58
9.	Частинний розв'язок лінійного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною	58
	Аудиторне заняття до теми 9	68
	Самостійна робота 9	68
	Відповіді до самостійної роботи 9.....	69
10.	Системи диференціальних рівнянь	70
10.1.	Загальні поняття, визначення, приклади	70
10.2	Лінійна нормальна система диференціальних рівнянь. Матричний вигляд системи диференціальних рівнянь...	71
10.3.	Властивості лінійної однорідної системи рівнянь	72
11.	Однорідна система диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами	73
11.1.	Загальні поняття, визначення, приклади	73
11.2.	Випадок простих дійсних коренів	75
11.3.	Випадок простих комплексних коренів	79
11.4.	Випадок кратних дійсних коренів	82
	Аудиторне заняття до теми 11	83
	Самостійна робота до теми 11	84
	Відповіді до самостійної роботи до теми 11	84
12.	Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь.....	85
12.1	Основні визначення і теореми.....	85
12.2	Дослідження стійкості розв'язків лінійної однорідної системи із сталими коефіцієнтами.....	87
	Аудиторне заняття до теми 12	91
	Самостійна робота до теми 12	91
	Відповіді до самостійної роботи до теми 12	92
ВАРІАНТИ РОЗРАХУНКОВИХ ЗАВДАНЬ.....		93
СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ		123

ВСТУП

Навчальний посібник «Диференціальні рівняння», призначений для студентів першого курсу технічних і ІТ-спеціальностей. В курсі «Вища математика» темам, пов'язаним з диференціальними рівняннями, виділяється 30 годин, у тому числі 14 годин лекційних, 14 – для практичних занять, 2 години на самостійну роботу.

Навчальний посібник відповідає кредитно-модульній системі навчання. Кожна тема містить теоретичні відомості, приклади розв'язання типових задач, набір задач для роботи з викладачем в аудиторії, задачі для самостійної роботи з відповідями, а також 30 варіантів індивідуальних домашніх завдань.

Теоретична частина кожної глави містить необхідні визначення, формулювання теорем, формули. Вона ілюструється розібраними прикладами і вправами, виконання яких сприяє засвоєнню таких фундаментальних понять теми «Диференціальні рівняння».

У процесі вивчення матеріалу модуля студенти виконують обов'язкові домашні завдання (ОДЗ). Студенти усно захищають виконані ОДЗ напередодні написання модульної контрольної роботи.

1. Загальні поняття. Визначення. Приклади

1°. Звичайним диференціальним рівнянням називається співвідношення вигляду

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

між незалежним змінним x , функцією $y(x)$ та її похідними $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$.

2°. Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної, яка входить в рівняння.

3°. Функція $y = \varphi(x)$ називається розв'язком диференціального рівняння, якщо після заміни y на $\varphi(x)$, y' – на $\varphi'(x)$, ..., $y^{(n)}$ – на $\varphi^{(n)}(x)$ рівняння перетворюється на тотожність.

До звичайних диференціальних рівнянь наводять багато питань природознавства. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1.1. Нехай в кожний момент часу t відома швидкість точки, що рухається вздовж осі OX , нехай ця швидкість не є сталою і дорівнює $v(t)$. Припустимо, що відома абсциса точки x_0 в початковий момент часу t_0 . Потрібно знайти закон руху точки, тобто залежність абсциси x від часу t . Ця задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння

$$\frac{dx}{dt} = v(t). \quad (1.2)$$

Цьому рівнянню задовольняє сім'я функцій

$$x(t) = F(t) + C, \quad (1.3)$$

де $F(t)$ – будь-яка первісна функції $v(t)$. Функція з сім'ї розв'язків (1.3), яка задовольняє умову $x(t_0) = x_0$, має вигляд

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau.$$

Приклад 1.2. Відомо, що швидкість розпаду радія в кожний момент часу t прямо пропорційна кількості радія в даний момент. Припустимо, що в момент $t = t_0$ кількість радія була R_0 . Потрібно знайти кількість радія в довільний момент часу. Якщо коефіцієнт пропорційності дорівнює c ($c > 0$), то така задача

зводиться до знаходження розв'язку диференціального рівняння

$$\frac{dR}{dt} = -cR,$$

який при $t = t_0$ набуває значення R_0 . Таким розв'язком є функція

$$R(t) = R_0 e^{-c(t-t_0)}.$$

Як можна було бачити з попередніх прикладів, диференціальне рівняння має нескінченну кількість розв'язків. Саме тому для знаходження шуканої функції було задано не тільки диференціальне рівняння, але і початкова умова при деякому визначеному значенні аргумента. В розглянутих прикладах початкові умови єдиним чином визначали відповідні їм розв'язки.

2. Диференціальні рівняння першого порядку. Теорема Коші

Диференціальним рівнянням першого порядку називається співвідношення вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \quad (2.1)$$

або, якщо співвідношення (2.1) можна розв'язати відносно y' , то

$$y' = f(x, y). \quad (2.2)$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння 1 порядку називається функція

$$y = \varphi(x, C). \quad (2.3)$$

Загальним інтегралом диференціального рівняння 1 порядку називається вираз

$$\Phi(x, y, C) = 0. \quad (2.4)$$

Загальний інтеграл рівняння використовують в тих випадках, коли записати рішення у вигляді загального розв'язку (2.3), тобто розв'язати (2.4) відносно y важко, незручно, або неможливо.

Задачею Коші для диференціального рівняння 1 порядку називається така задача: знайти загальний розв'язок (або загальний інтеграл) диференціального рівняння (2.1) або (2.2), який задовольняє умову

$$y(x_0) = y_0. \quad (2.5)$$

Умова (2.5) в задачі Коші називається *початковою умовою*.

Теорема Коші визначає умови, за яких існує єдиний розв'язок диференціального рівняння

$$y' = f(x, y),$$

який задовольняє початкову умову (2.5)

$$y(x_0) = y_0.$$

Теорема 1. (Коші). [1]

Якщо функція $f(x, y)$ задовольняє таким умовам:

1) є неперервною в замкненому прямокутнику R :
 $\{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a; y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$, де a і b – деякі відомі додатні числа, тобто є обмеженою в прямокутнику R ;

2) задовольняє умові Ліпшица у прямокутнику R по змінній y :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|,$$

де L – стала Ліпшица, (x, y_1) , (x, y_2) – довільні точки з прямокутника R ,

то на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$, де $h = \min\left(a; \frac{b}{M}\right)$, $M = \max_R |f(x, y)|$,

існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння (2.2), який при $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ не виходить з прямокутника R і задовольняє початкову умову (2.5).

На практиці перевірити умови цієї теореми буває достатньо важко, тому часто користуються іншою теоремою.

Теорема 2. [1] Якщо функція $f(x, y)$ в правій частині диференціального рівняння (2.2) у розглядуваній області має обмежену частинну похідну по змінній y : $|f_y(x, y)| \leq N$, умова Ліпшица для такої функції виконується.

Можна легко довести, що якщо виконані умови цієї теореми, то будуть виконані також умови теореми Коші.

4°. *Геометрична інтерпретація.* Розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y),$$

де функція $f(x, y)$ визначена в деякій області G площини (x, y) . Це рівняння в кожній точці (x, y) задає кутовий коефіцієнт дотичної до графіка розв'язку $y = \varphi(x)$ (до *інтегральної кривої*). Можна сказати, що рівняння (2.2) задає на площині поле напрямків (рис. 1), а початкова умова задає на площині точку, через яку має пройти шукана інтегральна крива (рис. 2).

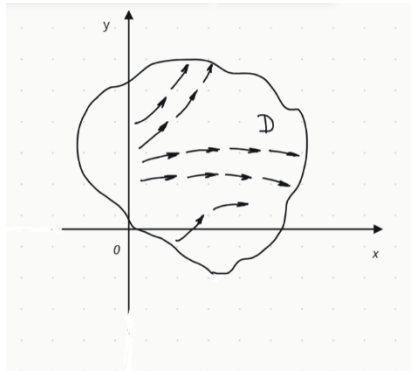


Рис. 1

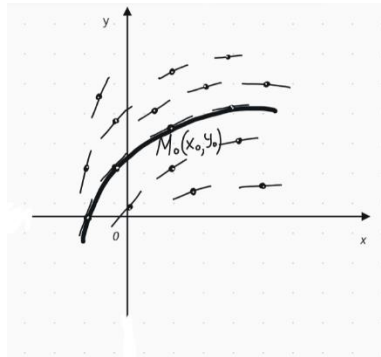


Рис. 2

3. Найпростіші диференціальні рівняння

3.1. Рівняння вигляду $y' = f(x)$.

Нехай права частина диференціального рівняння (2.2) є функцією тільки змінної x :

$$y' = f(x). \quad (3.1)$$

Розглянемо декілька випадків поведінки функції $f(x)$:

а) $f(x)$ є неперервною на проміжку (a, b) . Тоді

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt \quad (3.2)$$

є розв'язком рівняння (3.1) (точки x_0 і x належать (a, b)), а всі інші розв'язки відрізняються від (3.2) на константу:

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt + C. \quad (3.3)$$

Якщо тепер в смузі $a < x < b$ вибрати точку (x_0, y_0) , то через цю точку проходить єдиний розв'язок (єдина інтегральна крива)

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t)dt. \quad (3.4)$$

б) Функція $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow c$, $c \in (a, b)$, а в інших точках інтервалу неперервна.

Тоді, якщо інтеграл $\int_{x_0}^x f(t)dt$ збігається, то в проміжках $a < x < c$ і

$c < x < b$ через кожну точку проходить одна інтегральна крива, яка задається рівнянням (3.4) (рис. 3 і 4).

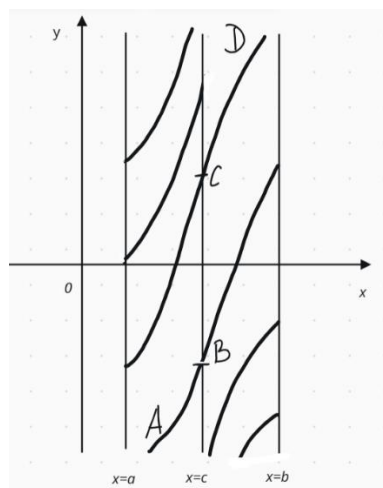


Рис. 3

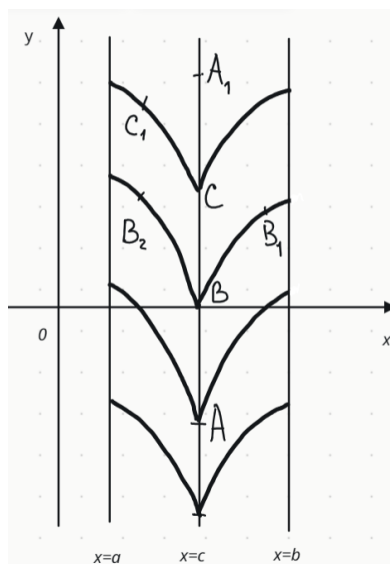


Рис. 4

Якщо при $x \rightarrow c$ інтеграл $\int_{x_0}^x f(t)dt$ розбігається, то при $x \rightarrow c$ інтегральні

криві будуть асимптотично наближатися до прямої $x = c$ (рис. 5).

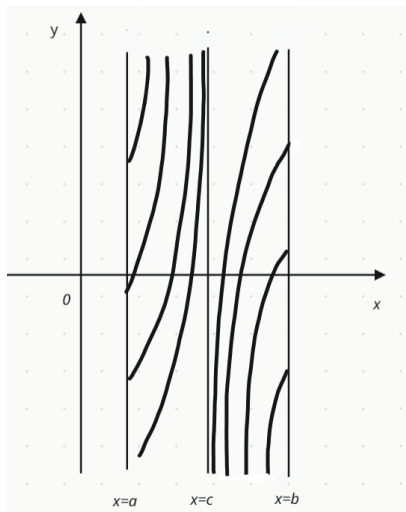


Рис. 5

3.2. **Рівняння вигляду** $x' = f(y)$ відрізняються від попереднього типу (3.1) тільки тим, що змінні x і y помінялися ролями.

Якщо функція $f(y)$ неперервна в проміжку $a < y < b$ і не обертається на нуль, то рівняння (3.1) можна переписати у вигляді

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \quad (3.5)$$

В цьому випадку через кожну точку смуги $a < y < b$ проходить одна інтегральна крива

$$x = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{1}{f(t)} dt ,$$

а всі інші можна отримати шляхом зсуву, паралельного осі OX .

Якщо функція $f(y)$ в деякій точці обертається на нуль, тоді можливі такі випадки.

а) Якщо $\int_{y_0}^y \frac{1}{f(t)} dt$ при $x \rightarrow c \pm 0$ розбігається, то через кожну точку смуги

між прямими $y = a$ і $y = b$ проходить лише одна інтегральна крива. Пряма $y = c$ є асимптотою всіх інтегральних кривих і сама є інтегральною кривою.

б) Якщо $\int_{y_0}^y \frac{1}{f(t)} dt$ збігається і при переході через точку $y = c$ не змінює

знак, то через кожну точку прямої $y = c$ проходить нескінченно багато інтегральних кривих.

в) Якщо $\int_{y_0}^y \frac{1}{f(t)} dt$ збігається і при переході через точку $y = c$ змінює знак,

то через кожну точку прямої $y = c$ проходить нескінченна кількість інтегральних кривих, хоча через кожну точку смуг $0 < y < c$ і $c < y < b$ проходить одна інтегральна крива.

Поведінка інтегральних кривих в розглянутому випадку схожа на поведінку інтегральних кривих в попередньому випадку б).

3.3 Рівняння з відокремлюваними змінними

Рівнянням з відокремлюваними змінними називаються рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad (3.6)$$

Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(y)$ при $a < x < b$, $c < y < d$ неперервні і $f_2(y)$ ніде не перетворюється на нуль, то через кожну точку прямокутника $a < x < b$, $c < y < d$ проходить єдина інтегральна крива.

Оскільки $f_2(y) \neq 0$, то розділивши обидві частини рівняння на $f_2(y)$, отримаємо

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx. \quad (3.7)$$

Інтегруючи праву і ліву частини (3.7), отримаємо

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C. \quad (3.8)$$

Вираз (3.8) є загальним інтегралом вигляду $\Phi(x, y, C) = 0$, який пов'язує x , $y(x)$ і довільну константу C . Якщо з (3.8) можна однозначно виразити $y(x)$, то отримаємо загальний розв'язок рівняння (3.6) у вигляді $y = \varphi(x, C)$.

Приклад 3.1. Розв'язати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dy}{dx} = 2xy. \quad (3.9)$$

Розв'язок. Якщо $y \neq 0$, то відокремлюючи змінні, отримаємо

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx,$$

звідки

$$\ln|y| = x^2 + C,$$

або

$$|y| = e^{x^2 + C},$$

або

$$y \neq 0.$$

Відповідь зручніше записувати в іншій формі, якщо помітити, що $y = \pm e^C$ є також довільною константою. Тому маючи на увазі подальше потенціювання, можна представити розв'язок у вигляді

$$y = Ce^{x^2}.$$

При інтегруванні ми припускали, що $y \neq 0$, але $y \equiv 0$ є розв'язком рівняння (3.9). Але цей розв'язок входить в загальний розв'язок при значенні константи $C = 0$.

Приклад 3.2. Розв'язати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$xydx + (x+1)dy = 0. \quad (3.10)$$

Розв'язок. Якщо $(x+1) \neq 0$ та $y \neq 0$, то, відокремлюючи змінні, отримаємо

$$\frac{x dx}{x+1} + \frac{dy}{y} = 0.$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо

$$\int \frac{x dx}{x+1} + \int \frac{dy}{y} = C,$$

$$x - \ln|x+1| + \ln|y| = \ln C, \text{ або}$$

$$\left| \frac{y}{x+1} \right| = C \cdot e^{-x},$$

або

$$y = C(x+1)e^{-x}. \quad (3.11)$$

Ми знайшли цей розв'язок у припущенні, що $(x+1) \neq 0$, $y \neq 0$. Але $y \equiv 0$ і $x+1=0$, як можна бачити, є розв'язками рівняння (3.10). Розв'язок $y \equiv 0$ можна отримати із (3.11), полагаючи $C=0$. А розв'язок $x+1=0$ неможливо отримати із загального розв'язку ніяким вибором константи C . Тому цей розв'язок треба приєднати до загального розв'язку рівняння.

Таким чином, відповідь буде така: $y = C(x+1)e^{-x}$, $x \equiv -1$.

3.4 Однорідні рівняння

Однорідне диференціальне рівняння має такий вигляд:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (3.12)$$

Після заміни $t = \frac{y}{x}$ отримаємо таке диференціальне рівняння

$$xt' + t = f(t). \quad (3.13)$$

Якщо $f(t)$ неперервна при $a < t < b$ і $f(t) \neq t$, то виконується теорема Коші і через кожну точку (x_0, y_0) смуги $a < t < b$ проходить одна і тільки одна інтегральна крива.

Приклад 3.3. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \quad (3.14)$$

Розв'язок. Розділимо чисельник і знаменник на x^2 і зробимо заміну $t = \frac{y}{x}$. Тоді

$$y = t \cdot x, y' = (t \cdot x)' = t'x + t.$$

$$f(x, y) = \frac{2 \frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

Підставляючи в рівняння (3.14), отримаємо диференціальне рівняння

$$t'(x) \cdot x + t(x) = \frac{2t}{1 - t^2}. \quad (3.15)$$

Відокремлюючи змінні в (3.15), отримаємо:

$$-dt \frac{t^2 - 1}{t(t^2 + 1)} = \frac{dx}{x},$$

а після інтегрування

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{t^2 - 1}{t(t^2 + 1)} dt.$$

Інтеграл в правій частині обчислимо так:

$$-\int \frac{t^2 - 1}{t(t^2 + 1)} dt = -\int \frac{t^2 + 1 - 2}{t(t^2 + 1)} dt = -\int \frac{t^2 + 1}{t(t^2 + 1)} dt + \int \frac{2}{t^3(1 + \frac{1}{t^2})} dt = -\ln|t| - \int \frac{d\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)}.$$

Тому загальним інтегралом буде

$$\ln|x| = -\ln|t| - \ln\left|1 + \frac{1}{t^2}\right| + \ln C.$$

Повертаючись до старої змінної, отримаємо

$$x = \frac{C}{t\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)} = \frac{Ct}{t^2 + 1} = \frac{Cy x^2}{x(x^2 + y^2)}.$$

Загальний інтеграл можна представити у вигляді

$$\frac{Cy}{x^2 + y^2} = 1 \text{ або } x^2 + y^2 = Cy.$$

На початку розв'язання ми робили припущення, що $y \neq 0$. Але $y \equiv 0$ є розв'язком рівняння (3.14): підставляючи $y \equiv 0$ в рівняння, можна в цьому переконатися. Оскільки розв'язок $y \equiv 0$ не можна отримати із загального розв'язку за допомогою якогось вибору константи C , його треба приєднати до загального розв'язку. Отже, відповіддю є $x^2 + y^2 = Cy$, $y \equiv 0$.

До однорідних рівнянь також приводяться рівняння вигляду

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \quad (3.16)$$

за допомогою заміни

$$u = x - \alpha, \quad v = y - \beta, \quad (3.17)$$

де (α, β) – розв'язок системи рівнянь
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}.$$

При цьому припускається, що $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Після заміни (3.17) рівняння (3.16) зводиться до однорідного відносно змінних

$$u, v \quad \frac{dv}{du} = \frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}.$$

Приклад 3.4. Знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл диференціального рівняння

$$y' = \frac{x + 2y - 3}{2x - 2}. \quad (3.18)$$

Рівняння (3.18) можна назвати «майже однорідним»: воно було б однорідним, якби не числові добавки в чисельнику і знаменнику. Якщо підставити вирази (3.17) в (3.18), отримаємо:

$$y' = \frac{u + \alpha + 2(v + \beta) - 3}{2(u + \alpha) - 2} = \frac{u + 2v + \alpha + 2\beta - 3}{2u + 2\alpha - 2}.$$

Звичайно, певним вибором констант α і β можна зробити праву частину (3.18) однорідною:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - 3 = 0 \\ 2\alpha - 2 = 0 \end{cases},$$

звідки $\alpha = 1, \beta = 1$.

Тому рівняння (3.18) в нових змінних переписиться у вигляді:

$$y' = \frac{u + 2v}{2u}.$$

Позначимо

$$t(u) = \frac{v}{u},$$

тоді

$$v'(u) = (u \cdot t(u))' = t(u) + u \cdot t'(u),$$

і (3.18) набуває вигляду

$$t + u \cdot t' = \frac{2t + 1}{2}. \quad (3.19)$$

Розділяючи змінні в (3.19), отримаємо

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{2u} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \ln |u| + \ln C \Rightarrow e^t = C \sqrt{u}.$$

Повертаючись до змінних x, y , отримаємо:

$$y - 1 = (x - 1) \ln C.$$

Аудиторне заняття до тем 1-3.

1. Покажіть, що функція $\arctg y(x) = C - \arctg x$ за будь-якого значення C задовольняє рівняння

$$y' = -\frac{1+y^2}{1+x^2}.$$

2. Як поведуться інтегральні криві диференціального рівняння

$$y' = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

поблизу прямої $x=0$? Зробити рисунок.

3. Знайдіть область існування і єдиності розв'язків диференціального рівняння

$$y' = y \sin x + e^x.$$

4. Накресліть інтегральні криві диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{|x+y|}$$

5. Знайти загальний розв'язок (або загальний інтеграл) диференціальних рівнянь:

а) $e^y(y'+1)=1;$

б) $\sqrt{y^2+1}dx - xydy = 0;$

в) $y' = \sqrt{y}(x+1);$

г) $xy' = y(1 + \ln \frac{y}{x});$

д) $4y + 2x + 3 = (x + 2y + 1)y'.$

6. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння

$$\sqrt{1-x^2}y' + \sqrt{1-y^2} = 0, \quad x_0 = 0, y_0 = 1.$$

Самостійна робота до тем 1-3

7. Покажіть, що функція $y(x)$, яка задана співвідношенням

$$x = \ln \frac{C}{e^y - 1}$$

при будь-якому C задовольняє рівняння

$$e^y (y' + 1) = 1.$$

8. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є сім'я кривих

$$y = 3 \operatorname{arctg} \frac{x+y}{3} + C.$$

9. Знайдіть область існування і єдиності розв'язків диференціального рівняння

$$y' = x\sqrt{y} + 1.$$

10. Накресліть інтегральні криві диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{|xy|}$$

11. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

а) $y - xy' = 1 + x^2 y'$;

б) $\sin x \cos^2 y dx + \cos^2 x dy = 0$;

в) $y' = \sqrt{y}(x+1)$;

г) $2x^2 dy = (x^2 + y^2) dx$;

д) $3y - 7x + 7 = (3x - 7y - 3)y'$.

12. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння

$$\sqrt{1-x^2}y' + \sqrt{1-y^2} = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Відповіді до самостійної роботи до тем 1-3

8. $y'(x+y)^2 = 9.$

9. $y \neq 0.$

10. Рис.6.

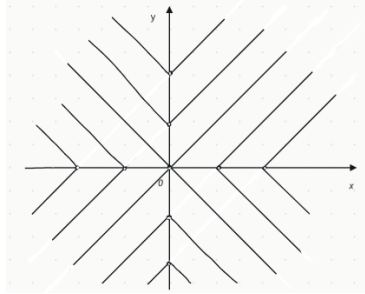


Рис. 6

11а) $y-1 = \frac{x-1}{x}C.$

11б) Загальний інтеграл рівняння $\operatorname{tg} y + \frac{1}{\cos x} = C.$

11в) Загальний інтеграл рівняння $2\sqrt{y-x-x^2} = C.$

11г) Загальний розв'язок рівняння
$$\begin{cases} Cx = e^{-\frac{2x}{y-x}} \\ x \equiv 0 \end{cases}.$$

11д) Однорідне рівняння. Загальний інтеграл

$$\left(\frac{y-x+1}{y+x-1} \right)^3 \sqrt{[y^2 - (x-1)^2]^7} = Cy^7.$$

12. $\arcsin x + \arcsin y = 1.$

4. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку

4.1. Метод варіації довільної сталої

Диференціальне рівняння називається *лінійним 1 порядку*, якщо функції y і y' входять в це рівняння в першому степені:

$$A(x)y' + B(x)y = C(x). \quad (4.1)$$

Якщо $A(x) \neq 0$, рівняння (4.1) можна привести до вигляду

$$y' + p(x)y = f(x), \quad (4.2)$$

де $p(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$, $f(x) = \frac{C(x)}{A(x)}$.

2. Якщо права частина рівняння (4.2) дорівнює нулю, тобто $f(x) = 0$, це рівняння називається *однорідним* і має вигляд:

$$y' + p(x)y = 0.$$

Якщо в правій частині ненульова функція ($f(x) \neq 0$), рівняння називають *неоднорідним*.

Однорідне рівняння – це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx.$$

Загальним розв'язком однорідного рівняння є

$$y_0 = Ce^{-\int p(x)dx},$$

де C – довільна стала.

Для знаходження розв'язку неоднорідного рівняння використовують *метод варіації довільної сталої*. Метод полягає в тому, що розв'язок неоднорідного рівняння (4.2) будемо шукати у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx},$$

тобто константу C замінимо на невідому функцію $C(x)$. Підставивши в неоднорідне рівняння (4.2), отримаємо для функції $C(x)$ також диференціальне рівняння:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x) + C(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x) = f(x),$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x).$$

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_1.$$

Тоді розв'язок неоднорідного рівняння буде таким:

$$y(x) = \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx} = C_1 e^{-\int p(x)dx} + \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx} dx \right) e^{-\int p(x)dx}.$$

Зверніть увагу, що загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння є сумою загального розв'язку однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Приклад 4.1. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(x^2 + 1)y' + xy = x(x^2 + 1).$$

Оскільки вираз $x^2 + 1 \neq 0$ на всій осі, розділимо праву і ліву частини на цей вираз і перетворимо рівняння до стандартного вигляду (4.2):

$$y' + \frac{xy}{x^2 + 1} = x.$$

Отримане рівняння є неоднорідним з правою частиною $f(x) = x$, а функція $p(x)$ дорівнює

$$p(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Спочатку знайдемо y_0 – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y' + \frac{xy}{(x^2 + 1)} = 0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними, після інтегрування якого отримаємо:

$$f(x) = x,$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \ln C,$$

$$y_0 = \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Далі будемо шукати y_H – загальний розв’язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$y_H = \frac{C(x)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Підставимо отриманий вираз в неоднорідне рівняння і знайдемо

$$y' = \frac{C'(x)\sqrt{x^2+1} - \frac{2xC(x)}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{C'(x)(x^2+1) - xC(x)}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$\frac{C'(x)(x^2+1) - xC(x)}{(x^2+1)^{3/2}} + \frac{xC(x)}{(x^2+1)^{3/2}} = x.$$

$$C'(x) = x\sqrt{x^2+1},$$

$$C(x) = \int x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C.$$

Таким чином,

$$y_H = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{C}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{3}.$$

4.2. Рівняння Бернуллі

Рівняння Бернуллі – це рівняння вигляду:

$$y' + p(x)y = f(x)y^\alpha, \quad \alpha \neq 1.$$

Рівняння Бернуллі зводиться до лінійного неоднорідного диференціального рівняння (4.2). Дійсно, розділимо праву і ліву частини рівняння на y^α :

$$y'y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = f(x), \quad \alpha \neq 1.$$

Множник $y^{1-\alpha}$ позначимо новою змінною: $y^{1-\alpha} = z(x)$. Тоді

$$z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha} \cdot y'.$$

Рівняння переписиться таким чином:

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = f(x), \alpha \neq 1.$$

Ми отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, з якого знайдемо функцію $z(x)$, а потім повернемося до $y(x)$.

Приклад 4.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$xy' + y = y^2 \ln x. \quad (4.3)$$

Розділимо праву і ліву частини рівняння на y^2 :

$$\frac{x}{y^2} y' + y^{-1} = \ln x.$$

Зробимо заміну: $z = y^{-1}$. Тоді

$$z' = -\frac{y'}{y^2}, \quad y' = -z' \cdot y^2.$$

Підставляючи в рівняння (4.3), отримаємо рівняння відносно функції $z(x)$

$$-xz' + z = \ln x. \quad (4.4)$$

Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння: $-xz' + z = 0$:

$$x \frac{dz}{dx} = z; \quad \ln|z| = \ln|x| + \ln C, \quad z_0 = Cx.$$

Будемо шукати рішення неоднорідного рівняння у вигляді: $z_H = C(x)x$:

$$z' = C'(x)x + C(x).$$

Підставляючи розв'язок $z_H = C(x)x$ в рівняння (4.4), отримаємо рівняння для $C(x)$:

$$-x(C'(x)x + C(x)) + C(x)x = \ln x,$$

звідки

$$C'(x)x^2 = -\ln x, \quad C'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

Інтегруючи частинами, отримаємо

$$C(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left\| \begin{array}{l} \ln x = u, \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{x^2} dx, v = -\frac{1}{x} \end{array} \right\| = \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C.$$

Тоді функція $z_H = C(x)x$ дорівнює

$$z_H(x) = \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C \right) x = \ln x + Cx + 1 = \ln ex + Cx,$$

а шукана функція $y(x)$ дорівнює

$$y = \frac{1}{\ln x + C_1 x + 1}.$$

Аудиторне заняття до тем 4.1-4.2

1. Розв'язати рівняння:

а) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3;$

б) $y' - \frac{3y}{x} = x;$

в) $y' - \frac{y}{\sin x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2};$

г) $y' = \frac{y}{(1+x^2)\operatorname{arctgx}} + \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \operatorname{arctgx}.$

Самостійна робота до тем 4.1-4.2

2. Розв'язати рівняння

а) $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x;$

б) $y' + \frac{x}{1-x^2} y = \frac{2x}{1-x^2};$

в) $(x - 2xy - y^2)dy + y^2 dx = 0;$

г) $y' - 3\frac{y}{x} + x^3 y^2 = 0.$

3. Знайти інтегральну криву рівняння $y' + 2y = y^3$, яка проходить через точку $x=0, y=1$:

Відповіді до самостійної роботи до тем 4.1-4.2

2.

а) $y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$;

б) $y = C\sqrt{1-x^2} + 2$;

в) $y = Cy^2 e^{\frac{1}{y}} + y^2, y \neq 0$;

г) $y = \frac{7x^3}{x^7 + C}$

3. $y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^{4x} + 1}}$.

4.3. Диференціальні рівняння у повних диференціалах

Рівняння вигляду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (4.5)$$

називають рівнянням в повних диференціалах, якщо ліва частина рівняння є диференціалом деякої функції $u(x, y)$.

Якщо функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$ неперервні в деякій області G і мають неперервні частинні похідні, то необхідною і достатньою умовою того, що вираз

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

є повним диференціалом, є тотожність рівності похідних:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (4.6)$$

Якщо при дотриманні вищевказаних умов $M(x, y)$ і $N(x, y)$ в області не перетворюються на нуль, то через кожную точку області G проходить одна і тільки одна інтегральна крива рівняння (4.5).

При виконанні умови (4.6) ліва частина рівняння (4.5) буде повним диференціалом деякої функції $U(x, y)$, такої що

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} dy, \quad (4.7)$$

і тому загальний інтеграл рівняння (4.5) можна записати як

$$U(x, y) = C, \quad (4.8)$$

де C – деяка довільна стала.

З (4.7), враховуючи, що

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = M(x, y),$$

інтегруванням отримаємо:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \varphi(y), \quad (4.9)$$

де x_0 – будь-яка точка з області G , або точка, в якій задаються початкові умови для рівняння (4.5), а $\varphi(y)$ – довільна функція змінної y .

Якщо взяти похідну від (4.9) по змінній y , отримаємо

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y) \quad (4.10)$$

Враховуючи (4.6), можна отримати з (4.10) вираз для $\varphi'(y)$

$$\varphi'(y) = N(x_0, y), \quad (4.11)$$

а, інтегруючи (4.11) по змінній y , отримаємо $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy + C_1$$

де C_1 – довільна стала.

Таким чином, загальним інтегралом рівняння (4.5) буде такий:

$$\int_{x_0}^x M(x, y)dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy = C. \quad (4.12)$$

Вправи.

1. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0.$$

Розв'язок.

Тут $M(x) = e^y$, $N(x) = xe^y - 2y$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^y.$$

Умову (4.6) виконано. Отже, дане рівняння є рівнянням в повних диференціалах. Загальний інтеграл цього рівняння за формулою (4.12) дорівнює

$$\int_{x_0}^x e^y dx + \int_{y_0}^y (x_0 e^y - 2y) dy = e^y x \Big|_{x_0}^x + (x_0 e^y - 2y^2) \Big|_{y_0}^y = x e^y - y^2 - x_0 e^{y_0} + y_0^2,$$

або, враховуючи, що $-x_0 e^{y_0} + y_0^2$ є сталою величиною, запишемо загальний інтеграл рівняння у вигляді

$$x e^y - y^2 = C.$$

2. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$\frac{x^2 - y}{x^2} dx + \frac{x + 1}{x} dy = 0,$$

який задовольняє початкову умову $x_0 = 1, y_0 = 1$.

Розв'язок. Тут $M(x, y) = \frac{x^2 - y}{x^2}$, $N(x, y) = \frac{x + 1}{x}$.

Умову (4.6) в цьому рівнянні також виконано, це можна легко перевірити. Загальний інтеграл цього рівняння за формулою (4.12) дорівнює

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{x^2 - y}{x^2} dx + \int_{y_0}^y \frac{x_0 + 1}{x_0} dy &= \left(x + \frac{y}{x} \right) \Big|_{x_0}^x + y \left(\frac{x_0 + 1}{x_0} \right) \Big|_{y_0}^y = \\ &= x + \frac{y}{x} - x_0 - \frac{y_0}{x_0} + \frac{x_0 + 1}{x_0} (y - y_0) = x + \frac{y}{x} + y - x_0 - y_0 \left(\frac{x_0 + 1}{x_0} \right). \end{aligned}$$

Або, позначаючи константою C суму всіх сталих, отримаємо загальний інтеграл рівняння.

$$x + y + \frac{y}{x} = C.$$

Оскільки в задачі потрібно знайти розв'язок задачі Коші при початковій умові $x_0 = 1, y_0 = 1$, підставимо ці значення в загальний інтеграл і отримаємо:

$$x + y + \frac{y}{x} = 3.$$

4.4. Інтегруючий множник

Припустимо, що ліва частина диференціального рівняння (4.5) не є повним диференціалом. Тоді можна довести [1], що завжди існує множник $\mu(x, y)$, в результаті множення на який вираз

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

перетворюється на повний диференціал деякої функції $U(x, y)$:

$$\mu(x, y)(Mdx + Ndy) = dU(x, y).$$

Знаходження інтегруючого множника є взагалі достатньо складною задачею. Тому ми розглянемо тільки такі випадки, коли інтегруючий множник буде функцією тільки однієї змінної: або $\mu(x)$, або $\mu(y)$. Хай, наприклад, функція $\mu(x)$ залежить тільки від x .

Із умови (4.6) отримаємо

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}, \quad (4.13)$$

або

$$\mu(x) \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \frac{\partial \mu(x)}{\partial x} + \mu(x) \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (4.14)$$

Таким чином, для функції $\mu(x)$ ми отримали таке диференціальне рівняння:

$$N(x, y) \frac{\partial \mu(x)}{\partial x} = \mu(x) \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right).$$

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)}. \quad (4.15)$$

В лівій частині рівняння (4.15) функція змінної x . Тому, якщо в правій частині також буде функція тільки змінної x , то існує множник $\mu(x)$, який залежить тільки від x , і який можна отримати інтегруванням рівняння (4.15). Припустимо, що дійсно в правій частині (4.15) є деяка функція $\varphi(x)$:

$$\frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)} = \varphi(x) . \quad (4.16)$$

Тоді, інтегруючи (3.11), отримаємо вираз для функції $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x, y) dx} . \quad (4.17)$$

Константу в (4.17) не пишемо, тому, що нас влаштовує будь-який частковий розв'язок рівняння (4.15).

Аналогічним способом в деяких рівняннях можна шукати інтегруючий множник, залежний тільки від y . Можна перевірити, що замість (4.15) в цьому випадку ми отримаємо

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{M(x, y)} . \quad (4.18)$$

Якщо права частина (4.15) буде функцією тільки змінної y , тоді можливо знайти інтегруючий множник $\mu(y)$.

Вправи. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + (x^2 + y^2) = 0 .$$

Перевіримо, чи є вираз ліворуч повним диференціалом:

$$M = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} , \quad N = x^2 + y^2 ,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + x^2 + y^2 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2x .$$

Спробуємо пошукати функцію $\mu(x)$ – інтегруючий множник, який залежить тільки від x , тобто перевіримо, чи залежить вираз в правій частині (4.15) тільки від змінної x :

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1 .$$

– умову (4.16) виконано. Знайдемо з (4.18):

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)}$$

$$\mu(x) = e^x.$$

Тоді рівняння

$$e^x \left(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) dx + e^x (x^2 + y^2) dy = 0 \quad (4.19)$$

буде рівнянням у повних диференціалах. Знайдемо розв'язок (4.19) за формулою (4.12):

$$\int_{x_0}^x e^x \left(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) dx + \int_{y_0}^y e^{x_0} (x_0^2 + y^2) dy = C.$$

Інтеграл $\int_{x_0}^x e^x (2x + x^2) dx$ двічі проінтегруємо частинами:

$$\begin{aligned} y \int_{x_0}^x e^x (2x + x^2) dx &= \left\| \begin{aligned} u &= 2x + x^2, \quad du = (2 + 2x)dx, \\ dv &= e^x dx, \quad v = e^x \end{aligned} \right\| = y(2x + x^2) \Big|_{x_0}^x - 2y \int_{x_0}^x e^x (1 + x) dx = \\ &= ye^x (2x + x^2) - 2y \left[(1 + x)e^x - \int e^x dx \right] = e^x y(2x + x^2) - 2y \left[(1 + x)e^x - e^x \right] = e^x yx^2, \\ U &= \frac{y^3}{3} e^x + e^x yx^2 + \varphi(y) = e^x y \left(\frac{y^2}{3} + x^2 \right) + \varphi(y). \end{aligned}$$

Загальним інтегралом рівняння є

$$e^x y \left(\frac{y^2}{3} + x^2 \right) = C.$$

Аудиторне заняття до тем 4.3-4.4

1. Розв'язати рівняння $(2x - y)dx + (4y - x)dy = 0$.

2. Розв'язати рівняння $(\ln y - 2x)dx + \left(\frac{x}{y} - 2y\right)dy = 0$.
3. Розв'язати рівняння $e^x(1 + e^y)dx + e^y(1 + e^x)dy = 0$.
4. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0,$$
 який задовольняє початкову умову $x_0 = 1, y_0 = 1$.
5. Знайти загальний інтеграл рівняння $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$.

Самостійна робота до тем 4.3-4.4

6. Розв'язати рівняння $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$.
7. Розв'язати рівняння $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$.
8. Розв'язати рівняння $\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx + \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right)dy = 0$.
9. Знайти загальний інтеграл рівняння $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$,
який задовольняє початкову умову $x_0 = 1, y_0 = 0$.
10. Знайти загальний інтеграл рівняння $\left(1 + \frac{5y^2}{x^2}\right)dx = \frac{2y}{x}dy$.

Відповіді до самостійної роботи до тем 4.3-4.4

6. $yx^2 + 3y^2x - y^3 = C$.
7. $x^2 + y^2x_0 = C$.
8. $\frac{y^2}{x-y} + \frac{y^2 - x_0^2}{y - x_0} = C$.
9. $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = 1$.
10. $\frac{1}{3x^3} + \frac{y^2}{x^5} = C$.

5. Особливі точки диференціального рівняння.

5.1 Види особливих точок

Розглянемо диференціальне рівняння (4.5):

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Якщо в деякій точці (x_0, y_0) одна з функцій $M(x, y)$ або $N(x, y)$, або обидві одночасно, перетворюються на нуль, то в цій точці не виконуються умови теореми Коші, і через таку точку може не проходити жодної інтегральної кривої, або може проходити безліч інтегральних кривих. Такі точки називаються *особливими точками* диференціального рівняння вигляду (4.5).

Приклади.

1. Розглянемо рівняння $ydx - xdy = 0$. $M(x, y) = y$, $N(x, y) = -x$. В точці $(0, 0)$ обидві функції перетворюються на нуль. Загальним розв'язком цього рівняння є сім'я прямих $y = Cx$. Як можна бачити, через точку $(0, 0)$ проходить нескінченна кількість прямих (рис. 7а). Таку точку називають *вузол*.

2. Розглянемо рівняння $2ydx - xdy = 0$. $M(x, y) = 2y$, $N(x, y) = -x$. В точці $(0, 0)$ обидві функції перетворюються на нуль. Через точку $(0, 0)$ проходить, так само, як і в прикладі 1, нескінченна кількість інтегральних кривих – парабол $y = Cx^2$ (рис. 7б). Ця точка також є *вузлом*.

3. Розглянемо рівняння $ydx + xdy = 0$. Тут $M(x, y) = y$, $N(x, y) = x$. Загальним розв'язком є сім'я гіпербол $xy = C$. Через точку $(0, 0)$ не проходить жодної інтегральної кривої (рис. 7в). Точка такого типу називається *сідлом (або сідловою точкою)*.

4. Розглянемо рівняння $x dx + y dy = 0$. Тут $M(x, y) = x$, $N(x, y) = y$. Загальним розв'язком є сім'я кіл $x^2 + y^2 = C$. Ці кола проходять як завгодно близько до точки $(0, 0)$. Точку такого типу називають *центром* (рис. 7г).

5. Розглянемо рівняння $(x + y)dx - (x - y)dy = 0$. В цьому рівнянні буде зручно перейти до полярних координат: $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$. Тоді рівняння перейде в

такє:

$$d\rho = \rho d\varphi.$$

Загальним інтегралом цього рівняння є сім'я спіралей

$$\rho = Ce^{\varphi}.$$

При $\varphi \rightarrow -\infty$, тобто при розкручуванні спіралей в зворотному напрямку, полярний радіус $\rho \rightarrow 0$ і інтегральні криві асимптотично наближаються до точки $(0,0)$ (рис. 7д). Особливі точки такого типу називаються *фокусом*.

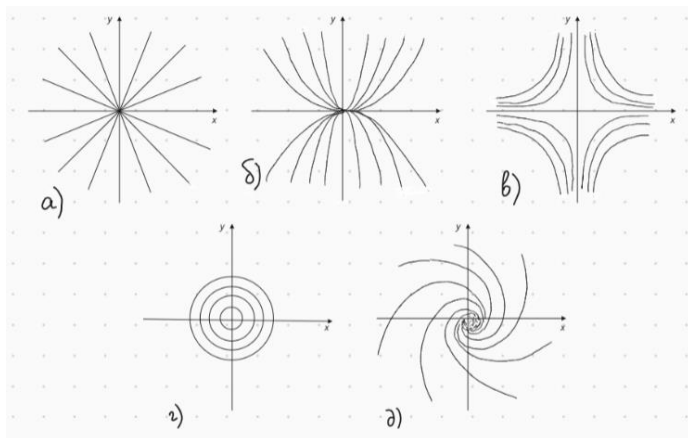


Рис. 7

Дослідимо поведінку інтегральних кривих Розглянемо інтегральні криві рівняння в околі особливої точки $(0,0)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + ky}, \quad (5.1)$$

Для цього представимо рівняння (4.1) у вигляді

$$\frac{dx}{cx + ky} = \frac{dy}{ax + by}$$

і введемо нову змінну, диференціал якої задовольняє рівність

$$\frac{dx}{cx + ky} = \frac{dy}{ax + by} = dt.$$

Тоді

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = cx + ky \\ \frac{dy}{dt} = ax + by \end{cases} . \quad (5.2)$$

Таким чином, маємо систему, яка при $cx + ky \neq 0$ еквівалентна рівнянню (4.1). Якщо $cx + ky = 0$, а $ax + by \neq 0$, то система еквівалентна оберненому рівнянню.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{cx + ky}{ax + by}$$

Запишемо систему (4.1) в векторній формі:

$$\frac{dz}{dt} = Az , \quad (5.3)$$

де $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – вектор, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & k \end{pmatrix}$ – матриця.

Характеристичне рівняння матриці A має вигляд [2]

$$|A - \lambda E| = 0 , \quad (5.4)$$

або

$$\begin{vmatrix} c - \lambda & k \\ a & b - \lambda \end{vmatrix} = 0 , \quad (5.5)$$

корені якого (власні числа) λ_1 і λ_2 дорівнюють:

$$\lambda_{1,2} = \frac{b+c}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(b-c)^2 + 4ak} . \quad (5.6)$$

Поведінка інтегральних кривих рівняння (4.5) в околі точки $(0,0)$, а також тип цієї особливої точки, залежить від значень власних чисел λ_1 і λ_2 . Розглянемо такі випадки.

1. λ_1 і λ_2 – дійсні числа одного знаку, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді точка $(0,0)$ є *вузлом* (рис. 7 а, б). В цьому випадку інтегральні криві є параболлами, які проходять через точку $(0,0)$.

2. λ_1 і λ_2 – дійсні числа різних знаків. У цьому випадку особлива точка $(0,0)$ рівняння (4.1) буде *сідлом* (рис. 7 в), інтегральні криві матимуть вигляд гіпербол.

3. λ_1 і λ_2 – дійсні числа, рівні між собою, $\lambda_1 = \lambda_2$. Тоді точка $(0,0)$, як і у випадку 1, є *вузлом* (рис. 7 а, б).

4. λ_1 і λ_2 – комплексно-спряжені числа [3]: $\lambda_1 = p + qi$, $\lambda_2 = p - qi$. Це особлива точка типу *фокус* (рис. 7 д).

5. λ_1 і λ_2 – чисто уявні числа: $\lambda_1 = qi$, $\lambda_2 = -qi$.

Якщо $\alpha \neq 0$, то в такому випадку інтегральні криві є логарифмічними спіралями, які прилягають до початку координат і роблять нескінченне число обертів навколо точки $(0,0)$, яку називають *фокусом* (рис. 7 д).

Якщо λ_1 і λ_2 – чисто уявні ($\alpha = 0$), то інтегральними кривими в околі точки $(0,0)$ є сім'я замкнених кривих, що як завгодно близько наближаються до центру $(0,0)$ (рис. 7 г), така точка є *центром*.

Вправи.

1. Дослідити поведінку інтегральних кривих рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x}$$

в околі особливої точки $(0,0)$.

Розв'язок. Тут матриця $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Знайдемо власні значення матриці

A :

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, отримаємо квадратне рівняння для λ :

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

розв'язками якого є дійсні корені

$$\lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Особливою точкою буде сідло.

2. Дослідити поведінку інтегральних кривих рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x-y}{x-y}$$

в околі особливої точки $(0,0)$.

Розв'язок. Тут матриця $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Знайдемо власні значення матриці

A :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, отримаємо квадратне рівняння для λ :

$$\lambda^2 + 2 = 0,$$

коренями якого є два чисто уявних спряжених комплексних числа

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{2}i.$$

Таким чином, інтегральними кривими диференціального рівняння в околі особливої точки якого є сім'я концентричних кіл, а особлива точка – центр.

Аудиторне заняття до теми 5

1. Дослідити поведінку інтегральних кривих рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y+x}$$

в околі особливої точки $(0,0)$.

2. Дослідити поведінку інтегральних кривих рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-y}$$

в околі особливої точки $(0,0)$.

Самостійна робота до теми 5

3. Дослідити поведінку інтегральних кривих рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{y-x}$$

в околі особливої точки $(0,0)$.

Відповіді до самостійної роботи до теми 5

3. сідло.

6. Диференціальні рівняння вищих порядків

Порядком диференціального рівняння називають найвищий порядок похідної від шуканої функції, яка входить в це рівняння.

В загальному вигляді рівняння n -го порядку має такий вигляд:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (6.1)$$

де $y(x)$ – шукана функція.

Загальний інтеграл рівняння n -го порядку містить n довільних сталих і має вигляд

$$\Phi(x, y(x), C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (6.2)$$

а загальний розв'язок

$$y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (6.3)$$

Початкові умови для диференціального рівняння n -го порядку мають вигляд:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (6.4)$$

Цих умов достатньо, щоб із загального розв'язку виділити конкретну криву (тобто вирішити задачу Коші).

Приклад 6.1. Нехай задано рівняння

$$(y')^2 + yy'' = 0. \quad (6.5)$$

Зазначимо, що ліву частину рівняння можна записати у вигляді

$$(yy')' = 0.$$

Тоді

$$yy' = C_1,$$

звідки

$$\frac{(y^2)'}{2} = C_1,$$

або

$$y^2 = C_1 x + C_2,$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Тому вираз $y^2 - C_1 x - C_2 = 0$ є загальним інтегралом рівняння.

Приклад 6.2. Розв'яжемо рівняння:

$$(y')^2 - yy'' = 0. \quad (6.6)$$

Якщо $y \neq 0$, розділимо рівняння на y^2 :

$$\frac{(y')^2 - yy''}{y^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{y'}{y} \right)' = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = C_1.$$

Для $y(x)$ отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} = C_1 dx \Rightarrow \ln|y| = C_1 x + C_2 \\ \Rightarrow y(x) = C_2 e^{C_1 x}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

$y=0$ є також розв'язком (6.6), але цей розв'язок не треба виписувати окремо, тому що він міститься в (6.7) при $C_2 = 0$.

Метод, використаний в прикладах 1 і 2, називається *методом інтегрованих комбінацій*. Він полягає в тому, що ліву частину рівняння (якщо це можливо) представляють у вигляді точної похідної від деякої функції.

Для рівнянь вигляду

$$F(x, y', y'') = 0, \quad (6.8)$$

які не містять функції y , використовують метод зниження порядку. При цьому вводять позначення $y' = p(x)$. Тоді $y'' = p'(x)$, і рівняння приводиться до рівняння 1-го порядку відносно функції $p(x)$.

Для рівнянь вигляду

$$F(y, y', y'') = 0 \quad (6.9)$$

вводять нову функцію $y' = p(x)$, але на неї дивляться як на функцію від змінної y . Тоді

$$y'' = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot p'(y),$$

і рівняння набуває вигляду

$$F(y, p, p' \cdot p) = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, отримаємо функцію $p = \varphi(y, C_1)$, або

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1).$$

Звідки, відокремлюючи змінні, отримаємо

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx,$$

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Таким чином, ми отримали загальний інтеграл рівняння вигляду (6.9).

Приклад 6.3. Розв'яжемо рівняння:

$$y'' = y' \sqrt{1 + (y')^2}. \quad (6.10)$$

Це рівняння вигляду (6.9), яке не містить в явному вигляді змінної x . Введемо нову функцію $y' = p(x)$. Тоді рівняння буде таким:

$$pp' = p \sqrt{1 + p^2}. \quad (6.11)$$

Скоротимо рівняння на p (інтегральна крива $p=0$ є розв'язком рівняння, ми її розглянемо окремо):

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2} \Rightarrow \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = dx.$$

Інтегруючи, отримаємо

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = x + \ln C_1 \Rightarrow p + \sqrt{1 + p^2} = C_1 e^x \Rightarrow 1 + p^2 = (C_1 e^x - p)^2,$$

$$\Rightarrow p = \frac{C_1^2 e^{2x}}{2C_1 e^x} - \frac{1}{2C_1 e^x}. \quad (6.12)$$

Знаючи функцію $p(x)$, можна знайти $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1^2 e^{2x}}{2C_1 e^x} - \frac{1}{2C_1 e^x},$$

звідки

$$y = \frac{1}{2} \int \left(C_1 e^x - \frac{e^{-x}}{C_1} \right) dx = \frac{1}{2} \left(C_1 e^x + \frac{e^{-x}}{C_1} \right) + C_2,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Слід також відмітити, що $p=0$ є також розв'язком рівняння (6.11), який неможливо отримати з загального розв'язку (6.12) жодним вибором константи

C_1 . Тому розв'язок $p=0$ (тобто $y=C$) слід окремо додати до загального розв'язку.

Аудиторне заняття до теми 6

1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy'' - y' = 1.$$

2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = \sqrt{1 + (y')^2}.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''x = y' \ln x.$$

Самостійна робота до теми 6

4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy'' + y' = 2x.$$

5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''y^3 = 1.$$

6. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x^2 y'' + xy' = 1.$$

Відповіді до самостійної роботи до теми 6

4. $y = \frac{x^2}{2} + C_1 \ln|x| + C_2.$

5. $\operatorname{sign} y \sqrt{C_1 y^2 - 1} = x + C_2.$

6. $\ln|y + C_1 + \sqrt{(y + C_1)^2 - 1}| = \pm x + C_2.$

7. Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку

7.1. Лінійна незалежність системи функцій

Введемо поняття лінійної залежності і незалежності системи функцій. Ця поняття є аналогом відповідного поняття лінійної залежності векторів в лінійній алгебрі [2].

Систему функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ називають *лінійно незалежною на проміжку* (a, b) , якщо тотожна рівність

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) \equiv 0, \quad (7.1)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – константи,

виконується тільки, якщо

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0. \quad (7.2)$$

Систему функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ називають *лінійно залежною на проміжку* (a, b) , якщо вимога (7.2) не виконується.

Нехай $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – система функцій. Визначник, утворений таким чином:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \equiv W[y_1, y_2, \dots, y_n],$$

називається *визначником Вронського* (або *вронскіаном*).

Теорема. Якщо визначник Вронського системи функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ тотожно дорівнює нулю, то дані функції є *лінійно залежними*. Якщо визначник Вронського, системи функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ в жодній точці проміжку не дорівнює нулю, то дані функції є *лінійно незалежними*.

Розглянемо ще декілька прикладів систем лінійно незалежних функцій, які будуть важливими далі і будуть використані при знаходженні розв'язків диференціальних рівнянь та їх систем.

Приклад 7.1. Функції $y_1 = e^x$, $y_2 = 2e^x$ є лінійно залежними, оскільки існує така лінійна комбінація цих функцій с коефіцієнтами $C_1 = -2$, $C_2 = 1$:

$$-2y_1 + y_2 = 0$$

всюди на $(-\infty, +\infty)$, тобто є такі ненульові константи, за допомогою яких одна функція може бути виражена через іншу.

Приклад 7.2. Функції $y_1 = \sin^2 x$, $y_2 = \cos^2 x$, $y_3 = 1$ також є лінійно залежними, оскільки всюди на $(-\infty, +\infty)$ виконується співвідношення

$$1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x + (-1) \cdot 1 = 0.$$

Тобто існують ненульові константи $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = -1$, за яких виконується рівність (6.1).

Приклад 7.3. Функції $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ лінійно незалежні, оскільки співвідношення

$$C_1 e^x + C_2 e^{-x} \equiv 0$$

справджується тільки при $C_1 = C_2 = 0$.

Приклад 7.4. Система функцій $1, x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}$ є лінійно незалежною на всій числовій осі:

$$W(1, x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 0 & 1 & 2x & \dots & (n-1)x^{n-2} \\ 0 & 0 & 2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & (n-2)! & (n-1)!x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (n-1)! \end{vmatrix} = 1!2!\dots(n-1)! \neq 0.$$

Приклад 7.5. Система функцій $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, e^{k_3 x}, \dots, e^{k_n x}$, де у показниках степені різні значення k_i , є лінійно незалежною на всій числовій осі (також на будь-якому інтервалі)

$$W(e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, e^{k_3 x}, \dots, e^{k_n x}) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \dots & e^{k_n x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \dots & k_n e^{k_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x} & k_2^{n-1} e^{k_2 x} & \dots & k_n^{n-1} e^{k_n x} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n e^{k_i x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{i=1}^n e^{k_i x} \prod_{i>k} (x_i - x_k).$$

Останній визначник є визначником Ван-дер-Монда, який не дорівнює 0 при різних k_i [1, 2].

7.2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку має такий вигляд:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (7.3)$$

Якщо відомі два лінійно незалежних розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння (5.7), то їх лінійна комбінація

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (7.4)$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі, є загальним розв'язком рівняння (7.3) [2].

Лінійне *неоднорідне* диференціальне рівняння 2-го порядку має вигляд:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \quad (7.5)$$

Якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – два лінійно незалежних розв'язка однорідного рівняння (7.3), а $y_{\text{ин}}(x)$ – будь-який частковий розв'язок неоднорідного рівняння (7.5), то загальний розв'язок неоднорідного рівняння має такий вигляд:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_{\text{ин}}(x) \quad (7.6)$$

Метод варіації сталих для лінійного рівняння 2 порядку

Для отримання загального розв'язку неоднорідного рівняння другого порядку, так само, як для лінійного рівняння першого порядку, також існує *метод варіації довільних сталих*. Якщо ми знаємо фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння, ми можемо знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Метод варіації довільних сталих для однорідного рівняння є таким.

1. Знайдемо фундаментальну систему розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$, а також загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (7.7)$$

де C_1 , C_2 – довільні сталі.

2. Запишемо загальний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2, \quad (7.8)$$

де $C_1(x), C_2(x)$ – не константи, а вже невідомі функції.

3. Для визначення функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ необхідно вирішити систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \quad (7.9)$$

Функції $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$ визначаються з системи єдиним способом, оскільки вронскіан

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Нехай $C_1'(x) = \varphi_1(x)$, $C_2'(x) = \varphi_2(x)$. Тоді можна визначити

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x) dx + c_1, \quad C_2(x) = \int \varphi_2(x) dx + c_2,$$

де c_1 і c_2 – сталі інтегрування.

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння (y_H) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} y &= \left(\int \varphi_1(x) dx + c_1 \right) y_1 + \left(\int \varphi_2(x) dx + c_2 \right) y_2 = \\ &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_1 \int \varphi_1(x) dx + y_2 \int \varphi_2(x) dx. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку неоднорідного рівняння (7.10) дійсно представляється у вигляді:

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_{\text{ин}}(x), \quad (7.11)$$

де y_1, y_2 – лінійно незалежні часткові розв'язки однорідного рівняння, а $y_{\text{ин}}(x)$ – будь-який розв'язок неоднорідного рівняння.

Приклад 7.6. Розв'язати рівняння:

$$y'' + \frac{y'}{x} = \frac{1}{x^2}. \quad (7.12)$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2 порядку.

1. Знайдемо загальний розв'язок $y_0(x)$ відповідного однорідного рівняння

$$y'' + \frac{y'}{x} = 0. \quad (7.13)$$

2. Це рівняння з відокремлювальними змінними відносно функції y' :

$$\frac{dy'}{dx} + \frac{y'}{x} = 0, \quad \frac{dy'}{y'} = -\frac{dx}{x}, \quad \ln|y'| = -\ln|x| + \ln C_1,$$

$$y' = \frac{C_1}{x}, \quad y_0(x) = C_1 \ln|x| + C_2,$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування.

3. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння y_{zn} будемо шукати у вигляді:

$$y(x) = C_1(x) \ln|x| + 1 \cdot C_2(x).$$

Підставимо у систему для визначення $C_1(x)$ і $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x) \ln|x| + C_2'(x) = 0 \\ C_1'(x) \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x^2} \end{cases}.$$

Розв'язки цієї системи такі:

$$C_1'(x) = \frac{1}{x}, \quad C_1(x) = \int \frac{1}{x} dx + c_1 = \ln|x| + c_1,$$

$$C_2'(x) = -\frac{\ln|x|}{x}, \quad C_2(x) = -\int \frac{\ln|x|}{x} dx = -\frac{\ln^2|x|}{2} + c_2.$$

Тому загальним розв'язком неоднорідного рівняння буде:

$$y(x) = (\ln|x| + c_1) \ln|x| - \frac{\ln^2|x|}{2} + c_2 = \frac{\ln^2|x|}{2} + c_1 \ln|x| + c_2. \quad (7.14)$$

Можна побачити, що в (7.14) $c_1 \ln|x| + c_2$ – загальний розв'язок однорідного

рівняння, $\frac{\ln^2|x|}{2}$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння може не виражатися через елементарні функції, але завжди зводиться до квадратур.

Приклад 7.7. Розв'язати рівняння:

$$y'' + 4y = \frac{1}{x}. \quad (7.15)$$

Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y'' + 4y = 0. \quad (7.16)$$

(7.16) – лінійне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами, розв'язком якого є

$$y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x. \quad (7.17)$$

Будемо шукати розв'язок неоднорідного рівняння (6.15) у вигляді

$$y = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x, \quad (7.18)$$

змінивши константи в (7.17) на функції $C_1(x)$, $C_2(x)$. Підставляючи розв'язок (7.18) в систему рівнянь (6.9), отримаємо:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos 2x + C_2'(x) \sin 2x = 0 \\ -2C_1'(x) \sin 2x + 2C_2'(x) \cos 2x = \frac{1}{x} \end{cases} \quad (7.19)$$

звідки для $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ отримаємо вирази

$$C_1'(x) = -\frac{\sin 2x}{2x}, \quad C_2'(x) = \frac{\cos 2x}{2x} \quad (7.20)$$

Знайдемо загальний розв'язок $y_0(x)$ відповідного однорідного рівняння

Аудиторне заняття до теми 7

1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}.$$

2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

Самостійна робота до теми 7

3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y' = \frac{1}{e^x + 1}$$

Відповіді до самостійної роботи до теми 7

3. $y(x) = \ln \frac{e^x}{e^x + 1} - e^{-x} (\ln(e^x + 1) + c_2) + c_1.$

8. Лінійне диференціальне рівняння n -го порядку із сталими коефіцієнтами

Розглянемо *лінійне однорідне диференціальне рівняння n -го порядку із сталими коефіцієнтами* – це рівняння вигляду:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (8.1)$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n$ – константи.

Фундаментальною системою розв'язків (ФСР) рівняння (8.1) називають будь-які n лінійно незалежних розв'язків даного рівняння.

Теорема. Якщо $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків однорідного диференціального рівняння n порядку, то загальний розв'язок є таким:

$$y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі.

Для того, щоб розв'язати рівняння, треба знайти яку-небудь фундаментальну систему розв'язків $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.

Тоді загальним розв'язком буде функція

$$y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

Будемо шукати фундаментальну систему функцій у вигляді

$$y = e^{kx} \quad (8.2)$$

Тоді

$$y' = k e^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}, \quad \dots \quad y^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Якщо підставимо цей частинний розв'язок в рівняння (7.1), отримаємо

$$e^{kx} (k^n + p_1 k^{n-1} + \dots + p_{n-1} k + p_n) = 0 \quad (8.3)$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, отримаємо алгебраїчне рівняння для k :

$$k^n + p_1 k^{n-1} + \dots + p_{n-1} k + p_n = 0 \quad (8.4)$$

Таким чином, якщо k_i – розв'язок рівняння (8.4), то $y = e^{k_i x}$ – частинний розв'язок диференціального рівняння (8.1).

Рівняння (8.4) має назву *характеристичного рівняння*, яке відповідає однорідному диференціальному рівнянню зі сталими коефіцієнтами (8.1).

Згідно до основної теореми алгебри, *рівняння* (8.4) має рівно n коренів, деякі з котрих можуть бути кратними, і комплексні корені входять парами: якщо $k_1 = a + bi$ є коренем рівняння, то і $\bar{k}_1 = a - bi$ також є коренем рівняння [3].

Розглянемо можливі випадки.

1. Випадок простих дійсних коренів .

Нехай всі корені характеристичного многочлена є простими (тобто кратність кожного кореня дорівнює 1), і дійсними числами. Тоді частинними розв'язками однорідного диференціального рівняння будуть n лінійно-незалежних функцій

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}, \quad \dots \quad y_n = e^{k_n x}.$$

Оскільки ці функції є лінійно незалежними, загальним розв'язком рівняння (8.1) буде лінійна комбінація цих розв'язков:

$$y_0 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

Приклад 8.1: Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Складемо характеристичне рівняння:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Коренями цього квадратного рівняння є два різних дійсних числа

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2.$$

Таким чином, двом кореням відповідають частинні розв'язки

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{2x}.$$

Тому загальним розв'язком даного диференціального рівняння є функція

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Приклад 8.2: Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Характеристичним рівнянням для даного диференціального рівняння є $k^3 - 6k^2 + 11k - 6 = 0$.

Одним із коренів характеристичного рівняння є $k_1 = 1$ (цей корінь можна легко вгадати). Тому характеристичне рівняння розкладається на множники:

$$(k - 1)(k^2 - 5k + 6) = 0.$$

Тому коренями характеристичного рівняння є:

$$k = 1, k = 2, k = 3.$$

Даним трьом кореням відповідають три частинні розв'язки диференціального рівняння:

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}.$$

Тому загальним розв'язком даного диференціального рівняння є

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

2. Випадок простих комплексних коренів.

Розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння має комплексно-спряжені корені $k_1 = a + bi$ і $k_2 = a - bi$ [3]. Цим значенням відповідають два частинних розв'язка диференціального рівняння:

$$y_1 = e^{(a+ib)x} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) \quad (8.5)$$

і

$$y_2 = e^{(a-ib)x} = e^{ax} e^{-ibx} = e^{ax} (\cos bx - i \sin bx) \quad (8.6)$$

(при цьому використано формулу Ейлера [3])

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Для зручності на практиці в якості частинних розв'язків використовують лінійні комбінації розв'язків (8.5) і (8.6):

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) + e^{ax} (\cos bx - i \sin bx)}{2} = e^{ax} \cos bx,$$

$$\frac{y_1 - y_2}{2i} = \frac{e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) - e^{ax} (\cos bx - i \sin bx)}{2i} = e^{ax} \sin bx.$$

Тобто, двом комплексно-спряженим кореням $a \pm bi$ відповідають два частинних розв'язка

$$y_1 = e^{ax} \cos bx, \quad y_2 = e^{ax} \sin bx.$$

Приклад 8.3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 2k + 5 = 0.$$

Це квадратне рівняння, розв'язками якого є

$$k_{1,2} = -1 \pm 2i, \quad a = -1, b = 2.$$

Цим двом кореням відповідають два лінійно незалежні частинні розв'язки диференціального рівняння

$$y_1 = e^{-x} \cos 2x, \quad y_2 = e^{-x} \sin 2x,$$

тому загальний розв'язок буде таким:

$$y(x) = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x.$$

Приклад 8.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$.

Характеристичним рівнянням

$$k^3 - 5k^2 + 17k - 13 = 0$$

має один дійсний корінь і два комплексно-спряжених

$$k_1 = 1, \quad k_{2,3} = 2 \pm 3i.$$

Дійсному кореню $k_1 = 1$ відповідає розв'язок

$$y_1(x) = e^x,$$

а двом комплексно-спряженим кореням $k_{2,3} = 2 \pm 3i$ відповідає пара розв'язків

$$y_2 = e^{2x} \cos 3x, \quad y_3 = e^{2x} \sin 3x,$$

тому загальний розв'язок диференціального рівняння буде таким:

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \cos 3x + C_3 e^{2x} \sin 3x.$$

3. Випадок кратних коренів.

Розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння (8.4) має кратні корені: дійсні або комплексні. Як відомо [3], комплексно-спряжені корені

входять парами, і кількість таких пар є кратністю кореня. Тоді, шукаючи лінійно-незалежні розв'язки таким же чином, як в попередніх випадках, ми би отримали менше лінійно-незалежних розв'язків, ніж порядок характеристичного рівняння n .

Тому в цьому випадку порядок дій такий:

Якщо характеристичне рівняння має дійсний корінь k_s ($s > m$) кратності m_s , то такому кореню відповідає m_s лінійно-незалежних фундаментальних розв'язків:

$$e^{k_s x}, x e^{k_s x}, x^2 e^{k_s x}, \dots, x^{m_s-1} e^{k_s x}.$$

Якщо характеристичне рівняння має пару комплексно-спряжених коренів $k_{p+1} = \alpha + i\beta, k_{p+2} = \alpha - i\beta$ кратності t , то такий парі коренів відповідає $2t$ лінійно-незалежних фундаментальних розв'язків:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x; x e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x; \dots; x^{t-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{t-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Приклад 8.5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 2y' + y = 0$.

Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 2k + 1 = 0.$$

Це квадратне рівняння має корінь другої кратності

$$k_{1,2} = -1.$$

Таким чином, двом кореням відповідають частинні розв'язки

$$y_1 = e^{-x}, y_2 = x e^{-x}.$$

а загальний розв'язок диференціального рівняння є таким:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} = (C_1 + C_2 x) e^{-x}.$$

Приклад 8.6: Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y^{IV} - 3y''' + 3y'' = 0$.

Характеристичне рівняння

$$k^4 - 3k^3 + 3k^2 = 0$$

має один дійсний корінь другої кратності

$$k_{1,2} = 0,$$

і два комплексно-спряжених

$$k_{3,4} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Дійсному кореню $k_{1,2} = 0$ відповідає два розв'язки

$$y_1(x) = e^{0 \cdot x} \equiv 1, \quad y_2(x) = x e^{0 \cdot x} = x,$$

а двом комплексно-спряженим кореням $k_{3,4} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ відповідає пара розв'язків

$$y_3 = e^{\frac{3}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad y_4 = e^{\frac{3}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

тому загальний розв'язок диференціального рівняння буде таким:

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3 e^{\frac{3}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4 e^{\frac{3}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Приклад 8.7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$.

Характеристичне рівняння

$$k^4 + 8k^2 + 16 = 0$$

має два комплексно-спряжених коренів другої кратності

$$k_{1,2} = \pm 2i.$$

Даним кореням відповідає чотири розв'язки:

$$y_1(x) = \cos 2x, \quad y_2(x) = \sin 2x; \quad y_3(x) = x \cos 2x, \quad y_4(x) = x \sin 2x,$$

тому загальний розв'язок диференціального рівняння буде таким:

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 x \cos 2x + C_4 x \sin 2x.$$

Схема інтегрування лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами:

- 1 Знаходження відповідного характеристичного рівняння.
- 2 Знаходження коренів характеристичного рівняння.
- 3 Знаходження частинних розв'язків, які відповідають знайденим кореням характеристичного рівняння. Тут є такі особливості:

а) кожен з дійсних коренів першої кратності відповідає частинному розв'язку $y = e^{kx}$;

б) кожній парі комплексно-спряжених коренів $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ відповідає пара частинних розв'язків $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$;

в) кожен дійсний m -кратний корінь дає m частинних розв'язків, які можна дістати за допомогою множення частинних розв'язків на

$$1, x, x^2, \dots, x^{m-1}.$$

г) кожна пара комплексних m -кратних коренів, дає $2m$ частинних розв'язків, які можна дістати за допомогою множення частинних розв'язків на

$$1, x, x^2, \dots, x^{m-1}.$$

Приклад 8.8. Розглянемо вільні коливання матеріальної точки маси m при лінійному законі пружності та в'язкому терті, пропорційному першому степеню швидкості

$$-f \frac{dy}{dt}.$$

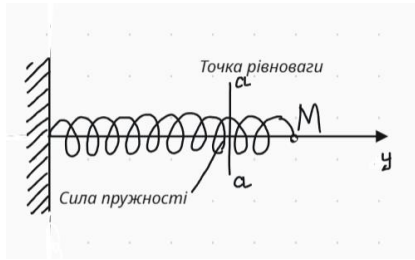


Рис. 8

Рівняння коливань має вигляд

$$z'' + 2hz' + \omega_0^2 z = 0 \quad (7.6)$$

Тут

$$z(t) = \frac{y(t)}{m}, \quad 3h = \frac{f}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

При вирішенні характеристичного рівняння виникають два основних випадка:

1. Якщо $h < \omega_0$, то

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2} = -h \pm i\sqrt{\omega_0^2 - h^2}.$$

Загальний розв'язок в даному випадку має вигляд:

$$z(t) = \frac{y(t)}{m} = C_1 e^{-ht} \sin \omega t + C_2 e^{-ht} \cos \omega t,$$

або після перетворень

$$z(t) = e^{-ht} \sin(\omega t + \alpha),$$

де

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}.$$

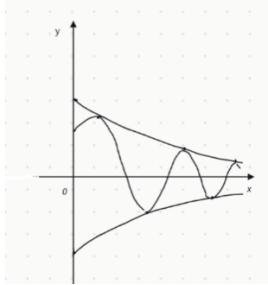


Рис. 9

Наявність тертя робить коливання загасаючими за експоненціальним законом (рис. 9):

2. Якщо $h > \omega_0$, тобто сила тертя є достатньо велика, то

$$z(t) = \frac{y(t)}{m} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-(h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2})t}.$$

При великих значеннях t більш суттєвий вклад на рух матеріальної точки має перший доданок, тому що $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ має місце загасання без коливань за експоненціальним законом (рис. 10):

$$z(t) = \frac{y(t)}{m} \sim e^{-(h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2})t}.$$

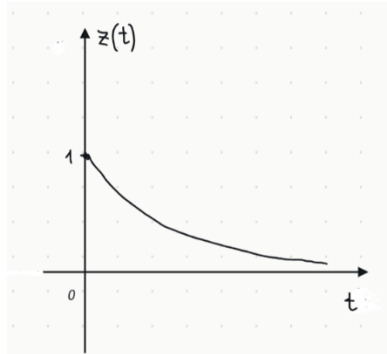


Рис. 10

Аудиторне заняття до теми 8

Знайти розв'язок:

1. $y''' - y'' - 6y' = 0$;
2. $y''' - 8y'' + 16y' = 0$;

Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

3. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$;
4. $y^{(IV)} + 8y'' + 16y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$;

Самостійна робота до теми 8

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

5. $y'' + 2y' + 5y = 0$;
6. $y''' - 3y' + 2y = 0$;

Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

7. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = 1$;
8. $y^{(IV)} + y'' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$;

Відповіді до самостійної роботи до теми 8

$$5. \quad y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) ;$$

$$6. \quad y = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{-2x} ;$$

$$7. \quad y = \frac{3}{2} e^x - \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{8} x \right) e^{2x} ;$$

$$8. \quad y = 2 + \sin x .$$

9. Частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду

Коли права частина лінійного диференціального рівняння має спеціальний вигляд, задача розв'язання рівняння значно спрощується. В параграфі 8 ми розглянули лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами (8.1). В цьому параграфі ми розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння довільного n -го порядку

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = P_m e^{\alpha x} , \quad (9.1)$$

де в правій частині знаходиться ненульова функція $f(x)$, яка представляє собою многочлен m -го степеня, помножений експоненту:

$$f(x) = P_m(x) e^{\alpha x} . \quad (9.2)$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку має вигляд :

$$y(x) = y_o(x) + y_{\text{ин}}(x) , \quad (9.3)$$

де $y_o(x)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння (7.1),

$y_{\text{ин}}(x)$ – будь-який частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (9.1).

Розглянемо два випадки:

1. Коефіцієнт α в правій частині не є коренем характеристичного рівняння (8.4). Тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y_{\text{чи}}(x) = Q_m(x)e^{\alpha x},$$

де $Q_m(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами того ж степеня, що і степінь многочлена в правій частині неоднорідного рівняння.

Приклад 9.1. Знайти загальний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' + y' - 12y = (x-1)e^{2x}. \quad (9.4)$$

Це лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами і правою частиною вигляду $P_m(x)e^{\alpha x}$. Будемо діяти за таким планом:

1. Знайдемо згідно до схеми розв’язок однорідного рівняння $y_o(x)$:

Відповідне характеристичне рівняння (8.4) є таким:

$$k^2 + k - 12 = 0.$$

Воно має два дійсних не рівних між собою кореня:

$$k_1 = -4, \quad k_2 = 3.$$

Отже,

$$y_o(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x}.$$

2. Жоден корінь характеристичного рівняння не дорівнює коефіцієнту показника степені у правій частині ($\alpha = 2$).

Шукатимемо частинний розв’язок неоднорідного рівняння методом невизначених коефіцієнтів у вигляді $y_{\text{чи}}(x) = (Ax + B)e^{2x}$. Для того, щоб знайти коефіцієнти A, B , підставимо частинний розв’язок в неоднорідне рівняння. Попередньо для цього треба знайти похідні $y'_{\text{чи}}(x)$ і $y''_{\text{чи}}(x)$ і домножити їх на коефіцієнти рівняння (9.4):

-12	$y_{\text{чи}}(x) = (Ax + B)e^{2x}$
1	$y'_{\text{чи}}(x) = Ae^{2x} + 2e^{2x}(Ax + B) = (2Ax + A + 2B)e^{2x}$
1	$y''_{\text{чи}}(x) = 2Ae^{2x} + 2e^{2x}(2Ax + A + 2B) = 4Axe^{2x} + 4e^{2x}(A + B)$

Підставимо в рівняння (9.4) і отримаємо і отримаємо тотожність:

Це тотожна рівність, яка виконується при будь-яких значеннях змінної x .

Таким чином, порівнявши праві і ліві частини таблиці, можна отримати два рівняння для визначення коефіцієнтів A і B , які виконуються за будь-яких значеннях x :

$$\begin{cases} (-12Ax + 2Ax + 4Ax)e^{2x} = xe^{2x} \\ -12B + A + 2B + 4A + 4B = -e^{2x} \end{cases}$$

або, скорочуючи перше рівняння на множник xe^{2x} , а друге – на e^{2x} , отримаємо:

$$\begin{cases} -12A + 2A + 4A = 1 \\ -12B + A + 2B + 4A + 4B = -1 \end{cases}$$

Розв'язками цього рівняння є $A = -\frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{36}$.

3. Таким чином, частинний розв'язок неоднорідного рівняння дорівнює

$$v = \left(-\frac{1}{6}x + \frac{1}{36}\right)e^{2x},$$

а загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x} + \left(-\frac{1}{6}x + \frac{1}{36}\right)e^{2x}.$$

Приклад 9.2. Знайти загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = x^2.$$

Це лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами і правою частиною вигляду $P_m(x)e^{\alpha x}$, ($\alpha = 0$).

1. Знайдемо згідно до схеми розв'язок однорідного рівняння $y_0(x)$. Відповідне характеристичне рівняння (8.4).

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

має дійсний корінь другої кратності $k_{1,2} = 2$. Отже,

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

2. Жоден корінь характеристичного рівняння не дорівнює коефіцієнту у показнику степені у правій частині ($\alpha = 0$).

3. Шукатимемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння методом невизначених коефіцієнтів у вигляді

$$v(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Підставимо частинний розв'язок в неоднорідне рівняння:

4	$v(x) = Ax^2 + Bx + C$
-4	$v' = 2Ax + B$
1	$v'' = 2A$

Підставивши в рівняння функції v, v', v'' з заданими коефіцієнтами, отримаємо тотожну рівність, яка повинна бути істинною для будь-яких значень x :

$$4(Ax^2 + Bx + C) - 4(2Ax + B) + 2A = x^2,$$

тому можна прирівняти коефіцієнти з правої та лівої частин рівняння біля x^2 , x^1 і x^0 :

x^2	$4A$	1
x^1	$4B - 8A$	0
x^0	$4C - 4B + 2A$	0

Як і попередньому прикладі, для визначення констант A, B, C отримаємо систему з трьох рівнянь:

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 4B - 8A = 0 \\ 4C - 4B + 2A = 0 \end{cases},$$

розв'язками якого будуть

$$\begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{2} \\ C = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Таким чином, частинний розв'язок неоднорідного рівняння дорівнює

$$v = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$$

4. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння дорівнює:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}.$$

2. Випадок 2. Число α є коренем характеристичного рівняння кратності $r \leq n$. Тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$v(x) = x^r Q_m e^{\alpha x},$$

де $Q_m(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами того ж степеня, що і степінь многочлена в правій частині.

Приклад 9.3. $y'' - 2y' + y = e^x$.

1. Знайдемо згідно до схеми розв'язок однорідного рівняння $y_0(x)$.

Відповідне характеристичне рівняння

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

має дійсний корінь другої кратності $k_{1,2} = 1$. Отже, розв'язком відповідного однорідного диференціального рівняння є функція

$$y_0(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

2. Корінь характеристичного рівняння дорівнює коефіцієнту в показнику степеня у правій частині ($\alpha = 1$), $r = 2$. Тому шукатимемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння методом невизначених коефіцієнтів у вигляді $v = Ax^2 e^x$. Підставимо частинний розв'язок в неоднорідне рівняння:

1	$v(x) = Ax^2 e^x$
-2	$v'(x) = Ae^x (x^2 + 2x)$
1	$v''(x) = Ae^x (x^2 + 4x + 2)$

Підставивши в рівняння функції v, v', v'' з заданими коефіцієнтами, отримаємо тотожну рівність, яка повинна бути істинною для будь-яких значень x :

$$Ax^2 e^x - 2Ae^x (x^2 + 2x) + Ae^x (x^2 + 4x + 2) = x^2 e^x,$$

тому прирівняти коефіцієнти з правої та лівої частин рівняння біля $x^2 e^x$, $x^1 e^x$ і $x^0 e^x$:

x^2	$A - 2A + A$	1
x^1	$-4A + 4A$	0
x^0	$2A$	0

$$\left\{ \begin{array}{l} A - 2A + A = 0 \\ -4A + 4A = 0 \\ 2A = 1 \end{array} \right.$$

звідки $A = \frac{1}{2}$.

Таким чином, частинний розв'язок неоднорідного рівняння дорівнює $v = \frac{1}{2} x^2 e^x$.

А загальний розв'язок неоднорідного рівняння є таким:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x.$$

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння довільного n -го порядку зі спеціальною правою частиною

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (9.4)$$

де в правій частині рівняння знаходиться ненульова функція вигляду

$$f(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad (9.5)$$

або

$$f(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad (9.6)$$

де P_m – многочлен степеня m , α , β – будь-які дійсні числа.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння з правою частиною (9.5) або (9.6) шукатимемо як суму

$$v = e^{\alpha x} (Q_m \cos \beta x + R_m \sin \beta x) \quad (9.7)$$

якщо пара комплексно-спряжених чисел $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ не є коренями характеристичного многочлена.

Або у вигляді

$$v = e^{\alpha x} x^r (Q_m \cos \beta x + R_m \sin \beta x), \quad (9.8)$$

Приклад 9.4. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння з правою частиною спеціального вигляду

$$y''' - y'' - 6y' = x \sin x.$$

1. Знайдемо розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y''' - y'' - 6y' = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$k^3 - k^2 - 6k = 0$$

має прості дійсні корені $k_1 = 0$, $k_2 = -2$, $k_3 = 3$. Отже, розв'язок однорідного рівняння.

$$y_0(x) = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x}.$$

2. Перейдемо до знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння. В нашому випадку $Q_m(x) = x$, степінь многочлена $m=1$, $\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 1 = i \Rightarrow \alpha = 0$, $\beta = 1$, число i не є коренем характеристичного многочлена.

3. Шукатимемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння методом невизначених коефіцієнтів у вигляді

$$v = (Ax + B) \sin x + (Cx + D) \cos x.$$

Підставимо частинний розв'язок в неоднорідне рівняння:

0	$v = (Ax + B) \sin x + (Cx + D) \cos x$
-6	$v' = (Ax + B + C) \cos x + (-Cx - D + A) \sin x$
-1	$v'' = (2A - D - Cx) \cos x + (-2C - B - Ax) \sin x$
1	$v''' = (Cx - 3A + D) \sin x + (-Ax - B - 3C) \cos x$

Підставивши в рівняння функції v, v', v'' з заданими коефіцієнтами, отримаємо тотожну рівність, яка повинна бути істинною для будь-яких значень x :

$$\begin{aligned} & -6[(Ax + B + C) \cos x + (-Cx - D + A) \sin x] - (2A - D - Cx) \cos x + \\ & (-2C - B - Ax) \sin x + (Cx - 3A + D) \sin x + (-Ax - B - 3C) \cos x = x \sin x \end{aligned}$$

$x \cos x$	$-7A + C = 0$	0
$x \sin x$	$A + 7C = 1$	1
$\cos x$	$-2A - 7B - 9C + B = 1$	1
$\sin x$	$A + 7C = 0$	0

Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -7A + C = 0 \\ A + 7C = 1 \\ -2A - 7B - 9C + B = 1 \\ A + 7C = 0 \end{cases},$$

з якої визначаємо невідомі константи:

$$A = \frac{1}{50}, \quad B = -\frac{23}{125}, \quad C = \frac{7}{50}, \quad D = \frac{3}{250}.$$

Таким чином, частинний розв'язок неоднорідного рівняння дорівнює

$$v = \frac{5x - 46}{250} \sin x + \frac{35x + 3}{250} \cos x.$$

А загальний розв'язок неоднорідного рівняння є таким:

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x} + \frac{5x - 46}{250} \sin x + \frac{35x + 3}{250} \cos x.$$

Приклад 9.5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y''' - 2y'' + y' = 4 \sin x,$$

який задовольняє початкову умову

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1.$$

1. Знайдемо розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння

$$y''' - 2y'' + y' = 0.$$

Характеристичне рівняння $k^3 - 2k^2 + k = 0$ має дійсні розв'язки: $k_1 = 0$, $k_{2,3} = 1$ (другої кратності). Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння є таким:

$$y_0 = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x.$$

2. Оскільки число $\pm i$ не є коренем характеристичного рівняння, будемо шукати розв'язок неоднорідного диференціального рівняння у вигляді

$$v = A \cos x + B \sin x.$$

Підставляючи цей розв'язок в рівняння, отримаємо:

0	$v = A \cos x + B \sin x$
1	$v' = -A \sin x + B \cos x$
-2	$v'' = -A \cos x - B \sin x$
1	$v''' = A \sin x - B \cos x$

Підставивши в рівняння функції v, v', v'' з заданими коефіцієнтами, отримаємо тотожну рівність, яка повинна бути істинною для будь-яких значень x :

$$-A \sin x + B \cos x - 2(-A \cos x - B \sin x) + A \sin x - B \cos x = 4 \sin x.$$

Після виписування в таблицю відповідних подібних доданків, отримаємо систему з двох лінійних рівнянь:

$\cos x$	$B + 2A - B = 0$	0
$\sin x$	$-A + 2B + A = 4$	4

Розв'язками якої є $A = 0, B = 2$. Тому загальним розв'язком неоднорідного рівняння є

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x + 2 \sin x.$$

Але заданим початковим умовам згідно теореми Коші відповідає тільки одна інтегральна крива. Знайдемо відповідні сталі C_1, C_2, C_3 .

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ y'(0) = C_2 + C_3 + 2 = 0 \\ y''(0) = C_2 + 2C_3 = -1 \end{cases}$$

Розв'язками системи є значення констант $C_1 = 4, C_2 = -3, C_3 = 1$. Тому розв'язком задачі Коші є інтегральна крива

$$y = 4 - 3e^x + x e^x + 2 \sin x.$$

Приклад 9.6. Розглянемо рівняння вимушених коливань системи матеріальних точок під впливом зовнішньої періодичної сили $K \sin \omega_0 t$:

$$y'' + \omega_0^2 y = K \sin \omega x . \quad (9.9)$$

Розглянемо спочатку відповідне однорідне диференціальне рівняння

$$y'' + \omega_0^2 y = 0 , \quad (9.10)$$

коренями характеристичного рівняння якого є значення

$$\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 i \quad (9.11)$$

Тут можуть бути такі два випадки:

1. $\omega_0 \neq \omega$. Тоді корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} \neq \pm \omega i$, і розв'язок неоднорідного рівняння треба шукати у вигляді

$$v(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t . \quad (9.12)$$

Підставляючи цей розв'язок в (9.9), отримаємо рівняння для визначення невідомих констант A і B

$$-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t + A\omega_0^2 \cos \omega t + B\omega_0^2 \sin \omega t = K \sin \omega_0 t ,$$

звідки

$$\begin{cases} -A\omega^2 + A\omega_0^2 = 0 \\ -B\omega^2 + B\omega_0^2 = K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2} . \end{cases}$$

Загальний розв'язок (9.9) в цьому випадку має вигляд:

$$y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t .$$

Якщо частота зовнішнього впливу ω є близькою до власної частоти ω_0 , то амплітуда вимушених коливань стає досить великою.

2. Якщо $\omega = \omega_0$, то частинний розв'язок (9.9) треба шукати у вигляді

$$v(t) = At \cos \omega t + Bt \sin \omega t . \quad (9.13)$$

Після підстановки в (9.9) отримаємо

$$v(t) = -\frac{K}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t .$$

Загальний розв'язок (9.9) в цьому випадку є таким:

$$y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + v(t) - \frac{K}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t .$$

Амплітуда вимушених коливань в цьому випадку збільшується з часом за лінійним законом. Це явище називається в фізиці і техніці *резонансом*.

Аудиторне заняття до теми 9

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

1. $y'' - 3y' + 2y = x^3$;
2. $y''' - 2y' = (x+1)e^{-x}$;
3. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$;
4. $y'' + y = 2\sin x$;
5. Знайти частинний розв'язок рівняння $y''' - 8y'' + 16y' = e^{4x}$ при початкових умовах $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1$.

Самостійна робота до теми 9

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

6. $y'' + y' - 12y = (x-1)e^{2x}$;
7. $y'' - 2y' + y = e^x$;
8. $y''' - y'' - 6y' = x\sin x$;

9. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 10y' + 25y = (2x - 1)e^{5x}$ при початкових умовах $y(0) = 1, y'(0) = 6$.

Відповіді до самостійної роботи до теми 9

6. $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x} - \left(\frac{x}{6} - \frac{1}{36} \right) e^{2x};$
7. $y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2} \right) e^x.$
8. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 + C_3 e^{3x} + \frac{5x - 46}{250} \sin x + \frac{35x + 3}{250} \cos x;$
9. $y = \left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) e^{5x}.$

10. Системи диференціальних рівнянь

10.1 Загальні поняття. Визначення. Приклади

1. *Нормальною системою диференціальних рівнянь* називається система, яка допускає розв'язність всіх рівнянь відносно похідних.

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (10.1)$$

Розв'язком системи рівнянь (10.1) називають сукупність функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$, яка перетворює кожне рівняння у тотожність.

Для системи (10.1) *задача Коші (початкова задача)* формулюється так: Знайти невідомі функції, що задовольняють систему рівнянь при початкових умовах

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}. \quad (10.2)$$

Якщо в деякій області $|x - x_0| < a$ виконуються умови:

1. Всі функції $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ в системі рівнянь (10.1) є неперервними і обмеженими;

2. Всі частинні похідні по змінним $y_1, y_2, \dots, y_n$ обмежені: $\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \right| < A$,

То

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = F_x(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) \\ m\ddot{y}(t) = F_y(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) \end{cases} \quad (10.3)$$

Якщо позначити, $\dot{x}(t) = u$, $\dot{y}(t) = v$, отримаємо систему з чотирьох рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u \\ \dot{y}(t) = v \\ m\dot{u} = F_x(t, x, y, u, v) \\ m\dot{v} = F_y(t, x, y, u, v) \end{cases}$$

10.2 Лінійна нормальна система рівнянь. Матричний вигляд системи рівнянь

Якщо всі функції $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ в системі (9.1) є лінійними відносно функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$, така система рівнянь називається *лінійною*. Тобто лінійна система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + g_1(x); \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + g_2(x); \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + g_n(x) \end{cases}, \quad (10.4)$$

де $a_{11}(x), \dots, a_{nn}(x), g_1(x), \dots, g_n(x)$ – задані неперервні функції.

Якщо всі функції $g_i(x)$ в правій частині рівняння дорівнюють нулю, то система (9.4) називається *однорідною*. Якщо хоча б одна функція $g_i(x)$ є ненульовою, система (10.4) називається *неоднорідною*.

Для скороченого запису вводять вектори і матриці. Матриця A , утворена з коефіцієнтів правої частини системи (10.4), називається матрицею системи:

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}. \quad (10.5)$$

Вектор $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$ – n -вимірний вектор-функція, який складається з

невідомих функцій $y_i(x)$,

$$G(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \dots \\ g_n(x) \end{pmatrix} \text{ – вектор (стовпець) правої частини.}$$

З урахуванням цих позначень лінійну систему (10.4) можна записати у векторно-матричній формі наступним чином:

$$Y'(x) = A(x)Y + G(x). \quad (10.6)$$

Якщо вектор G в (10.6) є нульовим вектором, система (9.6) є однорідною, якщо G є ненульовим – система є неоднорідною.

Приклад 10.1. Записати в матричній формі систему рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = 2xy_1 + x^2y_2 + 1 \\ y_2' = y_1 + xy_2 + 2x \end{cases}.$$

Це система двох лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь. Матриця системи $A = \begin{pmatrix} 2x & x^2 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, стовпець $G = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix}$. Тому систему можна записати в такому вигляді:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & x^2 \\ 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix}.$$

10.3 Властивості лінійної однорідної системи рівнянь

Лінійна однорідна система рівнянь має такі властивості:

1. Якщо вектор-функція $Y_1(x)$ і $Y_2(x)$ є розв'язками лінійної однорідної системи рівнянь

$$Y'(x) = A(x)Y, \quad (10.7)$$

то сума цих розв'язків $Y_1(x) + Y_2(x)$ також є розв'язком (10.7).

2. Якщо $Y_1(x)$ і $Y_2(x)$ є розв'язками лінійної однорідної системи рівнянь (9.7), а $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі, то вектор-функція

$$C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots + C_n Y_n$$

також є розв'язком рівняння (10.7).

3. Якщо система розв'язків $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ є лінійно-незалежною, то їх лінійна комбінація

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots + C_n Y_n$$

є загальним розв'язком однорідної системи рівнянь (10.7)

11. Однорідні системи диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

11.1 Загальні поняття. Визначення. Приклади

Розглянемо системи однорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами без правої частини (однорідні).

1. Системою лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами називається система

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \quad (11.1)$$

де всі коефіцієнти a_{ij} – сталі величини.

Цю систему диференціальних рівнянь можна записати в матричній формі.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (11.2)$$

або скорочено, використовуючи позначення попереднього параграфу, у вигляді

$$Y' = AY. \quad (11.3)$$

Розв'язок системи (11.1) шукатимемо у вигляді

$$y_1 = \alpha_1 e^{\lambda x}, \quad y_2 = \alpha_2 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad y_n = \alpha_n e^{\lambda x} \quad (11.4)$$

або у формі вектора:

$$y = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \\ \dots \\ \alpha_n e^{\lambda x} \end{pmatrix} = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = e^{\lambda x} \bar{\alpha}, \quad (11.5)$$

де $\bar{\alpha}$ – вектор коефіцієнтів α_i , або

$$\bar{y}' = \lambda \bar{\alpha} e^{\lambda x}. \quad (11.6)$$

Підставляючи функції $y_i = \alpha_i e^{\lambda x}$ і їх похідні $y_i' = \lambda \alpha_i e^{\lambda x}$ у систему рівнянь (11.1), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів α_i :

$$\begin{cases} \alpha_1 \lambda e^{\lambda x} = a_{11} \alpha_1 e^{\lambda x} + a_{12} \alpha_2 e^{\lambda x} + \dots + a_{1n} \alpha_n e^{\lambda x} \\ \alpha_2 \lambda e^{\lambda x} = a_{21} \alpha_1 e^{\lambda x} + a_{22} \alpha_2 e^{\lambda x} + \dots + a_{2n} \alpha_n e^{\lambda x} \\ \dots \\ \alpha_n \lambda e^{\lambda x} = a_{n1} \alpha_1 e^{\lambda x} + a_{n2} \alpha_2 e^{\lambda x} + \dots + a_{nn} \alpha_n e^{\lambda x} \end{cases} \quad (11.7)$$

Систему рівнянь (11.7) можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \alpha_1 + a_{12} \alpha_2 + \dots + a_{1n} \alpha_n = 0 \\ a_{21} \alpha_1 + (a_{22} - \lambda) \alpha_2 + \dots + a_{2n} \alpha_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1} \alpha_1 + a_{n2} \alpha_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda) \alpha_n = 0 \end{cases}, \quad (11.8)$$

Систему (11.8) можна також записати у матричній формі:

$$(A - \lambda E) \vec{\alpha} = 0. \quad (11.9)$$

Для того, щоб система (11.8) мала нетривіальний (ненульовий) розв'язок, необхідно і достатньо, щоб її детермінант дорівнював нулю [2]:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (11.10)$$

Якщо розкрити визначник (11.10), ми отримаємо алгебраїчне рівняння n -го порядку відносно λ з коефіцієнтами a_{ij} . Це алгебраїчне рівняння має назву *характеристичного рівняння* для системи диференціальних рівнянь (11.1). З характеристичного рівняння знаходимо можна знайти значення $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Відповідно до основної теореми алгебри [2], рівняння n -го степеня має рівно n коренів — дійсних або комплексних. Комплексні корені характеристичного рівняння завжди входять парами як комплексно-спряжені: якщо $\alpha + i\beta$ є коренем, то і $\alpha - i\beta$ також є коренем [3]. Також корені можуть бути простими або кратними.

Корені характеристичного рівняння (11.10) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ називаються *власними значеннями матриці A* .

Вектор – розв’язок рівняння (11.9) – $\alpha_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj})$ при даному значенні λ_j називається *власним вектором* матриці A , відповідним даному власному значенню λ_j .

Залежно від того, які корені має характеристичне рівняння – дійсні або комплексні, прості або кратні – розв’язки відповідної системи диференціальних рівнянь знаходяться по-різному. Розглянемо можливі випадки.

11.2 Випадок простих (різних) дійсних коренів

Почнемо з розглядання найпростішого випадку: всі корені характеристичного рівняння різні. Тоді для кожного значення λ_i , з системи (11.8) знайдемо нетривіальний (ненульовий) власний вектор

$$\alpha_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj}).$$

Якщо всі власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ різні, то відповідні їм власні вектори лінійно незалежні. Тому визначник, складений з цих векторів, відмінний від нуля: $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$.

Приклад 11.1. Записати систему лінійних диференціальних рівнянь в матричному вигляді і знайти її розв’язок.

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 2y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 \end{cases}. \quad (11.11)$$

Випишемо матрицю системи: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Тоді характеристичне рівняння є таким:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$(2-\lambda)(3-\lambda)-2=0, \quad \lambda^2-5\lambda+4=0.$$

Коренями цього квадратного рівняння (власними значеннями) є $\lambda_1=1, \lambda_2=4$ – дійсні прості.

Знайдемо власні вектори, відповідні цим власним значенням. Власний вектор, який відповідає значенню $\lambda_1 = 1$, знаходимо з системи лінійних рівнянь (11.8):

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 2 \\ 1 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix} = 0, \text{ або} \quad (11.12)$$

$$\begin{cases} \alpha_{11} + 2\alpha_{21} = 0, \\ \alpha_{11} + 2\alpha_{21} = 0. \end{cases} \quad (11.13)$$

Ранг цієї лінійної системи дорівнює 1 [2], тому можна відкинути одне з двох рівнянь. Значення координат знаходяться з точністю до константи. Якщо ми надамо значення $\alpha_{11} = 1$, отримаємо для другої координати $\alpha_{12} = -\frac{1}{2}$. Тобто,

першим власним вектором (з точністю до константи) є $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Частинний розв'язок, який відповідає власному значенню $\lambda_1 = 1$, дорівнює

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix} e^x = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} e^x.$$

Знайдемо власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 2 \\ 1 & 3-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{cases} -2\alpha_{12} + 2\alpha_{22} = 0, \\ \alpha_{11} - \alpha_{22} = 0 \end{cases}, \quad (11.14)$$

Якщо взяти $\alpha_{12} = 1$, отримаємо $\alpha_{22} = 1$, а власним вектором, який відповідає

власному значенню, буде $\alpha_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Відповідний частинний розв'язок

$$Y_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} e^{4x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}.$$

Таким чином, загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь є лінійною комбінацією частинних розв'язків:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 = C_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} e^{4x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}.$$

Або можна виписати окремо шукані функції:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{4x} \\ y_2 = -\frac{1}{2} C_1 e^x + C_2 e^{4x} \end{cases}.$$

Приклад 11.2. Записати систему лінійних диференціальних рівнянь в матричному вигляді і знайти її розв'язок.

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_1 + y_2 \\ y_3' = y_1 + y_2 + 3y_3 \end{cases} \quad (11.15)$$

Запишемо матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

і відповідне характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Після розкриття визначника, отримаємо кубічне рівняння відносно власних значень λ :

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0,$$

коренями якого є $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ – дійсні прості.

Знайдемо власні вектори, які відповідають даним власним значенням.

Власний вектор, відповідний значенню $\lambda_1 = 1$ знаходимо з системи лінійних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-1 & 0 \\ 1 & 1 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix} = 0, \quad (11.16)$$

$$\text{або} \quad \begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_{21} = 0, \\ \alpha_{11} + \alpha_{21} + 2\alpha_{31} = 0. \end{cases} \quad (11.17)$$

Ранг цієї лінійної системи дорівнює 2. Якщо покласти $\alpha_{11} = 1$, то α_{21}, α_{31}

визначаються: $\alpha_{21} = -1, \alpha_{31} = 0$. Тобто, першим власним вектором є $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2-2 & 0 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} = 0, \quad (11.18)$$

$$\begin{cases} \alpha_{21} = 0 \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} = 0 \end{cases}, \quad (11.19)$$

$$\alpha_{12} = 0, \alpha_{22} = 1, \alpha_{32} = -1, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 0 \\ 1 & 2-3 & 0 \\ 1 & 1 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} = 0, \quad (11.20)$$

$$\begin{cases} -2\alpha_{13} = 0, \\ \alpha_{13} - \alpha_{23} = 0, \\ \alpha_{13} + \alpha_{23} = 0 \end{cases} \quad (11.21)$$

З системи отримаємо

$$\alpha_{13} = 0, \alpha_{23} = 0, \alpha_{33} = 1, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}. \quad (11.22)$$

Загальний розв'язок можна записати також у вигляді

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^x \\ y_2 = -C_1 e^x + C_2 e^{2x} \\ y_3 = -C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} \end{cases}. \quad (11.23)$$

11.3 Випадок простих комплексних коренів

Розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння має прості комплексні корені. Як ми вже відмічали, комплексні розв'язки завжди входять парами як $\alpha_i \pm i\beta_i$, і кожній такій парі комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння відповідають два лінійно-незалежних розв'язка системи (11.1) вигляду

$$\bar{y}_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \cdot \bar{\alpha}_1 \text{ і } \bar{y}_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x \cdot \bar{\alpha}_2,$$

де $\bar{\alpha}_1$ та $\bar{\alpha}_2$ – власні вектори, які відповідають кореням $\alpha_i \pm i\beta_i$.

Приклад 11.3: Записати систему лінійних диференціальних рівнянь в матричному вигляді і знайти її розв'язок.

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 + y_3 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -y_1 + y_3 \end{cases}. \quad (11.24)$$

Перш за все запишемо матрицю системи і складемо характеристичне рівняння:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda+1 \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Ми отримали кубічне характеристичне рівняння, коренями якого (власними значеннями) є $\lambda_1 = 1$ (простий дійсний корінь) і пара комплексно-спряжених чисто уявних $\lambda_{2,3} = \pm i$.

Перший власний вектор, який відповідає дійсному власному значенню $\lambda_1 = 1$, знайдемо так само, як і в *Прикладах 1 і 2*:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{pmatrix} = 0, \quad (11.25)$$

$$\begin{cases} -\alpha_{11} - \alpha_{12} + \alpha_{13} = 0, \\ -\alpha_{12} + \alpha_{13} = 0 \\ -\alpha_{11} = 0 \end{cases}. \quad (11.26)$$

Ранг цієї лінійної системи дорівнює 2, тому ми відкидаємо одне рівняння:

$$\alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{12} = \alpha_{13},$$

Положивши $\alpha_{12} = 1$, отримаємо перший власний вектор $\bar{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тому перший

фундаментальний розв'язок буде

$$\bar{Y}_1 = \bar{\alpha}_1 e^x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x \quad (11.27)$$

Власні вектори, які відповідають другому і третьому власним значенням $\lambda_{2,3} = \pm i$ можна знайти так. Підставимо одне (будь-яке) із значень $\lambda_2 = i$, отримаємо,

$$\begin{pmatrix} -i & -1 & 1 \\ 0 & -i & 1 \\ -1 & 0 & -i+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \end{pmatrix} = 0, \quad (11.28)$$

$$\begin{cases} -i\alpha_{21} - \alpha_{22} + \alpha_{23} = 0 \\ -i\alpha_{22} + \alpha_{23} = 0 \\ -\alpha_{21} + (1-i)\alpha_{23} = 0 \end{cases} . \quad (11.29)$$

Ранг цієї системи, як і в попередньому випадку, дорівнює 2, тому в системі 2 лінійно-незалежних рівняння. Тому в системі (10.29) із трьох рівнянь можна відкинути одне, але так, щоб ранг рівнянь, що залишаються, дорівнював би 2. В системі (11.29) можна відкинути третє рівняння, тому що ранг перших двох рівнянь дорівнює 2. Положивши в (10.29) $\alpha_{23} = 1$, отримаємо

$$\begin{cases} -i\alpha_{22} + 1 = 0 \\ -\alpha_{21} + 1 - i = 0 \end{cases} , \quad (11.30)$$

звідки $\alpha_{21} = 1 - i$, $\alpha_{22} = -i$, $\alpha_{23} = 1$. Тоді другий власний вектор буде

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 - i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} , \quad (11.31)$$

Аналогічно до (11.27) помноживши цей власний вектор на e^{ix} , отримаємо

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{ix} = \begin{pmatrix} 1 - i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos x + i \sin x) . \quad (11.32)$$

Розділивши (10.32) на дійсну і уявну частину, отримаємо

$$\begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin x - \cos x \\ -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix} . \quad (11.33)$$

Перший і другий вектор-стовпчики в (11.33) є лінійно-незалежними розв'язками $\bar{Y}_2$ і $\bar{Y}_3$ системи диференціальних рівнянь (11.24).

Таким чином, знаючи три фундаментальних розв'язка $\bar{Y}_1$, $\bar{Y}_2$ і $\bar{Y}_3$, отримаємо загальний розв'язок системи (11.24):

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \sin x - \cos x \\ -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix} ,$$

або

$$\begin{cases} y_1 = C_2(\sin x + \cos x) + C_3(\sin x - \cos x) \\ y_2 = C_1 e^x + C_2 \sin x - C_3 \cos x \\ y_3 = C_1 e^x + C_2 \sin x + C_3 \cos x \end{cases}.$$

11.4 Випадок кратних дійсних коренів

Розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння має дійсні корені, серед яких є кратні (другої кратності або вище).

Приклад 11.4. Знайти розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь.

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 \end{cases}. \quad (11.34)$$

Випишемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$(1-\lambda)(3-\lambda)+1=0, \quad \lambda^2-4\lambda+4=0. \quad (11.35)$$

(11.35) має дійсний корінь другої кратності $\lambda_{1,2} = 2$.

Запишемо систему для визначення першого власних векторів

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix} = 0$$

Розв'язок цієї системи шукатимемо у вигляді з невизначеними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} y_1 = (C_1 x + C_2) e^{2x} \\ y_2 = (C_3 x + C_4) e^{2x} \end{cases}$$

Отримаємо:

$$\begin{cases} C_4 = -C_1 - C_2 \\ C_3 = -C_1 \end{cases}$$

Загальним розв'язком є

$$\begin{cases} y_1 = (C_1 x + C_2) e^{2x} \\ y_2 = (-C_1 x - C_1 - C_2) e^{2x} \end{cases}.$$

Аудиторне заняття по темі 11

Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$1. \quad \begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2 \end{cases};$$

$$2. \quad \begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_2 + 4y_3, \\ y_3' = y_1 - 4y_3. \end{cases};$$

$$3. \quad \begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 - 2y_3, \\ y_2' = y_1, \\ y_3' = 6y_1 - 2y_2 - 3y_3. \end{cases};$$

Самостійна робота по темі 11

Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$4. \quad \begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3, \\ y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3. \end{cases};$$

$$5. \quad \begin{cases} y_1' = -y_2 + y_3, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = -y_1 + y_3. \end{cases};$$

$$6. \quad \begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3, \\ y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3. \end{cases};$$

Відповіді до самостійної роботи по темі 11

$$4. \quad \begin{cases} y_1 = C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} \\ y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \\ y_3 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} \end{cases};$$

$$5. \quad \begin{cases} y_1 = (C_2 - C_3) \cos x + (C_2 + C_3) \sin x, \\ y_2 = C_1 e^x + C_2 \sin x - C_3 \cos x, \\ y_3 = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x \end{cases}.$$

$$6. \quad \begin{cases} y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{2x}, \\ y_2 = C_1 e^{3x} + C_3 e^{2x}, \\ y_3 = C_2 e^{3x} + C_3 e^{2x} \end{cases}$$

12. Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь.

12.1 Основні означення і теореми.

При дослідженні реальних процесів, які описуються системами диференціальних рівнянь, виникає необхідність не тільки відшукати розв'язки, а і виявити властивості цих розв'язків. Властивості розв'язків, в свою чергу, впливають із властивостей відповідних диференціальних рівнянь.

Такі питання розглядаються в якісній теорії диференціальних рівнянь, одним з основних розділів якої є *теорія стійкості розв'язків* або *теорія стійкості руху*.

Нехай деякий процес описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (12.1)$$

з початковими умовами

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10}; \\ y_2(x_0) = y_{20}; \\ \dots \\ y_n(x_0) = y_{n0}. \end{cases} \quad (12.2)$$

Початкові умови (12.2) часто бувають результатом вимірювання деяких фізичних величин і не є абсолютно точними. Тому виникає питання, як буде поводитись рішення системи (12.2), якщо початкові умови зміняться в невеликому інтервалі. Якщо малі зміни початкових умов дають великі відхилення розв'язків, то такі розв'язки непридатні для того, щоб описувати розглядуваний процес.

1. Визначення стійкості за Ляпуновим:

Розв'язок системи (12.1) $(y_1^0(x), y_2^0(x), \dots, y_n^0(x))$ при початкових умовах (12.2) називають стійким за Ляпуновим при $x \rightarrow \infty$, якщо для будь-якого значення $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\eta(\varepsilon) > 0$, що при $x \geq x_0$ для будь-якого розв'язку $y_i(x) (i=1, 2, \dots, n)$ цієї системи виконується

$$|y_i(x) - y_i^0(x)| < \varepsilon,$$

якщо для всіх

$$|y_i(x_0) - y_i^0(x_0)| < \eta(\varepsilon).$$

Якщо, крім цього,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |y_i(x) - y_i^0(x)| = 0, \quad i=1, 2, \dots, n$$

при достатньо малих

$$|y_i(x_0) - y_i^0(x_0)|, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

то розв'язок

$$y_i(x) = y_i^0(x), \quad i=1, 2, \dots, n$$

називається *асимптотично стійким*.

2. Якщо замість $y_i(x)$ ввести нові невідомі функції $y_i(x) - y_i^0(x)$, то задача зведеться до дослідження на стійкість нульового рішення.

Приклад 1. Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші диференціального рівняння

$$y' = -y, \quad y(x_0) = y_0.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є

$$y(x) = Ce^{-x},$$

а розв'язком задачі Коші –

$$y^0(x) = y_0 e^{-(x_0 - x)}.$$

Якщо змінити початкові умови на

$$\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0,$$

то розв'язком задачі Коші при $x \geq x_0$ буде функція

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_0 e^{-(x_0 - x)}.$$

Оцінімо по модулю різницю двох розв'язків задачі Коші, які відповідають двом близьким початковим значенням y_0 і $\bar{y}_0$:

$$|y(x) - \bar{y}(x)| = |y_0 - \bar{y}_0| e^{x_0 - x} \leq |y_0 - \bar{y}_0|, \quad (x \geq x_0, \quad e^{x_0 - x} \leq 1).$$

Таким чином, розв'язок цієї задачі стійкий за Ляпуновим при $x \geq x_0$.

Цей розв'язок також є асимптотично стійким, оскільки

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |y(x) - \bar{y}(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |y_0(x) - \bar{y}_0(x)| e^{(x_0 - x)} = 0.$$

12.2. Дослідження стійкості розв'язків лінійної однорідної системи із сталими коефіцієнтами

Нехай задано систему диференціальних рівнянь

$$y'_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12.3)$$

з початковими умовами

$$y_i(0) = 0. \quad (12.4)$$

Або у матричному вигляді

$$Y' = AY. \quad (12.5)$$

Характеристичне рівняння для системи (12.3) має такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (11.6)$$

Розглянемо такі випадки

1. Нехай λ_i – простий дійсний корінь рівняння (12.6). В такому випадку знаходимо

$$y_i = C_i e^{\lambda_i x}.$$

Розглянемо поведінку цього розв'язку при $x \rightarrow \infty$:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} |y_i| = 0$ при $\lambda_i < 0$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} |y_i| = \infty$ при $\lambda_i > 0$;
 - 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} |y_i| = C_i = \text{const}$ при $\lambda_i = 0$.
2. Нехай λ_i – дійсний корінь кратності m рівняння (12.6), тоді

$$y_i = C_i x^{m-1} e^{\lambda_i x}.$$

Цей розв'язок при $x \rightarrow \infty$:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} |y_i| = 0$ при $\lambda_i < 0$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} |y_i| = \infty$ при $\lambda_i \geq 0$.
3. Нехай $\lambda_i = \alpha_i + \beta_i$ – комплексно-спряжений корінь кратності m рівняння (11.6), тоді

$$y_i = C_i x^{m-1} e^{(\alpha_i + \beta_i)x} = C_i x^{m-1} e^{\alpha_i x} (\cos \beta_i x + i \sin \beta_i x).$$

Цей розв'язок при $x \rightarrow \infty$:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} |y_i| = 0$ при $\alpha_i = \text{Re } \lambda_i \leq 0$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} |y_i| = \infty$ при $\alpha_i = \text{Re } \lambda_i > 0$.

Аналізуючи ці випадки, можна узагальнити і сформулювати таку загальну теорему.

Теорема 11.1. Розв'язки лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь (12.3) з нульовими початковими умовами (12.4) є стікими за Ляпуновим тоді і тільки тоді, якщо дійсні частини власних значень матриці системи A недодатні.

Теорема 12.2. Розв'язки лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь (12.3) з нульовими початковими умовами (12.4) є асимптотично стікими тоді і тільки тоді, якщо дійсні частини власних значень матриці системи A від'ємні.

Приклад 12.1. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи рівнянь. Складемо характеристичне рівняння цієї системи:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, отримаємо кубічне рівняння відносно власного значення λ :

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0,$$

коренями якого є $\lambda_1 = -1$ (дійсне число), $\lambda_{2,3} = \pm i$ (чисто уявні числа, $\operatorname{Re} \lambda_{2,3} = 0$).

Таким чином, згідно *Теорема 12.1*, нульовий розв'язок системи є стійким за Ляпуновим, але не є асимптотично стійким.

Приклад 12.2. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = py_1 - y_2 \end{cases},$$

де p – деякий дійсний параметр.

Матриця A системи дорівнює:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & -1 \end{pmatrix}.$$

Власні значення матриці A є розв'язками характеристичного рівняння, в даному випадку квадратного:

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ p & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1) - p = \lambda^2 + \lambda - p = 0;$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4p}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+4p}}{2}.$$

Якщо $p=0$, значення коренів $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$, тому розв'язок є стійким за Ляпуновим;

якщо $p < 0$, корені $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+4p}}{2}$ або є від'ємними дійсними числами ($-\frac{1}{4} < p < 0$), або комплексними числами з від'ємними дійсними частинами ($-\frac{1}{4} < p < 0$), тому розв'язок є асимптотично стійким;

якщо $p > 0$, корінь $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4p}}{2}$ буде обов'язково додатним, тому розв'язок в цьому випадку є нестійким.

Таким чином, ми бачимо, що стійкість нульового розв'язку однорідної системи диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами залежить від знаку дійсної частини коренів характеристичного рівняння матриці системи. З цього приводу існує теорема, яка дає уяву про корені (точніше, про знак дійсних частин коренів даного рівняння).

Теорема 12.3 (Рауса-Гурвіца). Дійсні частини всіх коренів рівняння з дійсними коефіцієнтами

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (12.7)$$

від'ємні тоді і тільки тоді, коли є строго додатними всі головні мінори матриці Гурвіца

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad (12.8)$$

тобто коли

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0.$$

Приклад 12.3. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння

$$y^{(4)} + 6y''' + 23y'' + 50y' + 50y = 0.$$

Запишемо відповідне характеристичне рівняння:

$$\lambda^4 + 6\lambda^3 + 23\lambda^2 + 50\lambda + 50 = 0.$$

Достатньо складно знайти корені цього рівняння 4 порядку, це дві пари комплексно-спряжених

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm i, \lambda_{3,4} = -1 \pm 3i.$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння буде

$$y(x) = C_1 e^{-2x} \cos x + C_1 e^{-2x} \sin x + C_3 e^{-x} \cos 3x + C_4 e^{-x} \sin 3x,$$

і, як можна бачити, цей розв'язок при $x \rightarrow \infty$ затухає, прямує до нуля, тому, є асимптотично стійким. Перевіримо це за допомогою теореми Раussa-Гурвіца.

Матриця Гурвиця в даному випадку дорівнює

$$a_0 = 1, a_1 = 6, a_2 = 23, a_3 = 50, a_4 = 50.$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 50 & 23 & 6 & 1 \\ 0 & 50 & 50 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}.$$

Відповідні головні мінори дорівнюють:

$$\Delta_1 = 6 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 50 & 23 \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 50 & 23 & 6 \\ 0 & 50 & 50 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 50 & 23 & 6 & 1 \\ 0 & 50 & 50 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{vmatrix} = 50 \cdot \Delta_3 > 0.$$

Таким чином, ми переконалися на прикладі, що теорема дійсно працює. Тому в тих випадках, коли важко знайти корені характеристичного многочлена, висновки про стійкість розв'язку можна робити з теореми Раussa-Гурвіца.

Аудиторне заняття до теми 12

1. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y''' - 3y'' + 12y' - 10y = 0;$$

2. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння

залежно від параметра p : $y''' - py'' - y' + p^3 = 0$;

3. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи диференціальних

рівнянь залежно від параметра p :

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = -py_1 - \frac{1}{p}y_2 - \frac{2}{p}y_4 \end{cases}$$

Самостійна робота до теми 12

4. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння

$$y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0;$$

5. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння

залежно від параметра p : $py^{(n)} + y''' + 2y'' + py' + y = 0$;

6. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи диференціальних

рівнянь залежно від параметра p :

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = -py_1 - \frac{1}{p}y_2 - \frac{2}{p}y_4 \end{cases}$$

Відповіді до самостійної роботи до теми 12

4. $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x} - \left(\frac{x}{6} - \frac{1}{36} \right) e^{2x};$
5. Нульовий розв'язок є асимптотично стійким при $p < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$
6. Нульовий розв'язок є асимптотично стійким при $p < 1;$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Варіант 1

1. Для заданого диференціального рівняння дослідити поле напрямків, зробити рисунок: $y' = x^2 + y^2 - 1$.

2. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння:

$$xy^2 + x + (y + x^2y)y' = 0, \quad y(0) = 1.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}.$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$xy'' + y' = x^2 + 1.$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y^{(4)} - 2y'' + y = e^{2x}$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - y'' + y' - y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$$

Варіант 2

1. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є сім'я кривих

$$y + x = C(1 - xy)$$

2. Вирішити задачу Коші для диференціального рівняння:

$$(1 + x^2)y^3 + (1 - y^2)x^3y' = 0, \quad y(1) = 1.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2} \right) dx + \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} \right) dy = 0$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$xy' - 2y = 2x^4$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y''y - (y')^2 = y'$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + 9y = \cos 3x$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 5y_2 + 2y_3 \\ y_2' = 5y_1 - 7y_2 + 3y_3 \\ y_3' = 6y_1 - 9y_2 + 4y_3 \end{cases}$$

Варіант 3

1. Представити картину інтегральних кривих даного диференціального рівняння поблизу прямої $x = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

2. Вирішити задачу Коші для диференціального рівняння:

$$e^y \sqrt{1+x^2} dy + dx = 0, y(0) = 0.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$(x - y \cos \frac{y}{x}) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' + \frac{3}{x} y = \frac{1}{x^3} y^3$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y''' + y'' = \sin 3x$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = -4y_2 \\ y_2' = y_1 - 4y_2 \\ y_3' = y_1 - 2y_2 - 2y_3 \end{cases}$$

Варіант 4

1. Для заданого диференціального рівняння дослідити поле напрямків і зробити рисунок: $y' = y - x^2$.
2. Вирішити задачу Коші для диференціального рівняння:
 $\sqrt{1-x^2}y' + \sqrt{1-y^2} = 0, y(-1) = 0$.
3. Розв'язати диференціальне рівняння:
 $(x+y)dy = (y-x)dx$
4. Розв'язати диференціальне рівняння:
 $y' + \operatorname{tg} x = \sec x$
5. Розв'язати диференціальне рівняння:
 $x^2 y'' + (y')^2 = 0$
6. Розв'язати диференціальне рівняння:
 $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$
7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:
 $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = -1$;
8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:
$$\begin{cases} y_1' = 9y_1 - 6y_2 - 2y_3 \\ y_2' = 18y_1 - 12y_2 - 3y_3 \\ y_3' = 18y_1 - 9y_2 - 6y_3 \end{cases}$$

Варіант 5

1. Показати, що функція $\ln x \ln y = C$ є загальним інтегралом диференціального рівняння

$$y \ln y dx + x \ln x dy = 0.$$

2. Вирішити задачу Коші для диференціального рівняння:

$$(2+y)\sqrt{1+x^2} y' = \sqrt{1+y^2}, y(0) = 0.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$\left(xye^{\frac{x}{y}} + y^2 \right) dx - x^2 e^{\frac{x}{y}} dy = 0$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' + \frac{x}{1-x^2} y = \frac{2x}{1-x^2}$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$yy'' = y'(2+y')$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + y = 1 - x$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' + 8y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = -1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 6y_2 - 15y_3 \\ y_2' = y_1 + y_2 - 5y_3 \\ y_3' = y_1 + 2y_2 - 6y_3 \end{cases}$$

Варіант 6

1. Представити картину інтегральних кривих даного диференціального рівняння поблизу точки $x=0$:

$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{1}{x}}.$$

2. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$\sin x dy - y \cos x dx = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

3. Знайти розв'язок задачі Коші диференціального рівняння

$$\frac{x^2 - y}{x^2} dx + \frac{x+1}{x} dy = 0$$

при початкових умовах $x_0 = 1, y_0 = 1$.

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' + y \cos x = 2 \sin 2x$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + 4y = 2 \cos x + 3 \sin x$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' + y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = -4y_1 + 4y_2 \\ y_3' = -2y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

Варіант 7

1. Для заданого диференціального рівняння дослідити поле напрямків і

зробити рисунок: $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y^2 = xy' + y, y(0) = 1.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$\left(x - y \cos \frac{x}{y}\right) dx + x \cos \frac{x}{y} dy = 0$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^3}y^3$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' = 3\sqrt{1 - (y')^2}$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y''' + y' = x^4$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3' = -y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

Варіант 8

1. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є сім'я кривих:

$$y - 1 = Ce^{\frac{1}{x}}.$$

2. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' = \frac{xy(1+x^2)}{1+y^2}, \quad y(0)=1.$$

3. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0.$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'x(1-x^2) + (2x^2-1)y = 3x^2$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + (y')^2 = 3e^{-y}$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + y = 3\sin x - \cos x$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0, \quad y''(0)=1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 - y_3 \\ y_2' = 3y_1 - 4y_2 - 3y_3 \\ y_3' = 2y_1 - 4y_2 \end{cases}$$

Варіант 9

1. Показати, що сім'я кривих є розв'язком диференціального рівняння

$$xy' + 1 = e^y.$$

2. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0, y(0) = 0.$$

3. Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$(\ln y - 2x)dx + \left(\frac{y}{x} - 2y\right)dy = 0$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + (y')^2 = 3e^{-y}$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'(2e^y - x) = 3$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 - 2y_3 \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + 2y_3 \\ y_3' = 3y_1 - 3y_2 + 5y_3 \end{cases}$$

Варіант 10

1. Для заданого диференціального рівняння дослідити поле напрямків і зробити рисунок:

$$y' = 2x + 3y.$$

2. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$xydx + (x+1)dy = 0, y(0) = 1.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' - \frac{y}{\sin x} = tg \frac{x}{2}$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y''' - y'' + y' - y = (x+1)e^{2x}$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = 21y_1 - 8y_2 - 19y_3 \\ y_2' = 18y_1 - 7y_2 - 15y_3 \\ y_3' = 16y_1 - 6y_2 - 15y_3 \end{cases}$$

Варіант 11

1. Показати, що функція $y(x)$, яка задається як $y = x \left(\int \frac{e^x}{x} dx + C \right)$, є

загальним інтегралом диференціального рівняння

$$xy' - y = xe^x.$$

2. Вирішити задачу Коші для даного диференціального рівняння:

$$x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0, y(0) = 0.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$xy' = y \ln \frac{y}{x}$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' - \frac{y}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x} = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \operatorname{arctg}x$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$xy'' - y' = x \sin \frac{y'}{x}$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 4y' + 4y = x^2$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3 \\ y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

Варіант 12

1. Дослідити поле напрямків даного диференціального рівняння, зробити рисунок:

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

2. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$2x^2 yy' + y^2 = 1, y(1) = 0.$$

3. Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$(7xy^3 + y - 5x)y' + y^4 - 5y = 0$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' = \frac{xy}{(1-x^2)^{3/2}} + e^{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \cos^2 x$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2 - 2y_3 \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + 2y_3 \\ y_3' = 3y_1 - 3y_2 + 5y_3 \end{cases}$$

Варіант 13

1. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є сім'я кривих:

$$Cx^2 + y^2 = 2x$$

2. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$xydx + (x+1)dy = 0, y(0) = 1.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$(x+y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$yy'' - (y')^2 = 0$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y''' + y'' + y' + y = xe^x$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 - y_3 \\ y_2' = 3y_1 - 4y_2 - 3y_3 \\ y_3' = 2y_1 - 4y_2 \end{cases}$$

Варіант 14

1. Представити картину інтегральних кривих даного диференціального рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

2. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння:

$$xy' + y = y^2, \quad y(1) = 2$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$(x^2 + y^2)y' = 3xy$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' - \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = 2 \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$x(1 + (y')^2) = 1$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + 4y = x \sin 2x$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 + y_3 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -y_1 \end{cases}$$

Варіант 15

1. Представити картину інтегральних кривих даного диференціального рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' = \frac{x(4+y^2)}{y^2(9+x^2)}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

3. Знаходячи інтегруючий множник, знайти загальний інтеграл рівняння

$$(x^2 - \sin^2 y)dx + x \sin 2y dy = 0$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' + xy = x^3$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(1+x^2)y'' = 1 + (y')^2$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + y' + y = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' + 8y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' = 12y_1 - 4y_2 - 12y_3 \\ y_3' = -4y_1 + y_2 + 5y_3 \end{cases}$$

Варіант 16

1. Показати, що функція $y(x)$, яка задається неявно виразом $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = C$, є загальним інтегралом диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+y^2}{1+x^2}.$$

2. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' = \frac{(y^2 + 1)\ln^2 x}{x}, \quad y(1) = 1.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$x^2 dy = (y^2 + xy + x^2) dx$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' = y \cos x + x^2$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих:

$$y'' + y = \frac{2}{\sin^3 x}$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' - y = e^x + e^{-x}$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' + 8y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' = 12y_1 - 4y_2 - 12y_3 \\ y_3' = -4y_1 + y_2 + 5y_3 \end{cases}$$

Варіант 17

1. Задати поле напрямків для даного диференціального рівняння, зробити рисунок:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

2. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння:

$$x\sqrt{y^2-1} = yy'\sqrt{4-x^2}, y(0)=1.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y \ln y dx + x dy = 0$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' - \frac{x}{1-x^2} y = \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + 2y = x \cos \sqrt{2}x$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - 13y'' + 12y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2 - 2y_3 \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + 2y_3 \\ y_3' = 3y_1 - 3y_2 + 5y_3 \end{cases}$$

Варіант 18

1. Знайти диференціальне рівняння, розв'язком якого є сімейство кривих
 $y(x) = \sin x + C \cos x$.

2. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння:

$$xy' = y^2 + y, y(1) = \frac{1}{5}.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$2xydx = (x - y^2)dy$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' + \frac{xy}{2+x^2} = \frac{\sqrt{2+x^2}}{x^2}$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих:

$$y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + 2y = x \cos \sqrt{2}x$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' + 2y'' + 2y' + y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 0, y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 - y_3 \\ y_2' = 3y_1 - 4y_2 - 3y_3 \\ y_3' = 2y_1 - 4y_2 \end{cases}$$

Варіант 19

1. Представити картину інтегральних кривих даного диференціального рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

2. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' = \frac{(2x+1)\sqrt{1+y^2}}{e^x}, y(0) = 0.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$(3x^3 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'x(1-x^2) + (2x^2-1)y = 2x^2$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$yy'' - (y')^2 = y^2 y'$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 5y' + 6y = 2\cos 2x$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - 2y'' + y' = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 + y_3 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -y_1 \end{cases}$$

Варіант 20

1. Показати, що функція $y(x)$, яка задається рівнянням $\ln xy + x - y = C$, є загальним інтегралом диференціального рівняння

$$(x+1)y + (1-y)xy' = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння:

$$xy' + y = y^2, \quad y(1) = 2$$

3. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння за допомогою інтегруючого множника:

$$(2y - xe^y)y' = e^y$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' = y \cos x + x^3$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$(1-x^2)y'' + xy' = 3$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = \cos x$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' + y'' = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' = 12y_1 - 4y_2 - 12y_3 \\ y_3' = -4y_1 + y_2 + 5y_3 \end{cases}$$

Варіант 21

1. Задати поле напрямків для даного диференціального рівняння, зробити рисунок:

$$\frac{dy}{dx} = y - x$$

2. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння:

$$y' - xy^2 = 4xy, \quad y\left(\frac{4}{1-e}\right) = 0.$$

3. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння:

$$(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' = y \cos x + x^3$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння методом варіації довільної сталої:

$$y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = \cos x$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' + y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 - 3y_2 + 2y_3 \\ y_2' = 6y_1 - 4y_2 + 4y_3 \\ y_3' = 4y_1 - 4y_2 + 5y_3 \end{cases}$$

Варіант 22

1. Представити картину інтегральних кривих даного диференціального рівняння при $x \rightarrow 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}.$$

2. Вирішити задачу Коші для диференціального рівняння:

$$e^y \sqrt{1+x^2} dy + dx = 0, y(0) = 0.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$x dy - y dx = \sqrt{1+y^2} dx + \sqrt{1+x^2} dy$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' + \frac{x}{x^2 + 1} y = \frac{3x}{x^2 + 1}$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3 \\ y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

Варіант 23

1. Знайти диференціальне рівняння, яке описую сім'ю кривих

$$(x - C)^2 + y^2 - C^2 = 0.$$

2. Вирішити задачу Коші для диференціального рівняння:

$$\sin x \cos^2 y dx + \cos^2 x dy = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' = \frac{y}{(x^2 + 1) \operatorname{arctg} x} + \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \operatorname{arctg} x$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + \frac{2}{1 - y} (y')^2 = 0$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - 8y'' + 7y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' = 4y_1 - y_2 + 4y_3 \end{cases}$$

Варіант 24

1. Задати поле напрямків для даного диференціального рівняння, зробити рисунок:

$$\frac{dy}{dx} = x^2$$

2. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння:

$$y'x = y \ln y, y(0) = 1.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$x \cos \frac{y}{x} (ydx + xdy) = y \sin \frac{y}{x} (ydx - xdy)$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціальне рівняння методом варіації довільної сталої:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + y = \sin x - \cos x$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - 8y'' + 7y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 + 4y_2 - 2y_3 \\ y_2' = y_2 + y_3 \\ y_3' = 6y_1 - 6y_2 + 5y_3 \end{cases}$$

Варіант 25

1. Показати, що функція $y(x)$, яка задається параметрично $\begin{cases} x = te^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$, є

загальним інтегралом диференціального рівняння

$$(xy + 1)y' + y^2 = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння:

$$\frac{y'}{(x+1)} = \frac{\cos 2x}{\sin 2y}, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}.$$

3. Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'x(1 - x^2) + (2x^2 - 1)y = 2x^2$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння методом варіації довільної сталої:

$$y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 2y' = (x - 1)^2$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2' = -y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' = y_1 - y_3 \end{cases}$$

Варіант 26

1. Представити картину інтегральних кривих даного диференціального рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

2. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$x(1+y^2) + y^2(1+x^2)dy = 0, y(0) = 0.$$

3. Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$e^x(1+e^y)dx + e^y(1+e^x)dy = 0$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$xy'' - y' = x \sin \frac{y'}{x}$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + 5y' + 6y = 12(x-2)e^{-2x}$$

9. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - 7y' + 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 1;$$

7. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 + y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

Варіант 27

1. Представити картину інтегральних кривих даного диференціального рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

2. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0, y(0) = 0.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$(x+y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^3}$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$1 + (y')^2 = 2yy''$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + 5y' + 6y = 12(x-2)e^{-2x}$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - 3y'' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 - 2y_3 \\ y_2' = y_1 \\ y_3' = 6y_1 - 2y_2 - 3y_3 \end{cases}$$

Варіант 28

1. Знайти диференціальне рівняння, загальним інтегралом якого є

$$x^2 + Cy^2 = 2y.$$

2. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння:

$$xy' + y = y^2, \quad y(2) = 2.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$xy' = y + \sqrt{y^2 + x^2}$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$xy' - 2y = 2x^4$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння методом варіації довільної сталої:

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 3y' + 2y = 4xe^{2x}$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' = y_1 + y_2 \\ y_3' = 3y_1 + y_3 \end{cases}$$

Варіант 29

1. Представити картину інтегральних кривих даного диференціального рівняння поблизу прямої $x = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}.$$

2. Вирішити задачу Коші для диференціального рівняння:

$$y'(2+y)\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+y^2}, \quad y(0) = 0.$$

3. Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$(2y - xe^y)y' = e^y$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' - 2y = e^{4x}$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' = y'(1+y')$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 9y = e^{3x} \cos x$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - 6y'' + 13y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0;$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = -y_1 + 5y_2 - y_3 \\ y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

Варіант 30

1. Показати, що функція $y(x)$, яка задається рівнянням $\arcsin \frac{y}{x} = C - x$, є загальним інтегралом диференціального рівняння

$$xy' - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0.$$

2. Вирішити задачу Коші для диференціального рівняння:

$$xydx + (x+1)dy = 0, y(0) = 1.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$x^2 y' - 2xy = 4$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$yy'' - (y')^2 = 0$$

6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 2y' + 5y = 2e^x \cos 2x$$

7. Знайти розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкові умови:

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 0$$

8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2 \end{cases}$$

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Шкіль М. І., Сотніченко М. А. Звичайні диференціальні рівняння: Навч. посібник. – К.: Вища школа, 1992. – 303 с.
2. Сердюк І.В. Практикум з курсу «Алгебра і геометрія» Векторна алгебра /І.В. Сердюк, О.Б. Ахієзер, О.І. Дунаєвська, А.О. Нікульченко, А.Ю. Стрельнікова // Навчально-методичний посібник – Харків: видавництво «НІМТ», 2022 - 88 с
ISBN 978-617-578-334-4
3. Ясницька Н. М., Ахієзер О. Б., Геляровська О. А., Боєва А. А., Іглін С. П., Решетняк Ю. Б., Тевяшева О. А. Теорія функцій комплексної змінної та інтегральні перетворення. Навчально-методичний посібник. Харків: "Мадрид", 2023- 246 с.

ISBN 978-617-8254-14-8

<https://repository.kpi.kharkov.ua/server/api/core/bitstreams/2cf8914c-5be5-4783-a78d-a66e8ef05c19/content>

Навчальне видання
БОСВА Анна Анатоліївна
РЕШЕТНИКОВА Світлана Миколаївна
МАЛЬКОВА Ірина Анатоліївна
МЕЗЕРНА Марія Віталіївна

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів
усіх форм навчання

Віповідальна за випуск проф. Ахієзер О. Б.
Роботу до видання рекомендував проф. Гамаюн І. П.
В авторській редакції

План 2024 р., п. 144

Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 5,6

Видавничий центр НТУ «ХП»,
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Електронне видання