

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Н. А. Марченко, О. С. Мельников, Ю. М. Кожин

ОСНОВИ ТЕОРІЇ МНОЖИН ТА ВІДНОШЕНЬ

Навчально-методичний посібник
до практичних занять з дисципліни «Дискретна математика»

для студентів спеціальностей 122 «Комп'ютерні науки»,
124 «Системний аналіз»,
186 «Видавництво і поліграфія»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 13.02.2025 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2025

УДК 510.3
М 25

Рецензенти:

В. А. Кушнір, д-р фіз.-мат. наук,
с.н.с. ННЦ «Харківський фізико-технічний інститут»;

М. А. Гринченко, канд. техн. наук,
зав. каф. управління проєктами в інформаційних технологіях НТУ «ХП»

Марченко Н. А.

М 25 Основи теорії множин та відношень : навчально-методичний посібник до практичних занять з дисципліни «Дискретна математика» для студентів спеціальностей 122 «Комп'ютерні науки», 124 «Системний аналіз», 186 «Видавництво і поліграфія» / Н. А. Марченко, О. С. Мельников, Ю. М. Кожин. – Харків : НТУ «ХП», 2025. – 100 с.

ISBN 978-617-05-0545-3

У навчально-методичному посібнику розглянуто основні поняття теорії множин і відношень. Наведено способи подання множин і відношень, їх властивості, операції над ними. Посібник містить велику кількість прикладів розв'язання практичних задач, а також задачі для самостійної роботи та тестові завдання.

Призначено для студентів бакалаврського рівня підготовки спеціальностей 122 «Комп'ютерні науки», 124 «Системний аналіз», 186 «Видавництво і поліграфія».

Іл. 21. Табл. 18. Бібліогр. 10 назв.

УДК 510.3

ISBN 978-617-05-0545-3

© Марченко Н. А., Мельников О. С.,
Кожин Ю. М., 2025
© НТУ «ХП», 2025

ВСТУП

Дискретна математика, або скінченна математика, вивчає передусім скінченні множини та різні структури, побудовані на їхньому підґрунті. Ця дисципліна набула широкого застосування в комп'ютерних технологіях, домінуючим способом подання інформації в яких є дискретний. Інформаційні технології впроваджено до навчальних планів усіх вищих навчальних закладів, тому потреба в них невинно зростає. Це пояснюється необхідністю створення та експлуатації глобальних інформаційних мереж, небаченим зростанням комп'ютерної індустрії, повсюдним використанням цифрового оброблення сигналів. Таким чином, дисципліна «Дискретна математика» є наче «мостом» між класичною математикою і наступними дисциплінами спеціальностей, пов'язаних з інформаційними технологіями.

Основні положення теорії множин вперше були розроблені чеським філософом, математиком, професором теології Бернардом Больцано (1781–1848), німецьким математиком Рихардом Дедекіндом (1831–1916) і німецьким математиком, професором Гальського університету Георгом Кантором (1845–1918). Г. Кантор приніс у теорію множин (особливо нескінченних) найбільший вклад, тому теорія множин тісно пов'язана з його ім'ям.

Офіційно теорія множин була признана в 1897 р., коли Ж. Адамар (1865–1963) і А. Гурвіц (1859–1919) на Першому міжнародному конгресі математиків у своїх доповідях привели багаточисельні приклади використання теорії множин у різних розділах математики.

Головним у теорії множин є питання про те, як визначити множину, тобто вказати спосіб, за допомогою якого можна було б однозначно встановити, належить чи даний об'єкт заданій множині чи не належить.

Мета навчально-методичного посібника – ознайомлення студентів з основними поняттями теорії множин і відношень та озброєння їх методами й алгоритмами розв'язування широкого кола задач.

1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Поняття множини та її елементів

Поняттю множини неможливо дати точне визначення, оскільки воно є первісним (аксіоматичним), дуже широким за змістом. Його можливо тільки пояснити. Основоположник теорії множин Г. Кантор вважав, що *множина* являє собою об'єднання певних, різних об'єктів, званих її *елементами*, в єдине ціле.

Група видатних математиків, яка виступала під псевдонімом Ніколя Бурбакі в середині XX століття, пропонувала наступне визначення: «*Множини* утворюється з *елементів*, що володіють деякими властивостями і знаходяться в деяких відносинах між собою або з елементами інших множин».

Таким чином, під *множиною* розуміють деяку сукупність різних поміж собою об'єктів, які добре розпізнаються нашою думкою або інтуїцією і розглядаються як єдине ціле. При цьому ніяких припущень щодо природи об'єктів не робиться.

Об'єкти, з яких складено множину, називають її *елементами*.

Зазвичай множини позначають великими літерами латинської абетки $A, B, X, \dots$, а елементи множини – малими латинськими літерами: a, b, x .

Множина, що має скінченну кількість елементів, називається *скінченною*. Якщо кількість елементів у множині необмежена, тоді її називають *нескінченною*.

Приклади множин:

- множина студентів у даний час у даній аудиторії (скінченна);
- множина парних чисел (нескінченна);
- множина цифр у десятковій системі зчислення (скінченна);
- множина точок кола (нескінченна);
- множина громадян України в певному році (скінченна);
- множина груп студентів НТУ «ХП» в певному році (скінченна).

Останній приклад демонструє твердження, що *елементи множини самі можуть бути множинами*.

Якщо a є елементом множини A , то говорять, що a *належить* множині A і записують $a \in A$. Якщо a *не належить* множині A , то відповідно записують $a \notin A$. Передбачається, що для даного об'єкта a і для даної множини A завжди $a \in A$ або $a \notin A$, але не те й інше разом.

1.2. Підмножини

Множина A є підмножиною множини B (позначається $A \subseteq B$), якщо кожен елемент A є елементом B ; тобто якщо $x \in A$, то $x \in B$. Зокрема, кожна множина є підмножиною самої себе. Якщо A не є підмножиною B , то відповідний знак на письмі перекреслюють $A \not\subseteq B$.

Знак $\subseteq$ називають *знаком включення* або *нестрогої нерівності*.

Згідно з інтуїтивним принципом об'ємності множини A і B називаються *рівними* (позначають $A = B$), якщо вони складаються з одних і тих же елементів. Іншими словами, для $\forall x$ маємо: $x \in A$ тоді і тільки тоді, коли $x \in B$, тобто $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$.

Якщо A є підмножиною множини B і при цьому вони нерівні між собою, тобто $A \subseteq B$ і $A \neq B$, то записують $A \subset B$ і кажуть, що A є *власною (строгою або істинною) підмножиною* множини B .

Знак $\subset$ на відміну від знака $\subseteq$ називається *знаком строгого включення*.

Запис $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ означає, що скінченна множина A складається з елементів $a_1, a_2, \dots, a_n$. Це спосіб задання множини за допомогою *списком* або *перерахування елементів*. Наприклад, якщо $A = \{1, 2, 3\}$, то $2 \in A$, а елемент $5 \notin A$.

Якщо список містить повтори, то, в множину кожен елемент все одно зараховується тільки один раз; порядок елементів у списку не має значення (згідно з принципом об'ємності).

Будемо вважати, що множини A і B знаходяться в *загальному становищі*, якщо існують такі елементи a, b, c , що $a \in A$ і $a \notin B$, $b \in B$ і $b \notin A$ і $c \in A$ і $c \in B$.

1.3. Основні типи множин

Множина може містити будь-яку кількість елементів, як *скінченну*, так і *нескінченну*. Також множина може містити один елемент, або не містити жодного.

Порожня множина (позначається $\emptyset$ або $\{\}$) – це множина, яке не містить елементів. За принципом об'ємності існує тільки одна порожня множина. Порожня множина є підмножиною будь-якої.

Приклади порожніх множин:

- множина трикутників з двома прямими кутами;
- множина коренів рівняння $x^2 = -1$ на множині дійсних чисел.

Одинична множина або *синглетон* (від англ. single – одиничний) – множина, що складається з одного елемента.

Не завжди відомо, чи існують елементи, які визначають деяку множину. Наприклад, множина виграшних квитків лотереї може стати визначеною тільки після тиражу.

Множина, яка вміщує в собі всі множини, що розглядаються, називається *універсальною множиною* або *універсумом* і позначається U .

Слід зазначити, що множина U , хоча і названа універсальною, однозначно не визначена, якщо точно не вказана предметна область.

Множини, елементами яких є числа, називаються *числовими множинами*.

Для запису деяких стандартних числових множин користуються загальноприйнятими позначеннями:

- $N = \{1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$ – множина натуральних чисел;
- $N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$ – множина цілих невід’ємних чисел;
- $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ – множина цілих чисел;
- Q – множина раціональних чисел;
- R – множина дійсних чисел.

В теорії чисел універсальною множиною зазвичай виступає множина цілих Z або всіх натуральних чисел N . В математичному аналізі універсум – це множина дійсних чисел R .

Множина всіх підмножин деякої основної множини A називається *булеаном* і позначається $P(A)$.

Булеан включає порожню множину і саму множину A .

Наприклад, якщо задано множину $A = \{a, b, c\}$, то їй буде відповідати булеан $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Якщо множина A має n елементів, то булеан $P(A)$ міститиме 2^n елементів, через що його також називають *множинним степенем множини A* та іноді позначають 2^A .

Упорядкованою вважають таку множину, в якій є важливим порядок слідування елементів. Наприклад, упорядкованою є множина, в якій кожен елемент має свій порядковий номер. Позначають упорядковану множину, як правило, або круглими, або трикутними дужками. Наприклад, $A = \langle 1, 2, 3 \rangle$, у загальному випадку: $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$, $n \in N$.

Множини, як об’єкти, можуть бути елементами інших множин. Останні в такому випадку називаються *класом* або *сімейством*.

1.4. Способи задання множин

При заданні множин слід визначити, які елементи до неї належать.

Згідно з визначенням множину можна задавати явним переліченням всіх її елементів: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Це є спосіб задання множини *списком*, який підходить тільки для задання множин з невеликою кількістю елементів. Наприклад, $A = \{a, b, c\}$ або множина всіх студентів, присутніх в аудиторії.

Множину також можна задавати за допомогою вказівки деякої *характеристичної властивості* якою володіє кожен з елементів множини, що розглядається, і не володіє кожен інший елемент, що не входить до цієї множини.

Характеристичну властивість запишемо у вигляді *одномісного предиката* $P(x)$, який визначається на універсальній множині елементів, з яких формується множина A . *Предикат* – це те, що стверджується або заперечується про об'єкт судження. Припускається, що властивість має змістовний сенс на сукупності об'єктів, що розглядається, при цьому предикат може приймати одне з двох значень істинності – «істина» або «хибність». Якщо за $x = a$ висловлення $P(x)$ є істинним, то a – елемент даної множини.

Множину A , задану за допомогою предиката $P(x)$, записують у вигляді $A = \{x: P(x), x \in U\}$ або $A = \{x | P(x), x \in U\}$, причому $a \in \{x: P(x), x \in U\}$, якщо предикат $P(x)$ є істинним.

Наприклад, нехай задано множину натуральних чисел N . Розглянемо сукупність елементів з множини N , які діляться без остачі на 5 (характеристична властивість). Отримаємо множину чисел, кратних до 5:

$$C = \left\{x: \frac{x}{5} \in N\right\}.$$

Зауваження. Переліченням елементів можна задати лише скінченні множини, а за допомогою характеристичної властивості можна задавати як скінченні, так і нескінченні множини.

Ще одним способом задання множини є використання *процедури*, що породжує її елементи: $M = \{m: m = f\}$.

Елементами множини вважаються всі об'єкти, які можуть бути отримані за допомогою цієї процедури. Поширеною формою процедури, що породжує елементи, є утворення множини з інших множин за допомогою операцій над ними або утворення елементів множини за допомогою рекурсивної функції.

Наприклад, запишемо множину чисел Фібоначчі

$$F = \{f_i: f_1 = 1, f_2 = 1, f_{i+1} = f_i + f_{i-1}, i \geq 2, i \in N\}.$$

При заданні множин можуть виникати помилки або протиріччя. Вважається, що множина задана *коректно*, якщо для будь-якого елемента можна визначити, належить він множині або ні. В деяких випадках це неможливо. Такі протиріччя називають *парадоксами*. Розглянемо два найвідоміших.

Парадокс перукаря. Єдиний перукар у місті N визначає множину A мешканців, яких він повинен голити, як сукупність всіх тих мешканців N , які не голяться самі. Але тоді для самого перукаря виходить протиріччя і при включенні його до множини A , і при віднесенні його до мешканців, які голяться самі.

Парадокс Рассела. Нехай A – множина усіх множин, які не є власними елементами. Тоді обидва можливі твердження про множину A є суперечливими:

- 1) A є елементом множини A ;
- 2) A не є елементом множини A .

1.5. Графічна інтерпретація множин

Для наглядного зображення підмножин універсальної множини і співвідношень між ними використовують *круги Ейлера* та *діаграми Венна*.

Використання кругів Ейлера приписують Леонарду Ейлеру (1707—1783), який використовував ідею зображення множин за допомогою кіл. Однак цим методом ще до Ейлера користувався видатний німецький філософ і математик Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646—1716).

За допомогою кругів Ейлера множини, що не мають спільних елементів, зображуються неперетинними фігурами. Відношення включення зображують, розташовуючи одну фігуру вкладеною в іншу.

Розглянемо побудову кругів Ейлера на **прикладі**. Нехай задано множину $A = \{1, 2, 3\}$ та три варіанта множини B :

- 1) $B = \{1, 3, 5\}$;
- 2) $B = \{1, 3\}$;
- 3) $B = \{4, 5, 6\}$.

В першому випадку множини A і B мають два спільних елемента – $\{1, 3\}$. Вид кругів Ейлера для даного випадку приведено на рис. 1.1а. В другому випадку множина B є власною підмножиною множини A , тобто $B \subset A$, що відповідає рис.1.1б. В останньому випадку спільних елементів у множин A і B не має, що зображено на рис.1.1в.

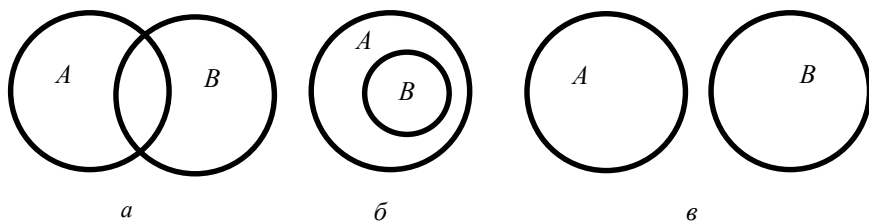


Рис. 1.1. Зображення множин за допомогою кругів Ейлера

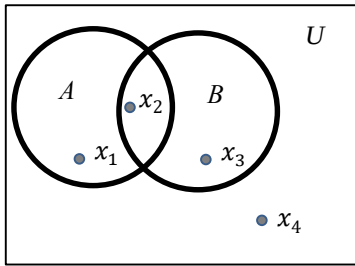
Діаграми Венна почали застосовувати на практиці майже на сто років пізніше у 1881 році. Вони відрізняються від кругів Ейлера тим, що в них застосовуються довільні криві. Іноді вважають, що діаграми Венна є узагальненням кругів Ейлера. Але це твердження не зовсім вірне, оскільки діаграми Венна не відображають реальні відношення включення, що встановлені між множинами.

Побудова діаграми Венна полягає в поділі площини на $2n$ підмножин за допомогою n замкнутих фігур, де n – число множин, що необхідно зобразити. Кожна фігура на діаграмі Венна представляє окрему множину з $2n$ підмножин. При цьому кожна наступна фігура повинна мати одну і тільки одну область перетину з кожною з раніш побудованих фігур. Площина, на якій зображуються фігури, становить універсальну множину U . Таким чином, точки, що не належать жодній з фігур, належать тільки універсальній множині U .

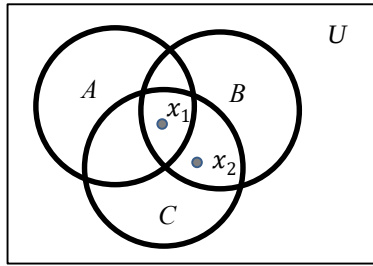
На рис. 1.2а зображено діаграму Венна для випадку двох множин. Тут точка x_1 належить множині A та не належить множині B , тобто $x_1 \in A$, $x_1 \notin B$; x_2 належить множинам A і B , тобто $x_2 \in A$, $x_2 \in B$; точка x_3 не належить множині A та належить множині B , тобто $x_3 \notin A$, $x_3 \in B$; точка x_4 не належить множинам A і B , а лежить в універсумі, тобто $x_4 \notin A$, $x_4 \notin B$. При цьому точки x_1 , x_2 і x_3 також належать універсальній множині U .

На рис. 1.2б наведено діаграму Венна для трьох множин A , B і C і наступних умов розташування точок: $x_1 \in A$, $x_1 \in B$, $x_1 \in C$; $x_2 \notin A$, $x_2 \in B$, $x_2 \in C$.

Часто відмінності між кругами Ейлера та діаграмами Венна не враховують і називають їх єдиним терміном – *діаграми Ейлера–Венна*.



a



б

Рис. 1.2. Зображення множин за допомогою діаграм Венна

Приклад 1.1. Нехай універсальну множину U складають фігури на площині. Зобразити за допомогою діаграми Ейлера-Венна наступні множини:

- A – квадрати;
- B – чотирикутники;
- C – ромби;
- D – паралелограми;
- E – прямокутники;
- F – трапеції.

Всі ці фігури є чотирикутниками, тому A, C, D, E, F є підмножинами множини B . З'ясуємо взаємне розташування множин A, C, D, E, F . За визначенням паралелограм є чотирикутником, у якого протилежні сторони попарно паралельні, а трапеція має тільки дві паралельні сторони, а інші дві не-паралельні. Тому множини D і F не мають спільних елементів. В свою чергу, ромби, прямокутники і квадрати – це окремі випадки паралелограмів, тобто A, C і E – підмножини множини D .

З'ясуємо взаємне розташування множин A, C і E . Ромб – це паралелограм, у якого всі сторони рівні. Окремий випадок ромбів становлять квадрати, у яких сторони перетинаються під прямими кутами, тобто $A \subset C$. З іншого боку, квадрати є окремим випадком прямокутників, тому $A \subset E$. Таким чином, множини A і E мають спільні елементи – множину ромбів, що становить область їх перетину.

Результуюча діаграма Ейлера-Венна представлена на рис. 1.3.

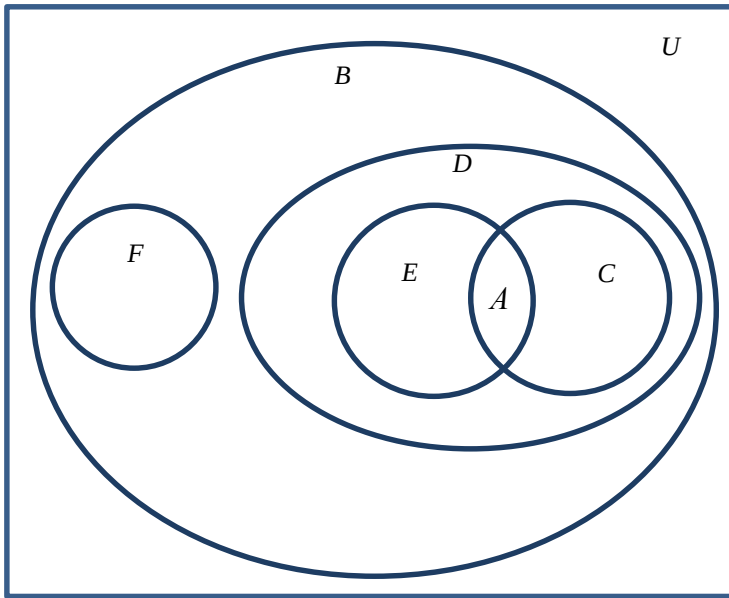


Рис. 1.3. Діаграма Ейлера-Венна для прикладу 1.1

1.6. Операції над множинами

Множина 2^U всіх підмножин універсальної множини U із заданими на ній операціями складають *алгебру множин*.

Зазвичай розглядають п'ять основних операцій над множинами: одну *унарну*, тобто в операції задіяна тільки одна множина, – це *доповнення*, і чотири *бінарні операції* між двома множинами – *об'єднання*, *перетин*, *різницю* та *симетричну різницю*.

Об'єднанням (сумою) множин A і B (позначається $A \cup B$) називається множина, що складається з усіх елементів, які належать хоча б одній з множин A чи B : $A \cup B = \{x: x \in A \text{ або } x \in B\}$.

Для ілюстрації операцій над множинами будемо використовувати діаграми Венна, результат виконання операції на яких виділено кольором або штрихуванням. Результат виконання об'єднання множин A і B наведено на рис. 1.4а.

Перетином (добутком) множин A і B (позначається $A \cap B$) називається множина, що складається з усіх тих елементів, які належать множинам A і B

одночасно: $A \cap B = \{x: x \in A \text{ і } x \in B\}$. Результат виконання перетину множин A і B наведено на рис. 1.4б.

Множини A і B , які мають пустий перетин, тобто $A \cap B = \emptyset$, називають *дис'юнктивними*.

Зауваження. Для скінченного числа множин n $A_1, A_2, \dots, A_n$ в аналогічний спосіб визначаються операції об'єднання та перетину:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \text{ і } \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

Різницею множин A і B (позначається $A \setminus B$) називається множина тих і тільки тих елементів A , які не містяться в множині B : $A \setminus B = \{x: x \in A \text{ і } x \notin B\}$. Результат виконання перетину множин A і B наведено на рис. 1.4в.

Основні властивості операції різниці множин:

- різниця визначена тільки для двох множин;
- різниця некомутативними, тобто в загальному випадку $A \setminus B \neq B \setminus A$;
- якщо $A \setminus B = \emptyset$, тоді $A \subseteq B$.

Симетрична різниця множин A і B (позначається $A \Delta B$ або $A \oplus B$) складається з тих елементів, які належать в точності однієї з множин, тобто $A \Delta B = \{x: (x \in A \text{ і } x \notin B) \text{ або } (x \notin A \text{ і } x \in B)\}$. При цьому симетрична різниця може бути виражена через операції об'єднання, перетину і різниці множин у такий спосіб:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Геометричну інтерпретацію симетричної різниці подано на рис. 1.4г.

Симетричну різницю також можна узагальнити на випадок скінченного числа множин n .

Доповнення (заперечення) множини A (позначається $\bar{A}$) – це множина елементів універсуму, які не належать A , тобто $\bar{A} = \{x: x \in U \text{ і } x \notin A\}$. З іншого боку, $\bar{\bar{A}} = A$. Геометричну інтерпретацію доповнення подано на рис. 1.4д.

Використовуючи операції доповнення та перетину, можна отримати ще один вираз для різниці множин:

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}.$$

Приклад 1.2. Нехай задано числові множини $A = \{1, 2, 6, 7\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$ і універсальна множина $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Знайдемо результат виконання операцій над множинами. Тоді

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}, \\ A \cap B &= \{2, 6\}, \end{aligned}$$

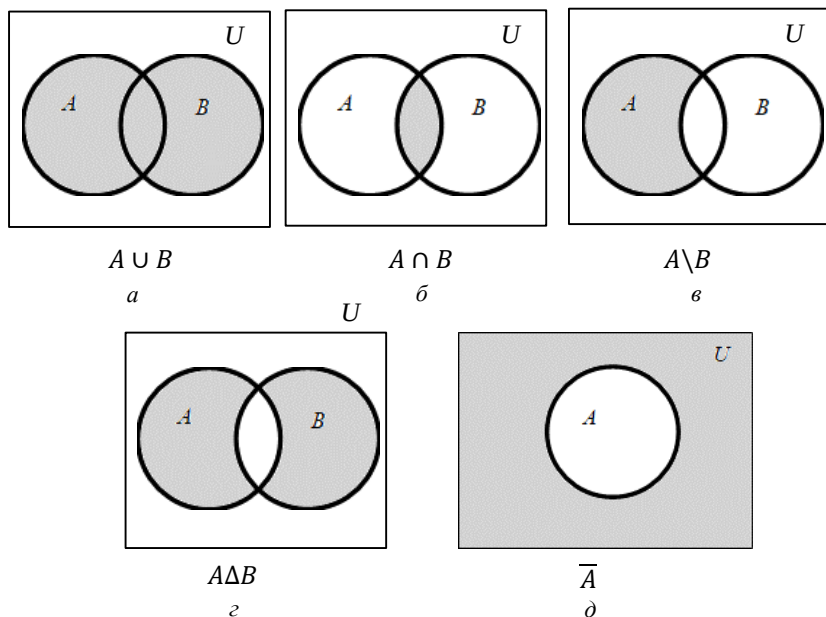


Рис. 1.4. Геометрична інтерпретація операцій над множинами

$$\begin{aligned}
 A \setminus B &= \{1, 7\}, \\
 B \setminus A &= \{3, 5\}, \\
 A \cup B &= \{1, 3, 5, 7\}, \\
 \overline{A} &= \{3, 4, 5, 8, 9, 10\}.
 \end{aligned}$$

Введені операції над множинами дозволяють створити складні алгебраїчні вирази. Тому виникає питання пріоритету операцій. В алгебрі множин *пріоритет операцій* такий:

- 1) доповнення $\overline{A}$;
- 2) перетин $A \cap B$;
- 3) об'єднання $A \cup B$;
- 4) різниця $A \setminus B$;
- 5) симетрична різниця $A \Delta B$.

Якщо у формулі зустрічаються однакові операції, то порядок їх виконання за відсутності скобок – зліва направо.

Приклад 1.3. Необхідно розставити дужки, тобто визначити послідовність виконання операцій, в формулі $D = A \setminus B \cup \bar{A} \cap C \setminus B$. Тоді з урахуванням пріоритетів операцій послідовність дій буде наступною:

$$D = \left(A \setminus \left(B \cup \left((\bar{A}) \cap C \right) \right) \right) \setminus B.$$

1.7. Властивості операцій над множинами

Нехай задано множини A, B, C універсальної множини U . Тоді для операцій об'єднання, перетину, різниці, симетричної різниці та доповнення виконуються наступні властивості. При цьому властивості операцій об'єднання, перетину та доповнення також називають *законами алгебри множин*.

1. Ідемпотентність:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \setminus A = \emptyset$$

$$A \triangle A = \emptyset$$

2. Комутативність:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \triangle B = B \triangle A$$

3. Асоціативність:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$

4. Дистрибутивність:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$

5. Елімінація (поглинання):

$$(A \cap B) \cup A = A$$

$$(A \cup B) \cap A = A$$

6. Властивості нуля (порожньої множини):

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \triangle \emptyset = A$$

$$\emptyset \setminus A = \emptyset$$

$$A \setminus \emptyset = A$$

7. Властивості одиниці (універсальної множини):

$$A \cup U = U$$

$$A \cap U = A$$

8. Інволютивність (подвійне заперечення):

$$\overline{\overline{A}} = A$$

9. Протиріччя та виключеного третього:

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

$$A \cup \overline{A} = U$$

10. Закони де Моргана:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Зауваження. Закони де Моргана можуть бути узагальнені для випадка скінченного числа множин n :

$$\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$$

11. Властивості різниці множин:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$$

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

Всі наведені властивості можна довести проведенням формальних міркувань або за допомогою діаграм Венна. В останньому випадку будуються окремо діаграми для лівої та правої частини властивості, на кожній з яких послідовно відображаються результати виконання операцій. Збіг діаграм

Венна для лівої та правої частини доводить справедливості відповідної влас-
тливості.

Приклад 1.4. Доведемо справедливості дистрибутивного закону для
симетричної різниці відносно операції перетину

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

Спочатку побудуємо діаграму Ейлера-Венна для лівої частини, викону-
ючи послідовно операції симетричної різниці та перетину. Результат послі-
довної побудови подано на рис. 1.5.

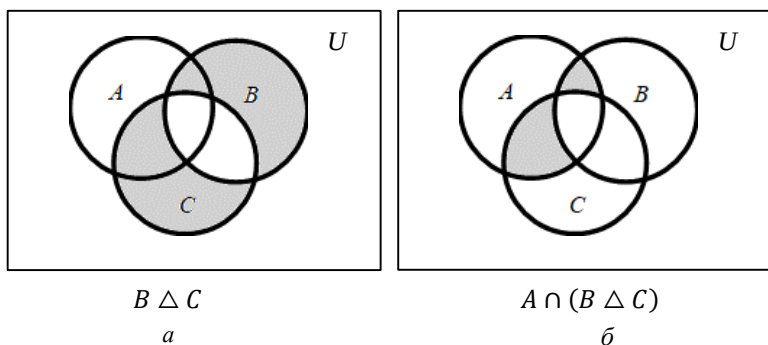


Рис. 1.5. Побудова діаграми Ейлера-Венна для $A \cap (B \triangle C)$

Далі в аналогічний спосіб побудуємо діаграму Ейлера-Венна для правої
частини. Цей процес зображено на рис. 1.6.

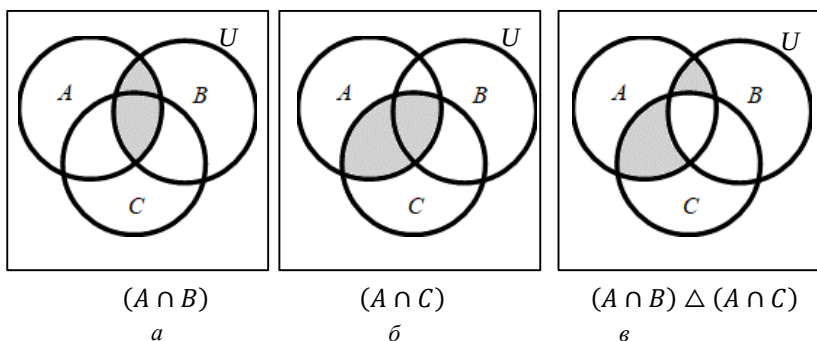


Рис. 1.6. Побудова діаграми Ейлера-Венна для $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$

Як видно з рис. 1.5б та 1.6в, отримані діаграми Ейлера-Венна збігаються, що і треба було довести.

За допомогою розглянутих властивостей множин можна виконувати еквівалентні перетворення виразів та їх спрощувати.

Приклад 1.5. Спростимо вираз $\overline{A \cap A \cap \overline{B}} \cup (B \cup C) \cup B$.

Згідно з пріоритету операцій спочатку застосуємо закон де Моргана, потім виконаємо операцію перетину, використовуючи дистрибутивний та інволютивний закони, а також властивості порожньої множини. В останню чергу будемо виконувати операцію об'єднання, використовуючи асоціативний, комутативний закони та ідемпотентність. У результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} \overline{A \cap A \cap \overline{B}} \cup (B \cup C) \cup B &= A \cap (\overline{A \cup \overline{B}}) \cup (B \cup C) \cup B = \\ &= A \cap (\overline{A} \cup B) \cup (B \cup C) \cup B = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \cup (B \cup C) \cup B = \\ &= \emptyset \cup (A \cap B) \cup (B \cup C) \cup B = (A \cap B) \cup (B \cup C) = \\ &= ((A \cap B) \cup B) \cup C = B \cup C. \end{aligned}$$

1.8. Потужність множин, теорема Кантора і континуум-гіпотеза

Кардинальним числом (позначається $CardA$ або $|A|$) називається деякий об'єкт для позначення потужності будь-якої множини із сукупності множин.

Потужністю скінченної множини A називається кількість її елементів.

Наприклад, потужність множини $A = \{0, 1, 5\}$ становить $|A| = 3$.

Потужність порожньої множини $\emptyset$ дорівнює нулю, тобто $|\emptyset| = 0$.

Для нескінченної множини строге поняття потужності не вводиться, але використовується для позначення її властивостей. Кардинальне число є узагальненням поняття числа елементів скінченної множини на випадок нескінченної множини. Засновник теорії множин Г. Кантор показав, що нескінченні множини можуть бути класифіковані за потужністю.

Взаємно-однозначною називається така відповідність між множинами $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ та $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$, при якій кожному елементу $a \in A$ відповідає один і тільки один елемент $b \in B$ і кожному елементу $b \in B$ відповідає один і тільки один елемент $a \in A$.

Функція, що визначає взаємно-однозначну відповідність, називається *бієктивною функцією* або *бієкцією*.

Множини A і B називаються *еквівалентними* (позначається $A \sim B$), якщо між ними існує бієкція (принаймні одна).

Еквівалентні множини називають *рівнопотужними*, що позначається так:

$$|A| = |B|.$$

Еквівалентними одна одній виявляються усі скінченні множини з однаковим числом елементів n , тобто потужність кожної з цих множин дорівнює n .

Множина A називається *зліченною*, якщо вона еквівалентна натуральному ряду N , тобто $A \sim N$. Її потужність позначається літерою $\aleph_0$ (читається «алеф нуль», алеф – перша літера давньоєврейської абетки).

Термін «зліченність» є синонімом в інтуїтивному понятті терміну «дискретність».

За допомогою бієкції $\varphi = N \rightarrow A$ можна перерахувати всі елементи a з множини A , забезпечивши їх індексами за правилом $\varphi(n) = a_n$. Тоді можна записати, що $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots, \infty\}$.

Множина парних натуральних чисел $N_{\text{п}} = \{2, 4, \dots, m, \dots\}$, всіх натуральних чисел $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$, цілих чисел Z та раціональних чисел Q послідовно вкладені:

$$N_{\text{п}} \subset N \subset Z \subset Q.$$

Хоча нижче подані множини не є рівними, вони еквівалентні одна одній, тобто мають однакову потужність і є зліченими: $|N_{\text{п}}| = |N| = |Z| = |Q|$. Тому можна вважати, що ці множини є *дискретними*.

Якщо існує взаємнооднозначна відповідність між множиною A і деякою власною підмножиною B^* множини B , тоді кажуть, що *потужність множини A не менша від потужності множини B* і записують $|A| \geq |B|$.

Існують нескінченні злічені множини, і їх потужність вважають більшою, ніж множини натуральних чисел N .

Множина точок відрізка $[0, 1] = \{x \in R; 0 \leq x \leq 1\}$ не є зліченною (теорема Г. Кантора). Її потужність називають *континуум* і позначають c або $\aleph_1$: $|[0, 1]| = \aleph_1$.

Множину $[0, 1]$ і будь-яку еквівалентну множину називають *континуальними*.

На осі дійсних чисел R континуальними (тобто еквівалентними одна одній й відрізка $[0, 1]$) є множини:

- $[a, b]$,
- (a, b) при будь-якому $a < b$;
- $(0, +\infty)$;
- множина $(-\infty, +\infty)$, що дорівнює R .

Континуальними є також множини точок будь-якого квадрата і кола на площині R^2 , паралелепіпеда і кулі у просторі R^3 .

Потужності множин мають наступні *властивості*.

- Якщо множина A є рівнопотужною підмножині B^* множини B (тобто $A \sim B^*$) і множина B є рівнопотужною підмножині A^* множини A ($B \sim A^*$), то множини A й B рівнопотужні ($A \sim B$) й їхні потужності дорівнюють одна одній: $|A| = |B|$.

- Потужність множини A завжди менше за потужність множини $P(A)$, де $P(A)$ – множина всіх підмножин множини A (булеан).

- Кожна нескінченна множина містить зліченну множину.

- Об'єднання нескінченної і скінченної множин є нескінченна множина.

- Всі нескінченні множини, які є підмножинами зліченної множини, є також зліченими.

- Об'єднання зліченного числа скінченних або злічених множин є зліченною множина.

- Множина $P(N)$, тобто булеан множини N – незліченна множина. Її потужність дорівнює потужності континууму $\aleph_1$, тобто множина потужності $2^{\aleph_0}$ має потужність континууму.

- Об'єднання множини потужності континууму та зліченної множини має потужність континууму.

- Добуток скінченного або зліченного числа множин потужності континууму має потужність континууму.

Виникає природне питання, чи існують нескінченні множини, потужність яких менша за потужність континуума. Твердження про те, що таких множин не існує, називають *континуум гіпотезою*. Вона не може бути ні спростована, ні доведена з рамок теорії множин.

Континуум-гіпотеза стала першою з двадцяти трьох математичних проблем, про які Давид Гільберт доповів на II Міжнародному Конгресі математиків в Парижі 1900 року. Тому континуум-гіпотеза відома також як *перша проблема Гільберта*.

В 1940 році Курт Гедель довів у припущенні несуперечності системи аксіом Цермело-Френкеля (ZF), що виходячи з аксіом теорії множин разом з аксіомою вибору, континуум-гіпотезу не можна спростувати.

В 1963 році американський математик Пол Коен довів (також у припущенні несуперечності ZF), що континуум-гіпотезу не можна довести, виходячи з тих же аксіом. Таким чином, континуум-гіпотеза не залежить від аксіом ZF.

Поділ щодо підтвердження чи заперечення континуум-гіпотези привів до створення *двох теорій множин*:

- так званої *канторівської теорії множин*, у якій справджується континуум-гіпотеза;
- *неканторівської теорії множин*, у якій континуум-гіпотезу вважають хибною. В цьому випадку можна довести, що кардинальними числами натурального ряду й континууму розташовано нескінченно багато кардинальних чисел.

Узагальнена континуум-гіпотеза стверджує, що для будь-якої нескінченної множини S не існує таких множин, кардинальне число яких більше, ніж у S , але менше, ніж у множини всіх підмножин S . Узагальнена континуум-гіпотеза також не суперечить аксіоматиці Цермело-Френкеля, і, як довели Серпінський (1947 р.) і Шпеккер (1952 р.), з неї випливає аксіома вибору.

Апарат теорії множин часто застосовується для розв'язання задач на відшукування кількості елементів, що відповідають заданим умовам.

Приклад 1.6. За метеоспостереженнями протягом 67 днів, 47 днів було похмурих, 35 днів – з опадами, 20 днів – холодних, 23 дні були похмурими з опадами, 12 днів – похмурих та холодних, 5 днів було похмурих, холодних з опадами. Чи існували в спостереженнях ясні теплі дні без опадів?

Розв'яжемо дану задачу, використовуючи діаграму Ейлера-Венна. В задачі річ йде про три множини P – похмурих днів за метеоспостереженнями, O – днів з опадами і X – холодних днів. Універсальну множину U складають дні, коли проводились метеоспостереження. Треба знайти кількість днів, що не належать цим трьом множинам, а знаходяться в універсальній множині U .

Використовуючи позначення потужності множини, перепишемо коротко умову задачі:

$$|U| = 67, |P| = 47, |O| = 35, |X| = 20, |P \cap O| = 23, |P \cap X| = 12, \\ |P \cap O \cap X| = 5, |\overline{P \cup O \cup X}| = ?$$

Перенесемо ці дані на діаграму Ейлера-Венна (рис. 1.7). Розмітку почнемо з множини $P \cap O \cap X$, де знаходиться 5 елементів. У множині $P \cap X$ – 12 елементів, але 5 з них вже враховано, тобто одночасно похмурих і холод-

них днів, але без опадів було $12 - 5 = 7$. Аналогічно, похмурих днів з опадами, але нехолодних було $23 - 5 = 18$. Похмурих днів без опадів і нехолодних було $47 - 5 - 7 - 18 = 17$. Відповідно днів, що були тільки холодні $20 - 5 - 7 = 8$, а мали тільки опади $35 - 5 - 18 = 12$.

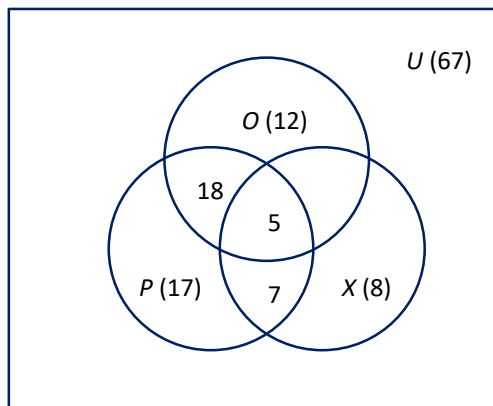


Рис. 1.7. Діаграма Ейлера-Венна до прикладу 1.6 (при відсутності холодних днів з опадами)

За умовою задачі невідомо скільки одночасно було холодних днів з опадами. Тому відповідний сектор на діаграмі Ейлера-Венна не заповнено. Але для розв'язання задачі необхідно оцінити діапазон кількості цих днів. Розмірковуючи логічно, мінімальна кількість таких днів становить величину 0. Тепер на діаграмі (рис. 1.7) всі елементи враховані рівно по одному разу. Тоді кількість елементів, що належить універсальній множині:

$$67 - (12 + 18 + 5 + 7 + 17 + 8) = 0,$$

тобто при відсутності холодних днів з опадами, але не похмурих, ясних теплих днів без опадів не має.

А якщо є холодні дні з опадами, але не похмурі, тоді їх максимальна кількість буде дорівнювати мінімальному значенню потужностей множин днів тільки з опадами і тільки холодних, тобто 8 днів. Відповідні зміни на діаграмі Ейлера-Венна представлено на рис. 1.8.

Тоді кількість елементів, що належить універсальній множині:

$$67 - (4 + 18 + 5 + 7 + 17 + 8) = 8,$$

тобто при наявності 8 холодних днів з опадами, але не похмурих, ясних теплих днів без опадів також 8. Таким чином, відповідь задачі – це від 0 до 8 ясних теплих днів без опадів.

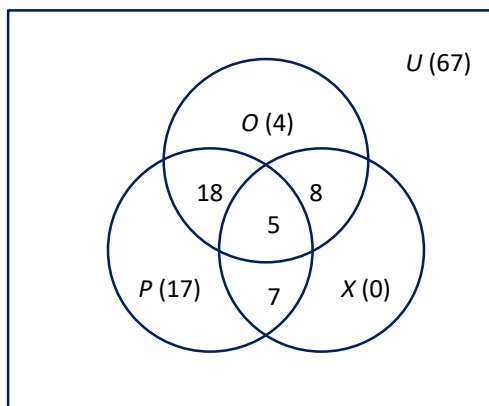


Рис. 1.8. Діаграма Ейлера-Венна до прикладу 1.6 (при наявності 8 холодних днів з опадами)

1.9. Декартовий добуток множин

Нехай є дві множини A і B (необов'язково різні).

Декартовим добутком множин $A \times B$ є множина всіх упорядкованих пар елементів (a, b) , з яких перший a належить множині A , а другий b – множині B .

Наприклад, нехай задано дві множини $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ і $B = \{b_1, b_2\}$. Тоді їх декартовим добутком буде множина

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2)\}$$

Порядок запису пар може бути будь-яким, але розташування елементів в парах визначається порядком слідування множин, тобто

$$A \times B \neq B \times A, \text{ якщо } A \neq B.$$

Потужність декартового добутку скінченних множин дорівнює добутку їх потужностей, тобто

$$|A \times B| = |A| \times |B|.$$

Операція декартового добутку множин узагальнюється на будь-яку їх кількість $A_1, A_2, \dots, A_n$ і записується

$$\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

В результаті добутку множин виходить множина впорядкованих сукупностей елементів $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, для яких вживаються назви: *кортеж*, *послідовність*, *вектор*.

Декартовий добуток множин не підкоряється комутативну і асоціативному законам, але для нього виконуються закони дистрибутивності щодо операцій об'єднання, перетину і різниці:

$$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C), \\ A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C), \\ A \times (B \setminus C) &= (A \times B) \setminus (A \times C). \end{aligned}$$

Для добутку n однакових множин A використовується позначення через *ступінь*:

$$A^n = A \times A \times \dots \times A$$

В цьому випадку кортежі містять елементи множини A , серед яких можуть бути однакові елементи.

Так, якщо множина $A = \{a_1, a_2\}$, то її декартовий добуток A^3

$$A^3 = \{(a_1, a_1, a_1), (a_1, a_1, a_2), (a_1, a_2, a_1), (a_1, a_2, a_2), (a_2, a_1, a_1), (a_2, a_1, a_2), (a_2, a_2, a_1), (a_2, a_2, a_2)\}.$$

1.10. Поняття бінарного відношення

Поняття відношення є фундаментальним поняттям не тільки дискретної математики, але й в інших теоретичних та прикладних дисциплінах. Відношення визначається як будь-яка підмножина впорядкованих кортежів, побудованих з елементів абстрактних множин, і реалізують зв'язки між реальними об'єктами. При цьому під *кортежем* розуміють просто набір впорядкованих елементів.

Відносини між елементами двох множин, тобто *бінарні відношення*, встановлюють відповідність елементів однієї множини X елементам іншої множини Y .

Бінарне відношення може бути задано деякої сукупністю упорядкованих пар (x, y) , які є елементами множини $X \times Y$.

Часто відношення задається не перерахуванням, а деякою властивістю, виразом у словесній або символічній формі.

Якщо A – відношення, то співвідношення xAy можна записати у вигляді $(x, y) \in A$, де $A \subseteq X \times Y$.

Наприклад, $3 < 7$ і $(3, 7) \in <$.

У той же час $(7, 3) \in <$ означало б, що $7 < 3$, що невірно/

В загальному випадку переставлять елементи в парі (x, y) не можна.

Елемент x називають *першою координатою*, а елемент y – *другою координатою* впорядкованої пари.

n -місним (n -мірним) відношенням R на непорожній множині A називається підмножина множини A^n , тобто $R \subseteq A^n$.

Якщо R – n -місне відношення на множині A і кортеж $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R$, то кажуть, що відношення R виконується для всіх елементів $a_1, a_2, \dots, a_n$ і записують $Ra_1 \dots a_n$.

Якщо $(a_1, a_2, \dots, a_n) \notin R$, то кажуть, що відношення не виконується для елементів $a_1, a_2, \dots, a_n$.

У разі двомісного (бінарного) відношення R замість $Ra_1 a_2$ вживають запис $a_1 R a_2$.

Множина перших координат $x \in$ областю визначення $D_v(R)$ (лівою областю), а множина других координат y – областю значень (правою областю) відношення A .

Для кожної непорожньої множини A легко вказати два тривіальних n -місних відношення:

- *повне (універсальне)* відношення, яке виконується для будь-яких n елементів множини A ;

- *порожнє (нульове)* відношення, яке не виконується ні для яких n елементів множини A .

Оберненим (інверсним, дуальним) відношенням до відношення R , заданого на множині A , називається відношення R^{-1} , яке є множиною впорядкованих пар (x, y) таких, що впорядковані пари $(y, x) \in R$

$$R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}.$$

Приклад 1.7. Нехай задано дві множини $X = \{2, 3\}$ і $Y = \{3, 4, 5, 6\}$. Побудувати такі відношення:

- R_1 – «бути дільником»;
- R_2 – «рівність»;
- R_3 – «більше».

Знайти область визначення та область значень відношення R_1 , та обернене відношення до R_3 .

Знайдемо спочатку декартовий добуток множин X і Y

$$X \times Y = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}.$$

Тоді до відношення R_1 – «бути дільником» – будуть належати наступні упорядковані пари:

$$R_1 = \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$$

Відношення R_2 – «рівність» – містить одну упорядковану пару:

$$R_2 = \{(3, 3)\}$$

Відношення R_3 – «більше» – це порожнє відношення, тобто

$$R_3 = \emptyset.$$

Область визначення відношення R_1

$$D_v(R_1) = \{2, 3\} = X.$$

Область значень відношення R_1

$$D_z(R_1) = \{3, 4, 6\} \subset Y.$$

Обернене відношення для R_3 співпадає з декартовим добутком вихідних множин X і Y , тобто

$$R_3^{-1} = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}.$$

1.11. Способи задання бінарних відношень

Існує багато різних способів задання бінарних відношень. За визначенням скінченні відношення задаються *списком упорядкованих пар*. Крім того, відношення можна задавати в *матрицею*, за допомогою *факто-множини* та в графічно в вигляді *графа відношення*, *схеми* або *графіка*.

Розглянемо кожний з цих способів.

1.11.1. Матричний спосіб задання відношень

Матричний спосіб задання відношень заснований на поданні відношення у вигляді прямокутної таблиці (матриці). Стовпці матриці відповідають першим координатами відношення, а рядки – другим координатами відношення.

На перетині i -го стовпця і j -го рядка ставиться *одиниця*, якщо виконано відношення R , тобто $a_i R b_j$, і *нуль*, якщо це відношення не виконується (іноді в таблицях нульові клітини залишають порожніми). Також розглядають і транспоновані матриці, де рядкам відповідають елементи першої множини, а стовпцям – другої.

Матриці відношення називають *булевими*, тому що їхніми елементами є лише числа 0 або 1.

Приклад 1.8. Нехай задано дві множини $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 9, 17, 18, 20\}$ та відношення $R = \{(a, b): a \in A, b \in B, a - \text{дільник } b\}$.

Запишемо матрицю відношення R . Для наочності розмістимо над матрицею заголовки рядків та стовпців. Заголовком стовпців матриці будуть елементи множини A , заголовком рядків – множини B . Таким чином, матриця відношення матиме вигляд:

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 9 \\ 17 \\ 18 \\ 20 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

1.11.2. Задання відношень за допомогою фактор-множини

Розглянемо відношення R , що є підмножиною декартового добутку множин A і B , тобто $R \subset A \times B$.

Якщо елемент a_i належить множині A , то *перерізом по елементу a_i відношення R* (позначають $R(a_i)$) є множина елементів b множині B таких, що упорядковані пари (a_i, b) належать відношенню R :

$$R(a_i) = \{b: a_i \in A, b \in B, (a_i, b) \in R\}.$$

Множину всіх перерізів відношення R називають *фактор-множиною множини B* по відношенню R і позначають B/R :

$$B/R = \{R(a), \forall a \in A\}.$$

Фактор-множина B/R повністю визначає відношення R .

Приклад 1.9. Нехай задано дві множини $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 9, 17, 18, 20\}$ та відношення $R = \{(a, b): a \in A, b \in B, a - \text{дільник } b\}$. Записати фактор-множину відношення.

Побудуємо перерізи за кожним елементом множини A . Переріз по a_1 відношення $R - R(a_1) = \{2, 9, 17, 18, 20\}$. Відповідно за іншими елементами

$$R(a_2) = \{2, 18, 20\}, R(a_3) = \{9, 18\}, R(a_4) = R(a_5) = \{20\}, R(a_6) = \{18\}.$$

Під кожним елементом a_i ($i = \overline{1,6}$) запишемо його переріз

$$\begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \left[\begin{matrix} \{2, 9, 17, 18, 20\} & \{2, 18, 20\} & \{9, 18\} & \{20\} & \{20\} & \{18\} \end{matrix} \right] \end{matrix}$$

Другий рядок буде фактор-множиною множини B за відношенням R .

1.11.3. Графік і схема відношення

Графік відношення зображується в декартовій системі координат; на горизонтальній осі відзначається область визначення $D_B(R)$, на вертикальній – область значень відношення $D_3(R)$; упорядкованій парі (a, b) відповідає точка площини з цими координатами.

Схема відношення зображується за допомогою двох вертикальних прямих, ліва з яких відповідає області визначення відношення $D_B(R)$, а права – множині значень відношення $D_3(R)$. Якщо упорядкована пара (a, b) належить відношенню R , відповідні точки з $D_B(R)$ і $D_3(R)$ з'єднуються прямою.

На рис. 1.9 наведено графік та схему відношення з прикладу 1.8.

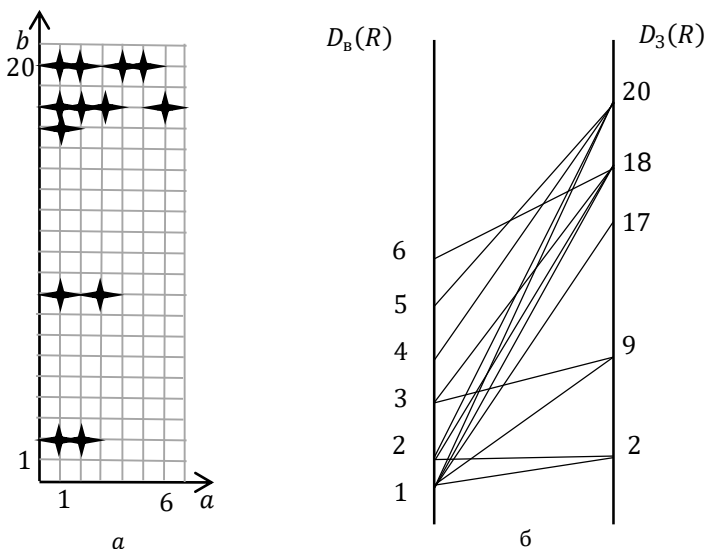


Рис. 1.9. Графік відношення (а) та схема відношення (б)

1.11.4. Граф відношення

Нехай задано множину об'єктів V , які позначаються точками і називаються *вершинами*. Зв'язки між об'єктами зображають лініями і називаються *ребрами*.

Тоді множина вершин V , зв'язки між якими визначені множиною ребер E , називають *графом* і позначають $G=(V,E)$ або $G(V,E)$. Заданий таким чином граф називається *неорієнтованим*.

Часто для вказівки напрямку зв'язку між вершинами відповідне ребро відзначається стрілкою. Позначене так ребро називається *дугою*, а граф, що має дуги, – *орієнтованим графом*.

Перша і друга вершини дуги називаються відповідно *початковою* і *кінцевою*.

Петлею називається дуга, початкова і кінцева вершини якої збігаються.

Таким чином, відношення можна задати в вигляді орієнтованого графа. Вершини графа відповідають елементам множин A і B , а дуга, спрямована з вершини a_i до вершини b_j , означає, що $a_i R b_j$.

На рис. 1.10 наведено граф відношення з прикладу 1.8.

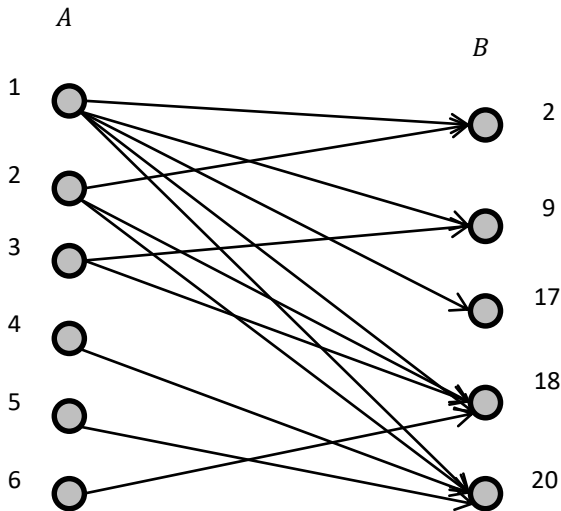


Рис. 1.10. Граф відношення

1.12. Властивості однорідних бінарних відношень

Множини A та B бінарного відношення $R \subset A \times B$ називаються *базисними множинами*.

Бінарне відношення R називається *однорідним*, якщо його базисні множини співпадають.

Бінарне відношення R називається *рефлексивним* на множині A , якщо для кожного $x \in A$ має місце xRx , тобто кожний елемент множини A перебуває в відношенні R сам із собою.

Приклади рефлексивних відношень:

- відношення "=", "<=" рефлексивні на множині дійсних чисел, оскільки для всіх $a \in \mathbb{R}$ $a = a$, $a \leq a$;
- відношення «паралельність прямих» є рефлексивним на множині усіх прямих площини;
- відношення " $\neq$ ", "<" та «перпендикулярність прямих» не є рефлексивними на тих самих множинах.

Матриця рефлексивного відношення має одиниці на діагоналі.

Бінарне відношення R називається *антирефлексивним* (*іррефлексивним*) на множині A , якщо для жодного $x \in R$ не має місце xRx .

Приклади антирефлексивних відношень:

- відношення " $\neq$ ", "<" та «перпендикулярність прямих»;
- відношення «бути старшим» на множині людей.

Матриця антирефлексивного відношення не має жодної одиниці на головній діагоналі.

Бінарне відношення R називається *транзитивним* на множині A , якщо для довільних $x, y, z \in A$ з того, що xRy та yRz випливає, що xRz .

Приклади транзитивних відношень:

- відношення "=", "<=", "<", включення підмножин;
- подільність чисел;
- відношення «бути предком» на множині людей.

Бінарне відношення R називається *інтранзитивним* (*антитранзитивним*) на множині A , якщо для довільних $x, y, z \in A$ з того, що xRy та yRz не випливає, що xRz .

Приклади антитранзитивних відношень:

- відношення «перпендикулярність»;
- відношення перемогти в турнірах «на виліт» на множині гравців: якщо x переміг гравця y , а y переміг гравця z , то x не грав з z , отже, не міг його перемогти;
- відношення «бути сином» (батьком, бабусею) на множині людей;
- гра «Камінь, ножиці, папір». Камінь перемагає ножиці, ножиці виграють у паперу, але камінь програє паперові.

Бінарне відношення R називається *симетричним* на множині A , якщо для довільних $x, y \in A$ з того, що xRy випливає, що yRx .

Приклади симетричних відношень:

- відношення рівності та подібності на множині трикутників;
- відношення «навчатися у одній групі» на множині студентів.

Матриця симетричного відношення також є симетричною.

Бінарне відношення R називається *антисиметричним* на множині A , якщо для довільних $x, y \in A$ з того, що $x \neq y$ та xRy випливає, що не виконується yRx (з xRy та yRx випливає, що $x = y$).

Приклади антисиметричних відношень:

- відношення " $\leq$ " є антисиметричним, оскільки якщо $a \leq b$ і $a \neq b$, то $b \not\leq a$;
- включення підмножин.

Бінарне відношення R називається *асиметричним* на множині A , якщо для довільних $x, y \in A$ з того, що xRy не випливає, що yRx .

Приклади асиметричних відношень:

- відношення " $<$ " на множині чисел;
- відношення «бути батьком» на множині людей.

Бінарне відношення R називається *рівним третьому* на множині A , якщо для довільних $x, y, z \in A$ з того, що xRz та yRz випливає, що xRy .

Представлені властивості однорідних бінарних відношень можна узагальнити в вигляді табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Властивості бінарних відношень

Властивість	Умова
Рефлексивність	$\forall x \in A \Rightarrow (xRx)$
Антирефлексивність	$\forall x \in A \not\Rightarrow (xRx)$
Транзитивність	$\forall x, y, z \in A (xRy \text{ та } yRz) \Rightarrow (xRz)$
Інтранзитивність	$\forall x, y, z \in A (xRy \text{ та } yRz) \not\Rightarrow (xRz)$
Симетричність	$\forall x, y \in A (xRy) \Rightarrow (yRx)$
Антисиметричність	$\forall x, y \in A (xRy \text{ та } yRx) \Rightarrow (x = y)$
Асиметричність	$\forall x, y \in A (xRy) \not\Rightarrow (yRx)$
Рівність третьому	$\forall x, y, z \in A (xRz \text{ та } yRz) \Rightarrow (xRy)$

Приклад 1.10. Розглянемо, які властивостями на множині сумок має бінарне відношення «сумка A знаходиться в сумці B ».

Для розв'язання цієї задачі побудуємо таблицю властивостей, що представлена табл. 1.2. Виконання умови будемо позначати знаком «+», невиконання – знаком «-».

Перевіримо *рефлексивність*. Сумка А знаходиться в сумці А? Умова не виконується, тому в табл. 1.2 ставимо знак «-». Отже, виконується властивість *антирефлексивності*.

Перевіримо *транзитивність*. Сумка А знаходиться в сумці В, сумка В знаходиться в сумці С. Звідси витікає, що сумка А знаходиться в сумці С. Отже, умова виконується, в табл.1.2 ставимо знак «+». Відповідно, *інтранзитивність* не виконується.

Перевіримо виконання *симетричності*. Сумка А знаходиться в сумці В. Звідси витікає, що сумка В знаходиться в сумці А? Ні, тому в табл.1.2 ставимо знак «-».

Перевіримо виконання *антисиметричності*. Сумка А знаходиться в сумці В і сумка В знаходиться в сумці А. Звідси витікає, що сумки між собою співпадають? Ні, необов'язково, тому в табл.1.2 ставимо знак «-». Тобто буде виконуватися *асиметричність*, що позначається знак «+» в табл. 1.2.

Перевіримо рівність третьому. Сумка А знаходиться в сумці С, сумка В знаходиться в сумці С. Звідси витікає, що сумка А знаходиться в сумці В? Ні, необов'язково, тому в табл.1.2 ставимо знак «-».

Таблиця 1.2 – Властивості бінарного відношення прикладу 1.9

Властивість	Умова	Виконання
Рефлексивність	$\forall x \in A \Rightarrow (xRx)$	-
Антирефлексивність	$\forall x \in A \nRightarrow (xRx)$	+
Транзитивність	$\forall x, y, z \in A (xRy \text{ та } yRz) \Rightarrow (xRz)$	+
Інтранзитивність	$\forall x, y, z \in A (xRy \text{ та } yRz) \nRightarrow (xRz)$	-
Симетричність	$\forall x, y \in A (xRy) \Rightarrow (yRx)$	-
Антисиметричність	$\forall x, y \in A (xRy \text{ та } yRx) \Rightarrow (x = y)$	-
Асиметричність	$\forall x, y \in A (xRy) \nRightarrow (yRx)$	+
Рівність третьому	$\forall x, y, z \in A (xRz \text{ та } yRz) \Rightarrow (xRy)$	-

Приклад 1.11. Нехай задано множину $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Якими властивостями володіє відношення $R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$?

Для розв'язання цієї задачі побудуємо матрицю відношення.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Як видно, матриця відношення M є симетричною та містить на діагоналі одиниці, тому відношення R володіє властивостями рефлексивності і симетричності.

Для перевірки виконання властивості транзитивності побудуємо таблицю, в якій розглянемо всі випадки та будемо позначати виконання умови транзитивності знаком «+» для кожного конкретного випадка. Якщо для всіх можливих випадків умова транзитивності виконується, то відношення R є транзитивним. Результати представлено в табл. 1.3.

Таблиця 1.3 – Перевірка транзитивності

Випадок	$(x, y) \in R$	$(y, z) \in R$	(x, z)	$(x, z) \in R ?$
1	(1, 3)	(3, 1)	(1, 1)	+
2	(1, 3)	(3, 5)	(1, 5)	+
3	(3, 1)	(1, 3)	(3, 3)	+
4	(3, 1)	(1, 5)	(3, 5)	+
5	(5, 1)	(1, 3)	(5, 3)	+
6	(5, 1)	(1, 5)	(5, 5)	+
7	(5, 3)	(3, 1)	(5, 1)	+
8	(5, 3)	(3, 5)	(5, 5)	+

Таким чином, виходячи з табл. 1.3, відношення R є транзитивним.

Аналогічно можна показати, що для відношення R виконується властивість «рівність третьому». Результати перевірки цієї властивості представлено в табл. 1.4.

Таблиця 1.4 – Перевірка виконання рівності третьому

Випадок	$(x, z) \in R$	$(y, z) \in R$	(x, y)	$(x, y) \in R ?$
1	(1, 1)	(3, 1)	(1, 3)	+
2	(1, 1)	(5, 1)	(1, 5)	+
3	(1, 3)	(5, 3)	(1, 5)	+
4	(1, 5)	(3, 5)	(1, 3)	+
5	(3, 1)	(5, 1)	(1, 5)	+
6	(3, 3)	(1, 3)	(3, 1)	+
7	(3, 3)	(5, 3)	(3, 5)	+
8	(3, 5)	(1, 5)	(3, 1)	+
9	(5, 1)	(3, 1)	(5, 3)	+
10	(5, 3)	(1, 3)	(5, 1)	+
11	(5, 5)	(1, 5)	(5, 1)	+
12	(5, 5)	(3, 5)	(5, 3)	+

1.13. Спеціальні бінарні відношення

Відношення, що зустрічаються на практиці, можуть водночас мати кілька однакових комбінацій властивостей. Такі відношення мають спеціальні назви.

1.13.1. Відношення еквівалентності

Однорідне бінарне відношення E називається *відношенням еквівалентності на множині* A , якщо воно є рефлексивним, симетричним та транзитивним. Позначають відношення еквівалентності символом $\sim$, $\equiv$ або $a \equiv b \pmod R$.

Якщо $\sim$ – це відношення еквівалентності, $a \in A$, $b \in A$ і $a \sim b$, то елементи a та b називаються *еквівалентними*.

Приклади відношення еквівалентності:

- відношення рівності чисел;
- відношення паралельності прямих;
- подібність або рівність трикутників на площині;
- відношення на множині людей «народитися в один день», «мешкати в одному будинку», тощо.

Відношення R з прикладу 1.11 також є відношенням еквівалентності за визначенням, оскільки воно володіє властивостями рефлексивності, симетричності та транзитивності.

Класом еквівалентності за відношенням еквівалентності $\sim$ для елемента $a \in A$ називається множина усіх елементів множини A , що еквівалентні елементу a .

Два класи еквівалентності множини A за відношенням еквівалентності $\sim$ або співпадають, або не перетинаються.

Так, наприклад, відношення «мешкати в одному будинку» на множині мешканців міста є еквівалентністю і розбиває цю множину на підмножини, що не перетинаються, людей – сусідів по будинку.

Приклад 1.12. Знайдемо класи еквівалентності множини A за відношенням R з прикладу 1.11.

Відношення R розбиває множину A на 5 класів:

$$[1] = \{x : (x, 1) \in R\} = \{x : xR1\} = \{1, 3, 5\}.$$

Перевіримо: $1 \in [1]$, оскільки $(1, 1) \in R$;

$3 \in [1]$, оскільки $(3, 1) \in R$;

$5 \in [1]$, оскільки $(5, 1) \in R$.

$$\begin{aligned}
[2] &= \{x : (x, 2) \in R\} = \{x : xR2\} = \{2\}; \\
[3] &= \{x : (x, 3) \in R\} = \{x : xR3\} = \{1, 3, 5\}; \\
[4] &= \{x : (x, 4) \in R\} = \{x : xR4\} = \{4\}; \\
[5] &= \{x : (x, 5) \in R\} = \{x : xR5\} = \{1, 3, 5\}.
\end{aligned}$$

З отриманих результатів видно, що різними є лише три класи:

$$[1] = [3] = [5] = \{1, 3, 5\}; [2] = \{2\}; [4] = \{4\}.$$

Символом $[A]_R$ позначають множину всіх класів еквівалентності множини A за відношенням еквівалентності R та називають *фактор-множиною* множини A за відношенням еквівалентності R .

У розглянутому прикладі 1.11 фактор-множиною буде множина класів

$$[A]_R = \{[1], [2], [4]\}.$$

Кожний елемент класу еквівалентності породжує цей же самий клас еквівалентності, отже представляє цей клас.

Нехай $C = \{C_i\}_{i \in I}$ – деяка система підмножин множини A , де I – множина індексів.

Система C називається *покриттям множини A* , якщо для довільного елемента $a \in A$ знайдеться такий індекс $i \in I$, що $a \in C_i$, тобто $A \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i$.

Система C називається *розбиттям множини A* , якщо вона є покриттям множини A і $C_i \cap C_j = \emptyset \forall i \neq j, i, j \in I$.

Наприклад, нехай задано множину $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Тоді:

- система $C = \{\{1, 3\}, \{1, 2, 5\}, \{3, 5\}\}$ не є покриттям множини A , оскільки елемент 4 не належить жодній множині, які входять до C ;
- система $C = \{\{1, 3\}, \{1, 2, 5\}, \{4, 5\}\}$ є покриттям множини A , але не є її розбиттям оскільки $\{1, 3\} \cap \{1, 2, 5\} \neq \emptyset$;
- система $C = \{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}\}$ є розбиттям множини A .

Якщо $\sim$ – це відношення еквівалентності на множині A , множина класів еквівалентності за цим відношенням є розбиттям C множини A . І навпаки, для довільного розбиття множини A можна вказати відношення еквівалентності, множина класів еквівалентності якого співпадає з C .

1.13.2. Відношення порядку

Відношення порядку дозволяє порівнювати поміж собою елементи однієї множини.

Бінарне відношення R називається *відношенням порядку (порядком)* на множині A , якщо воно є антисиметричним та транзитивним. Тоді пара (A, R) називається *впорядкованою множиною*.

Якщо a та b – елементи впорядкованої множини (A, R) і виконується умова aRb , то кажуть, що *елемент a передує елементу b* .

Множина *цілковито (лінійно, просто) упорядкована*, якщо для будь-яких двох його елементів a і b має місце, принаймні, $a \leq b$ або $b \leq a$. Таку множину також називають *ланцюгом*. Наприклад, множина натуральних чи дійсних чисел із природним відношенням порядку $\leq$.

Якщо деяких пар (a, b) жодне з співвідношень $a \leq b$ або $b \leq a$ немає місця, такі елементи називають *незрівнянними*. Тоді кажуть, що множина є *частково впорядкованою*. Типовими прикладами часткового порядку є включення, відношення «бути дільником».

Якщо порядок є рефлексивним, то він називається *частковим (нестрогим) порядком*. Прикладом є відношення " $\leq$ " на множині дійсних чисел.

Антирефлексивний порядок називається *строгим порядком*. Прикладом є відношення " $\subset$ " (відношення строгого включення множин).

Відношення R є строгим порядком тоді і тільки тоді, коли воно є одночасно асиметричним і транзитивним.

Квазіпорядок задовольняє умовам рефлексивності і транзитивності.

Він є узагальненням еквівалентності (в визначення не входить властивість симетричності) і нестрогого порядку (не обов'язкова властивість антисиметричності). Прикладом квазіпорядку є тотожна рівність.

Відношенню порядку відповідає матриця, у якої головна діагональ заповнена одиницями (за властивістю рефлексивності). Для кожної пари одиничних елементів, один з яких розташований в i -му стовпці та j -му рядку, а другий – в j -му стовпці та k -му рядку, обов'язково існує одиничний елемент в i -му стовпці та k -му рядку (за транзитивністю). Крім того, жоден одиничний елемент не має симетричного відносно головної діагоналі (за антисиметричністю).

Матриця відношення строгого порядку відрізняється тим, що всі елементи головної діагоналі нульові (за антирефлексивністю), а квазіпорядку – можливістью симетрії одиничних елементів.

Приклад 1.13. Представимо в вигляді таблиці відношення «бути дільником» на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21\}$.

В результаті отримаємо наступну таблицю, заголовками рядків та стовпців якої є елементи множини A .

	1	2	3	4	6	7	12	14	21
1	1								
2	1	1							
3	1		1						
4	1	1		1					
6	1	1	1		1				
7	1					1			
12	1	1	1	1	1		1		
14	1	1				1		1	
21	1		1			1			1

Для наочного уявлення частково впорядкованої множини (A, R) використовують *діаграму Гассе* – граф відношення R без петель. При цьому кожний елемент з'єднується відрізками з усіма його «безпосередніми попередниками» і розташовується на діаграмі вище за них.

Діаграму Гассе для прикладу 1.13 подано на рис. 1.11.

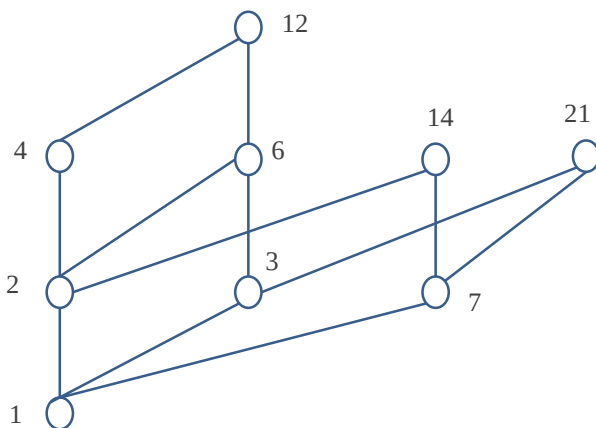


Рис. 1.11. Діаграма Гассе

1.13.3. Відношення толерантності

Відношення толерантності τ на множині A задовольняє властивостям рефлексивності і симетричності.

Для толерантності, на відміну від еквівалентності, транзитивність не обов'язкова, тобто *еквівалентність є окремим випадком толерантності*.

Відношення толерантності є експлікацію інтуїтивних уявлень про подібність і нероздільність. Кожен об'єкт нерозділений сам з собою (за властивістю рефлексивності), а подібність двох об'єктів не залежить від того, в якому порядку вони порівнюються (за властивістю симетричності). В той же час, якщо один об'єкт подібний до іншого, а інший подібний з третім, це зовсім не означає, що всі вони обов'язково подібні між собою, тобто властивість транзитивності може не виконуватися.

Наприклад, толерантність на множині точок площини може бути задана властивістю: відстань між будь-якою парою точок не перевищує величини a . З цією властивістю зазвичай зв'язується моделювання зорового органу. Очевидно, толерантністю може бути гострота зору, тобто умова того, що будь-які пари точок нероздільні для ока в його полі зору.

Розважальним прикладом толерантності є популярна лінгвістична гра «перетворення мухи в слона» або «ріки в море». За правилами цієї гри треба перейти від першого слова до другого, змінюючи на кожному кроці лише одну літеру (муха→мула→кула→кіла→кілт→кіот→клот→клон→слон). Тут відношення толерантності визначається подібністю між чотирибуквеними словами, якщо вони відрізняються між собою тільки однією літерою. Якщо визначити відношення між словами як наявність хоча б однієї спільної літери, то толерантними також будуть слова кросворду, що перетинаються.

2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Приклад 2.1. Нехай універсальну множину складають додатні натуральні числа, менші за 1000. Задано наступні множини натуральних чисел:

- A – діляться без остачі на 3;
- B – діляться без остачі на 4;
- C – діляться без остачі на 5;
- D – діляться без остачі на 7;
- E – діляться без остачі на 15;
- F – закінчуються цифрою «0».

Відобразити множини на діаграмі Ейлера-Венна. Навести приклади чисел, що належать кожній множині, їх областям перетину та належать тільки універсальній множині.

Розв'язання. Побудову діаграми Ейлера-Венна почнемо з розміщення першої множини A і будемо відносно неї розмішувати всі інші множини. Множина B буде знаходитися з множиною A в загальному становищі,

оскільки існують натуральні числа, що діляться на 3 і 4 одночасно, наприклад 12, і тільки на 3, наприклад, 9, і на 4, наприклад 20. Тобто

$$12 \in A \cap B, 9 \in A \text{ i } 9 \notin B, 20 \notin A \text{ i } 20 \in B.$$

Множина натуральних чисел C , що діляться без остачі на 5, також буде перебувати з множинами A і B у загальному становищі, оскільки

$$60 \in A \cap B \cap C, 12 \in A \cap B \text{ i } 12 \notin C, 55 \in C, 55 \notin A \text{ i } 55 \notin B.$$

Множина натуральних чисел D , що діляться без остачі на 7, буде перебувати з розглянутими множинами A, B і C у загальному становищі:

$420 \in A \cap B \cap C \cap D, 35 \in C \cap D, 35 \notin A \text{ i } 35 \notin B;$
 $28 \in B \cap D, 28 \notin A \text{ i } 28 \notin C; 21 \in A \cap D, 21 \notin B \text{ i } 21 \notin C;$
 $60 \in A \cap B \cap C \text{ i } 60 \notin D; 140 \in B \cap C \cap D \text{ i } 140 \notin A;$
 $105 \in A \cap C \cap D \text{ i } 105 \notin B; 84 \in A \cap B \cap D \text{ i } 84 \notin C.$

Множина натуральних чисел E , що діляться без остачі на 15 – це область перетину множин A і C , що відповідно діляться без остачі на 3 і 5, оскільки 3 і 5 є дільниками 15, тобто $E = A \cap C$.

Множина натуральних чисел F , що закінчуються цифрою «0», є підмножиною множини C , що діляться без остачі на 5, оскільки всі числа, що закінчуються на цифрою «0», діляться без остачі на 5, але не всі, що діляться на 5, закінчуються га «0», наприклад 55, тобто $F \subset C$.

Існують числа, що належать універсальній множині, але не належать жодній з множин, наприклад

$$111 \in U \text{ i } 111 \notin A, 111 \notin B \text{ i } 111 \notin C \text{ i } 111 \notin D.$$

Отриману в результаті діаграму Ейлера-Венна подано на рис. 2.1.

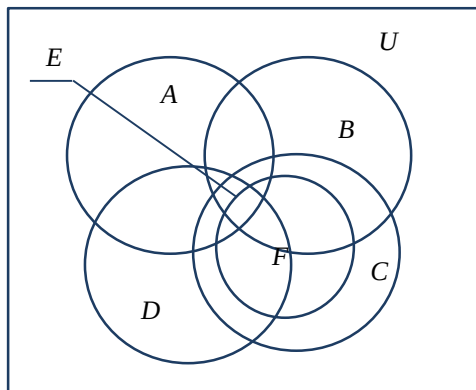


Рис. 2.1. Діаграма Ейлера-Венна задачі 2.1

Приклад 2.2. Задано універсальну множину $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ та множини $A = \{2,4,7\}$, $B = \{1,3,5,7\}$, $C = \{2,3,5,6\}$. Записати елементи множини $D = (\overline{C} \cap B) \cup A$, зобразити множину D за допомогою діаграми Ейлера-Венна та обчислити її потужність. Записати булеан для множини, яка має найменшу потужність серед множин A і D .

Розв'язання. Множини A , B , і C знаходяться в загальному становищі. Для знаходження множини D виконаємо операції над множинами в наступному порядку:

1) $\overline{C} = U \setminus C = \{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{2,3,5,6\} = \{1,4,7\}$ – за визначенням операції доповнення. Результат виконання операції представлено сірим кольором на діаграмі Ейлера-Венна, що зображена на рис. 2.2а;

2) $\overline{C} \cap B = \{1,4,7\} \cap \{1,3,5,7\} = \{1,7\}$ – за визначенням операції перетину множин. Результат представлено на рис. 2.2б;

3) $D = (\overline{C} \cap B) \cup A = \{1,2,4,7\}$ – за визначенням операції об'єднання множин. Кінцевий результат представлено на рис. 2.2в.

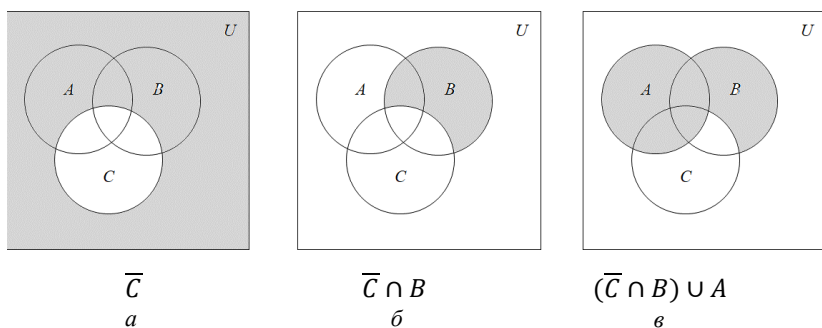


Рис. 2.2. Побудова діаграми Ейлера-Венна для множини $D = (\overline{C} \cap B) \cup A$

Потужність скінченної множини – це кількість її елементів, тобто $|D| = 4$.

Потужність множини $|A| = 3$, тобто множина A має меншу потужність. Таким чином, булеан будемо будувати для множини A .

Для побудови булеану множини A скористаємося двійковим записом числа. Якщо множина містить n елементів, його булеан містить 2^n підмножин, тобто в нашому випадку 8 підмножин. Записуватимемо номер підмножини трирозрядним двійковим числом від 0 до 7, включаючи в підмножину

тільки ті елементи, яким відповідає одиниця в двійковому розряді. Результати представлено в табл.2.1.

Таблиця 2.1 – Булеан множини A

Номер підмножини	Двійковий запис номера	Підмножини множини $A = \{2,4,7\}$
0	000	$\{ \} = \emptyset$
1	001	$\{7\}$
2	010	$\{4\}$
3	011	$\{4,7\}$
4	100	$\{2\}$
5	101	$\{2,7\}$
6	110	$\{2,4\}$
7	111	$\{2,4,7\}$

Отже, в булеан множини A включаємо порожню множину, саму множину A , всі одноелементні підмножини і всі двоелементні підмножини A :

$$P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{7\}, \{2,4\}, \{2,7\}, \{4,7\}, \{2,4,7\}\}.$$

Приклад 2.3. Для універсальної множини $U = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, множин $A = \{-4, -2, 1, 3\}$, $B = \{x: x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 32x - 32 = 0\}$ знайти множини $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, $\overline{B}$, $C = (A \Delta B) \Delta A$. З'ясувати взаємне розташування множин A і C .

Розв'язання. Множина A задана списком своїх значень, а B – у вигляді характеристичної умови, що її елементи є коренями рівняння $x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 32x - 32 = 0$, тому спочатку знайдемо їх. Шляхом підбору знайдемо, що $x = 1$ – це корінь рівняння. Розділивши вихідний багаточлен на $x - 1$, отримаємо кубічне рівняння $x^3 - 6x^2 + 32 = 0$, яке також можна розв'язати підбором коренів. Отримаємо, що $x = -2$ – це корінь кубічного рівняння. Розділивши його на $x + 2$, отримаємо квадратне рівняння $x^2 - 8x + 16 = 0$, яке має кратні корні $x = 4$.

Таким чином, множина $B = \{-2, 1, 4\}$. Тепер можемо знайти результати виконання операцій над множинами.

$$A \cup B = \{-4, -2, 1, 3\} \cup \{-2, 1, 4\} = \{-4, -2, 1, 3, 4\}$$

$$A \cap B = \{-4, -2, 1, 3\} \cap \{-2, 1, 4\} = \{-2, 1\}$$

$$A \setminus B = \{-4, -2, 1, 3\} \setminus \{-2, 1, 4\} = \{-4, 3\}$$

$$B \setminus A = \{-2, 1, 4\} \setminus \{-4, -2, 1, 3\} = \{4\}$$

$$A \Delta B = \{-4, -2, 1, 3\} \Delta \{-2, 1, 4\} = \{-4, 3, 4\}$$

$$\overline{A} = U \setminus A = \{-5, -3, -1, 0, 2, 4, 5\}$$

$$\overline{B} = U \setminus B = \{-5, -4, -3, -1, 0, 2, 3, 5\}$$

$$C = (A \Delta B) \Delta A = \{-4, 3, 4\} \Delta \{-4, -2, 1, 3\} = \{-2, 1, 4\}$$

З'ясуємо взаємне розташування множин A і C . В загальному випадку існує п'ять можливостей взаємного розташування: множини співпадають, перша множина є підмножиною другої чи навпаки, множини між собою не перетинаються або знаходяться в загальному стані. Оскільки $-4 \in A$ і $-4 \notin C$, $4 \notin A$ і $4 \in C$, $1 \in A \cap C$, то множини знаходяться в загальному стані.

Приклад 2.4. Спростити вираз $\overline{\overline{A} \cup B \cup (C \setminus A)}$, використовуючи закони алгебри множин.

Розв'язання. Для спрощення виразу будемо використовувати закони де Моргана, закон асоціативності, комутативності та дистрибутивності, властивості різниці множин, а також закони ідемпотентності та поглинання. При переході до наступного кроку над знаком рівності будемо вказувати номер закону алгебри множин, що буде використовуватися, згідно з п. 1.7.

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A} \cup B \cup (C \setminus A)} &=^{10} \overline{A \cap \overline{B} \cup (C \setminus A)} =^{10} \overline{A \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{A}} = \\ &=^{2,10} \overline{\overline{B} \cap A \cap (\overline{C} \cup A)} =^4 \overline{\overline{B} \cap (A \cap \overline{C} \cup A \cap A)} =^1 \overline{\overline{B} \cap (A \cap \overline{C} \cup A)} = \\ &=^5 \overline{\overline{B} \cap A} =^{11} A \setminus B. \end{aligned}$$

Приклад 2.5. Довести, що для довільних множин A , B та C справджується рівність $\overline{C \setminus \overline{A} \cup B} = B \cap C \cup (C/A)$.

Розв'язання. *Перший спосіб* – це використання діаграм Ейлера-Венна (аналогічно прикладу 1.3). Спочатку зобразимо діаграми Ейлера-Венна для всіх операцій алгебри множин у порядку їх виконання, що входять у ліву частину рівності. Результат приведено на рис. 2.3.

Після цього побудуємо аналогічно діаграми Ейлера-Венна для операцій правої частини рівності. Результат наведено на рис. 2.4.

Порівняємо кінцеві діаграми, наведені на рис. 2.3г та 2.4в. Вони є ідентичними, тобто множини $\overline{C \setminus \overline{A} \cup B}$ і $B \cap C \cup (C/A)$ співпадають, отже рівність $\overline{C \setminus \overline{A} \cup B} = B \cap C \cup (C/A)$ виконується.

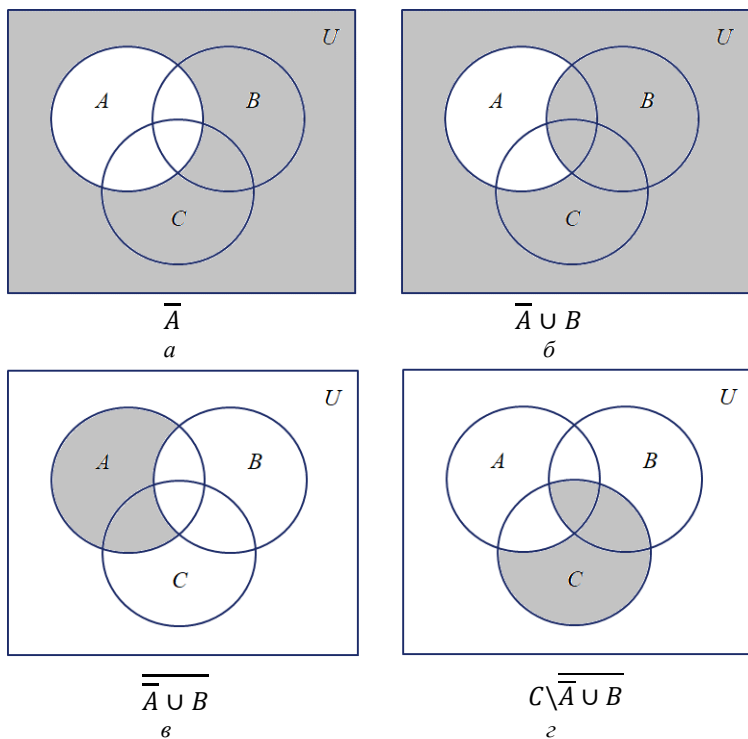


Рис. 2.3. Побудова діаграми Ейлера-Венна для $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$

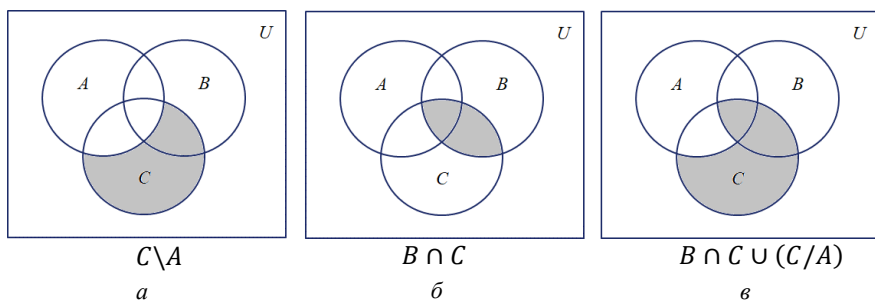


Рис. 2.4. Побудова діаграми Ейлера-Венна для $B \cap C \cup (C/A)$

Другий спосіб – це використання законів алгебри множин, аналогічно прикладу 2.4. Тут також будемо використовувати закони де Моргана, комутативності та властивості різниці множин і будемо вказувати відповідний номер закону згідно з п.1.7 над знаком рівності на кожному кроці.

$$\begin{aligned} C \setminus \overline{A \cup B} &=^{10} C \setminus (A \cap \overline{B}) =^{11} (C \setminus A) \cup (C \setminus \overline{B}) =^{11} (C \setminus A) \cup C \cap B = \\ &=^2 B \cap C \cup (C \setminus A). \end{aligned}$$

Таким чином, рівність доведено.

Приклад 2.6. Нехай A , B і C – множини точок площини, що задані відповідно умовами $x + 2 > y$, $x^2 + y^2 \leq 4$, $|x| \leq 2$ і $|y| \leq 2$. Зобразити в системі координат xOy множину $D = A \setminus (B \cap C)$.

Розв'язання. Множина A – це множина точок площини, що розташовані вище та на прямій $y = x + 2$; B – множина точок кола радіуса 2 з центром у початку координат, що включає межу; C – множини точок площини, що знаходяться всередині та на границі квадрата $|x| \leq 2$ і $|y| \leq 2$.

Зазначимо на рис. 2.5а горизонтальним штрихуванням множину $B \cap C$, а вертикальним – множину A . Видаливши з області, позначеної вертикальним штрихуванням, точки області, позначеної горизонтальним штрихуванням, отримаємо множину точок, що утворюють D . Зобразимо результат на рис. 2.5б, відзначивши точки множини D вертикальним штрихуванням. Тут пунктиром зображена частина кордону заштрихованої області, що не належить множині D .

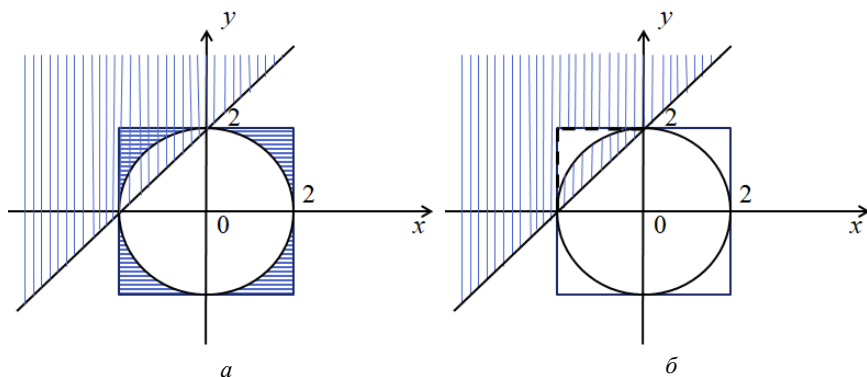


Рис. 2.5. Побудова множини $D = A \setminus (B \cap C)$

Приклад 2.7. Використовуючи операції над множинами A, B, C, D , описати множину F , виділену кольором на діаграмі Ейлера-Венна, поданої на рис. 2.6а.

Розв'язання. Як видно з рис. 2.6а, шукана множина F складається шляхом об'єднання п'яти областей. Позначимо ці області цифрами, результат зображено на рис. 2.6б.

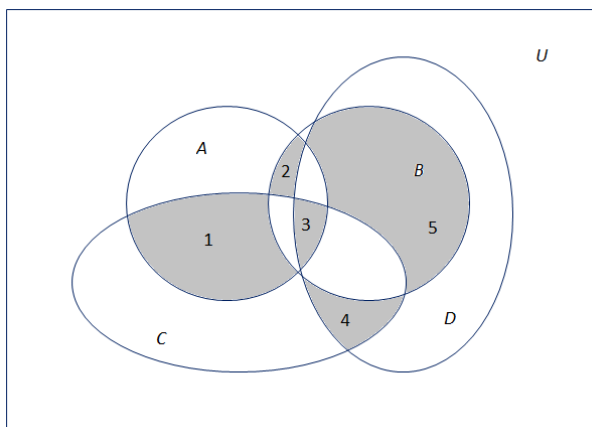
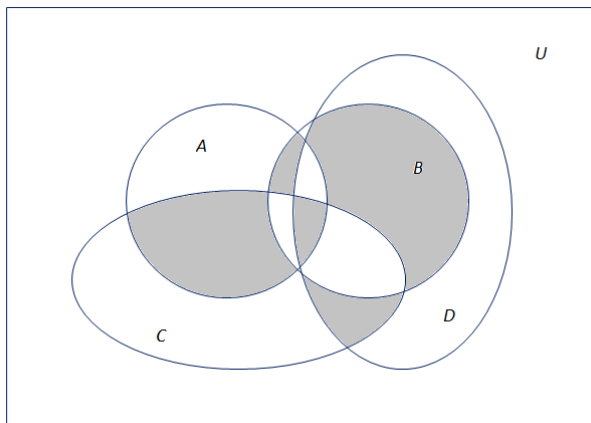


Рис. 2.6. Опис множини F за діаграмою Ейлера-Венна:

a – умова задачі 2.7; $б$ – позначення областей множини F

Опишемо окремо кожен область окремо за допомогою операції над множинами:

- 1) $(A \cap C) \setminus B$;
- 2) $(A \cap B) \setminus C \setminus D$;
- 3) $A \cap C \cap D$;
- 4) $(C \cap D) \setminus B$;
- 5) $(B \cap D) \setminus A \setminus C$.

Таким чином,

$$F = ((A \cap C) \setminus B) \cup ((A \cap B) \setminus C \setminus D) \cup (A \cap C \cap D) \cup ((C \cap D) \setminus B) \cup ((B \cap D) \setminus A \setminus C).$$

Приклад 2.8. Із 44 програмістів 20 володіють мовою Python, 19 – мовою C#, 21 – мовою Java. Відомо, що 10 програмістів знають одночасно Python і C#, 7 – Python і Java, 8 – C# і Java. П'ятеро програмістів не володіють жодною із зазначених мов. Знайти кількість програмістів, які одночасно знають усі три мови програмування.

Розв'язання. В якості універсальної множини U виступає множина тих 44 програмістів. Нехай P , C , J – множини програмістів, які володіють мовами програмування Python, C# та Java відповідно, і нехай x – шукана кількість програмістів, які одночасно знають усі три мови.

Для відшукування розв'язку скористаємося діаграмами Ейлера-Венна. Аналогічно прикладу 1.5 в кожній частині діаграми позначимо кількість елементів множини, що їй відповідає. Оскільки із 10 програмістів, які володіють і мовою Python, і мовою C#, x знає ще й мову Java, то програмістів, які знають лише Python і C# та не знають Java, буде $10 - x$. Позначимо це число на тій частині діаграми на рис. 2.7, яка відповідає множині $(P \cap C) \setminus J$. Розмірковуючи аналогічно, отримуємо, що $7 - x$ програмістів знають лише мови Python і Java, $8 - x$ – лише мови C# і Java.

Знайдемо тепер кількість програмістів, які володіють лише однією мовою програмування. Оскільки мову Python знає 20 програмістів, то кількість програмістів, які знають лише мову Python буде дорівнювати

$$20 - (10 - x) - (7 - x) - x = 3 + x.$$

Аналогічно отримуємо, що $19 - (10 - x) - (8 - x) - x = 1 + x$ програмістів знають лише мову C#, $21 - (7 - x) - (8 - x) - x = 6 + x$ програмістів – лише мову Java. Позначимо отримані величини на діаграмі Ейлера-Венна (див. рис. 2.7).

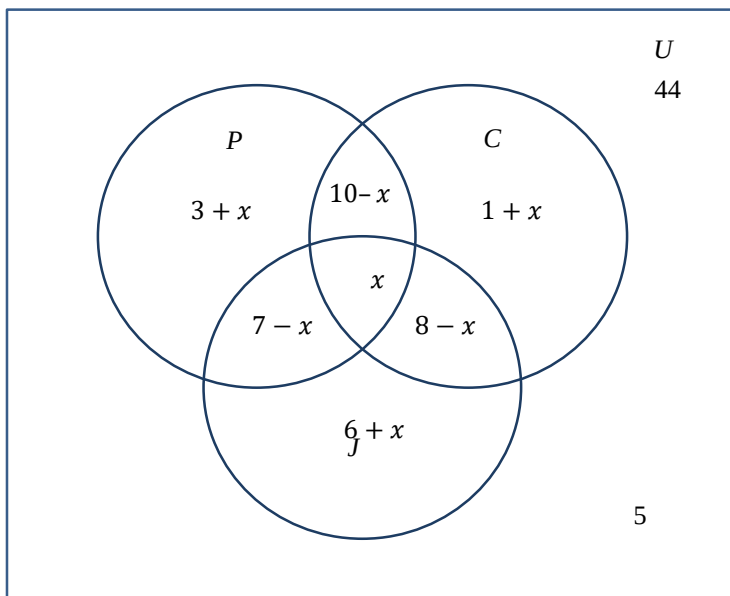


Рис. 2.7. Діаграма Ейлера-Венна задачі 2.7

Із урахуванням того, що загальна кількість програмістів дорівнює 44, 20 з них володіють мовою Python, а 5 – не володіють жодною з трьох мов програмування, можна записати наступну рівність

$$20 + (6 + x) + (8 - x) + (1 + x) + 5 = 44.$$

Звідси $x = 4$, тобто 4 програміста володіють всіма трьома мовами.

Приклад 2.9. Розв'язати систему рівнянь щодо множини X і вказати умови сумісності системи або довести її несумісність

$$\begin{cases} A \Delta X = B \setminus C \\ C \cap X = A \cup X. \\ B \setminus X = A \setminus X \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо множини загального положення A, B, C, X , що є підмножинами універсальної множини U . Для цього в табл. 2.2 запишемо всі 16 різних двійкових наборів розмірності 4. Нехай розряди цих наборів згори донизу відповідають множинам A, B, C, X .

Таблиця 2.2 – Задання множин A, B, C, X

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
B	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
C	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
X	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

В результаті отримуємо:

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\},$$

$$A = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}, B = \{4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15\},$$

$$C = \{2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15\}, X = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}.$$

Розглянемо перше рівняння системи:

$$A \Delta X = \{1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14\},$$

$$B \setminus C = \{4, 5, 12, 13\}.$$

Ці множини рівні за умовою рівняння, отже, списки елементів 1, 3, 4, 7, 8, 10, 13, 14 – порожні, тобто $A = \{9, 11, 12, 15\}$, $B = \{5, 6, 12, 15\}$, $C = \{2, 6, 11, 15\}$, $X = \{5, 9, 11, 15\}$.

Тепер для отриманих множин розглянемо друге рівняння системи.

$$C \cap X = \{11, 15\}, A \cup X = \{5, 9, 11, 12, 15\}$$

Ці множини також рівні за умовою рівняння, отже, списки елементів 5, 9, 12 є порожніми, тобто множини приймуть наступний вигляд: $A = \{11, 15\}$, $B = \{6, 15\}$, $C = \{2, 6, 11, 15\}$, $X = \{11, 15\}$.

Розглянемо третє рівняння системи:

$$B \setminus X = \{6\}, A \setminus X = \emptyset.$$

В силу третього рівняння системи отримуємо, що список 6 порожній, та $A = X = \{11, 15\}$, $B = \{15\}$, $C = \{2, 11, 15\}$, тобто $X = A$, $B \subset A \subset C \subset U$.

Перевіримо, що множина $X = A$ є розв'язком вихідної системи. Якщо виконані включення $B \subset A \subset C \subset U$, то можемо записати:

$$B = \{b\}, A = \{a, b\}, C = \{a, b, c\}, U = \{a, b, c, u\},$$

де a, b, c, u – списки елементів.

Нехай $A = X = \{a, b\}$, тоді $A \Delta X = \emptyset = B \setminus C$, $C \cap X = \{a, b\} = A \cup X$, $B \setminus X = \emptyset = A \setminus X$.

Таким чином, всі рівняння системи задовольняються, тобто множина $X = A$ є розв'язком вихідної системи при виконанні включень $B \subset A \subset C \subset U$.

Приклад 2.10. В місті 7 автобусних маршрутів. Серед мешканців гарною прикметою вважається зустріти два автобуса одного маршруту або з сумою номерів маршрутів, що дорівнює 7. Записати матрицю бінарного відношення R , що задає гарну прикмету, побудувати граф відношення. Вказати властивості, якими володіє бінарне відношення; з'ясувати, чи є відношення R еквівалентністю або порядком.

Розв'язання. За умовою задачі задано множину маршрутів $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, тобто матриця відношення M буде мати розмір 7×7 , а її елементи можна задати наступним чином:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \text{ або } i + j = 7 \\ 0, & \text{в протилежному випадку, } i = 1..7, j = 1..7. \end{cases}$$

В розгорнутому вигляді

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Не трудно бачити, що матриця відношення M містить на діагоналі одиниці та є симетричною, тому відношення R володіє властивостями рефлексивності і симетричності.

Перевіримо виконання транзитивності. Для цього побудуємо таблицю, аналогічну табл. 1.3, та будемо перевіряти пари одиничних елементів за індексами. Результат представлено в табл. 2.3.

Таблиця 2.3 – Перевірка транзитивності

Випадок	$(i, j) \in R$	$(j, k) \in R$	(i, k)	$(i, k) \in R ?$
1	(1, 6)	(6, 1)	(1, 1)	+
2	(2, 5)	(5, 2)	(2, 2)	+
3	(3, 4)	(4, 3)	(3, 3)	+
4	(4, 3)	(3, 4)	(4, 4)	+
5	(5, 2)	(2, 5)	(5, 5)	+
6	(6, 1)	(1, 6)	(6, 6)	+

Як видно з табл. 2.3, умова транзитивності виконується..

Для перевірки виконання рівності третьому побудуємо таблицю, аналогічну табл. 1.4 та також, як і в попередньому випадку, будемо перевіряти пари

одиночних елементів за індексами. Результат представлено в табл. 2.4. Не трудно бачити, що рівність третьому виконується.

Таблиця 2.4 – Перевірка рівності третьому

Випадок	$(i, k) \in R$	$(j, k) \in R$	(i, j)	$(i, j) \in R ?$
1	(1, 1)	(6, 1)	(1, 6)	+
2	(2, 2)	(5, 2)	(2, 5)	+
3	(3, 3)	(4, 3)	(3, 4)	+
4	(4, 4)	(3, 4)	(4, 3)	+
5	(5, 5)	(2, 5)	(5, 2)	+
6	(6, 6)	(1, 6)	(6, 1)	+

Оскільки для відношення R виконуються умови рефлексивності, симетричності та транзитивності, то відношення R , що задає гарну прикмету зустріти два автобуси відповідних маршрутів, є еквівалентністю.

Знайдемо класи еквівалентності. Відношення R розбиває множину A на 7 класів:

$$[1] = \{x : (x, 1) \in R\} = \{x : xR1\} = \{1, 6\}.$$

Перевіримо: $1 \in [1]$, оскільки $(1, 1) \in R$;

$6 \in [1]$, оскільки $(6, 1) \in R$.

$$[2] = \{x : (x, 2) \in R\} = \{x : xR2\} = \{2, 5\};$$

$$[3] = \{x : (x, 3) \in R\} = \{x : xR3\} = \{3, 4\};$$

$$[4] = \{x : (x, 4) \in R\} = \{x : xR4\} = \{3, 4\};$$

$$[5] = \{x : (x, 5) \in R\} = \{x : xR5\} = \{2, 5\};$$

$$[6] = \{x : (x, 6) \in R\} = \{x : xR6\} = \{1, 6\};$$

$$[7] = \{x : (x, 7) \in R\} = \{x : xR7\} = \{7\}.$$

З отриманих результатів видно, що різними є лише чотири класи:

$$[1] = [6] = \{1, 6\}; [2] = [5] = \{2, 5\}; [3] = [4] = \{3, 4\}; [7] = \{7\},$$

тобто фактор-множиною буде множина класів

$$[A]_R = \{[1], [2], [3], [7]\}.$$

Побудуємо граф відношення R , результат наведено на рис. 2.8. Як видно з рис. 2.8, кожному класу еквівалентності відповідає окрема частина графа, що є повним спрямованим графом на множині її вершин.

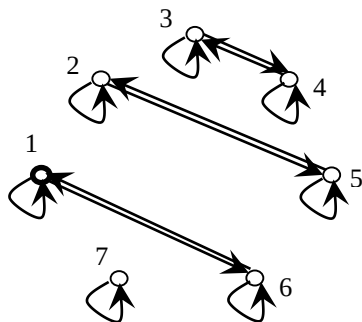


Рис. 2.8. Граф відношення

Приклад 2.11. На множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ задано бінарне відношення $R \subseteq A \times A$: $R = \{(x, y) : x, y \in A, (x + 2y) \text{ ділиться на } 3\}$. З'ясувати, якими властивостями володіє бінарне відношення R , чи є воно відношенням еквівалентності або порядку. Якщо відношення R є еквівалентністю, то записати його за допомогою списку упорядкованих пар, а за допомогою графа відношення вказати класи еквівалентності та фактор-множину.

Розв'язання. Перевіримо виконання рефлексивності. При $x = y$ умова « $(x + 2y)$ ділиться на 3» набуває вигляду $x + 2x = 3x$ – ділиться на 3 (виконується за будь-яких значень $x \in A$), тобто відношення R є рефлексивним.

Перевіримо, чи є відношення транзитивним. Нехай $(x, y) \in R$ та $(y, z) \in R$, тобто $x + 2y$ ділиться на 3 і $y + 2z$ ділиться на 3. Чи ділитися на 3 вираз $x + 2z$, тобто чи буде $(x, z) \in R$? Перетворимо

$$x + 2z = x + 3y + 2z - 3y = (x + 2y) + (y + 2z) - 3y.$$

Перші два доданки діляться на 3 за умовою і третій доданок $(-3y)$ також ділиться на 3. Отже, $(x, z) \in R$ і відношення є транзитивним.

Перевіримо виконання симетричності. Нехай $x + 2y$ ділиться на 3, тобто $(x, y) \in R$. Складемо пару (y, x) і для неї перевіримо характеристичну властивість відношення:

$$y + 2x = y + 2x + (x + 2y) - (x + 2y) = 3y + 3x - (x + 2y).$$

Вочевидь, що перші два доданки діляться на 3, а $x + 2y$ ділиться на 3 за умовою, отже, $y + 2x$ ділиться на 3, тобто $(y, x) \in R$ і відношення є симетричним.

Відношення R має властивості рефлексивності, транзитивності і симетричності, отже, є відношенням еквівалентності. Запишемо відношення R за допомогою списку упорядкованих пар:

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,4), (4,1), (5,2), (2,5)\}.$$

Побудуємо граф відношення R , результат наведено на рис. 2.9.

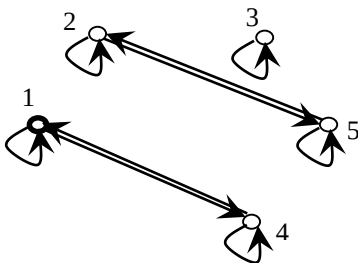


Рис. 2.9. Граф відношення

Як видно з рис. 2.9, відношення R має три різних класи еквівалентності:

$$[1] = \{1, 4\}, [2] = \{2, 5\}, [3] = \{3\},$$

що і складають фактор-множину множини A за відношенням еквівалентності R

$$[A]_R = \{[1], [2], [3]\}.$$

Приклад 2.12. Задано множину $A = \{2, 3, 4, 6, 12\}$ та відношення $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \text{ — дільник } y\}$. Показати, що відношення R є відношення порядку. Побудувати діаграму Гассе частково впорядкованої множини (A, R) . Чи є на частково впорядкованій множини (A, R) незрівнянні елементи?

Розв'язання. Покажемо, що відношення R володіє властивостями рефлексивності, антисиметричності та транзитивності.

Рефлексивність має місце, оскільки будь-яке число є своїм дільником, тобто $\forall x \in A \Rightarrow (x, x) \in R$.

Нехай одночасно виконуються умови: $(x, y) \in R$ та $(y, x) \in R$. Тоді $x = y$. Дійсно, $(x, y) \in R$ означає, що x — дільник y , тобто знайдеться ціле число m таке, що $y = m \cdot x$. Одночасно знайдеться ціле число n таке, що $x = n \cdot y$. Звідси $y = m \cdot n \cdot y$ та $m \cdot n = 1$. Остання рівність виконується при $m = n = 1$ або $m = n = -1$, але всі елементи множини A — додатні числа, тому

другий випадок неможливий. Отже, $m = n = 1$, тобто $x = y$, і відношення R – антисиметричне.

Нехай $(x, y) \in R$ і $(y, z) \in R$, отже, знайдуться $m, k \in \mathbb{Z}$ такі, що $y = m \cdot x$, $z = k \cdot y$. Тоді

$$z = k \cdot (m \cdot x) = (k \cdot m) \cdot x = n \cdot x,$$

де $n = m \cdot k$, $n \in \mathbb{Z}$. Отже, x є дільником z та $(x, z) \in R$, тобто відношення R є транзитивним.

Таким чином, відношення R рефлексивне, антисиметричне та транзитивне, тобто за визначенням є відношенням порядку.

Побудуємо діаграму Гассе частково впорядкованої множини (A, R) . На нижньому (першому) рівні діаграми помістимо елементи $x \in A$, які не мають інших дільників, крім себе ($x = 2$ і $x = 3$). На другому рівні – елементи, які не мають інших дільників, крім себе та елементів нижнього рівня ($x = 4$ і $x = 6$). Останній елемент $x = 12$ ділиться на себе, на всі елементи другого та першого рівнів – поміщаємо його третій рівень. З'єднаємо відрізком елементи сусідніх рівнів, якщо елемент нижнього рівня є дільником елемента сусіднього верхнього рівня. Побудована діаграма Гассе представлена на рис. 2.10.

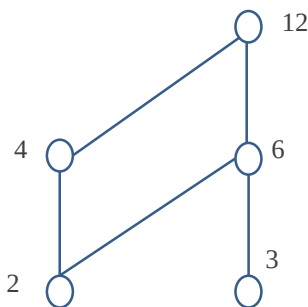


Рис. 2.10. Діаграма Гассе частково впорядкованої множини (A, R)

Пара елементів $(x, y) \in R$ тоді і тільки тоді, коли, рухаючись по діаграмі тільки вгору, можна пройти від елемента x до елемента y .

По діаграмі Гассе також легко виявити незрівнянні елементи. Ними є 4 та 3; 2 та 3.

Приклад 2.13. Вказати властивості, якими володіє бінарне відношення R , задане на множині A , якщо A — множина тенісистів, що беруть участь у

турнірі, де кожен тенісист повинен зіграти з кожним рівно три партії, а xRy означає, що x обіграв y за результатами особистих зустрічей. З'ясувати, чи є відношення R еквівалентністю або порядком.

Розв'язання. Аналогічно прикладу 1.9 побудуємо таблицю властивостей, що представлена табл. 2.5, в якій виконання умови будемо позначати знаком «+», невиконання – знаком «-».

Відношення R не є рефлексивним, оскільки знайдеться тенісист, який не обіграв сам себе. Відношення R є антирефлексивним, оскільки кожен тенісист не обіграв сам себе.

Відношення R не є транзитивним, оскільки може скластися ситуація, коли x обіграв y , а y обіграв z , і в той же час z обіграв x , тобто відношення R є інтранзитивним.

Відношення R не є симетричним, тому що знайдеться пара тенісистів x і y така, що x обіграв y по очках в особистих зустрічах, а y не обіграв x . Відношення R не є антисиметричним, тому що якщо x обіграв y , а y обіграв x , це один і той самий тенісист, а цього не може бути. Відношення R є асиметричним, тому що якщо x обіграв y , то y обов'язково не обіграв x .

Рівність третьому не виконується, оскільки може скластися ситуація, коли x обіграв z , і y обіграв z , і в той же час y обіграв x .

Таблиця 2.5 – Властивості бінарного відношення R

Властивість	Умова	Виконання
Рефлексивність	$\forall x \in A \Rightarrow (xRx)$	–
Антирефлексивність	$\forall x \in A \nRightarrow (xRx)$	+
Транзитивність	$\forall x, y, z \in A (xRy \text{ та } yRz) \Rightarrow (xRz)$	–
Інтранзитивність	$\forall x, y, z \in A (xRy \text{ та } yRz) \nRightarrow (xRz)$	+
Симетричність	$\forall x, y \in A (xRy) \Rightarrow (yRx)$	–
Антисиметричність	$\forall x, y \in A (xRy \text{ та } yRx) \Rightarrow (x = y)$	–
Асиметричність	$\forall x, y \in A (xRy) \nRightarrow (yRx)$	+
Рівність третьому	$\forall x, y, z \in A (xRz \text{ та } yRz) \Rightarrow (xRy)$	–

Таким чином, відношення R володіє властивостями антирефлексивності, інтранзитивності і асиметричності, тобто за означенням не є ні еквівалентністю, ні порядком.

3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

3.1. Нехай універсальну множину складають додатні натуральні числа, менші за 1000. Задано множини натуральних чисел A, B, C, D , що діляться без остачі відповідно на l, k, m, n , та множини E і F , що задаються умовами 1 і 2. Значення параметрів наведено в табл. 3.1.

Відобразити множини на діаграмі Ейлера-Венна. Навести приклади чисел, що належать кожній множині, їх областям перетину та належать тільки універсальній множині.

Таблиця 3.1 – Варіанти для задачі 3.1

№	l	k	m	n	Умова 1	Умова 2
1	3	4	5	6	парні	тризначні, що починаються з цифри 1
2	6	7	8	21	сума цифр числа ділиться без остачі на 3	тризначні, що починаються з цифри 3
3	3	5	6	7	парні	тризначні, що закінчуються на цифру 5
4	5	6	7	22	ділиться без остачі на 24	тризначні, в яких сума першої та третьої цифр дорівнює другій або відрізняється від неї на 11
5	5	7	8	9	останні дві цифри складають число, яке ділиться без остачі на 4	тризначні, що закінчуються на цифру 0
6	2	3	4	12	сума цифр числа ділиться без остачі на 9	тризначні, що починаються з цифри 5
7	4	7	9	12	сума цифр числа ділиться без остачі на 3	тризначні, що починаються з цифри 7
8	3	4	5	9	ділиться без остачі на 15	парні
9	2	3	4	6	ділиться без остачі на 7	тризначні, що закінчуються на цифру 7
10	3	4	9	11	ділиться без остачі на 12	тризначні, що закінчуються на цифру 0

Продовження табл. 3.1

№	<i>l</i>	<i>k</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	Умова 1	Умова 2
11	3	4	11	14	ділиться без остачі на 7	тризначні, що починаються з цифри 1
12	2	5	7	11	закінчуються на цифру 0	тризначні, що починаються з цифри 5
13	3	4	6	7	сума цифр числа ділиться без остачі на 9	закінчуються на цифру 0
14	3	5	6	7	ділиться без остачі на 12	останні дві цифри складають число, яке ділиться без остачі на 4
15	3	4	7	22	парні	тризначні, в яких різниця між числом без останньої цифри і останньою цифрою ділиться без остачі на 11
16	4	5	7	9	сума цифр числа ділиться без остачі на 3	тризначні, що починаються з цифри 3
17	3	4	5	6	ділиться без остачі на 12	тризначні, що закінчуються на цифру 0
18	4	5	7	8	сума цифр числа ділиться без остачі на 9	тризначні, в яких останні цифри складають число, яке ділиться без остачі на 4
19	4	5	9	12	сума цифр числа ділиться без остачі на 3	тризначні, що починаються з цифри 4
20	3	4	5	11	ділиться без остачі на 20	тризначні, що починаються з цифри 5
21	3	5	7	9	закінчуються на цифру 0	тризначні, в яких сума першої та третьої цифр дорівнює другій або відрізняється від неї на 11

Закінчення табл. 3.1

№	l	k	m	n	Умова 1	Умова 2
22	3	6	7	9	парні	тризначні, що починаються з цифри 7
23	5	6	7	24	ділиться без остачі на 4	закінчуються на цифру 5
24	3	7	8	9	ділиться без остачі на 21	парні
25	3	5	9	22	ділиться без остачі на 12	тризначні, в яких різниця між числом без останньої цифри і останньою цифрою ділиться без остачі на 11
26	3	4	8	21	ділиться без остачі на 24	тризначні, в яких сума подвоєної першої цифри і останніх двох цифр ділиться без остачі на 7
27	4	6	9	12	сума цифр числа ділиться без остачі на 3	тризначні, що починаються з цифри 4
28	5	6	8	9	сума цифр числа ділиться без остачі на 3	парні
29	3	5	8	11	сума цифр числа ділиться без остачі на 9	тризначні, в яких останні дві цифри складають число, що ділиться без остачі на 4
30	4	5	6	12	ділиться без остачі на 20	закінчуються на цифру 0

3.2. Задано універсальну множину $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ та множини A , B і C . Записати елементи множини D , що отримана з множин A , B і C за формулою, зобразити множину D за допомогою діаграми Ейлера-Венна. Записати булеан для однієї з множин, що має найменшу потужність серед A , B , C і D . Значення параметрів наведено в табл. 3.2.

Таблиця 3.2 – Варіанти для задачі 3.2

№	A	B	C	D
1	{3, 5, 6, 7, 8}	{1, 2, 4, 6}	{1, 2, 7, 8}	$B \cap C \cup \bar{A}$
2	{1, 3, 5, 6, 7}	{3, 4, 7, 8}	{2, 3, 7, 8}	$(A \setminus B) \cap \bar{C}$
3	{6, 7, 8}	{1, 3, 5, 6, 8}	{1, 2, 5, 7}	$\bar{A} \cap (B \setminus C)$
4	{1, 4, 5, 6, 7, 8}	{2, 3, 7, 8}	{1, 3, 5, 8}	$\bar{B} \cap (A \setminus C)$
5	{2, 4, 5, 7}	{1, 2, 3, 5},	{1, 5, 6, 8}	$\bar{A} \setminus (B \cap C)$
6	{2, 5, 6, 7, 8}	{2, 4, 6, 8}	{1, 2, 3, 4}	$A \setminus (B \cap \bar{C})$
7	{2, 4, 5, 7}	{1, 2, 3, 4, 6}	{4, 5, 6, 8}	$\bar{B} \setminus (A \cap C)$
8	{1, 2, 4, 6, 7}	{2, 3, 5, 7}	{1, 4, 7, 8}	$(A \cup \bar{B}) \cap C$
9	{2, 3, 4, 5, 7}	{1, 2, 4, 8}	{2, 5, 7, 8}	$\bar{C} \setminus (B \cap A)$
10	{1, 3, 5, 7, 8}	{2, 5, 6}	{1, 4, 5, 6}	$(A \cap \bar{B}) \setminus C$
11	{1, 2, 3, 4}	{3, 4, 5, 6, 7, 8}	{1, 3, 4, 7, 6}	$(\bar{A} \cap B) \setminus C$
12	{1, 3, 5, 6, 7}	{1, 2, 4, 6}	{2, 3, 7, 8}	$\bar{C} \cap (B \setminus A)$
13	{1, 4, 5, 6, 7, 8}	{1, 3, 5, 6, 8}	{1, 2, 4, 7}	$(\bar{A} \Delta B) \setminus C$
14	{1, 2, 3, 5}	{2, 3, 4, 8}	{1, 2, 4, 5}	$(\bar{B} \Delta A) \setminus C$
15	{2, 3, 5, 6, 8}	{1, 2, 3, 7}	{2, 3, 4, 5}	$(B \Delta C) \cap \bar{A}$
16	{1, 2, 4, 6, 8}	{5, 6, 7, 8}	{1, 3, 5, 6}	$(A \setminus B) \Delta \bar{C}$
17	{2, 4, 5, 8}	{1, 3, 7, 8}	{3, 4, 5, 6}	$\bar{A} \Delta (B \setminus C)$
18	{2, 3, 5, 7, 8}	{2, 4, 6, 8}	{1, 3, 4, 6}	$\bar{B} \Delta (A \setminus C)$
19	{1, 2, 7, 8}	{1, 2, 4, 5}	{1, 2, 5, 7}	$\bar{A} \setminus (B \Delta C)$
20	{3, 5, 6, 8}	{2, 4, 5, 6}	{2, 3, 6, 8}	$A \setminus (B \Delta \bar{C})$
21	{1, 2, 3, 7}	{4, 5, 6, 8}	{2, 3, 4, 7, 8}	$\bar{B} \setminus (A \Delta C)$
22	{2, 3, 4, 8}	{2, 4, 6, 8}	{1, 2, 4, 5, 7}	$(A \Delta \bar{B}) \cap C$
23	{1, 3, 4, 5, 6, 8}	{2, 4, 6, 8}	{1, 2, 3, 8}	$\bar{C} \setminus (B \Delta A)$
24	{1, 2, 4, 7, 8}	{3, 5, 7, 8}	{1, 6, 7}	$(A \setminus \bar{B}) \Delta C$
25	{2, 4, 6}	{1, 2, 3, 5}	{3, 5, 6, 7}	$(\bar{A} \cap B) \Delta C$
26	{3, 5, 6, 7, 8}	{1, 2, 5, 6}	{3, 4, 6, 8}	$\bar{C} \cap (B \Delta A)$
27	{1, 2, 3, 4}	{2, 4, 5, 8}	{1, 3, 5, 8}	$\bar{C} \Delta (B \setminus A)$
28	{1, 4, 5, 7}	{1, 4, 6, 7, 8}	{2, 4, 6, 7}	$\bar{B} \Delta (C \setminus A)$

Продовження табл. 3.2

№	A	B	C	D
29	{1, 3, 5, 6, 7, 8}	{4, 5, 6, 8}	{1, 2, 3, 8}	$\overline{A}\Delta(C\setminus B)$
30	{4, 5, 6, 7, 8}	{1, 2, 3, 4}	{1, 2, 3, 6, 8}	$(B\Delta\overline{C})\setminus A$

3.3. Для універсальної множини $U = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, множин A , $B = \{x: x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0\}$ знайти множини $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ та C . З'ясувати взаємне розташування множин A і C . Значення параметрів наведено в табл. 3.3.

Таблиця 3.3 – Варіанти для задачі 3.3

№	A	a_3	a_2	a_1	a_0	C
1	{-1, 1, 4, 3}	1	-12	-28	-16	$(A \cup B)\Delta A$
2	{-1, 1, 2, 3}	7	13	-3	-18	$(A \cap B)\Delta A$
3	{-1, 1, 3, 4}	-2	-12	18	27	$(A \setminus B)\Delta A$
4	{-1, 1, 2, 3}	0	-17	36	-20	$(B \setminus A)\Delta A$
5	{-2, 1, 3, 4}	0	-11	-18	-8	$(A \cup B)\Delta B$
6	{-1, 1, 4, 5}	3	-9	-23	-12	$(A \cap B)\Delta B$
7	{-3, -1, 1, 2}	-2	-7	20	-12	$(A \setminus B)\Delta B$
8	{-4, -1, 1, 2}	0	-11	18	-8	$(B \setminus A)\Delta B$
9	{-2, -1, 3, 5}	3	-7	-15	-18	$(A \Delta B) \setminus A$
10	{-3, -1, 1, 2}	5	1	-21	-18	$(A \Delta B) \setminus B$
11	{-2, 2, 3, 4}	2	-7	-20	-12	$(A \cup B)\Delta \overline{A}$
12	{-3, -1, 2, 4}	-2	-15	-4	20	$(A \cap B)\Delta \overline{A}$
13	{-1, -3, 2, 3}	-5	1	21	-18	$(A \setminus B)\Delta \overline{A}$
14	{-4, -3, 1, 2}	1	-7	-13	-6	$(B \setminus A)\Delta \overline{A}$
15	{-5, -1, 1, 3}	6	0	-22	15	$(A \cup B)\Delta \overline{B}$
16	{-1, 1, 2, 3}	-3	-3	7	6	$(A \cap B)\Delta \overline{B}$
17	{-1, 1, 3, 2}	-7	12	4	-16	$(A \setminus B)\Delta \overline{B}$
18	{-2, -1, 2, 4}	-1	-7	13	-6	$(B \setminus A)\Delta \overline{B}$
19	{-1, 1, 2, 3}	-4	3	4	-4	$(A \Delta B) \setminus \overline{A}$
20	{-1, 1, 2, 3}	-5	-3	13	10	$(A \Delta B) \setminus \overline{B}$
21	{-3, 5, 3, 4}	-11	39	-49	20	$A \setminus (A \Delta B)$
22	{1, 2, 3, 4}	-6	8	6	-9	$B \setminus (A \Delta B)$
23	{-1, -2, 1, 2}	-3	-2	12	-8	$A \setminus (A \cup B)$

Продовження табл. 3.3

№	A	a_3	a_2	a_1	a_0	C
24	$\{-1, 2, 4, 5\}$	0	-9	-4	12	$B \setminus (A \cup B)$
25	$\{-1, -2, -3, 1\}$	-4	-10	28	-15	$A \setminus (A \cap B)$
26	$\{1, 2, 3, 4\}$	3	-3	-7	6	$B \setminus (A \cap B)$
27	$\{-1, 1, 2, 4\}$	1	-12	4	16	$\overline{A} \setminus (A \Delta B)$
28	$\{-1, 1, 2, 3\}$	-2	-4	2	3	$\overline{B} \setminus (A \Delta B)$
29	$\{-1, 2, 3, 4\}$	-4	-2	12	9	$\overline{A} \setminus (A \cup B)$
30	$\{-1, 2, 3, 4\}$	3	1	-3	-2	$\overline{B} \setminus (A \cap B)$

3.4. Спростити вираз, використовуючи закони алгебри множин:

- $\overline{(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{B} \cup \overline{A}) \cup \overline{A}};$
- $\overline{(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{\overline{A} \cap B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})};$
- $\overline{\overline{\overline{A} \cup B} \cup (\overline{B} \cap A) \cup \overline{A}};$
- $\overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \cup \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}} \cup (\overline{\overline{A} \cup \overline{B}});$
- $\overline{(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (A \cap \overline{B})};$
- $\overline{(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \overline{B} \cap \overline{\overline{A} \cup B}};$
- $\overline{(A \cup B) \cap (\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}) \cup \overline{A}};$
- $\overline{A \cup \overline{B} \cap \overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cap \overline{B} \cup \overline{A}}};$
- $\overline{\overline{\overline{B} \cup A \cup \overline{B} \cap \overline{A} \cap B}};$
- $\overline{\overline{\overline{B} \cup \overline{A} \cap B} \cup (\overline{\overline{A \cap B \cup \overline{A}}})};$
- $\overline{(\overline{A \cap \overline{B}}) \cup \overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cap A}};$
- $\overline{(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cap B) \cup (\overline{\overline{A} \cap B})};$
- $\overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{A} \cap A \cup \overline{B}}};$
- $\overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{A} \cup (A \cap \overline{B})}};$
- $\overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cap \overline{\overline{A} \cup B \cap \overline{B}}}};$

16. $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B \cap \overline{A \cup \overline{B} \cap \overline{B}}$;
17. $\overline{(A \cup B) \cap \overline{A} \cup (A \cap \overline{B})} \cup B$;
18. $\overline{(A \cap B) \cup \overline{A} \cap B \cup A}$;
19. $\overline{B \cap \overline{A} \cup B \cap B \cup \overline{A} \cup \overline{B}}$;
20. $\overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cup \overline{B})} \cup A$;
21. $\overline{A \cup \overline{B} \cap \overline{A} \cup \overline{B} \cap \overline{B}}$;
22. $\overline{(\overline{A} \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})} \cup \overline{A} \cup B$;
23. $\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cup B)}$;
24. $\overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{A} \cap B}$;
25. $\overline{\overline{B} \cup (A \cap B) \cup A \cup \overline{B} \cap A}$;
26. $\overline{A \cup \overline{A} \cup B \cup A \cup \overline{B} \cap B}$;
27. $\overline{(\overline{A} \cap \overline{B}) \cap B \cup \overline{A} \cup \overline{B} \cup A}$;
28. $\overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cup \overline{B} \cap \overline{A} \cup \overline{B} \cap \overline{A}}$;
29. $\overline{(A \cup \overline{B}) \cap \overline{A} \cup \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{A}}$;
30. $\overline{A \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) \cup \overline{B}}$.

3.5. Довести за допомогою діаграм Ейлера-Венна та законів алгебри множин, що для довільних множин A , B та C справджується рівність:

1. $\overline{A} \setminus (\overline{B} \setminus C) = (B \cup C) \setminus A$;
2. $(A \setminus \overline{B}) \setminus C = \overline{A} \cup C \cap B$;
3. $(\overline{C} \setminus B) \Delta \overline{A} = A \Delta (B \cup C)$;
4. $(B \cup C) \setminus A = \overline{B} \setminus C \setminus A$;
5. $\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cap \overline{C}} = (A \setminus \overline{B}) \setminus C$;
6. $A \Delta (B \cup C) = (C \setminus A) \cup (A \Delta B) \setminus C$;
7. $(C \setminus A) \cup (\overline{A} \setminus \overline{B}) = \overline{A} \setminus \overline{B} \cup C$;

8. $(A \setminus \overline{B}) \setminus (A \cap C) = \overline{C} \setminus (\overline{A} \cup \overline{B})$;
9. $(B \setminus A) \cup ((A \Delta C) \setminus B) = (B \cup C) \Delta A$;
10. $(\overline{A \cup B \cup C}) \cap (A \cap (B \cup \overline{C})) \cap \overline{B} = A \setminus (C \cup B)$;
11. $\overline{A \cup C \cup (B \cap C \cup B)} \cap (\overline{B} \cap \overline{C} \cup \overline{B}) = A \setminus C$;
12. $(\overline{C \setminus A}) \cap (\overline{C \setminus B}) = A \cup B \cup \overline{C}$;
13. $(A \cap \overline{B} \cup C) \cap (A \cup B) \cap \overline{C} = (A \setminus B) \setminus C$;
14. $(\overline{A \setminus B}) \setminus C = (\overline{A \setminus B}) \cup (A \cap C)$;
15. $(B \cup C) \Delta A = (C \setminus A) \cup ((A \Delta B) \setminus C)$;
16. $\overline{A \setminus (B \cup C)} = \overline{(A \setminus B) \cap (A \cap C)}$;
17. $(\overline{A \cup B}) \setminus C = \overline{A \setminus C} \cup B \cap \overline{C}$;
18. $(A \cup B) \Delta C = (A \setminus C) \cup ((B \Delta C) \setminus A)$;
19. $(A \cup B \cup C) \setminus (B \Delta C) = ((A \setminus B) \setminus C) \cup (B \cap C)$;
20. $((A \Delta B) \setminus C) \cup (A \cap C) = ((A \cup B) \setminus C) \cup (A \cap B \cap C)$;
21. $A \Delta B \Delta C = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$;
22. $((C \setminus A) \setminus B) \cup ((A \cap B) \setminus C) = (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C})$;
23. $(\overline{B \Delta C}) \setminus A \cap \overline{A \setminus C} = \overline{C \Delta (A \cup B)}$;
24. $A \cap B \cup (B \setminus C) = B \setminus \overline{C} \cup A$;
25. $\overline{C} \Delta ((A \cup \overline{B}) \cap \overline{C}) = B \setminus (A \cup C)$;
26. $\overline{A} \cup B \cup (C \setminus A) = \overline{A \setminus B}$;
27. $(A \Delta (A \cap \overline{B})) \cap (\overline{B} \Delta \overline{C}) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
28. $(\overline{A} \cap B) \cup (B \Delta C) = (B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$;
29. $\overline{B} \cap \overline{A \cup B \cup C} \cap ((B \cup \overline{C}) \cap A) = (A \setminus B) \setminus C$.

3.6. Нехай A, B і C – множини точок площини, що задані відповідно умовами 1, 2 та 3. Зобразити в системі координат xOy множину D , отриману з множин A, B і C за формулою. Значення параметрів наведено в табл. 3.4.

Таблиця 3.4 – Варіанти для задачі 3.6

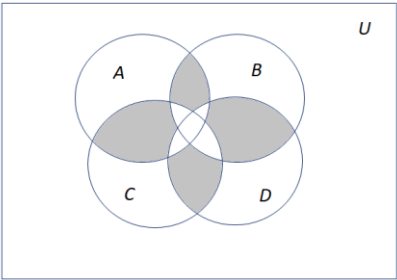
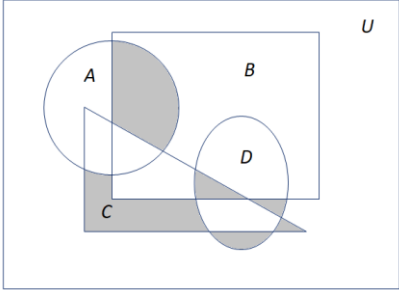
№	Умова 1	Умова 2	Умова 3	D
1.	$x^2 + y^2 + 6y \leq 0$	$x^2 + y + 1 \geq 0$	$ x \leq 6,$ $-3 \leq y \leq -2$	$(A \cup B) \Delta C$
2.	$y - \frac{4}{x} \leq 0$	$x^2 + y^2 - 25 \leq 0$	$ x \leq 1, y \leq 1$	$(A \cap B) \setminus C$
3.	$0 \leq y \leq \sqrt{x}$	$2 \leq x \leq 6,$ $-3 \leq y \leq 1$	$x^2 + y^2 - 18x \leq 0$	$(A \cup B) \setminus C$
4.	$ x \leq 5, y \leq 1$	$ x \leq 1, y \leq 5$	$x^2 + y^2 - 16 \leq 0$	$A \cup B \cup C$
5.	$y - x^2 - 1 \leq 0$	$y - x^2 + 3 \geq 0$	$x > 0$	$(A \cap B) \setminus C$
6.	$y - \frac{4}{x} \leq 0$	$y + \frac{4}{x} \geq 0$	$x^2 + y^2 - 25 \leq 0$	$(A \cap B) \setminus C$
7.	$x^2 + y^2 - 4x \leq 0$	$x^2 + y^2 + 4x \leq 0$	$ x \leq 2, y \leq 2$	$(A \cup B) \Delta C$
8.	$y - x^4 - 1 \leq 0$	$0 \leq y \leq \sqrt{x}$	$x^2 + y^2 - 4x \leq 0$	$(A \cap B) \Delta C$
9.	$y + x^2 - 5 \leq 0$	$x^2 + y^2 - 6y \leq 0$	$x > 0$	$A \setminus (B \cap C)$
10.	$x^2 + y^2 - 9 \leq 0$	$-6 \leq x \leq 1,$ $ y \leq 4$	$y < 0$	$(A \Delta B) \setminus C$
11.	$x - y > 0$	$x + y < 0$	$x^2 + y^2 \leq 4$	$(A \Delta B) \cup C$
12.	$y + x^2 - 6 \leq 0$	$ x > 2, y > 1$	$x < y$	$A \cap B \cap C$
13.	$y \leq \sin x$	$y > 0,5$	$y > -2$	$(A \Delta B) \cap C$
14.	$x < y + 3$	$x > y - 3$	$ x < 5, y > 2$	$(A \cap B) \setminus C$
15.	$y - \frac{5}{x} \leq 0$	$y + \frac{2}{x} \geq 0$	$y \geq 1$	$(A \cap B) \setminus C$
16.	$x^2 + y^2 + 6y \leq 0$	$y + x^2 + 1 \geq 0$	$ x \leq 4,$ $-4 \leq y \leq -2$	$A \cap (B \setminus C)$
17.	$x^2 + y^2 - 25 \leq 0$	$y - \frac{4}{x} \leq 0$	$x^2 + y^2 - 4 \leq 0$	$(A \setminus B) \cup C$
18.	$0 \leq y \leq \sqrt{x}$	$2 \leq x \leq 6,$ $-3 \leq y \leq 1$	$x^2 + y^2 - 18x \leq 0$	$(A \Delta B) \Delta C$
19.	$ x \leq 5, y \leq 1$	$ x \leq 1, y \leq 5$	$x^2 + y^2 \leq 16$	$(A \cup B) \Delta C$
20.	$x^2 - y - 2 \geq 0$	$x^2 - y + 4 \geq 0$	$y > 1$	$(A \cap B) \setminus C$
21.	$ x \leq 5, y \leq 5$	$y + \frac{4}{x} \geq 4$	$y - \frac{4}{x} \leq 0$	$A \setminus (B \cap C)$
22.	$y + x^2 - 5 \leq 0$	$x^2 + y^2 - 6y \leq 0$	$y \geq 0$	$(A \Delta B) \cap C$
23.	$x^2 - y \geq 0$	$x + y \geq 0$	$ x \leq 2, y \leq 2$	$(A \Delta B) \cup C$

Продовження табл. 3.4

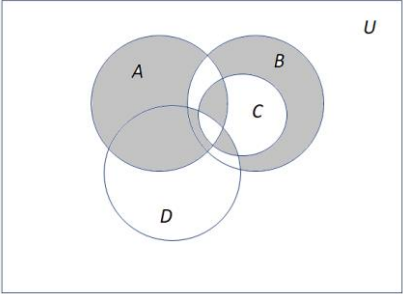
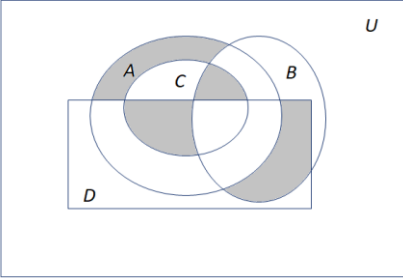
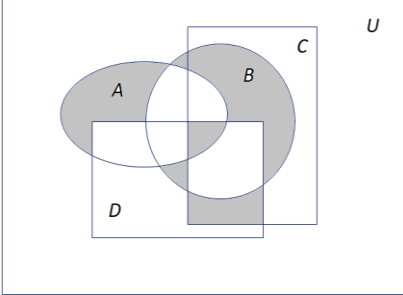
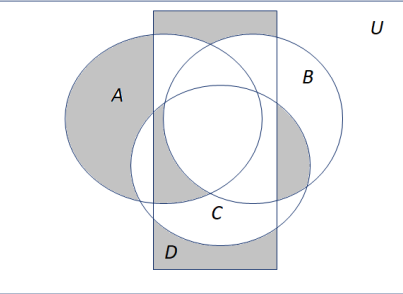
№	Умова 1	Умова 2	Умова 3	D
24.	$y + x^2 - 6 \leq 0$	$x^2 + y^2 \leq 4$	$x < y$	$(A \setminus B) \cap C$
25.	$ x \leq 4, y \leq 4$	$x^2 + y^2 \leq 25$	$y > 0$	$A \cap (B \setminus C)$
26.	$x \geq \cos x$	$x < 0,5$	$y > 0$	$(A \Delta B) \cap C$
27.	$y - x^2 + 4 \geq 0$	$ x \leq 2,$ $-4 \leq x \leq 0$	$x^2 + y^2 \leq 1$	$(A \cup B) \setminus C$
28.	$y - x^2 - 1 \leq 0$	$y - x^2 + 3 \geq 0$	$x^2 + y^2 \leq 3$	$(A \cap B) \setminus C$
29.	$y - \frac{4}{x} \leq 0$	$x^2 + y^2 - 25 \leq 0$	$ x \leq 4, y \leq 3$	$A \cap (B \setminus C)$
30.	$2 \leq x \leq 6,$ $-3 \leq y \leq 1$	$0 \leq y \leq \sqrt{x}$	$x^2 + y^2 - 12x \leq 0$	$(A \Delta B) \Delta C$

3.7. Використовуючи операції над множинами A, B, C, D , описати множину F , виділену кольором на діаграмі Ейлера-Венна. Варіанти представлені в табл. 3.5.

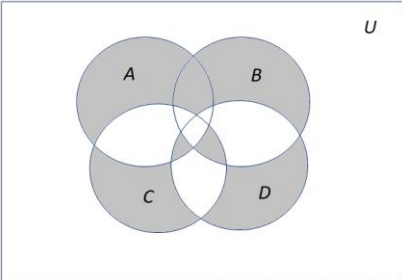
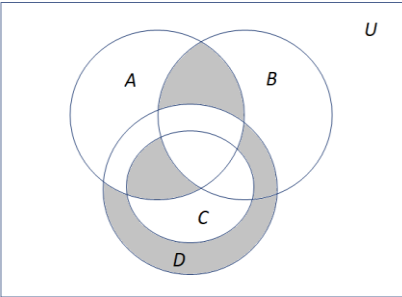
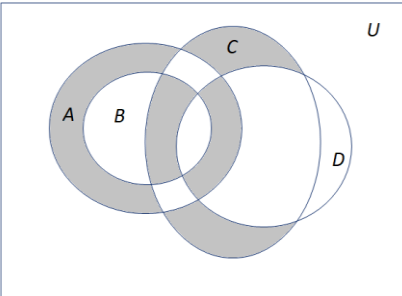
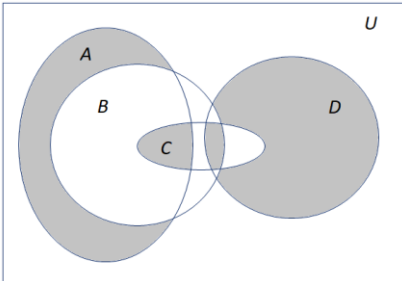
Таблиця 3.5 – Варіанти систем для задачі 3.7

№	Множина F
1.	
2.	

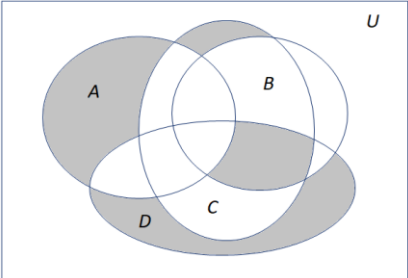
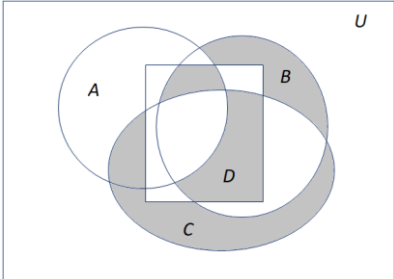
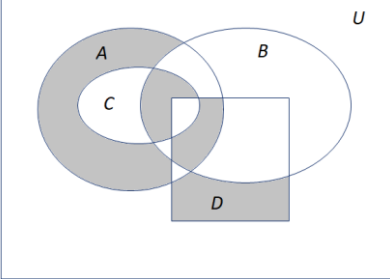
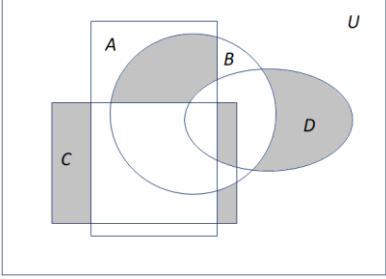
Продовження табл. 3.5

№	Множина F
3.	
4.	
5.	
6.	

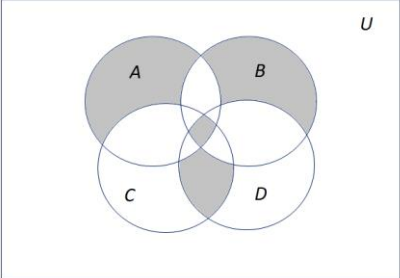
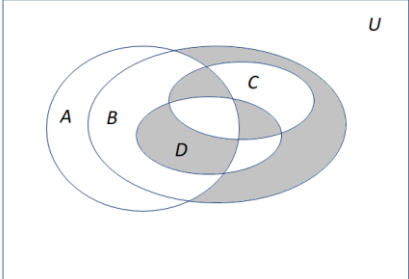
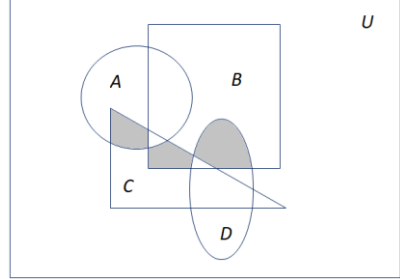
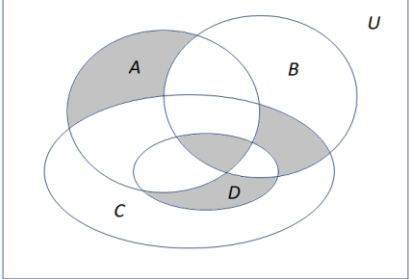
Продовження табл. 3.5

№	Множина F	
7.		
8.		
9.		
10.		

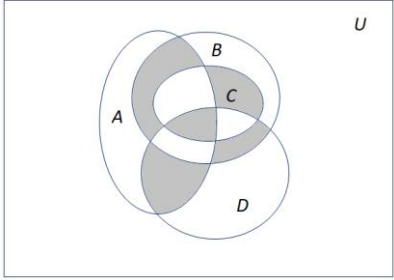
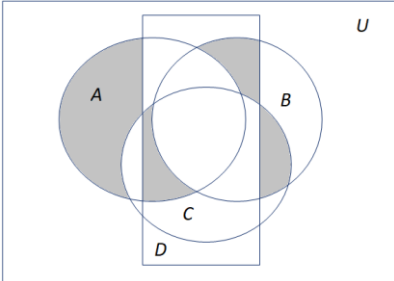
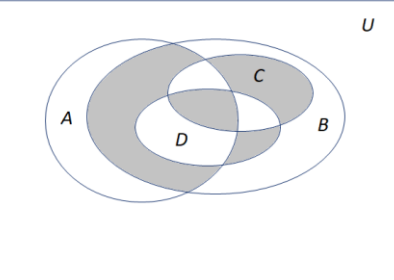
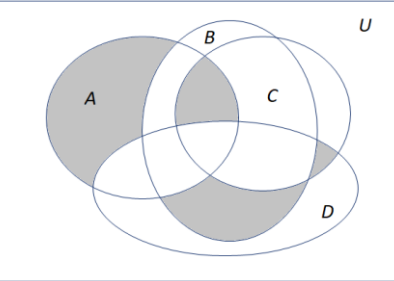
Продовження табл. 3.5

№	Множина F
11.	
12.	
13.	
14.	

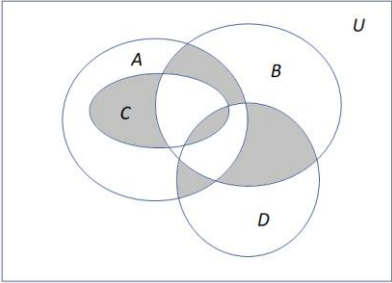
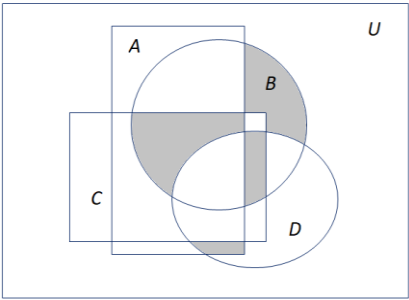
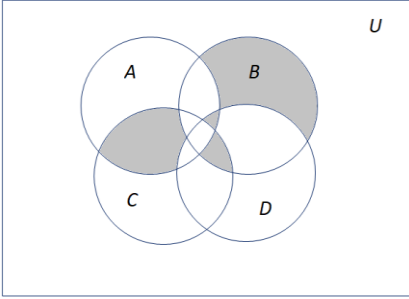
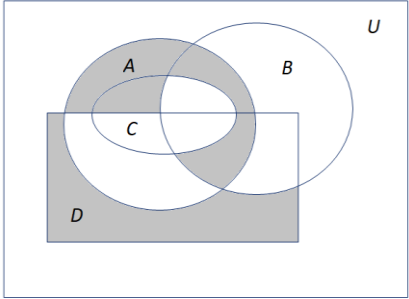
Продовження табл. 3.5

№	Множина F	
15.		
16.		
17.		
18.		

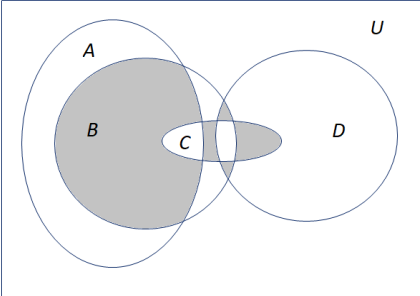
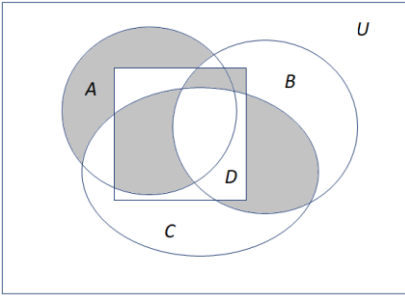
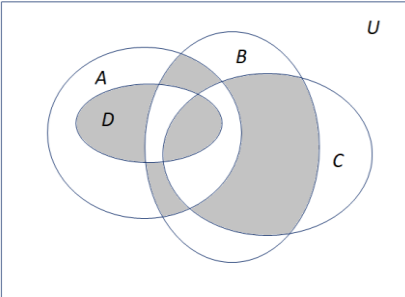
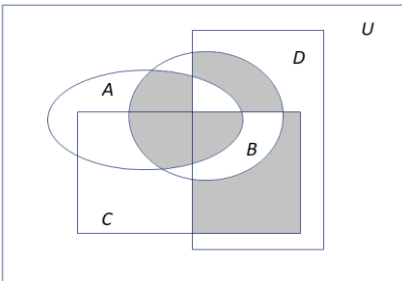
Продовження табл. 3.5

№	Множина F
19.	
20.	
21.	
22.	

Продовження табл. 3.5

№	Множина F
23.	
24.	
25.	
26.	

Закінчення табл. 3.5

№	Множина F
27.	
28.	
29.	
30.	

3.8. Використовуючи діаграму Ейлера-Венна, відповісти на питання, що поставлені в наступних задачах.

1. Зі 100 опитаних студентів 43 додатково вивчають англійську мову, 42 – німецьку, 35 – іспанську, 17 – іспанську і німецьку, 13 – англійську і іспанську, 15 – англійську і німецьку, а 20 студентів не вивчають жодну з трьох мов. Скільки студентів вивчають

- всі три мови;
- вивчають англійську або іспанську, але не вивчають німецьку;
- тільки англійську?

2. Відомо, що 100 туристів побули в місті три дні. За цей час драматичний театр відвідали 28 туристів, оперний – 42, ляльковий – 30, в драматичному і оперному побувало 10 осіб; у драматичному та ляльковому – 8, в оперному та ляльковому – 5. Усі три театри відвідали три особи. Скільки туристів

- не було в жодному театрі;
- відвідало тільки оперний театр;
- відвідало як мінімум два театри?

3. Відомо, що 14 спортсменів брали участь у кросі, 16 – у змаганнях з плавання, 10 – у велосипедних гонках, 8 – брали участь у кросі та плаванні, 4 – в кросі та велосипедних гонках, 9 – в плаванні та велосипедних гонках, у всіх трьох змаганнях брали участь троє спортсменів. Скільки спортсменів брало участь в змаганнях:

- хоча б з одного виду спорту;
- тільки в кросі;
- водночас в двох видах спорту?

4. У туристському клубі кілька разів протягом року організовують походи, причому всі члени клубу хоча б раз у них беруть участь. Відомо, що 40 осіб побували в піших походах, 28 – у кінних, 25 – на човнах, і в піших, і в кінних походах побувало 20 осіб, у піших та на човнах – 15, у кінних та на човнах – 8, у всіх видах походів побувало 6 осіб. Скільки туристів

- всього є членами клубу;
- брали участь у піших або кінних походах, але не в походах на човнах;
- брали участь тільки в походах на човнах?

5. У відділі науково-дослідного інституту працюють декілька співробітників, причому кожен з них знає хоча б одну іноземну мову. Англійською

мовою володіють 16 осіб, німецькою – 6 осіб, французькою – 7, англійською та німецькою – 4 особи, німецькою та французькою – 3, французькою та англійською – 2, один співробітник знає всі три мови. Скільки осіб

- працює в відділі;
- володіє тільки німецькою;
- володіє як мінімум двома мовами?

6. З 80 студентів займаються баскетболом 30 осіб, легкою атлетикою – 25 осіб, шахами – 40 осіб. Баскетболом та легкою атлетикою займається 8 осіб, шахами та легкою атлетикою – 10 осіб, шахами та баскетболом – 5 осіб. Трьома видами спорту займаються троє студентів. Скільки студентів

- не займаються жодним з трьох видів спорту;
- займаються тільки одним видом спорту;
- займаються легкою атлетикою або шахами та не займаються баскетболом?

7. За день 10 відвідувачів книгарні купили фантастику, 11 – детективи, 8 – пригоди; фантастику та пригоди купили 4 особи, фантастику та детективи – 6, пригоди та детективи – 3, двоє взяли три види книг. Скільки

- покупців було в книгарні за день;
- купили тільки детективи;
- купили як мінімум дві книги?

8. З 10 учасників музичної групи 6 вміють грати на гітарі, 5 – на ударних інструментах, 5 – на клавішних. Двома інструментами володіють: гітарою та ударними – 3, ударними та клавішними – 2, гітарою та клавішними – 4. Одна особа вміє грати на всіх трьох видах інструментів. Інші учасники групи тільки співають. Скільки

- співаків в ансамблі;
- вміють грати тільки на одному виді інструментів;
- вміють грати на гітарі або ударних, але не на клавішних?

9. Кожен із студентів групи займається хоча б одним видом спорту. Відомо, що 5 займаються альпінізмом, 6 – волейболом, 10 – боротьбою, 2 займаються альпінізмом і волейболом, 3 – волейболом та боротьбою, 4 – альпінізмом та боротьбою, а один студент займається всіма трьома видами спорту. Скільки студентів

- в групі;
- займаються тільки альпінізмом;

- займаються двома видами спорту?

10. Кожен зі студентів групи знає хоча б одну мову програмування. Причому мовам Java і Python дають перевагу по 10 студентів, C – 6, водночас Java і Python добре знають 6 студентів, Python і C – 4, Java і C – 3, а 1 студент знає всі три мови програмування. Скільки студентів

- в групі;
- знають тільки C;
- знають як мінімум дві мови програмування?

11. При з'ясуванні переваг глядачів було виявлено, що 60% подобається дивитися комедії, 50% – мелодрами, 50% – детективи, водночас комедії і детективи подобаються 30% глядачів, мелодрами та детективи – 20%, комедії і мелодрами – 40%, а 10% глядачів дають перевагу всім трьом жанрам. Який відсоток глядачів

- не дивиться жоден з трьох жанрів;
- дивиться детективи або комедії, но не дивляться мелодрами;
- дивляться тільки мелодрами?

12. Під час авіашоу для бажаючих було організовано катання на літаку, планері та дельтаплані. На літаку прокотилося 30 людей, на планері – 20, на дельтаплані – 15, на літаку, і на планері прокотилося 10 осіб, на літаку і дельтаплані – 12, на планері та дельтаплані – 5, дві людини прокотилися на літаку, планері і дельтаплані. Скільки було бажаючих покататися

- всього;
- тільки на дельтаплані;
- на літаку або планері, але не на дельтаплані?

13. За підсумками іспитів із 37 студентів відмінну оцінку з математики отримали 15 студентів, з фізики – 16, з програмування – 19, з математики та фізики – 7, з математики та програмування – 9, з фізики та програмування – 6, з усіх трьох дисциплін – 4. Скільки студентів

- отримали хоча б по одній відмінній оцінці;
- не отримали жодної відмінної оцінки;
- отримали відмінні оцінки тільки з програмування?

14. Під час перевірки присутності на заняттях у студентській групі з 25 осіб було виявлено, що на парі з математики були присутні 12 студентів, з програмування – 15, з іноземної мови – 11, на парах з математики і програ-

мування – 8, математики і іноземної мови – 6, іноземної мови і програмування – 7, а 5 студентів у цей день були відсутні. Скільки студентів були присутні:

- на всіх трьох парах;
- тільки на одній парі;
- на математиці або програмуванні та не відвідували іноземну мову?

15. Всі учні випускних класів школи для підготовки до ЗНО відвідують додаткові заняття, причому математику додатково відвідують 25 школярів, історію України – 20, іноземну мову – 30, математику і історію – 12, іноземну мову і історію – 13, математику і іноземну мову – 15, а 10 школярів відвідують додаткові заняття з всіх трьох предметів. Скільки школярів

- всього випускається;
- відвідують додатково тільки математику;
- не відвідують іноземну мову?

16. За метеоспостереженнями протягом жовтня було 12 дощових днів, 9 – вітряних, 7 – холодних, 5 – дощових та вітряних, 3 – дощових та холодних, 3 – вітряних та холодних днів, а 2 дні були дощовими, вітряними та холодними одночасно. Скільки днів у жовтні

- була гарна погода;
- було без дощу;
- було вітряних, але без дощу і теплих?

17. Вибрана деяка скінченна множина натуральних чисел, що є кратними 2, 3 або 5. Відомо, що серед них є: 100 чисел, що кратні 2; 115 чисел, що кратні 3; 120 чисел, що кратні 5; 45 чисел, що кратні 6; 38 чисел, що кратні 10; 50 чисел, що кратні 15; 20 чисел, що кратні 30. Яку потужність має

- вихідна множина;
- підмножина чисел, що діляться тільки на 2 та не діляться на 3 або 5;
- підмножина чисел, що мають рівно два вказаних дільника?

18. Із 37 опитаних одягу в відтінках червоного надають перевагу 15 осіб, у відтінках синього – 14, у світлих тонах – 17, одночасно подобаються відтінки синього та червоного 9 особам, відтінки червоного та світлі тони – 5, відтінки синього та світлі тони – 3, а 5 осіб надають переваги іншим кольорам в одязі. Скільки осіб

- надають перевагу всім трьом відтінкам в одязі;
- надають перевагу одягу тільки в світлих тонах;

- не люблять одяг в червоних відтінках?

19. У класі 28 учнів. На домашнє завдання потрібно було вивчити вірш, декілька прислів'їв чи підготувати невелику доповідь. Половина дітей вивчила вірш, 12 – вивчили прислів'я, 7 – підготували доповідь, одночасно вивчили вірш і підготували доповідь 4 дитини, вірш та прислів'я – 6, вивчили прислів'я та підготували доповідь – 5, а одна дитина не зробила домашнє завдання. Скільки учнів

- підготували всі три завдання;
- підготували тільки доповідь;
- зробили два види завдань?

20. Служба доставки обробила 50 замовлень, у половині з яких були піци, 20 замовлень містило суші, 15 – бургери, одночасно піци і суші містило 10 замовлень, піци і бургери – 7, суші і бургери – 8, 10 замовлень містили салати. В скількох замовленнях

- одночасно були піци, бургери і суші;
- були тільки суші;
- не було бургерів?

21. Із 90 відвідувачів піріжкової 47 купили піріжки з м'ясом, 38 – з капустою, 31 – з фруктами, 18 – купили піріжки і з м'ясом, і з капустою, 11 – і з м'ясом, і з фруктами, 12 – і з капустою, і з фруктами, а 17 відвідувачів замовили напої. Скільки відвідувачів купили

- всі три види піріжків;
- як мінімум два види піріжків;
- тільки піріжки з фруктами?

22. У класі 30 учнів. Половина з них відвідує спортивні секції, 14 – займаються робототехнікою, 10 – танцями, одночасно спортивні секції і робототехніку відвідують 8 школярів, спортивні секції і танці – 7, робототехніку і танці – 5, а 7 учнів не відвідують жодних кружків. Скільки учнів

- відвідують всі три типи кружків;
- не відвідують танці;
- відвідують тільки спортивні секції?

23. У спеціалізованому магазині за тиждень 60% відвідувачів купили ноутбуки, 50% – принтери, 40% – монітори, одночасно ноутбуки і монітори купили 20 %, ноутбуки і принтери – 30%, принтери і монітори – 15%, 10% покупців купили інші товари. Який відсоток відвідувачів купили

- всі три типи товарів;
- тільки ноутбуки;
- два види товарів?

24. На розпродажу в магазині товар купили 92 особи. Із них 47 осіб купили куртки, 48 – светри, 40 – джинси, одночасно куртки і джинси купили 25 осіб, куртки і светри – 28, джинси і светри – 26, а 23 особи купили інші товари. Скільки покупців купили

- всі три типи товарів;
- тільки джинси;
- як мінімум два види товарів?

25. У класі 32 учня. Половина з них захоплюються танцями, 15 – музикою, 13 – малюванням, одночасно танцями і музикою захоплюються 10 школярів, танцями і малюванням – 11, малюванням і музикою – 9, а 11 учнів мають інші захоплення. Скільки учнів

- одночасно захоплюються танцями, музикою і малюванням;
- захоплюються музикою або малюванням, але не танцями;
- захоплюються тільки малюванням?

26. Серед 20 відвідувачів кафе половина замовила каву, 7 – шашлик, 9 – салат, одночасно каву і шашлик замовили 4 особи, каву і салат – 6, шашлик і салат – 3, а 5 відвідувачів замовили інші страви. Скільки відвідувачів замовили

- одночасно шашлик, салат і каву;
- тільки салат;
- шашлик або салат, але не замовляли каву?

27. Серед опитаних 65% зберігають накопичення в доларах, 35% – в євро, 30% – в гривні, 11% – в інших валютах, одночасно накопичення в доларах та гривні мають 15%, в доларах і євро – 25%, в євро і гривні – 13%. Який відсоток серед опитаних зберігають накопичення

- зберігають накопичення в усіх трьох валютах;
- тільки в євро;
- як мінімум у двох з трьох валют?

28. У класі 34 учня. Під час канікул половина з них покаталася на атракціонах у міському парку, 15 – відвідали цирк, 10 – кінотеатр, а 7 учнів виї-

хали за місто. Покатилися на атракціонах та відвідали цирк 10 учнів, покатилися на атракціонах та відвідали кінотеатр – 7, відвідали кінотеатр та цирк – 8. Скільки учнів під час канікул

- відвідали цирк, кінотеатр та покатилися на атракціонах;
- покатилися на атракціонах, але не відвідували цирк;
- провели час у двох локаціях?

29. За результатами екзаменаційної сесії на потоці з 70 студентів оцінку «відмінно» з дискретної математики отримали 35 студентів, з програмування – 40, з архітектури обчислювальних систем – 30, одночасно з дискретної математики та архітектури обчислювальних систем – 17, дискретної математики і програмування – 23, з програмування і архітектури обчислювальних систем – 19, а 7 студентів не отримали жодної відмінної оцінки. Скільки студентів отримали відмінні оцінки

- з усіх трьох дисциплін;
- тільки з дискретної математики;
- з дискретної математики або програмування, але не з архітектури обчислювальних систем?

30. За результатами опитування 130 випадкових глядачів спортивного каналу з'ясувалося, що 70 із них надають перевагу футбольним матчам, 45 – хокею, 65 – боксу, 10 – іншим видам спорту, одночасно футболу і хокею надають перевагу 31 глядач, футболу і боксу – 42, хокею і боксу – 29. Скільки глядачів надають перевагу

- всім трьом видам спорту;
- рівно двом видам спорту;
- боксу, але не дивляться футбол і хокей?

3.9. Розв'язати систему рівнянь щодо множини X і вказати умови сумісності системи або довести її несумісність. Варіанти систем наведено в табл. 3.6.

Таблиця 3.6 – Варіанти систем для задачі 3.9

№	Система	№	Система
1.	$\begin{cases} A \cup X = B \cap X \\ A \cap X = C \cup X \\ \bar{A} \setminus X = C \setminus A \end{cases}$	2.	$\begin{cases} A \setminus X = X \setminus B \\ X \setminus A = C \setminus X \\ \overline{B \cup C} = X \setminus A \end{cases}$

Продовження табл. 3.6

№	Система	№	Система
3.	$\begin{cases} A \cap X = B \setminus X \\ X \setminus A = C \cup X \\ X \setminus C = A \cup B \end{cases}$	4.	$\begin{cases} A \cup X = B \setminus X \\ X \setminus B = C \cup X \\ \overline{A} \setminus C = X \setminus A \end{cases}$
5.	$\begin{cases} A \cup X = B \Delta \overline{C} \\ X \setminus C = B \cup X \\ \overline{B \cap X} = C \setminus A \end{cases}$	6.	$\begin{cases} B \setminus C = A \Delta X \\ B \setminus X = A \setminus C \\ C \cap X = A \cap B \end{cases}$
7.	$\begin{cases} B \setminus X = A \cap C \\ A \setminus X = C \setminus B \\ X \setminus C = A \cup B \end{cases}$	8.	$\begin{cases} B \cup X = B \cap C \\ A \cup C = C \cap X \\ A \cup B = X \cap C \end{cases}$
9.	$\begin{cases} A \cap X = B \cap A \\ C \setminus X = \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A} = A \setminus B \end{cases}$	10.	$\begin{cases} \overline{B \cap X} = X \cap C \\ B \cap C = B \setminus X \\ A \setminus (B \cup C) = C \setminus B \end{cases}$
11.	$\begin{cases} X \setminus C = A \setminus B \\ A \setminus C = \overline{X} \cap \overline{C} \\ (B \setminus X) \setminus A = A \setminus C \end{cases}$	12.	$\begin{cases} C \cup X = A \setminus B \\ A \cap B = B \cup C \\ B \setminus A = X \cap C \end{cases}$
13.	$\begin{cases} C \setminus X = A \setminus B \\ B \cup \overline{C} = X \cap C \\ X \cup \overline{B} = X \cap B \end{cases}$	14.	$\begin{cases} B \cup X = C \cap X \\ B \cap X = A \cup X \\ \overline{B} \setminus X = A \setminus B \end{cases}$
15.	$\begin{cases} B \setminus X = X \setminus C \\ X \setminus B = A \setminus X \\ \overline{C} \cap \overline{X} = X \setminus B \end{cases}$	16.	$\begin{cases} B \cap X = C \setminus X \\ X \setminus B = A \cup X \\ X \setminus A = C \cup B \end{cases}$
17.	$\begin{cases} B \cup X = C \setminus X \\ X \setminus C = A \cup X \\ \overline{B} \setminus A = X \setminus B \end{cases}$	18.	$\begin{cases} B \cup X = C \Delta \overline{A} \\ X \setminus A = C \cup X \\ \overline{C \cap X} = A \setminus B \end{cases}$
19.	$\begin{cases} C \setminus A = B \Delta X \\ C \setminus X = B \setminus A \\ A \cap X = B \cap C \end{cases}$	20.	$\begin{cases} C \setminus X = B \cap A \\ B \setminus X = A \setminus C \\ X \setminus A = B \cup C \end{cases}$
21.	$\begin{cases} C \cup X = C \cap A \\ B \cup A = A \cap X \\ B \cup C = X \cap A \end{cases}$	22.	$\begin{cases} B \cap X = C \cap B \\ A \setminus X = \overline{C} \cup \overline{B} \\ \overline{B} = B \setminus C \end{cases}$
23.	$\begin{cases} \overline{C \cap X} = X \cap A \\ A \cap C = C \setminus X \\ B \setminus (C \cup A) = A \setminus C \end{cases}$	24.	$\begin{cases} X \setminus A = B \setminus C \\ B \setminus A = \overline{X} \cap \overline{A} \\ (C \setminus X) \setminus B = B \setminus A \end{cases}$

Закінчення табл. 3.6

№	Система	№	Система
25.	$\begin{cases} A \cup X = B \setminus C \\ B \cap C = A \cup C \\ C \setminus B = X \cap A \end{cases}$	26.	$\begin{cases} A \setminus X = B \setminus C \\ C \cup \bar{A} = A \cap X \\ X \cup \bar{C} = X \cap C \end{cases}$
27.	$\begin{cases} C \setminus X = X \setminus A \\ X \setminus C = B \setminus X \\ \overline{A \cup X} = X \setminus C \end{cases}$	28.	$\begin{cases} C \cup X = A \setminus X \\ X \setminus A = B \cup X \\ \bar{C} \setminus B = X \setminus C \end{cases}$
29.	$\begin{cases} A \setminus X = C \cap B \\ C \setminus X = B \setminus A \\ X \setminus B = A \cup C \end{cases}$	30.	$\begin{cases} B \cup X = C \setminus A \\ A \cap C = A \cup B \\ A \setminus C = X \cap B \end{cases}$

3.10. Записати матрицю бінарного відношення R , що відповідає умові задачі, побудувати граф відношення. Вказати властивості, якими володіє бінарне відношення; з'ясувати, чи є відношення R еквівалентністю або порядком.

1. Бінарне відношення R задає секретний код, що складається з двох цифр, причому перша цифра менша за другу, отримане в результаті число повинно ділитися на 5 або на 7, але не одночасно.

2. Гральні кісточки доміно поділені на дві рівні частини, на яких розміщені від 0 до 6 очок. Бінарне відношення R задає ті з них, в яких сума очок більше п'яти та менше десяти, дублі не годяться. Парні комбінації очок, наприклад 1-5 і 5-1, враховуються один раз за зростанням індексів.

3. Стрілок робить по мішені з очками від 0 до 7 два вистріли. Бінарне відношення R задає випадок, коли після першого і другого вистрілу кількість очок однакова, або їх загальна сума становить понад 12 очок.

4. Гральний кубик кидається двічі. Хід є вигравним, якщо перший кидок відрізняється від другого не більше, ніж на одне очко, або в результаті двох кидків набрана сума в 8 очок. Бінарне відношення R задає вигравні ходи.

5. Бінарне відношення R задає секретний код, що складається з двох цифр, причому відомо, що в його складі цифр менших ніж 3 немає і отримане в результаті число повинно ділитися на 3 або на 4, але не одночасно.

6. Гральні кісточки доміно поділені на дві рівні частини, на яких розміщені від 0 до 6 очок. Бінарне відношення R задає ті з них, в яких сума очок ділиться на 3.

7. Стрілок робить по мішені з очками від 1 до 8 два вистріли. Бінарне відношення R задає випадок, коли кількість очок після першого і другого вистрілу відрізняється не більше ніж на 2, або їх загальна сума становить 13 очок.

8. Гральний кубик кидається двічі. Хід є виграшним, якщо в результаті першого і другого кидка випала однакова кількість очок або набрана сума в 9 очок. Бінарне відношення R задає виграшні ходи.

9. Бінарне відношення R задає секретний код, що складається з двох цифр, причому відомо, що в його складі цифр більших за 6 немає і отримане в результаті число повинно ділитися на 3 або на 7, але не одночасно.

10. Гральні кісточки доміно поділені на дві рівні частини, на яких розміщені від 0 до 6 очок. Бінарне відношення R задає дублі або ті з них, у яких різниця між очками на половинках більше 3.

11. Стрілок робить по мішені з очками від 2 до 9 два вистріли. Бінарне відношення R задає випадок, коли загальна сума очок ділиться на 3 або після першого і другого пострілу кількість очок відрізняється не більше ніж на одне.

12. Гральний кубик кидається двічі. Хід є виграшним, якщо в результаті першого і другого кидка набрана сума перевищує 8 очок. Бінарне відношення R задає виграшні ходи.

13. Бінарне відношення R задає секретний код, що складається з двох цифр, причому відомо, що в його складі цифр менших ніж 3 або цифри 9 немає і отримане в результаті число повинно ділитися на 3 або на 5, але не одночасно.

14. Гральні кісточки доміно поділені на дві рівні частини, на яких розміщені від 0 до 6 очок. Бінарне відношення R задає ті з них, в яких сума очок більше шести та менше одинадцяти, дублі не годяться. Парні комбінації очок, наприклад 1-5 і 5-1, враховуються один раз за убуванням індексів.

15. Стрілок робить по мішені з очками від 0 до 7 два вистріли. Бінарне відношення R задає випадок, коли після першого і другого вистрілу кількість очок однакова, або їх загальна сума знаходиться в діапазоні від 10 до 12 очок.

16. Гральний кубик кидається двічі. Хід є виграшним, якщо перший кидок відрізняється від другого не більше, ніж на одне очко, або в результаті двох кидків набрана сума знаходиться в діапазоні від 7 до 9 очок. Бінарне відношення R задає виграшні ходи.

17. Бінарне відношення R задає секретний код, що складається з двох цифр, причому перша цифра більша за другу, отримане в результаті число повинно ділитися на 4 або на 5, але не одночасно.

18. Гральні кісточки доміно поділені на дві рівні частини, на яких розміщені від 0 до 6 очок. Бінарне відношення R задає ті з них, в яких різниця між очками на половинках не перевищує 2.

19. Стрілок робить по мішені з очками від 1 до 8 два вистріли. Бінарне відношення R задає випадок, коли кількість очок після першого і другого вистрілу відрізняється не більше ніж на 1, або їх загальна сума більше 13 очок.

20. Гральний кубик кидається двічі. Хід є виграшним, якщо в результаті першого і другого кидка випала однакова кількість очок або набрана сума перевищує 9 очок. Бінарне відношення R задає виграшні ходи.

21. Бінарне відношення R задає секретний код, що складається з двох цифр, причому відомо, що в його складі цифр менших ніж 3 немає, перша цифра більше за другу, отримане в результаті число повинно ділитися на 4 або на 7, але не одночасно.

22. Гральні кісточки доміно поділені на дві рівні частини, на яких розміщені від 0 до 6 очок. Бінарне відношення R задає дублі або ті з них, в яких сума очок на половинках ділиться на 4.

23. Стрілок робить по мішені з очками від 2 до 9 два вистріли. Бінарне відношення R задає випадок, коли в результаті другого вистрілу було набране не менше очок ніж після першого та їх загальна сума перевищує 15 очок.

24. Гральний кубик кидається двічі. Хід є виграшним, якщо перший кидок відрізняється від другого не більше, ніж на два очка. Бінарне відношення R задає виграшні ходи.

25. Бінарне відношення R задає секретний код, що складається з двох цифр, причому відомо, що в його складі цифр більших за 6 немає, друга цифра більша за першу, отримане в результаті число повинно ділитися на 2 або на 5, але не одночасно.

26. Гральні кісточки доміно поділені на дві рівні частини, на яких розміщені від 0 до 6 очок. Бінарне відношення R задає ті з них, в яких сума очок більше чотирьох та менше дев'яти, дублі не годяться. Парні комбінації очок, наприклад 1-5 і 5-1, враховуються один раз за зростанням індексів.

27. Стрілок робить по мішені з очками від 1 до 7 два вистріли. Бінарне відношення R задає випадок, коли в результаті другого встріла було набрано стільки ж очок, як і після першого, або їх сума дорівнює 16.

28. Гральний кубик кидається двічі. Хід є виграшним, якщо в результаті першого і другого кидка випала однакова кількість очок або набрана в результаті сума очок ділиться на 3. Бінарне відношення R задає виграшні ходи.

29. Бінарне відношення R задає секретний код, що складається з двох цифр, причому відомо, що в його складі цифр менших ніж 3 або цифри 9 немає, перша цифра не менша з другою, отримане в результаті число повинно ділитися на 3 або на 75, але не одночасно.

30. Гральні кісточки доміно поділені на дві рівні частини, на яких розміщені від 0 до 6 очок. Бінарне відношення R задає дублі або ті з них, в яких різниця очок на половинках перевищує 4.

3.11. На множині A задано бінарне відношення $R \subseteq A \times A$. З'ясувати, якими властивостями володіє бінарне відношення R , чи є воно відношенням еквівалентності або порядку. Якщо відношення R є еквівалентністю, то записати його як список упорядкованих пар, побудувати граф відношення, за допомогою якого вказати класи еквівалентності та фактор-множину. Варіанти множин та відношень наведено в табл. 3.7.

Таблиця 3.7 – Варіанти для задачі 3.11

№	Множина A	Відношення R
1.	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{(x, y): x + y - \text{парне}, x, y \in A\}$
2.	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{(x, y): x + y < 6, x, y \in A\}$
3.	$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	$\{(x, y): x = y \text{ або } x + y = 3, x, y \in A\}$
4.	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{(x, y): x + y \text{ ділиться на } 3, x, y \in A\}$
5.	$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	$\{(x, y): x = y \text{ або } x + y < 3, x, y \in A\}$
6.	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{(x, y): x + y \text{ ділиться на } 2, x, y \in A\}$
7.	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{(x, y): x + y < 3, x, y \in A\}$
8.	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{(x, y): x = y \text{ або } x + y < 4, x, y \in A\}$

Продовження табл. 3.7

№	Множина A	Відношення R
9.	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{(x, y): x - y \leq 1, x, y \in A\}$
10.	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{(x, y): x - y > 1, x, y \in A\}$
11.	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{(x, y): x - y = 2, x, y \in A\}$
12.	$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	$\{(x, y): x^2 - y^2 \leq 0, x, y \in A\}$
13.	$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	$\{(x, y): x + y \geq 0, x, y \in A\}$
14.	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{(x, y): x - y < 0, x, y \in A\}$
15.	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{(x, y): x - 1 > y, x, y \in A\}$
16.	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{(x, y): x - y > 2, x, y \in A\}$
17.	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{(x, y): x = y \text{ або } x + y \text{ ділиться на } 3, x, y \in A\}$
18.	$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	$\{(x, y): x = y \text{ або } x + y \text{ ділиться на } 3, x, y \in A\}$
19.	$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	$\{(x, y): x = y \text{ або } x - y > 1, x, y \in A\}$
20.	$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	$\{(x, y): x + y < 4, x, y \in A\}$
21.	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{(x, y): x^2 - y^2 \leq 0, x, y \in A\}$
22.	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{(x, y): x = y \text{ або } x + y < 3, x, y \in A\}$
23.	$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	$\{(x, y): x - y > 1, x, y \in A\}$
24.	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{(x, y): x - y - \text{парне}, x, y \in A\}$
25.	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{(x, y): x - 2y \leq 1, x, y \in A\}$
26.	$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	$\{(x, y): x = y \text{ або } x - 2y > 1, x, y \in A\}$
27.	$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	$\{(x, y): x - y > 1, x, y \in A\}$
28.	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{(x, y): x + 2y \text{ ділиться на } 3, x, y \in A\}$
29.	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{(x, y): x = y \text{ або } 2x + y \text{ ділиться на } 3, x, y \in A\}$
30.	$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	$\{(x, y): x = y \text{ або } 2x + y \text{ ділиться на } 3, x, y \in A\}$

3.12. Задано множину $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ та відношення $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x - \text{дільник } y\}$. Показати, що відношення R є відношенням порядку. Побудувати діаграму Гассе частково впорядкованої множини (A, R) . Чи є на частково впорядкованої множини (A, R) незрівнянні елементи? Варіанти множин A наведено в табл. 3.8.

Таблиця 3.8 – Варіанти для задачі 3.12

№	Множина A						
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1.	1	2	3	4	6	8	24
2.	2	3	5	6	15	18	24
3.	2	3	4	6	8	9	18
4.	2	3	5	6	10	15	30
5.	1	2	3	6	8	9	18
6.	1	2	4	5	8	10	20
7.	2	3	5	15	18	21	30
8.	2	3	4	5	6	9	20
9.	1	2	5	8	15	16	20
10.	1	2	3	5	9	10	15
11.	2	3	4	5	9	10	20
12.	2	3	6	7	9	14	21
13.	2	3	5	10	15	18	30
14.	2	3	4	5	10	16	18
15.	1	3	5	7	9	14	15
16.	1	2	4	7	8	14	24
17.	2	4	5	7	10	28	35
18.	2	3	6	7	8	18	21
19.	2	3	4	8	9	12	21
20.	3	5	7	9	15	18	35
21.	3	4	5	12	15	18	60
22.	2	5	6	7	10	14	30
23.	2	3	7	8	9	21	24
24.	2	4	5	10	20	24	26
25.	2	5	7	10	12	14	35
26.	3	5	6	7	15	21	30
27.	1	3	6	7	14	21	28
28.	1	2	5	10	12	24	25
29.	2	3	4	6	7	21	28
30.	2	5	7	10	14	20	70

3.13. Вказати властивості, якими володіє бінарне відношення R , задане на множині A . З'ясувати, чи є відношення R еквівалентністю або порядком. Варіанти множин та відношень наведено в табл. 3.9.

Таблиця 3.9 – Варіанти для задачі 3.13

№	Множина A	xRu означає
1.	студенти НТУ «ХПІ»	x, u навчаються на одному курсі
2.	окружності на площині	x, u торкаються
3.	вектори у просторі	x, u мають однакову довжину
4.	мешканці міста на початок поточного року	x, u – подружжя
5.	мешканці міста на початок поточного року	x, u прочитали одну і ту саму книгу
6.	мешканці міста на початок поточного року	x, u знаходяться один від одного на відстані не менше 100 метрів
7.	прямі в просторі	x, u мають хоча б одну спільну точку
8.	мешканці міста на початок поточного року	x, u народилися в один день
9.	мешканці міста на початок поточного року	x є онуком u
10.	площини у просторі	x перпендикулярна u
11.	дійсні числа	x, u мають однакову дробову частину
12.	мешканці міста на початок поточного року	x на ескалаторі стоїть на три сходинки нижче, чим u
13.	яблука	x більш червоне, ніж u
14.	мешканці міста на початок поточного року	x, u – родичі
15.	мешканці міста на початок поточного року	x, u однакового зросту
16.	яблука	x, u різного сорту
17.	мешканці міста на початок поточного року	x є батьком u
18.	марафонці	x обігнав u на третьому кілометрі
19.	яблука	x коштує дорожче, ніж u

Продовження табл. 3.9

№	Множина A	xRu означає
20.	мешканці міста на початок поточного року	x, u різного зросту
21.	марафонці	x, u виступають в майках однакового кольору
22.	яблука	x, u вирости на одній гілці
23.	мешканці міста на початок поточного року	x є племінником u
24.	марафонці	x випереджає u на 3 кілометри
25.	яблука	x, u однакового сорту
26.	мешканці міста на початок поточного року	x, u народилися під одним знаком Зодіаку
27.	марафонці	x біжить зі швидкістю менше, ніж u
28.	прямі на площині	x паралельна u
29.	мешканці міста на початок поточного року	x на вулиці побачив u
30.	точки на площині	x на числовій осі знаходиться ліворуч u

4. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

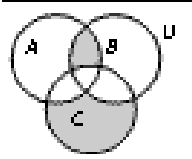
- Множина – це
 - набір точок площини;
 - натуральні числа;
 - набір змінних або змінних із заперечення;
 - упорядкована сукупність різних поміж собою об'єктів, які розглядаються як єдине ціле;
 - будь-яка сукупність різних поміж собою об'єктів, які розглядаються як єдине ціле.
- Основоположником теорії множин прийнято вважати
 - Г. Кантора;
 - Л. Ейлера;
 - М. Карно;
 - Дж. Венна;
 - Е. Дейкстру.

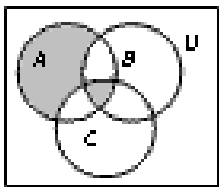
3. Множина, що не містить елементів, називається
 - а) універсальною або універсумом;
 - б) спеціальною;
 - в) порожньою;
 - г) нуль-повною;
 - д) нульовою.
4. Множина є скінченною, якщо
 - а) її елементи можна побачити;
 - б) вона є обмеженою;
 - в) її елементи можна перерахувати;
 - г) вона містить багато елементів;
 - д) вона містить небагато елементів.
5. Множина A є підмножиною множини B , якщо
 - а) вони складаються з однакових елементів;
 - б) кожен елемент множини B є елементом множини A ;
 - в) кожен елемент множини A є елементом множини B ;
 - г) множина A містить більше елементів, ніж множина B ;
 - д) множина B містить більше елементів, ніж множина A .
6. Підмножина A є власною підмножиною множини B , якщо
 - а) множина A непорожня і не збігається з множиною B ;
 - б) кожен елемент множини A є елементом множини B ;
 - в) $A \neq B$ і $A \neq \emptyset$;
 - г) $A = B$ або $A = \emptyset$.
 - д) кожен елемент множини A є елементом множини B і $A \neq B$.
7. Множина, яка має таку властивість, що всі множини, що розглядаються, є її підмножинами називається
 - а) універсальною або універсумом;
 - б) спеціальною;
 - в) багато-повною;
 - г) повною;
 - д) об'єднанням множин.
8. Множина, що всі містить елементи, які належать одночасно і першій множині A , і другій множині B , називається
 - а) універсальною;
 - б) перетином множин A і B ;
 - в) доповненням множини A ;
 - г) об'єднанням множин A і B ;
 - д) різницею множин A і B .

9. Множина, що всі містить елементи, які належать першій множині A та не належать другій множині B , називається
- універсальною;
 - перетином множин A і B ;
 - доповненням множини A ;
 - об'єднанням множин A і B ;
 - різницею множин A і B .
10. Множина, що всі містить елементи, які належать хоча б одній множині A або B , називається
- універсальною;
 - перетином множин A і B ;
 - доповненням множини A ;
 - об'єднанням множин A і B ;
 - різницею множин A і B .
11. Доповненням A називається
- різниця між множинами A і B ;
 - різниця між множиною A і універсальною множиною;
 - різниця між універсальною множиною і множиною A ;
 - різниця між множиною A і порожньою множиною;
 - різниця між порожньою множиною і множиною A .
12. Законом де Моргана щодо операції об'єднання множин A і B є
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
 - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
 - $(A \cap B) \cup A = A$;
 - $(A \cup B) \cap A = A$;
 - $A \cup B = B \cup A$.
13. Для операції різниця множин справедливо
- $A \setminus B = B \setminus A$;
 - $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
 - $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
 - $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
 - $A \setminus B = \overline{A} \cap B$.
14. Для графічного відображення операцій над множинами існують
- карти Карно;
 - діаграми Карно;
 - діаграми Ейлера-Карно;
 - діаграми Ейлера-Венна;
 - діаграми Карно-Дейкстри.

15. Кількість елементів скінченної множини називається
- а) потужністю;
 - б) булеаном;
 - в) декартовим добутком;
 - г) універсумом;
 - д) добутком.
16. Множина всіх підмножин деякої основної множини A
- а) потужністю;
 - б) булеаном;
 - в) декартовим добутком;
 - г) універсумом;
 - д) добутком.
17. Декартовим добутком $A \times B$ двох множин A і B називається
- а) множина усіх добутків елементів, що належать множинам A і B ;
 - б) множина всіх впорядкованих пар, перший елемент яких належить множині A , а другий – множині B ;
 - в) множина всіх невпорядкованих пар, один елемент яких належить множині A , а другий – множині B ;
 - г) множина всіх впорядкованих пар, перший елемент яких належить множині B , а другий – множині A ;
 - д) множина всіх невпорядкованих пар, перший елемент яких належить множині B , а другий – множині A .
18. Для декартового добутку множин справедливо
- а) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$;
 - б) $A \times B = B \times A$;
 - в) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
 - г) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
 - д) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
19. Потужність декартового добутку скінченних множин дорівнює
- а) нулю;
 - б) одиниці;
 - в) добутку їх потужностей;
 - г) сумі їх потужностей;
 - д) різниці їх потужностей.
20. Для множини $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ оберіть рівну множину
- а) $B \cup A$;
 - б) $(A \cap B) \setminus A$;
 - в) $A \setminus (B \setminus A)$;

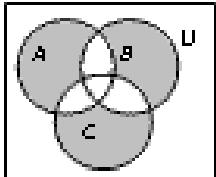
- г) $A \Delta B$;
 д) $(A \setminus B) \cap A$.
21. Нехай задані множини $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C = \{2,4,6,8,10\}$ на універсальній множині $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Чому дорівнює множина $D = A \cap (B \cup C)$?
- а) $\{2,4,5,6,7,8,9,10\}$;
 б) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$;
 в) $\{2,4,5,6,7\}$;
 г) $\{2,4,5,6,7,8\}$;
 д) $\{2,4,5,6,7,8,9\}$.
22. Нехай задані множини $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C = \{2,4,6,8,10\}$ на універсальній множині $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Чому дорівнює множина $D = (A \cap B) \cup C$?
- а) $\{2,4,5,6,7,8,9,10\}$;
 б) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$;
 в) $\{2,4,5,6,7\}$;
 г) $\{2,4,5,6,7,8\}$;
 д) $\{2,4,5,6,7,8,9\}$.
23. Нехай задані множини $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9,10\}$ на універсальній множині $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Чому дорівнює множина $D = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$?
- а) $\{1,2,4,5,6,7,8,10\}$;
 б) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$;
 в) $\{1,2,3,5,6,7,8,9,10\}$;
 г) $\{1,2,4,5,6,7,8\}$;
 д) $\{1,2,3,8,9,10\}$.
24. Нехай задані множини $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C = \{2,4,6,8,10\}$ на універсальній множині $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Чому дорівнює множина $D = A \cap B \cap C$?
- а) $\{4,6\}$;
 б) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$;
 в) $\{2,4,6,7,8,9,10\}$;
 г) $\{4,6,7,8\}$;
 д) $\{1,2,4,5,6,7,8,9\}$.
25. Нехай задані множини $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C = \{2,4,6,8,10\}$ на універсальній множині $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Чому дорівнює множина $D = A \cup B \cup C$?
- а) $\{4,6\}$;
 б) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$;

- в) $\{2,4,6,7,8,9,10\}$;
 г) $\{4,6,7,8\}$;
 д) $\{1,2,4,5,6,7,8,9\}$.
26. Нехай задані множини $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C = \{2,4,6,8,10\}$ на універсальній множині $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Чому дорівнює множина $D = A \cap B \cap \bar{C}$?
- а) $\{4, 6\}$;
 б) $\{5, 7\}$;
 в) $\{5, 6, 7\}$;
 г) $\{5, 6, 7, 8\}$;
 д) $\{4, 5, 6, 7, 8\}$.
27. Нехай задані множини $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C = \{2,4,6,8,10\}$ на універсальній множині $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Чому дорівнює множина $D = (A \cap C) \setminus \bar{B}$?
- а) $\{2,4,6,8\}$;
 б) $\{2,4,6\}$;
 в) $\{2,4\}$;
 г) $\{2\}$;
 д) $\{\}$.
28. Нехай задані множини $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C = \{2,4,6,8,10\}$ на універсальній множині $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Чому дорівнює множина $D = (A \Delta C) \setminus B$?
- а) $\{1,3,5,7,8,9,10\}$;
 б) $\{1,3,5,7,8,10\}$;
 в) $\{1,3,5\}$;
 г) $\{1,3\}$;
 д) $\{\}$.
29. Виділене темним кольором на діаграмі Ейлера-Венна відповідає
- 
- а) $\{\}$;
 б) $(A \cap B) \cup (C \setminus A \setminus B)$;
 в) $(A \cap B) \cap (C \setminus A \setminus B)$;
 г) $(A \cap B) \cup (C \setminus A)$;
 д) $(A \cap B) \cap (C \setminus A)$;
30. Виділене темним кольором на діаграмі Ейлера-Венна відповідає



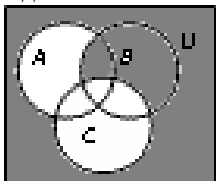
- а) $\{\}$;
- б) $(A \cap B) \cup (A \setminus (C \cup B))$;
- в) $(A \cap B \cap C) \cup (A \setminus (C \cup B))$;
- г) $(A \setminus C) \cup (A \cap B \cap C)$;
- д) $(C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$.

31. Виділене темним кольором на діаграмі Ейлера-Венна відповідає



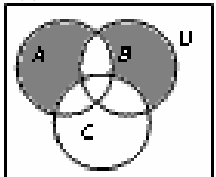
- а) $\{\}$;
- б) $(A \cup B \cup C) \Delta ((A \cap B \cap C))$;
- в) $(A \cap B \cap C) \cup (A \setminus (C \cup B))$;
- г) $(A \setminus C) \cup (A \cap B \cap C)$;
- д) $(C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$.

32. Виділене темним кольором на діаграмі Ейлера-Венна відповідає



- а) $\{\}$;
- б) $\overline{A \cup C} \setminus B$;
- в) $\overline{A \cup B} \setminus C$;
- г) $(\overline{A} \cap B) \setminus C$;
- д) $(\overline{A} \cup B) \setminus C$.

33. Виділене темним кольором на діаграмі Ейлера-Венна відповідає



- а) $\{\}$;
- б) $(A \Delta \overline{C}) \setminus B$;
- в) $(A \Delta \overline{B}) \setminus C$;
- г) $(A \Delta B) \setminus C$;
- д) $(A \Delta B) \setminus \overline{C}$.

34. Задано множину $A = \{a, b, c\}$. Скільки елементів буде в булеані $P(A)$?

- а) 1;
- б) 3;
- в) 4;
- г) 8;
- д) 9.

35. Яка з множин є булеаном множини $A = \{1, 2, 3\}$?

- а) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;
- б) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;
- в) $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$;
- г) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$;
- д) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{2, 3, 1\}\}$.

36. Нехай задано множини $A = \{1,2,3\}$, $B = \{b\}$. Скільки елементів буде в декартовому добутку $B \times A$
- 1;
 - 3;
 - 4;
 - 8;
 - 9.
37. Нехай задано множини $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a, b\}$. Декартовим добутком $B \times A$ буде множина
- $\{1,2,3, a, b\}$;
 - $\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$;
 - $\{\{a, 1\}, \{a, 2\}, \{a, 3\}, \{b, 1\}, \{b, 2\}, \{b, 3\}\}$;
 - $\{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$;
 - $\{\{1, a\}, \{2, a\}, \{3, a\}, \{1, b\}, \{2, b\}, \{3, b\}\}$.
38. Нехай задано множини $A = \{1,2,3\}$, $B = \{\}$. Декартовим добутком $B \times A$ буде множина
- $\{\}$;
 - $\{1,2,3\}$;
 - $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;
 - $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;
 - $\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$.
39. Бінарним відношенням між елементами двох множин A і B називається
- декартів добуток множин A і B ;
 - власна підмножина множини $A \times B$;
 - довільна підмножина декартового добутку множин A і B ;
 - невласна підмножина множини $A \times B$;
 - довільна підмножина булеану множин A і B .
40. Бінарне відношення є однорідним, якщо воно є
- довільною підмножиною множини $A \times A$;
 - власною підмножиною множини $A \times B$;
 - невласною підмножиною множини $A \times B$;
 - власною підмножиною множини $A \times A$;
 - невласною підмножиною множини $B \times A$.
41. Оберненим бінарним відношенням R^{-1} до відношення R , заданого на множині A , називається
- $R^{-1} = \{(x, y): (y, x) \in R\}$;
 - $R^{-1} = \{(x, y): (y, x)^{-1} \in R\}$;
 - $R^{-1} = \{(x, y): (x, y)^{-1} \in R\}$;

- г) $R^{-1} = \{(x, y) : (y^{-1}, x^{-1}) \in R\}$;
 д) $R^{-1} = \{(x, y) : (x^{-1}, y^{-1}) \in R\}$.
42. Бінарне відношення $R = \{(x, y) : x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, 3x = 2y\}$ буде складатися з наступних пар елементів
- $\{(2, 3), (3, 2)\}$;
 - $\{(3, 2), (6, 4)\}$;
 - $\{(2, 3), (4, 6)\}$;
 - $\{(2, 3), (3, 2), ((4, 6))\}$;
 - $\{(2, 3), (3, 2), ((4, 6), (6, 4))\}$.
43. Дано бінарне відношення $R = \{(x, y) : x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, x > y\}$. Область визначення відношення R дорівнює
- $\{\}$;
 - $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
 - $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
 - $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
 - $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
44. Дано бінарне відношення $R = \{(x, y) : x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, x > y\}$. Область значень відношення R дорівнює
- $\{\}$;
 - $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
 - $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
 - $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
 - $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
45. Дано бінарне відношення $R = \{(x, y) : x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, x > y\}$. Область визначення відношення R^{-1} дорівнює
- $\{\}$;
 - $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
 - $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
 - $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
 - $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
46. Якщо для будь-яких x з множини X виконується xRx , то відношення R називається
- рефлексивним;
 - антирефлексивним;
 - симетричним;
 - антисиметричним;
 - транзитивним.
47. Якщо для будь-яких x, y з X із xRy і yRx випливає $x = y$, то таке відношення R називається

- а) рефлексивним;
 - б) антирефлексивним;
 - в) симетричним;
 - г) антисиметричним;
 - д) транзитивним.
48. Якщо для будь-яких $x, y \in X$ із xRy випливає yRx , то таке відношення R називається
- а) рефлексивним;
 - б) антирефлексивним;
 - в) симетричним;
 - г) антисиметричним;
 - д) транзитивним.
49. Якщо для кожного $x \in X$ виконується xRx то таке відношення R називається
- а) рефлексивним;
 - б) антирефлексивним;
 - в) симетричним;
 - г) антисиметричним;
 - д) транзитивним.
50. Якщо для будь-яких $x, y, z \in X$ із xRy і yRx випливає xRz , то таке відношення R називається
- а) рефлексивним;
 - б) антирефлексивним;
 - в) симетричним;
 - г) антисиметричним;
 - д) транзитивним.
51. Матриця рефлексивного бінарного відношення, заданого на кінцевій множині володіє властивістю
- а) головна діагональ матриці містить тільки одиниці;
 - б) головна діагональ матриці містить тільки нулі;
 - в) матриця симетрична відносно головної діагоналі;
 - г) матриця має трикутний вигляд;
 - д) матриця має майже трикутний вигляд.
52. Матриця симетричного бінарного відношення, заданого на кінцевій множині володіє властивістю
- а) головна діагональ матриці містить тільки одиниці;
 - б) головна діагональ матриці містить тільки нулі;
 - в) матриця симетрична відносно головної діагоналі;
 - г) матриця має трикутний вигляд;

- д) матриця має майже трикутний вигляд.
53. Бінарне відношення є відношенням строгого порядку, якщо воно
- а) рефлексивне, симетричне й транзитивне;
 - б) антирефлексивне, антисиметричне й транзитивне;
 - в) рефлексивне, антисиметричне й транзитивне;
 - г) рефлексивне, симетричне й антитранзитивне;
 - д) антирефлексивне, антисиметричне й інтранзитивне.
54. Бінарне відношення є відношенням часткового порядку, якщо воно
- а) рефлексивне, симетричне й транзитивне;
 - б) антирефлексивне, антисиметричне й транзитивне;
 - в) рефлексивне, антисиметричне й транзитивне;
 - г) рефлексивне, симетричне й антитранзитивне;
 - д) антирефлексивне, антисиметричне й інтранзитивне.
55. Нехай R – відношення порядку. Якщо будь-які нерівні елементи x й y множини X порівнювальні у сенсі відношення R , то це відношення називається
- а) відношенням лінійного порядку;
 - б) відношенням часткового порядку;
 - в) відношенням строгого порядку;
 - г) відношенням відносного порядку;
 - д) відношенням квазіпорядку.
56. Бінарне відношення називається відношенням еквівалентності, якщо воно
- а) транзитивне й антисиметричне;
 - б) антирефлексивне й транзитивне;
 - в) рефлексивне й транзитивне;
 - г) симетричне й транзитивне;
 - д) рефлексивне, симетричне й транзитивне.
57. Бінарне відношення називається відношенням толерантності, якщо воно
- а) транзитивне й антисиметричне;
 - б) антирефлексивне й транзитивне;
 - в) рефлексивне й симетричне;
 - г) симетричне й транзитивне;
 - д) рефлексивне, симетричне й транзитивне.
58. Нехай R – бінарне відношення, задане на множині $X = \{a, b, c, d\}$ за допомогою упорядкованих пар. Укажіть, яке з наведених бінарних відношень є відношенням еквівалентності
- а) $R = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (b, a), (d, d), (d, a)\}$;
 - б) $R = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (b, a), (c, c), (d, d), (d, a)\}$;

- в) $R = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (b, a), (c, c), (c, a), (d, d), (d, a)\}$;
 г) $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, a), (c, c), (d, d), (d, a)\}$;
 д) $R = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (b, a), (c, c), (d, a)\}$.
59. Укажіть, яке з наведених бінарних відношень є відношенням еквівалентності
- " x кратне y " на множині цілих чисел;
 - " x неважче y " на множині деталей;
 - " x важче y " на множині деталей;
 - " x схожий з y " на множині людей;
 - " x одного кольору з y " на множині кольорових предметів.
60. Укажіть, яке з наведених бінарних відношень є відношенням толерантності
- " x кратне y " на множині цілих чисел;
 - " x неважче y " на множині деталей;
 - " x важче y " на множині деталей;
 - " x схожий з y " на множині людей;
 - " x одного кольору з y " на множині кольорових предметів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. А. М. Сергієнко. Комп'ютерна дискретна математика / Сергієнко А. М., Молчанова А. А., Романкевич В. О. – Київ : КПП ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 189 с.
2. Колос К. Р. Комп'ютерна дискретна математика: навчальний посібник / К. Р. Колос – Житомир: Державний університет "Житомирська політехніка", 2020. - 200 с.
3. Слесарев В. В. Дискретна математика: навч. посібник / В. В. Слесарев, І. В. Новицький, С. А. Ус. – М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2023. – 183 с. .
4. Балоба С. І. Дискретна математика. Навчальний посібник / С. І. Балоба. – Ужгород: ПП «АУТДОРШАРК», 2021. – 124 с.
5. Дискретна математика (частина 1). Навчальний посібник / В. М. Пивоварчик, О. М. Яковлева, О. М. Болдарєва. – Одеса : ПНПУ імені К. Д. Ушинського, 2022. – 145 с.
6. Висоцька В. А. Дискретна математика : практикум (Збірник задач з дискретної математики): навчальний посібник / В. А. Висоцька, В. В. Литвин, О. В. Лозинська. – Львів: Видавництво «Новий Світ – 2000», 2020. – 575 с.
7. Основи дискретної математики / Ю. Л. Капітонова, С. Л. Кривий, О. А. Летичевський, Г. М. Луцький, М. К. Печурін – Київ: Наукова думка, 2002. – 580 с.
8. Нікольський Ю. В. Дискретна математика / Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина. – Київ: Видавнича група BVH, 2007. – 368 с.
9. Бондаренко М. Ф. Комп'ютерна дискретна математика : підручник / М. Ф. Бондаренко, Н. В. Білоус, А. Г. Руткас. – Харків : Компанія СМІТ, 2004. – 480 с.
10. Боднарчук Ю. В. Основи дискретної математики : навч. посіб. / Ю. В. Боднарчук, Б. В. Олійник. – Київ : НаУКМА, 2007. – 138 с.

ЗМІСТ

1.	ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ	4
1.1.	Поняття множини та її елементів	4
1.2.	Підмножини.....	5
1.3.	Основні типи множин.....	5
1.4.	Способи задання множин	7
1.5.	Графічна інтерпретація множин	8
1.6.	Операції над множинами.....	11
1.7.	Властивості операцій над множинами	14
1.8.	Потужність множин, теорема Кантора і континуум-гіпотеза.....	17
1.9.	Декартовий добуток множин	22
1.10.	Поняття бінарного відношення	23
1.11.	Способи задання бінарних відношень	25
1.11.1.	Матричний спосіб задання відношень	25
1.11.2.	Задання відношень за допомогою фактор-множини	26
1.11.3.	Графік і схема відношення.....	27
1.11.4.	Граф відношення.....	27
1.12.	Властивості однорідних бінарних відношень	28
1.13.	Спеціальні бінарні відношення.....	33
1.13.1.	Відношення еквівалентності.....	33
1.13.2.	Відношення порядку.....	34
1.13.3.	Відношення толерантності.....	36
2.	ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ.....	37
3.	ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ.....	54
4.	ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ	86
	СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	98

Навчальне видання

МАРЧЕНКО Наталя Андріївна
МЕЛЬНИКОВ Олег Станіславович
КОЖИН Юрій Миколайович

ОСНОВИ ТЕОРІЇ МНОЖИН ТА ВІДНОШЕНЬ

Навчально-методичний посібник
до практичних занять з дисципліни «Дискретна математика»
для студентів спеціальностей 122 «Комп'ютерні науки»,
124 «Системний аналіз», 186 «Видавництво і поліграфія»

Відповідальна за випуск проф. Александрова Т. Є.
Роботу до видання рекомендував проф. Безменов М. І.

В авторській редакції

План 2025р., поз. 7

Підписано до друку 19.03.2025 р. Гарнітура Times. Ум. друк. арк. 6,39.

Видавничий центр НТУ «ХП».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Електронне видання