МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Н. В. Черемська, Н. П. Гиря, Т. А. Немченко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчально-методичний посібник
для студентів заочної форми навчання ННІ МІТ та ННІ ЕЕЕ

Затверджено
редакційно-видавничою
радою НТУ «ХПІ»,
протокол № 1 від 13.02.2025 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2025

УДК 51(076)
Ч-46

Рецензенти:

О. П. Нечуйвітер, д-р фіз.-мат. наук, професор, завідувачка кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Українська інженерно-педагогічна академія;

Ю. І. Першина, д-р фіз.-мат. наук, професор, завідувачка кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Черемська Н. В.

Ч-46 Вища математика : навчально-методичний посібник для студентів заочної форми навчання ННІ МІТ та ННІ ЕЕЕ / Н. В. Черемська, Н. П. Гиря, Т. А. Немченко. – Харків : НТУ «ХПІ», 2025. – 95 с.

ISBN 978-617-05-0548-4

Навчально-методичний посібник «Вища математика» містить необхідний теоретичний матеріал з тем «Ряди», «Подвійні інтеграли», «Криволінійні інтеграли 2-го роду». У посібнику розглянуто детальний розбір типових задач, зразок розв'язання варіанта контрольної роботи та завдання контрольної роботи.

Призначено для самостійного вивчення окремих тем з дисципліни «Вища математика» для студентів заочної форми навчання ННІ МІТ та ННІ ЕЕЕ.

Іл. 17. Бібліогр. 9 назв.

УДК 51(076)

ISBN 978-617-05-0548-4

ВСТУП

Навчально-методичний посібник «Вища математика» призначений для самостійного вивчення тем з дисципліни «Вища математика» студентами заочної форми навчання ННІ МІТ та ННІ ЕЕЕ. Зміст даного посібника відповідає робочим програмам навчальної дисципліни вища математика ННІ МІТ та ННІ ЕЕЕ.

Теми розділів вищої математики, які увійшли до посібника: «Ряди», «Подвійні інтеграли», «Криволінійні інтеграли 2-го роду». Ці теми мають широке застосування в теорії апроксимації функцій, знаходженні наближених розв'язків диференціальних рівнянь, які не мають аналітичного розв'язку, дозволяють розв'язувати інженерні задачі, пов'язані з обчисленням площ, центрів мас, об'ємів та інших характеристик об'єктів дослідження. Також математичний апарат цих тем використовується для розв'язання задач фізичного змісту при обчисленнях, наприклад, роботи сили, потоку рідини; подвійні інтеграли застосовуються в теорії ймовірностей та статистиці. Таким чином, розглянуті в навчально методичному посібнику теми є актуальними в різних галузях сучасної науки і техніки для розв'язання задач, що виникають при проєктуванні, виробництві та експлуатації електронних приладів і пристроїв, мають важливе значення в математичній освіті інженерів усіх спеціальностей.

Метою цього навчально-методичного посібника є надання допомоги студентам у вивченні окремих розділів з дисципліни «Вища математика», формуванні їх математичного мислення та освоєнні прийомів математичного апарату для розв'язання задач.

В навчально-методичному посібнику надано необхідний теоретичний матеріал для кожної теми, детально розібрано типові приклади та задачі. Навчально-методичний посібник варіанти завдань підсумкової контрольної роботи, яка охоплює розглянуті теми, також надано зразок розв'язання задач типового варіанту контрольної роботи.

Для полегшення самостійної роботи та більш докладного знайомства з темами подано список рекомендованої літератури, до якого увійшли підручники і навчально-методичні видання, що містять розглянуті теми.

Навчально-методичний посібник може стати в нагоді також студентам денної форми навчання в умовах скороченої кількості аудиторних занять та студентам, які навчаються дистанційно за особистим навчальним планом, а також викладачам при плануванні роботи на практичних заняттях.

Тема 1: РЯДИ

Числові ряди. Основні означення

Нехай дано числову послідовність $\left(u_n\right)$. Вираз вигляду

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... \tag{1.1}$$

або, що те саме, вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається *числовим рядом* (або просто *рядом*).

Числа u_1, u_2, …, u_n, … називаються *членами ряду*, u_1 – перший член, u_2 – другий член, …, u_n – n – й або *загальний член* ряду.

Для того, щоб задати ряд (1.1), достатньо задати його загальний член.

З кожним рядом вигляду (1.1) будемо зв'язувати (ставити у відповідність) суми

$$\begin{aligned}
&S_1 = u_1, \\
&S_2 = u_1 + u_2, \\
&S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \\
&........................ \\
&S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n, \\
&..........................
\end{aligned}$$

які називаються *частковими сумами* цього ряду. Часткові суми ряду утворюють деяку числову послідовність $\left(S_n\right)$.

Ряд (1.1) називається збіжним, якщо збігається послідовність його часткових сум $\left(S_n\right)$, тобто якщо існує скінченна границя

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S .$$

Число S при цьому називають *сумою ряду* (1.1) і записують:

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ .$$

При цьому вважають також, що ряд (1.1) збігається до числа S. Якщо ж послідовність часткових сум ряду (1.1) розбігається, то ряд (1.1) називається *розбіжним*. У цьому випадку ряд не має суми.

Вираз $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$ називається *залишком ряду*.

Таким чином,

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S_n + r_n \ .$$

Залишок ряду – це також ряд.

Розглянемо далі ряд геометричної прогресії

Ряд вигляду

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \ \left(a \neq 0\right) \tag{1.2}$$

називається *геометричною прогресією*, число q при цьому називається *знаменником прогресії*.

Теорема 1.1. Геометрична прогресія збігається тоді і тільки тоді, коли знаменник прогресії за модулем менший від одиниці. Таким чином, якщо $|q| < 1$, то геометрична прогресія (1.2), тобто ряд вигляду $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$, збігається, а її сума дорівнює

$$S = \frac{a}{1-q} \ ,$$

а якщо $|q| > 1$, $q = \pm 1$, то геометрична прогресія (1.2) $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$ розбігається.

Властивості збіжних рядів

Властивість 1.2. Нехай c – дійсне число. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$, що називається *добутком ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ на число c, причому суми цих рядів зв'язані рівністю $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Властивість 1.3. Якщо ряди $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k$ і $\sum_{k=1}^{\infty} u''_k$ збігаються, то збігається і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(u'_k + u''_k\right)$, який називається *сумою* даних *рядів,* причому суми цих рядів зв'язані рівністю: $S = S' + S''$, де $S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(u'_k + u''_k\right)$, $S' = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k$, $S'' = \sum_{k=1}^{\infty} u''_k$.

Наслідок. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} u''_n$ збігаються, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(u'_n - u''_n\right)$, що називається *різницею* даних *рядів*, причому суми цих рядів зв'язані рівністю: $S = S' - S''$, де $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u'_n - u''_n\right)$, $S' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n$, $S'' = \sum_{n=1}^{\infty} u''_n$.

Властивість 1.4. Розглянемо два ряди:

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + u_{n+1} + ...,$$

$$u_{n+1} + u_{n+2} + ... u_{n+k} + ... \quad \text{(залишок ряду).}$$

Ці ряди одночасно збігаються або розбігаються, причому, якщо перший ряд збігається до S, то другий ряд збігається до $r_n = S - (u_1 + u_2 + ... + u_n)$.

Властивість 1.5. (*Необхідна умова збіжності ряду*). Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то його n – й член u_n прямує до нуля за умови $n \to \infty$: $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

Ознаки збіжності числових рядів з додатними членами

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається рядом з додатними членами, якщо всі його члени невід'ємні, тобто $u_n \geq 0 \ (n = 1, 2, ...)$.

Теорема 1.6. (*Ознака порівняння*). Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ – ряди з додатними членами і нехай, починаючи з будь-якого n, виконується нерівність $u_n \leq u'_n$. Тоді:

1) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ збігається, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ також збігається;

2) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ також розбігається.

Теорема 1.7. (*Гранична ознака порівняння*). Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ – ряди з додатними членами, і нехай виконується умова

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u'_n}=M=\mathrm{const}\neq 0\,.$$

Тоді ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n$ поводять себе однаково, тобто збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад 1.1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+4n-1}}$.

Розв'язання. Розглянемо допоміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$. Це узагальнений гармонічний ряд $\left(\alpha=\frac{3}{2}>1\right)$, відомо, що він збігається. За граничною ознакою порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u'_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+4n-1}}\cdot\frac{\sqrt{n^3}}{1}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\left\|\begin{matrix}\text{за правилом}\\ \text{старших степенів}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix}k=\dfrac{3}{2},a_0=1\\ m=\dfrac{3}{2},b_0=1\end{matrix}\right\|=1=\mathrm{const}\neq 0.$$

Отже ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+4n-1}}$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ поводять себе однаково, тобто збігаються.

Відповідь: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+4n-1}}$ збігається за граничною ознакою порівняння.

Теорема 1.8. *(Ознака Д'Аламбера).* Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ – ряд з додатними членами і нехай існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\alpha\ , \qquad (1.3)$$

тоді:

1) якщо $\alpha>1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ розбігається,

2) якщо $\alpha<1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ збігається,

3) якщо $\alpha=1$, то питання про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ залишається відкритим (ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ може збігатись, а може й розбігатись). В цьому разі потрібно проводити додаткові дослідження.

Приклад 1.2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

Розв'язання. Запишемо $u_n=\frac{n}{2^{n+1}}$, $u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$ для того, щоб далі використовувати ознаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^n\cdot 2}\cdot\frac{2^n}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\left\|\begin{matrix}\text{за правилом}\\ \text{старших степенів}\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}<1.$$

Відповідь: за ознакою Д'Аламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ збігається.

Теорема 1.9. *(Радикальна ознака Коші)*. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ – ряд з додатними членами і нехай існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\alpha\ , \qquad (1.4)$$

тоді:

1) якщо $\alpha > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається,

2) якщо $\alpha < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається,

3) якщо $\alpha = 1$, то питання про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ залишається відкритим (ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ може збігатись, а може й розбігатись, треба проводити додаткові дослідження).

Приклад 1.3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Розв'язання. В нашому прикладі $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right]^{-(n+1)\cdot\frac{-n}{n+1}} = \left\| \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1} = -1 \\ \text{за правилом} \\ \text{старших степенів} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c} \text{друга визначна} \\ \text{границя} \end{array} \right\| = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1.$$

Відповідь: за радикальною ознакою Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ збігається.

Теорема 1.10. *(Інтегральна ознака Коші збіжності ряду).*

Нехай ряд з додатними членами має вигляд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, де неперервна функція $f(x)$ визначена на проміжку $1 \le x < +\infty$, додатна і монотонно спадає на цьому ж проміжку, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \qquad (1.5)$$

та невласний інтеграл

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx \qquad (1.6)$$

одночасно збігаються або розбігаються.

Приклад 1.4. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ на збіжність.

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Справді, функція $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ визначена на проміжку $1 \le x < +\infty$, додатна і монотонно спадає на цьому ж проміжку. Відомо, що невласний інтеграл $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ збігається при $\alpha > 1$ та розбігається при $\alpha \le 1$, тому $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ збігається при $\alpha > 1$ та розбігається при $\alpha \le 1$.

Відповідь: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ збігається при $\alpha > 1$ та розбігається при $\alpha \le 1$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ – називається *узагальненим гармонічним рядом,* при $\alpha = 1$ маємо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – *гармонічний ряд*.

Приклад 1.5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 n}{1+n^2}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{\mathrm{arctg}^2 x}{1+x^2}$. Її похідна $f'(x)$ від'ємна при $x>2$. Тобто, $f(x)$ монотонно спадає за умови $x\to+\infty$. Застосуємо інтегральну ознаку Коші:

$$\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}^2 x}{1+x^2}dx=\left.\frac{\mathrm{arctg}^3 x}{3}\right|_1^{\infty}=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi^3}{8}-\frac{\pi^3}{64}\right)=\frac{7\pi^3}{192}.$$

Тобто, невласний інтеграл збігається, а тому збігається і числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}^2 n}{1+n^2}$.

Відповідь: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}^2 n}{1+n^2}$ збігається за інтегральною ознакою Коші.

Числові ряди з довільними членами

Розглянемо ряди з довільними членами. Одні з членів ряду можуть бути від'ємними, інші – додатними або дорівнювати нулю.

Нехай ряд має вигляд:

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{1.7}$$

ряд (1.7) – ряд з довільними членами. Складемо ряд з абсолютних величин цього ряду:

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots. \tag{1.8}$$

Зрозуміло, що ряд (1.8) – це додатний числовий ряд.

Теорема 1.11. *(Достатня ознака збіжності рядів з довільними членами).* Якщо ряд (1.8) $\left(\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|\right)$ збігається, то збігається і ряд вигляду (1.7) $\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n\right)$.

Наведемо кілька означень.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, складений з модулів членів даного ряду.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається *умовно збіжним*, якщо він збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, складений з модулів членів даного ряду, розбігається.

Приклад 1.6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$.

Розв'язання. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin \alpha n|}{n^2}$, складений з модулів членів даного ряду. Зрозуміло, що $\frac{|\sin n\alpha|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$, оскільки $|\sin n\alpha| \le 1$.

Відомо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається (маємо узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, в нашому випадку $\alpha = 2 < 1$, тобто збігається). За ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$ збіжний, а тому, за достатньою ознакою збіжності рядів з довільними членами, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ збігається абсолютно.

Знакопереміжність ряду. Ознака Лейбніца

Розглянемо ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1} \cdot u_n + ..., \qquad (1.9)$$

в якому $u_n > 0 \ (n = 1, 2, ...)$, такий ряд називається *знакопереміжним*.

Теорема 1.12. *(Ознака Лейбніца).* Нехай члени ряду (1.9) задовольняють умовам:

1) $u_{n+1} \le u_n \ \ (n = 1, 2, ...)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Тоді ряд вигляду (1.9) збігається та його сума

$$0 < S \le u_1. \qquad (1.10)$$

Зауваження. З нерівності (1.10) можна отримати співвідношення, за допомогою якого зручно оцінювати похибку, яку ми допускаємо, замінивши суму ряду S його частковою сумою S_n.

Помітимо, що остача ряду, яку ми відкидаємо, також є знакопереміжним рядом, сума якого, в свою чергу, згідно ознаки Лейбніца по модулю буде менше, ніж модуль першого члена цього ряда. Таким чином, похибка обчислення суми початкового знакопереміжного ряду буде по модулю менше, ніж модуль першого з відкинутих членів цього ряду.

Приклад 1.7. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Ряд знакопереміжний. Перевіримо умови Лейбніца:

$$1)\ 1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > ...;$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Отже, ряд збіжний, треба з'ясувати абсолютно чи умовно? Складемо ряд із модулів членів даного ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ –

узагальнений гармонічний ряд, розбіжний $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$. Тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ збігається умовно.

Відповідь: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ збігається умовно.

Приклад 1.8. Обчислити наближено суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3+1}$ з похибкою а) 0,001; б) 0,01.

Розв'язання: Заданий ряд є знакопереміжним, також можна перевірити за допомогою ознаки Лейбніца, що цей ряд збігається.

а) Запишемо декілька перших членів заданого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{28} - \frac{1}{65} + \frac{1}{126} - \frac{1}{217} + \frac{1}{344} - \frac{1}{513} + \frac{1}{730} - \frac{1}{1001} + \ldots$$

Помітимо, що $|a_9| = \frac{1}{730} > 0,001,$ а $|a_{10}| = \frac{1}{1001} < 0,001$, тобто відкидаючи всі члени ряду, починаючи з a_{10}, отримаємо, що $S \approx S_9$ з похибкою 0,001.

б) Скористаємось пунктом а) цього прикладу, щоб помітити, що $|a_4| = \frac{1}{65} > 0,01,$ а $|a_5| = \frac{1}{126} < 0,01$, тому, відкинувши члени ряду, починаючи з a_5, отримаємо наближене значення суми ряду $S \approx S_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{28} - \frac{1}{65}$ з похибкою, яка менша, ніж 0,01.

Відповідь: а) $S \approx S_9$; б) $S \approx S_4$.

Функціональні ряди

Нехай дано послідовність функцій $U_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$, визначених на множині E. Вираз вигляду

$$U_1(x) + U_2(x) + ... + U_n(x) + ... \qquad (1.11)$$

або, що те саме, вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$, називається *функціональним рядом*.

Функціональний ряд (1.11) називається *збіжним на множині* E до функції $S(x)$, якщо на цій множині збігається до $S(x)$ послідовність його часткових сум $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} U_n(x)$, тобто

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} U_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_n(x).$$

При фіксованому $x = x_0$ отримуємо числовий ряд

$$U_1(x_0) + U_2(x_0) + ... + U_n(x_0) + ...$$

Якщо цей числовий ряд збігається, то точка $x = x_0$ є *точкою збіжності функціонального ряду*, в іншому випадку x_0 – *точка розбіжності функціонального ряду*.

Приклад 1.9. Дослідити функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{nx}}{n^2}$ на збіжність при $x = 0$ та $x = 1$.

Розв'язання. Якщо $x = 0$, то отримуємо узагальнений гармонічний $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $(\alpha = 2 > 1)$ – це збіжний числовий ряд.

При $x=1$ отримуємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$. Дослідимо його на збіжність. Для того, щоб скористатись ознакою Д'Аламбера, запишемо:

$$u_n=\frac{2^n}{n^2},\quad u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)^2}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\text{за правилом}\\ \text{старших степенів}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}k=2,\ a_0=2\\ m=2,\ b_0=1\end{matrix}\right\|=\frac{2}{1}=2>1.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$ розбігається при $x=1$.

Відповідь: заданий ряд при $x=0$ є збіжним, при $x=1$ розбіжним.

Сукупність точок збіжності функціонального ряду складає *область збіжності* цього ряду.

Ряд називається *абсолютно збіжним на множині* E, якщо на множині E збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|U_n(x)\right|$.

Якщо функціональний ряд (1.11) збіжний, тоді його можна подати у вигляді:

$$S(x)=S_n(x)+r_n(x),$$

де $r_n(x)=U_{n+1}(x)+U_{n+2}(x)+\ldots$ – залишок ряду.

Методи знаходження області збіжності функціонального ряду засновані на застосуванні ознак Д'Аламбера або радикальної ознаки Коші.

Зважаючи на вигляд функціонального ряду, використовують одну з наступних границь:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n}\right| = \rho(x);$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|U_n(x)\right|} = \gamma(x).$$

Далі, згідно відповідних ознак збіжності, розглядають нерівності $\rho(x)<1$ або $\gamma(x)<1$ та отримують множину E, на якій функціональний ряд збігається абсолютно.

Якщо $\rho(x)>1$ або $\gamma(x)>1$, загальний член ряду не прямує до нуля, а тому ряд розбігається.

Граничні точки множини E, для яких $\rho(x)=1$ та $\gamma(x)=1$, досліджують на збіжність окремо.

В цих точках функціональний ряд можливо збігається абсолютно, можливо – умовно, а можливо розбігається.

Приклад 1.10. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$.

Розв'язання. Складаємо ряд із абсолютних величин вихідного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|e^{-nx}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx},$$

тому що $e^{-nx}>0$, $\forall x\in R$ і скористаємось радикальною ознакою Коші. Обчислимо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|U_n(x)\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-nx}} = e^{-x}.$$

За ознакою Коші цей ряд збігається, коли $e^{-x}<1$, тобто при $x\in(0,+\infty)$.

Перевіримо цей ряд на збіжність за умови $x=0$. Отриманий при $x=0$ числовий ряд має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\cdot 0} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+\ldots+1+\ldots .$$

Цей ряд розбігається, тому що для нього не виконується необхідна умова збіжності. Отже, областю збіжності вихідного ряду є область $E = (0, \infty)$.

Відповідь: область збіжності вихідного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ це множина $E = (0, \infty)$.

Приклад 1.11. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 3}{x^{2n}}$.

Розв'язання. Обчислимо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{4^{n+1}+3}{x^{2n+2}} \cdot \frac{x^{2n}}{4^n+3} \right| = \frac{1}{x^2} \lim_{n\to\infty} \frac{4^n\left(4 + \frac{3}{4^n}\right)}{4^n\left(1+\frac{3}{4^n}\right)} = \frac{4}{x^2} .$$

Розв'яжемо нерівність $\frac{4}{x^2} < 1$.

$$x^2 > 4 \Rightarrow |x| > 2 ,$$

$$x > 2, \;\; x < -2 .$$

Область збіжності E містить інтервали $(-\infty, -2)$ та $(2, +\infty)$.

Розглянемо поведінку ряду за умови $x = 2$ та $x = -2$.

Зрозуміло, що загальний член $U_n(\pm 2) = \frac{4^n + 3}{4^n}$ не прямує до нуля, бо

$$\lim_{n\to\infty} U_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n + 3}{4^n} = 1 .$$

Зауважимо, що не виконується необхідна умова збіжності числових рядів, тобто за умови $x = \pm 2$ функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 3}{x^{2n}}$ розбігається.

Відповідь: область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 3}{x^{2n}}$ є область $E = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

Рівномірна і правильна збіжність функціональних рядів

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ називається *правильно збіжним* (таким, *що має мажоранту*) в деякій області E, якщо існує такий збіжний числовий ряд з додатними членами $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, що для всіх значень $x \in E$ виконуються нерівності:

$$|U_k(x)| \le a_k, \ k = 1, 2, 3\dots \qquad (1.12)$$

Числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ при цьому називається *мажорантою* ряду $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$.

Приклад 1.12. Дослідити ряд на правильну збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2}$.

Розв'язання.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2}$ правильно збігається на проміжку $(-\infty, 0]$. Дійсно, виконується нерівність $\frac{e^{nx}}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$, $\forall x \in (-\infty, 0]$. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $(\alpha = 2 > 1)$ збігається (узагальнений гармонічний ряд). Тому функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2}$ збігається правильно на цьому проміжку.

Ряд, що має мажоранту, збігається абсолютно у будь-якій точці області збіжності E.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$, збіжний в області E, називається *рівномірно збіжним в області* E, якщо $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon)$, і такий, що за умови $n > N(\varepsilon)$ справедлива нерівність $|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in E$.

Теорема 1.13. (Ознака Вейерштрасса). Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$, правильно збіжний на множині E, збігається рівномірно на множині E.

Приклад 1.13. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots$$

Розв'язання: Зауважимо, що ряд

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots,$$

збігається рівномірно на всій числовій прямій, оскільки для всіх $n = 1, 2, \ldots$ і всіх $x \in (-\infty, +\infty)$ виконуються нерівності

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2},$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $(\alpha = 2 > 1)$ є збіжним узагальненим гармонічним рядом.

Відповідь: заданий ряд збігається рівномірно на всій числовій осі.

Властивості рівномірно збіжних рядів

Багато властивостей суми скінченного числа функцій, взагалі кажучи, не переносяться на суму нескінченного числа функцій, тобто на суму функціонального ряду. Однак, суми рівномірно збіжних функціональних рядів мають ряд властивостей сум скінченного числа функцій. Наведемо ряд таких властивостей.

Теорема 1.14. *(Про неперервність суми функціонального ряду).* Якщо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ на відрізку $[a, b]$ збігається рівномірно, а члени цього ряду $U_n(x)$ є неперервними функціями в точці $x_0 \in [a, b]$, то сума $S(x)$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ неперервна в точці x_0.

Наслідок. Якщо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ на відрізку $[a, b]$ збігається рівномірно, а члени цього ряду $U_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ є неперервними функціями на цьому відрізку, то сума $S(x)$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ є неперервною функцією на відрізку $[a, b]$.

Теорема 1.15. *(Про інтегрування функціонального ряду)*. Якщо функціональний ряд

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$$

на відрізку $[a, b]$ збігається рівномірно, а члени цього ряду $U_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ є неперервними функціями на цьому відрізку, то

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b U_n(x)\,dx . \tag{1.13}$$

Приклад 1.14. Обчислити суму ряду

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ... \ .$$

Розв'язання. Функціональний ряд

$$1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^{n+1}\cdot x^{2n-2} + ...$$

збігається рівномірно за умови $|x| = q < 1$ та є сумою членів спадної геометричної прогресії, знаменник якої дорівнює $(-x^2)$.

Сума цього ряду $S(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ (за формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії $S = \dfrac{b_1}{1-q}$). Таким чином, маємо:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^{n+1}\cdot x^{2n-2} + ...$$

Інтегруючи цю рівність від 0 до x, де $x < 1$, отримуємо:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - ... + (-1)^{n+1}\cdot t^{2n+2} + ...\right)dt ,$$

а це й означає, що

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ...$$

Відповідь: $\operatorname{arctg} x$.

Теорема 1.16. *(Про диференціювання функціонального ряду).*

Нехай функції $U_n(x)$ $(n=1,2,...)$ неперервні на відрізку $[a,b]$ разом із своїми похідними першого порядку і нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n'(x)$ на відрізку $[a,b]$ збігається рівномірно, тоді, якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ збігається хоча б в одній точці $C \in [a,b]$, то він збігається на відрізку $[a,b]$ і його сума

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$$

на цьому відрізку має неперервну похідну, причому

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x).$$

Степеневі ряди. Теорема Абеля

Степеневим рядом називається функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \tag{1.14}$$

де a_n $(n=0,1,2,...)$ – сталі числа, що називаються *коефіцієнтами степеневого ряду*, а x_0 – довільне фіксоване дійсне число.

Якщо $x_0=0$, маємо

$$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+... . \tag{1.15}$$

Надалі розглядаємо тільки ряди вигляду (1.15).

Зауважимо, що степеневий ряд (1.14) можна звести до ряду (1.14) підстановкою $x-x_0=t$.

Теорема 1.17. *(Теорема Абеля).*

1) Якщо степеневий ряд (1.15) збігається в деякій точці $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$, то він збігається абсолютно при всіх значеннях x, для яких $|x| < |x_0|$.

2) Якщо ряд (1.15) розбігається при деякому значенні $x = x_0$, то він розбігається при всіх x, для яких $|x| > |x_0|$.

Якщо степеневий ряд (1.15) збігається на інтервалі $(-R, R)$ та розбігається зовні інтервалу $[-R, R]$, то інтервал $(-R, R)$ називається інтервалом збіжності, а число R – *радіусом збіжності* степеневого ряду.

Поведінка ряду на кінцях інтервалу $x = \pm R$ аналізується додатково.

Сукупність точок збіжності степеневого ряду складає *область збіжності* цього ряду.

Зрозуміло, що степеневий ряд збігається в точці $x = 0$. Якщо інших точок збіжності немає, то його радіус збіжності $R = 0$.

Якщо ряд збігається в будь-якій точці числової осі, то його радіус $R = \infty$.

Знайдемо радіус збіжності степеневого ряду (1.15) за допомогою ознак Д'Аламбера та радикальної ознаки Коші.

За ознакою Д'Аламбера отримуємо наступне:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| < 1,$$

звідки

$$|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Таким чином,

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

За радикальною ознакою Коші, маємо:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Приклад 1.15. Знайти радіус та область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$.

Розв'язання. Заданий функціональний ряд є степеневим.

Знайдемо його радіус збіжності за формулою $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Таким чином,

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1.$$

Вихідний ряд збігається для всіх x, що задовольняють нерівності:

$$|x+3|<1 \text{ або } -4<x<-2.$$

Перевіримо ряд на збіжність в точках, які є кінцями інтервалу збіжності. Для цього підставимо відповідні значення змінної в умову задачі.

Числовий ряд, що відповідає $x=-2$, має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Це збіжний узагальнений гармонічний ряд $(\alpha=2>1)$. Отже, $x=-2$ є точкою збіжності ряду.

Числовий ряд, що відповідає $x=-4$, має вигляд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ і теж збігається, більш того, абсолютно, оскільки збігається ряд, складений з абсолютних значень $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Отже, і $x=-4$ є точкою збіжності ряду.

Таким чином, область збіжності вихідного ряду є $[-4,-2]$.

Відповідь: радіус збіжності $R=1$; $[-4,-2]$ – область збіжності ряду.

Степеневий ряд в своєму інтервалі збіжності, взагалі кажучи, збігається не рівномірно. Але є справедливими такі теореми.

Теорема 1.17. Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ збігається рівномірно на кожному відрізку $[x_0-r, x_0+r]$, що лежить всередині його інтервалу збіжності.

Наслідок. Сума $f(x)$ степеневого ряду неперервна всередині його інтервалу збіжності.

Теорема 1.18. Нехай степеневий ряд $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ має радіус збіжності $R>0$. Тоді:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}$, який утворений почленним диференціюванням заданого степеневого ряду, має той самий радіус збіжності R;

2) сума $f(x)$ степеневого ряду є диференційована функція в середині його інтервалу збіжності, причому виконується рівність

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n\left(x-x_0\right)^{n-1}.$$

Теорема 1.19. Нехай степеневий ряд має радіус збіжності $R>0$ і нехай $f(x)$ – його сума. Тоді для будь-якого $x\in\left(x_0-R,\, x_0+R\right)$ є правильною рівність:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = a_0\left(x-x_0\right)+\frac{a_1}{2}\left(x-x_0\right)^2+\ldots+\frac{a_n}{n+1}\left(x-x_0\right)^{n+1}+\ldots,$$

причому радіус збіжності цього ряду дорівнює радіусу збіжності вихідного степеневого ряду.

Періодичні функції та їх властивості

У природі й техніці існують періодичні процеси і явища. Прикладами таких процесів можуть бути механічні та електромагнітні коливання, періодичні рухи в теорії пружності, акустиці, радіо- та електротехніці.

Моделюють періодичні процеси за допомогою періодичних функцій. Нагадаємо, що функцію називають періодичною з періодом $T>0$, якщо вона визначена на необмеженій множині D та існує число $T>0$ таке, що для кожного $x\in D(f)$, $(x+T)\in D(f)$ та вірна рівність $f(x+T)=f(x)$.

Властивості періодичних функцій :

1) сума, різниця, добуток і частка T – періодичних функцій є також T – періодичною функцією;

2) якщо функція $f(x)$ має період T, то функція $y=f(ax)$, $a>0$, має період $\dfrac{T}{a}$;

3) якщо функція f є T – періодичною, то

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx.$$

Для побудови графіка періодичної функції достатньо побудувати його на будь-якому відрізку довжини T, далі періодично продовжити на всю область визначення.

Приклади періодичних функцій: $f(x) = cosx$, $T = 2\pi$; $f(x) = sin2x,\ T = \pi$.

Найпростішим коливанням з періодом T є просте гармонічне коливання (Рис.1)

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi_0), t \geq 0,$$

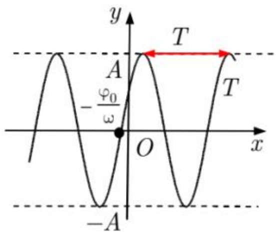

Рис. 1

де A — амплітуда коливання; $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ – кругова частота; ϕ_0 – початкова фаза. Функцію $x(t)$ та її графік називають простою гармонікою.

Коливання, утворені накладанням кількох простих гармонік, називають складеними гармонічними коливаннями, графіки яких можуть значно відрізнятись від графіків окремих гармонік. Виникає питання: Чи не можна деяку періодичну функцію зобразити сумою простих гармонік?

Функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 x+b_n\sin n\omega_1 x)$$

називають *тригонометричним,* сталі $a_0, a_n, b_n,\ (n=1,2,3,\ldots)$ – коефіцієнтами тригонометричного ряду, ω_1 — основною частотою.

Систему функцій

$$\{1, \sin n\omega_1 x, \cos n\omega_1 x\},\ n=1,2,3,\ldots,$$

називають *тригонометричною*. Оскільки членами тригонометричного ряду є періодичні функції з періодом $T=\dfrac{2\pi}{\omega_1}$, то в разі збіжності ряду його сума $S(x)$ є також періодичною функцією з періодом T.

Розглянемо означення ортогональної системи функцій.

Скінченну чи нескінченну систему функцій

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n, ...\ (\varphi_n \neq 0, n=1,2,3,\ldots)$$

називають *ортогональною* на відрізку $[a,b]$, якщо для будь-яких різних номерів *n* та *m* виконується умова:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=0.$$

Тригонометричний ряд. Коефіцієнти ряду Фур'є

Розвинути T – періодичну функцію $f(x)$ у тригонометричний ряд означає знайти тригонометричний ряд, який збігається до функції $f(x)$ (за винятком, можливо деяких точок).

Теорема 1.20. Якщо функцію $f(x)$, визначену на відрізку $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$, розвинути у рівномірно збіжний тригонометричний ряд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 x+b_n\sin n\omega_1 x),\ \omega_1=\frac{2\pi}{T},$$

то це розвинення єдине, а коефіцієнти знаходяться за формулами

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)dx,\ n = 1,2,3,\ldots;$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)dx, n = 1,2,3,\ldots.$$

Такий ряд називають *тригонометричним рядом Фур'є* функції $f(x)$, а коефіцієнти цього ряду називають *коефіцієнтами Фур'є* функції $f(x)$.

Теорема 1.21. *(Теорема Діріхле).* Якщо T– періодична функція $f(x)$ задовольняє умові Діріхле на відрізку $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, тобто є на цьому відрізку

– кусково-монотонною;

– обмеженою,

то її ряд Фур'є збігається у кожній точці x цього відрізку. Причому для суми

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 x + b_n \sin n\omega_1 x),\ \omega_1 = \frac{2\pi}{T},$$

цього ряду виконано умови:

1) $S(x) = f(x),$ якщо x є точкою неперервності функції $f(x)$;

2) $S(x) = \dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, якщо x є точкою розриву функції $f(x)$;

3) $S\left(-\frac{T}{2}\right)=S\left(\frac{T}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(-\frac{T}{2}+0\right)+f\left(\frac{T}{2}-0\right)\right).$

Зауваження.

1. Клас кусково-монотонних функцій є широким, але він не вичерпує усі функції, для яких ряд Фур’є збігається.

2. Існують необмежені функції, які є сумами своїх рядів Фур’є.

3. Існують збіжні тригонометричні ряди які не є рядами Фур’є.

4. Якщо T – періодична функція неперервна на всій осі й кусково-гладка, то її ряд Фур’є збігається до функції $f(x)$ рівномірно.

Розвинення в ряд Фур’є 2π– періодичних функцій

Запишемо допоміжні формули, вважаючи n та m цілими додатними числами:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=\begin{cases}\dfrac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,(n\neq 0),\\ x\Big|_{-\pi}^{\pi}=2\pi,(n=0).\end{cases}\qquad(1.16)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0.\qquad(1.17)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m+n)x+\cos(m-n)xdx=\begin{cases}0,\ (m\neq n),\\ \pi,\ (m=n).\end{cases}\qquad(1.18)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m+n)x+\sin(m-n)xdx=0.\qquad(1.19)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x - \cos(m+n)x dx = \begin{cases} 0, & (m \neq n), \\ \pi, & (m = n). \end{cases} \qquad (1.20)$$

Зауваження. Формули (1.16) – (1.20) показують, що система функцій

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, ..., \cos nx, \sin nx\}$$

є ортогональною системою функцій: інтеграл від добутку будь-яких двох функцій цієї системи на інтервалі, що має довжину 2π, дорівнює нулю.

Формули (1.16) – (1.20) справедливі і в тому випадку, коли інтегрування ведеться по відрізку $[0,\ 2\pi]$ (це випливає з властивості 3 періодичних функцій).

У випадку 2π–періодичних функцій тригонометричний ряд – це функціональний ряд вигляду:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + ... + a_n \cos nx + b_n \sin nx + ... =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

де дійсні числа $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, 3, \ldots$, називаються коефіцієнтами ряду.

Нехай $f(x)$ інтегрована по відрізку $[-\pi,\ \pi]$ та 2π–періодична функція.

Функції $f(x)$ поставимо у відповідність тригонометричний ряд, який називається рядом Фур'є 2π–періодичної функції:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \qquad (1.21)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, n = 1, 2, 3, ... \qquad (1.22)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, n = 1, 2, 3, ... \qquad (1.23)$$

Виникає питання, коли знак „$\approx$” можна замінити знаком „=”? Відповідь на це питання дає теорема Діріхле, яка є достатньою умовою розвинення 2π—періодичної функції в ряд Фур’є.

Теорема 1.22. *(Теорема Діріхле)*. Нехай $f(x)$ 2π–періодична функція та на відрізку $[-\pi, \pi]$ задовольняє умови:

а) $f(x)$ кусково-неперервна функція (тобто неперервна або має на відрізку $[-\pi, \pi]$ скінченне число точок розриву першого роду);

б) $f(x)$ кусково-монотонна на відрізку $[-\pi, \pi]$ (тобто монотонна на всьому відрізку або відрізок $[-\pi, \pi]$ можна розбити на скінченне число інтервалів так, що на кожному $f(x)$ монотонна).

Тоді функції $f(x)$ на відрізку $[-\pi, \pi]$ відповідає ряд Фур’є, коефіцієнти якого обчислюються за формулами (1.21) – (1.23), при цьому:

1) в точках неперервності $f(x)$ сума ряду $S(x)$ збігається з функцією $f(x)$,

2) в кожній точці розриву функції сума ряду дорівнює середньому арифметичному правої та лівої границь:

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

3) в точках $x = -\pi$ та $x = \pi$ (тобто на кінцях відрізка) сума ряду обчислюється так:

$$S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Зауваження.

1. Нехай $f\left(x\right)$ 2π –періодична функція та на відрізку $\left[0,\ 2\pi\right]$ та задовольняє умовам теореми Діріхле, тоді маємо наступні формули для обчислення коефіцієнтів:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)dx. \tag{1.24}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nxdx, n = 1, 2, 3, ... \tag{1.25}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nxdx, n = 1, 2, 3, ... \tag{1.26}$$

2. Умовам теореми Діріхле задовольняють більшість функцій, які зустрічаються в математиці та її застосуваннях, проте існують функції, які не задовольняють умовам теореми Діріхле, але мають розвинення в ряд Фур'є, тобто теорема Діріхле – це лише достатня умова, але не є необхідною.

Розглянемо розвинення в ряд Фур'є парних на непарних 2π– періодичних функцій.

Якщо функція $f\left(x\right)$ на відрізку $\left[-\pi,\ \pi\right]$ є парною чи непарною, то це буде відображатись на формулах для коефіцієнтів ряду Фур'є (обчислення спрощується), та на вигляді самого ряду Фур'є, він в цих випадках називається неповним.

Якщо функція $f\left(x\right)$ на відрізку $\left[-\pi,\ \pi\right]$ є парною, то її ряд Фур'є матиме наступний вигляд

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{1.27}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx, \tag{1.28}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx, n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (1.29)$$

Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[-\pi, \pi]$ є непарною, то її ряд Фур'є матиме наступний вигляд

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \qquad (1.30)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx, n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (1.31)$$

Ряди (1.27) та (1.30) називаються неповними тригонометричними рядами, або рядами за косинусами та за синусами відповідно.

Часто функція $f(x)$, що задана на проміжку $[0, 1]$ і яку треба розвинути в ряд Фур'є не тільки неперервна, але й диференційована. Постає питання, якому розвиненню надати перевагу — за косинусами або за синусами? Який ряд «краще» збігатиметься?

Характер збіжності ряду Фур'є визначений властивостями заданої функції в точках $x = 0$ та $x = l$. Якщо функція $f(x)$ в цих точках відмінна від нуля, то періодичне її продовження за принципом непарної функції призведе до розривів у двох точках $x = 0$ та $x = l$. Ці розриви легко ліквідуються, якщо функцію продовжити парним чином.

Саме з цієї причини розвинення в ряд за косинусами має кращі властивості збіжності ніж за синусами. Коефіцієнти ряду за косинусами спадають зі швидкістю $\frac{1}{n^2}$, а коефіцієнти ряду синусів — лише зі швидкістю $\frac{1}{n}$.

Якщо $f(0) = f(l) = 0$, то розвинення в ряд за синусами дає кращу збіжність, ніж розвинення в ряд за косинусами. Причина полягає в тому, що розвинення функції $f\left(x\right)$ за принципом непарної функції забезпечує неперервність як функції, так і її першої похідної, тоді як періодичне продовження за принципом парної функції призводить до розриву першої похідної в точках $x=0$ та $x=l$.

Коефіцієнти ряду за синусами спадають зі швидкістю $\frac{1}{n^3}$.

Тема 2: ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Задачі, які приводять до поняття подвійного інтеграла

Розглянемо задачу про обчислення об’єму «циліндричного брусу».

Нехай задана певна функція $z = f\left(x, y\right)$, $x \in \left[a, b\right]$, $y \in \left[c, d\right]$. Цими інтервалами визначається певний прямокутник $\left(D\right)$, який є областю змінювання змінних x та y. Розглянемо тіло $\left(V\right)$, яке обмежене зверху поверхнею $z = f\left(x, y\right)$, з боків – циліндричною поверхнею з твірними, які паралельні осі OZ, знизу – плоскою фігурою $\left(D\right)$ на площині XOY. Потрібно знайти об’єм тіла V.

Для розв’язання цієї задачі застосуємо метод, що полягає в розкладанні шуканої величини на елементарні частини, наближеному підрахунку кожної частини, підсумовуванні та наступному граничному переході.

Для цього розкладемо основу бруса – прямокутник $\left(D\right)$ на елементарні прямокутники за допомогою сітки прямих, паралельних осям OX та OY:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_k < y_{k+1} < \ldots < y_m = d.$$

Позначимо $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$, $\left(i = 0, \ldots, n-1\right)$, $y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$, $\left(k = 0, \ldots, m-1\right)$. Зауважимо, що Δx_i та Δy_k $\forall i, k$ мають довільні розміри, не обов’язково однакові. Площа прямокутника розташованого на перетині $i-$ї та $k-$ї смуг $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_k$ (Рис. 2).

Проводячи вертикальні площини через усі прямі, якими розкладена на частини основа бруса, ми розкладемо брус на елементарні «стовпчики». Якщо наближено кожен «стовпчик» вважати циліндром з висотою $z_{ik} = f\left(x_i, y_k\right)$, то його об'єм дорівнюватиме $V_i = f\left(x_i, y_k\right) \cdot \Delta x_i \Delta y_k$.

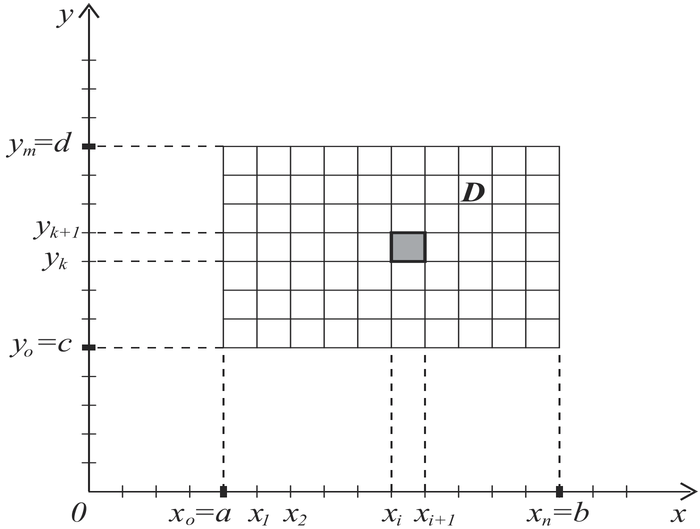

Рис. 2

Таким чином, наближений вираз для об'єму V усього бруса

$$V \approx \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i, y_k\right) \cdot \Delta x_i \Delta y_k \ .$$

Для підвищення точності цієї рівності будемо зменшувати розміри $\left(D_i\right)$, підвищуючи їх кількість. Якщо $\Delta x_i \to 0, \quad \Delta y_k \to 0$, то граничне значення подвійної суми є точним значенням шуканого об'єму

$$V = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_k \to 0}} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i, y_k\right) \cdot \Delta x_i \Delta y_k \qquad (2.1)$$

Границю вигляду (2.1) називають *подвійним інтегралом* від функції $z = f\left(x, y\right)$ по області $\left(D\right)$ та позначають символом

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy\,.$$

В певному сенсі можна сказати, що подвійний інтеграл є сумою нескінченно великого числа нескінченно малих доданків.

Аналогічний результат можна отримати для більш загального випадку, коли область (D) на площині XOY є криволінійною трапецією, яка обмежена двома кривими $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ та прямими $x=a$ та $x=b$. У цьому випадку проміжок $[c,d]$ змінювання y є проміжком $[y_1(x_0), y_2(x_0)]$ $(a \le x_0 \le b)$ (Рис. 3).

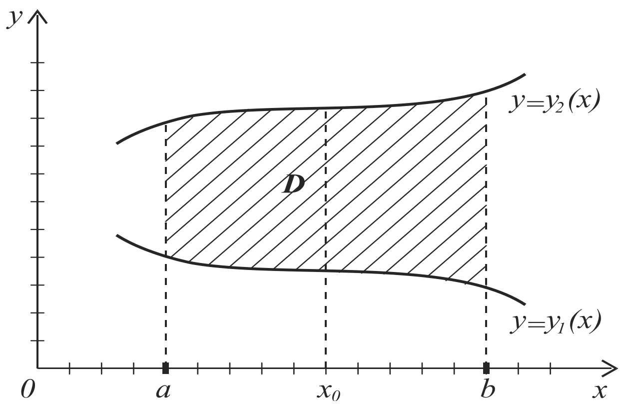

Рис. 3.

Від геометричної трактовки поняття подвійного інтеграла перейдемо до аналітичного викладання цього питання. Спочатку наведемо кілька означень.

Область (D) називається *замкненою*, якщо вона обмежена замкненою лінією, та точки межі належать області (D).

Внутрішньою точкою області називатимемо точку області (D), яка не належить межі області.

Діаметром області Δd_i називається максимальна відстань між точками, які належать межі області.

Розглянемо в площині XOY замкнену область (D), обмежену лінією *L*. Нехай в області (D) задана неперервна функція $z = f(x, y)$. Розіб'ємо область (D) будь-якими лініями на *n* частин $\Delta d_1, \Delta d_2, ...,$ Δd_n. Позначимо площі цих областей $\Delta s_1, \Delta s_2, ..., \Delta s_n$. У кожній з областей Δd_i візьмемо довільну точку P_i. Позначимо $f(P_1)$, $f(P_2)$, ..., $f(P_n)$ значення функції в обраних точках та складемо суму вигляду

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i \, . \tag{2.2}$$

Рівність (2.2) називається *інтегральною сумою* для функції $f(x, y)$ по області (D). Розглянемо довільну послідовність інтегральних сум, які складені за допомогою функції $f(x, y)$ для даної області (D):

$$\sigma_{n_1}, \ \sigma_{n_2}, ..., \ \sigma_{n_k} \tag{2.3}$$

при різних способах розбиття області (D) на частини Δd_i. Припускатимемо, що максимальний діаметр областей Δd_i прямує до нуля за умови $n_k \to \infty$.

Теорема 2.1. (*Існування подвійного інтеграла*). Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в замкненій області (D), то існує границя послідовності (2.3) інтегральних сум (2.2), якщо максимальний діаметр областей Δd_i прямує до нуля при $n_k \to \infty$. Ця границя не залежить від способів розбиття області (D) на області Δd_i та від вибору точки P_i всередині Δd_i.

Ця границя називається *подвійним інтегралом* від функції $f(x,y)$ по області (D) та позначається

$$\lim_{diam\Delta d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i = \iint_{(D)} f(x,y)ds = \iint_{(D)} f(x,y)dxdy .$$

Область (D) називається *областю інтегрування*.

Властивості подвійних інтегралів

Властивість 2.2. Подвійний інтеграл від суми двох функцій $\varphi(x,y)+\psi(x,y)$ по області (D) дорівнює сумі двох подвійних інтегралів по області (D) від кожної функції окремо

$$\iint_{(D)} \left(\varphi(x,y)+\psi(x,y)\right)ds = \iint_{(D)} \varphi(x,y)ds + \iint_{(D)} \psi(x,y)ds .$$

Властивість 2.3. Сталий множник можна виносити за знак подвійного інтеграла

$$\iint_{(D)} C\cdot\varphi(x,y)ds = C\iint_{(D)} \varphi(x,y)ds ,$$

де $C = const$.

Властивість 2.4. Якщо область (D) розбита на дві області (D_1) та (D_2), які не мають спільних внутрішніх точок та функція $f(x,y)$ неперервна в усіх точках області (D), то

$$\iint_{(D)} f(x,y)ds = \iint_{(D_1)} f(x,y)ds + \iint_{(D_2)} f(x,y)ds . \qquad (2.4)$$

Обчислення подвійних інтегралів

Нехай область (D) в площині XOY така, що будь-яка пряма, що паралельна одній з координатних осей, наприклад осі OY, і проходить через внутрішню точку області, перетинає межу області в двох точках N_1 та N_2 (Рис. 4).

Припускається, що область (D) обмежена лініями $x=a$, $x=b$, $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, де функції $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$, до того ж $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x), \forall x\in(a,b)$, $a<b$. Таку область називатимемо *правильною в напрямку осі* OY. Аналогічно визначається область *правильна в напрямку осі* OX (Рис. 5).

Область, яка є правильною в обох напрямках, називатимемо *правильною областю.*

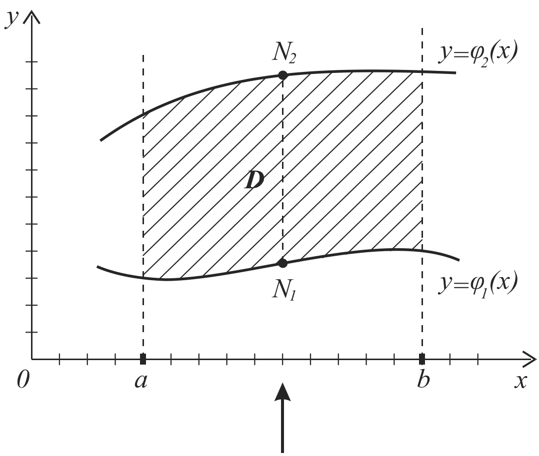

Рис. 4.

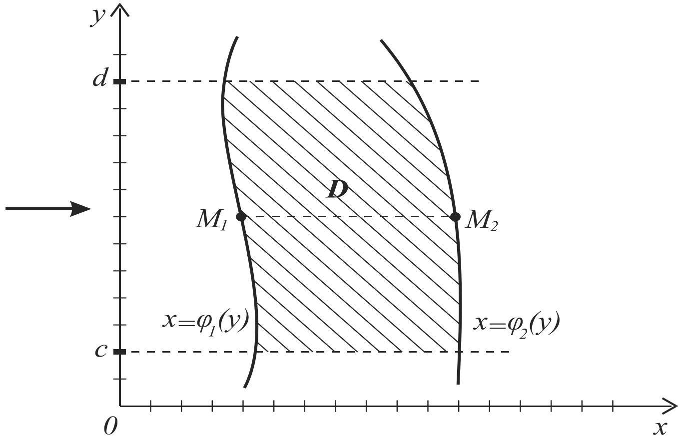

Рис. 5.

Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в області (D), до того ж (D) визначається нерівностями: $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \quad a \le x \le b$.

Розглянемо вираз

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \ , \qquad (2.5)$$

який називатимемо *двократним* (*повторним*) інтегралом від функції $f(x,y)$ по області (D).

У цьому виразі спочатку обчислюється інтеграл, який міститься у дужках, до того ж інтегрування проводиться за змінною y, а x вважається сталою. У результаті інтегрування отримуємо неперервну функцію від x:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \ .$$

Цю функцію ми інтегруємо за змінною x в межах від a до b:

$$I_D = \int_a^b \Phi(x)\,dx \ .$$

У результаті отримуємо певне число.

Аналогічно обчислюється двократний інтеграл, коли (D) визначається нерівностями: $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$, $c \le y \le d$. У цьому випадку

$$I_D = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (2.6)$$

Зауваження. Неперервність функції $\Phi(x)$ приймаємо без доведення.

Приклад 2.1. Обчислити двократний інтеграл $\int_0^2 dx \int_{x^2}^4 \left(x^2 + y^2\right) dy$.

Розв'язання. Спочатку обчислюємо внутрішній інтеграл, тобто запишемо:

$$\Phi(x) = \int_{x^2}^4 \left(x^2 + y^2\right) dy =$$

$$= \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{x^2}^4 = x^2\left(4 - x^2\right) + \frac{64 - x^6}{3} =$$

$$= 4x^2 - x^4 + \frac{64}{3} - \frac{1}{3}x^6;$$

Тепер продовжимо розв'язання, обчислюючи зовнішній інтеграл:

$$I_D = \int_0^2 \left(4x^2 - x^4 + \frac{64}{3} - \frac{1}{3}x^6 \right) dx =$$

$$= 4\int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 x^4 dx + \frac{64}{3}\int_0^2 dx - \frac{1}{3}\int_0^2 x^6 dx =$$

$$= 4\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 - \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2 + \frac{64}{3}x\Bigg|_0^2 - \frac{1}{3}\frac{x^7}{7}\Bigg|_0^2 =$$

$$= 4\frac{2^3}{3} - \frac{2^5}{5} + \frac{64}{3}2 - \frac{1}{3}\frac{2^7}{7} = \frac{4288}{105}.$$

Відповідь: $\frac{4288}{105}$.

Приклад 2.2. Обчислити двократний інтеграл $\int_1^4 dy \int_1^y \frac{y}{x} dx$.

Розв'язання. Будемо обчислювати покроково, так само, як і в прикладі 2.1:

$$\Phi(y) = \int_1^y \frac{y}{x} dx = y \ln|x|\Big|_1^y = y\left(\ln|y| - \ln|1|\right) = y \ln|y| \; ;$$

Оскільки $1 \le y \le 4$, то $\ln|y| = \ln y,$ тоді маємо:

$$I_D = \int_1^4 y \ln y \, dy = \left\| \begin{matrix} u = \ln y, & dv = y dy, \\ du = \dfrac{dy}{y}, & v = \dfrac{y^2}{2} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{y^2}{2}\ln y \Bigg|_1^4 - \int_1^4 \frac{y^2}{2}\frac{dy}{y} = \frac{y^2}{2}\ln y \Bigg|_1^4 - \frac{1}{2}\frac{y^2}{2}\Bigg|_1^4 =$$

$$= \frac{16}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4}\left(16 - 1\right) = 8\ln 4 - \frac{15}{4}.$$

Відповідь: $8\ln 4 - \frac{15}{4}$.

Властивості двократних інтегралів

Властивість 2.5. Якщо правильну в напрямку осі OY область (D) розбити на дві області (D_1) та (D_2) прямою, яка паралельна осі OY або осі OX, то двократний інтеграл I_D від функції $f(x,y)$ по області (D) дорівнюватиме сумі інтегралів по областям (D_1) та (D_2) від тієї ж підінтегральної функції, тобто $I_D = I_{D_1} + I_{D_2}$.

Властивість 2.6. *(Оцінка двократного інтегралу).* Нехай m та M – найменше та найбільше значення функції $f(x,y)$ в області (D). Позначимо через S площу області (D). Тоді має місце співвідношення

$$m \cdot S \leq \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \leq M \cdot S. \qquad (2.7)$$

Властивість 2.7. *(Теорема про середнє значення).* Двократний інтеграл I_D від неперервної функції $f(x,y)$ по області (D) з площею S дорівнює добутку площі S на значення функції в певній точці P області (D). Тобто

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = f(P) \cdot S. \qquad (2.8)$$

Теорема 2.8. Подвійний інтеграл від неперервної функції $f(x,y)$ по правильній області (D) дорівнює двократному інтегралу від цієї функції $f(x,y)$ по області (D), до того ж (D) визначається нерівностями: $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \quad a \leq x \leq b$, тобто

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \qquad (2.9)$$

Зауваження. Для випадку, коли $f(x,y) \geq 0$ ця теорема має явний геометричний зміст. Розглянемо тіло, яке обмежене поверхнею

$z=f\left(x,y\right)$, площиною $z=0$ та циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі OZ, а напрямною є межа області $\left(D\right)$. Обчислимо об’єм V цього тіла.

Раніше було показано, що об’єм саме цього тіла дорівнює подвійному інтегралу від функції $f\left(x,y\right)$ по області $\left(D\right)$:

$$V=\iint\limits_{(D)} f\left(x,y\right)dxdy\,. \tag{2.10}$$

Обчислимо цей об’єм користуючись площами паралельних перерізів. Проведемо площину $x=const$ $\left(a<x<b\right)$, яка розтинає тіло (Рис. 6).

Обчислимо площу $S\left(x\right)$ фігури, що є результатом розтину $x=const$. Ця фігура є криволінійною трапецією, яка обмежена лініями $z=f\left(x,y\right)$ ($x=const$), $z=0$, $y=\varphi_1\left(x\right)$, $y=\varphi_2\left(x\right)$. Отже, ця площа зображується інтегралом

$$S\left(x\right)=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\left(x,y\right)dy\,. \tag{2.11}$$

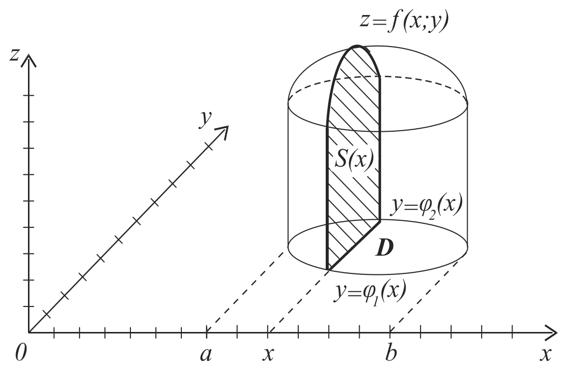

Рис.6.

Звідси легко знайти об’єм тіла $V=\int\limits_a^b S\left(x\right)dx$. Підставляючи вираз (2.11) для площі $S\left(x\right)$, отримуємо

$$V=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\left(x,y\right)dy\right)dx. \tag{2.12}$$

В формулах (2.10) та (2.12) ліві частини рівні між собою, отже, праві частини також дорівнюють одна одній:

$$\iint\limits_{(D)} f\left(x,y\right)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\left(x,y\right)dy\right)dx. \tag{2.13}$$

При обчисленні подвійного інтеграла істотним є правильна розташування меж інтегрування. Доцільно зробити креслення області інтегрування $\left(D\right)$.

Для обчислення подвійного інтеграла його необхідно зобразити у вигляді двократного. В кожному конкретному випадку, в залежності від вигляду області $\left(D\right)$ або підінтегральної функції, обираємо одну або іншу формулу для обчислення подвійного інтеграла.

Це можна зробити двома способами: або за формулою (2.5), або за формулою (2.6). Значення подвійного інтеграла не залежить від порядку інтегрування. Але для економії обчислювальної роботи треба, якщо це можливо, обрати такий порядок інтегрування, при якому не потрібно розбивати область інтегрування на частини.

Якщо область $\left(D\right)$ не є правильною ані в напрямку осі OY, ані в напрямку осі OX, то подвійний інтеграл по цій області ми не можемо зобразити у вигляді одного двократного інтеграла.

Якщо неправильну область $\left(D\right)$ можна розбити на скінченне число правильних або в напрямку осі OY, або в напрямку осі OX

областей (D_1), (D_2), ..., (D_n), то, обчислюючи подвійний інтеграл по кожній з цих областей за допомогою двократного інтеграла та додаючи отримані результати, ми дістанемо шуканий інтеграл по області (D). Проілюструємо це прикладами.

Приклад 2.3. Розставити межі інтегрування в подвійному інтегралі $\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,ds$, де область (D) обмежена лініями: $y = x-4,\quad y^2 = 2x$.

Розв'язання. Зробимо креслення області (D) (Рис 7).

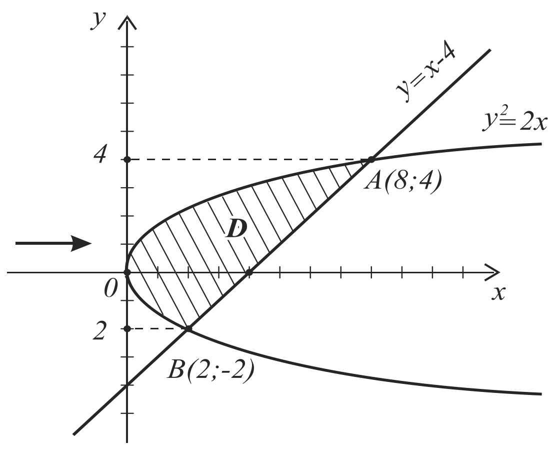

Рис.7.

Область (D) є правильною в напрямку осі Ox отже, область (D) можна записати у вигляді

$$(D) = \left\{ (x,y) : -2 \le y \le 4; \frac{1}{2}y^2 \le x \le y+4 \right\},$$

де $x=\psi_1\left(y\right)=\frac{1}{2}y^2$ є лінією «входу» (нижня межа внутрішнього інтегралу), $x=\psi_2\left(y\right)=y+4$ є лінією «виходу» (верхня межа внутрішнього інтегралу).

Таким чином, користуючись формулами (2.6) та (2.13), отримуємо:

$$\iint\limits_{(D)} f\left(x,y\right)ds=\int\limits_{-2}^{4}\left(\int\limits_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} f\left(x,y\right)dx\right)dy=\int\limits_{-2}^{4}dy\int\limits_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} f\left(x,y\right)dx\,.$$

Слід зазначити, що рівноправним є інтегрування в іншому порядку, в напрямку осі OY (Рис. 8).

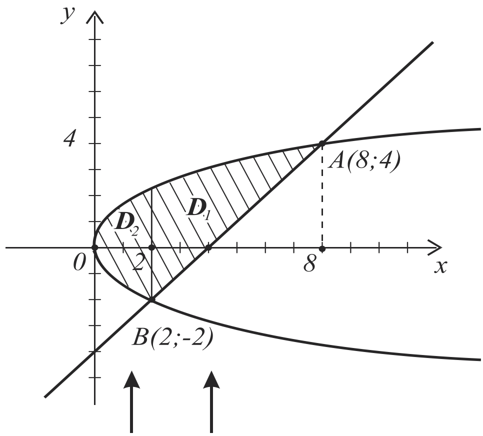

Рис.8.

Область $\left(D\right)$ в напрямку осі OY не є правильною, отже, її потрібно розбити на правильні області:

$$\left(D_1\right)=\left\{\left(x,y\right):2\le x\le 8;x-4\le y\le\sqrt{2x}\right\}.$$

$$\left(D_2\right)=\left\{\left(x,y\right):0\le x\le 2;-\sqrt{2x}\le y\le \sqrt{2x}\right\}$$

Таким чином,

$$\iint\limits_{(D)} f\left(x,y\right)ds=\iint\limits_{(D_1)} f\left(x,y\right)ds+\iint\limits_{(D_2)} f\left(x,y\right)ds\,,$$

$$\iint\limits_{(D_1)} f\left(x,y\right)ds=\int\limits_{2}^{8}dx\int\limits_{x-4}^{\sqrt{2x}} f\left(x,y\right)dy.$$

$$\iint\limits_{(D_2)} f\left(x,y\right)ds=\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} f\left(x,y\right)dy\,,$$

Приклад 2.4.

Змінити порядок інтегрування в інтегралі $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f\left(x,y\right)dx$.

Розв'язання. По межах інтегрування зробимо креслення області $\left(D\right)$: $\left(D\right)=\left\{\left(x,y\right):0\le y\le 1;\sqrt{y}\le x\le 3-2y\right\}$ (Рис. 9).

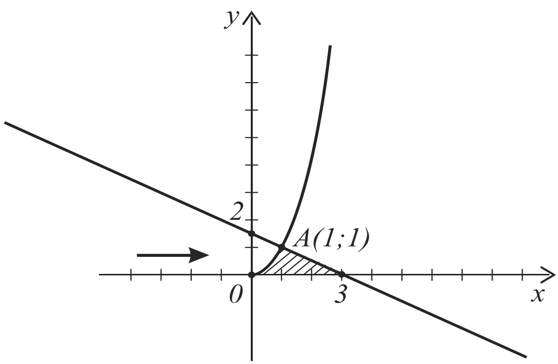

Рис. 9.

В початковому інтегралі область (D) було розглянуто у напрямку осі OX. У цьому напрямку область (D) є правильною. За умовою задачі треба змінити порядок інтегрування в інтегралі, тобто розглядати область (D) у напрямку осі OY (Рис. 10).

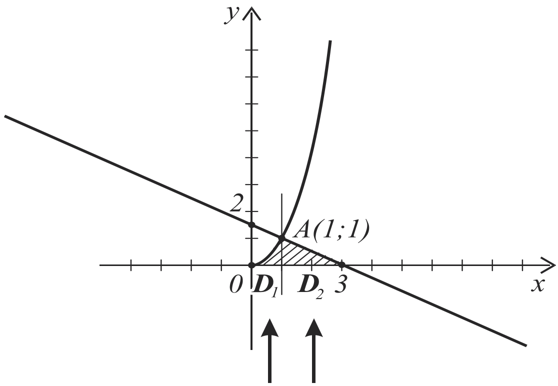

Рис. 10.

У цьому напрямку область (D) не є правильною (одна лінія «входу»” $y=0$, дві лінії «виходу» $y=x^2$ та $y=\frac{1}{2}(3-x)$), отже, область (D) потрібно розбити на правильні області прямою $x=1$:

$$(D_1)=\left\{(x,y): 0\le x\le 1; 0\le y\le x^2\right\},$$

$$(D_2)=\left\{(x,y): 1\le x\le 3; 0\le y\le \frac{1}{2}(3-x)\right\}.$$

Таким чином, отримуємо:

$$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy.$$

Заміна змінних в подвійному інтегралі (загальний випадок)

В багатьох задачах, що потребують застосування подвійних інтегралів, декартова система координат не є найкращою для розв'язання. Тому слід вміти переходити від однієї системи координат до іншої, більш зручної.

Для спрощення обчислення подвійного інтеграла застосовують метод підстановки, тобто вводять нові змінні під знаком подвійного интегралу. Визначимо перетворення незалежних змінних *x* та *y*.

Нехай

$$x=\varphi(u,v), \quad y=\psi(u,v) \tag{2.14}$$

функції, які визначені в певній області (D') площини OUV та мають неперервні частинні похідні першого порядку та визначник

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{d\varphi}{du} & \dfrac{d\varphi}{dv} \\ \dfrac{d\psi}{du} & \dfrac{d\psi}{dv} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.15}$$

а функція $f(x,y)$ неперервна в області (D), то справедлива формула заміни змінних в подвійному інтегралі:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{(D')} f\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)|J|\,dudv. \tag{2.16}$$

Визначник J називається *функціональним визначником* функцій $\varphi(u,v)$ та $\psi(u,v)$. Його називають також *якобіаном* на честь німецького математика Якобі.

Подвійний інтеграл у полярних координатах

Розглянемо окремий випадок заміни змінних у подвійному інтегралі – перехід від декартових координат до полярних. Таку заміну змінних доцільно робити, якщо область (D) є кругом або частиною круга.

Визначимо, яка область у полярних координатах є правильною.

Нехай у полярній системі координат ρ, φ задана така область (D), що кожен промінь, який проходить через внутрішню точку області, перетинає межу області не більш ніж у двох точках. Припустимо, що область (D) обмежена кривими $\rho = \Phi_1(\varphi), \rho = \Phi_2(\varphi)$ та променями $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$, до того ж $\Phi_1(\varphi) < \Phi_2(\varphi)$ та $\alpha < \beta$ (Рис. 11). Таку область назвемо *правильною.*

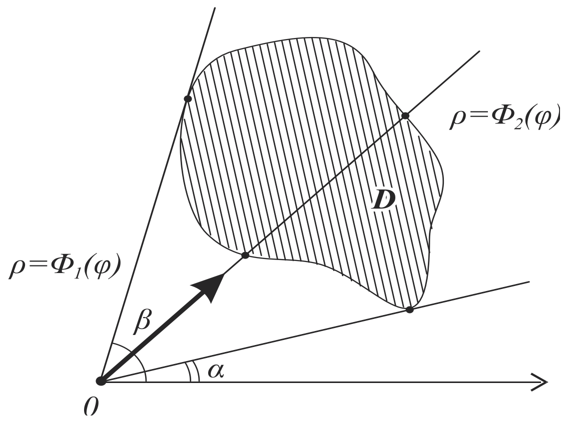

Рис. 11

Обчислимо якобіан переходу від декартових координат до полярних. Відомо, що у полярних координатах $x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$.

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{dx}{d\varphi} & \dfrac{dx}{d\rho}\\ \dfrac{dy}{d\varphi} & \dfrac{dy}{d\rho}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\rho\sin\varphi & \cos\varphi\\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi\end{vmatrix}=-\rho\sin^2\varphi-\rho\cos^2\varphi=-\rho .$$

Отже, $|J|=\rho$ та формула для обчислення подвійного інтеграла набуває вигляду

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\int\limits_{\Phi_1(\varphi)}^{\Phi_2(\varphi)} F(\varphi,\rho)\rho\, d\rho\right)d\varphi . \qquad (2.17)$$

Приклад 2.5. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ по області (D), яка обмежена лініями: $x^2+y^2=4x,\quad x^2+y^2=2x.$

Розв'язання. Лінії, які обмежують область (D), є колами з центрами в точках $O_1(2;0), O_2(1;0)$ та радіусами $R_1=2, R_2=1$ відповідно. Зробимо креслення області (D) (Рис. 12).

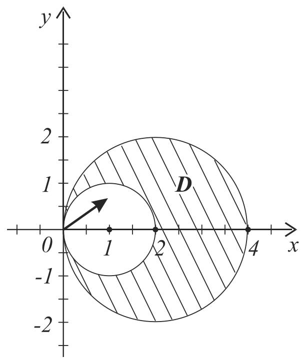

Рис. 12

Перейдемо до полярних координат. Рівняння кіл набуває вигляду:

$$\rho = 4\cos\varphi, \rho = 2\cos\varphi .$$

Підінтегральна функція після переходу до полярних координат набуває вигляду:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |\rho| = \rho , \; |J| = \rho .$$

Зауважимо, що область (D) симетрична відносно осі абсцис, отже φ можна змінювати від 0 до $\frac{\pi}{2}$, а результати обчислень подвоїти.

Межі інтегрування для ρ змінюються від $\rho = 2\cos\varphi$ (лінія «входу») до $\rho = 4\cos\varphi$ (лінія «виходу»). Отже, отримуємо:

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho^2 d\rho \right) d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho^2 d\rho .$$

Обчислимо внутрішній інтеграл:

$$\Phi(\varphi) = \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} = \frac{1}{3}\left(64\cos^3\varphi - 8\cos^3\varphi\right) = \frac{56}{3}\cos^3\varphi.$$

Обчислимо зовнішній інтеграл:

$$I_D = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{56}{3}\cos^3\varphi d\varphi = \frac{112}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi = \left\| \begin{matrix} t = \sin\varphi, & t_н = 0, \\ dt = \cos\varphi d\varphi, & t_в = 1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{112}{3}\int_0^1 \left(1 - t^2\right) dt = \frac{112}{3}\left(t - \frac{t^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{112}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{112}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{224}{9}.$$

Відповідь: $\frac{224}{9}$.

Тема 3: КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Криволінійні інтеграли. Основні означення

Нехай в певній області V простору R^3 задано неперервну криву AB довжиною l. Крива визначається параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \\ z = z(s), \end{cases}$$

де s – параметр дуги, $0 \le s \le l$.

Крива AB є орієнтованою кривою, тобто заданий порядок слідування точок вздовж кривої при зростанні параметра s від 0 до l, тобто від точки A до точки B. Припустимо, що задана крива AB є гладкою, тобто вона має дотичну, що змінюється неперервно (або AB є кусково-гладкою – складається зі скінченного числа гладких кусків; наприклад, будь-яка ламана – кусково-гладка лінія).

Нехай вектор $\overrightarrow{\tau_0}(M)$ – орт дотичної в точці M кривої AB, який співпадає за напрямом з напрямом кривої: $\overrightarrow{\tau_0}(M) = \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$.

Нехай кожній точці M області V відповідає вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, то кажуть, що задана векторна функція точки

$$\vec{a}(M) = \{P(x,y,z);\ Q(x,y,z);\ R(x,y,z)\},$$

яку надалі називатимемо векторним полем.

Розіб'ємо криву AB довільним способом на n «елементарних дуг» довжиною Δs_i, $i = 1,\ldots,n$ в напрямку від A до B, а на кожній елементарній дузі візьмемо, також довільним способом, точку M_i

(набір точок $M_1,...,M_n$ називаємо зазначеними точками); вектор $\overrightarrow{\Delta s_i}=\Delta s_i\cdot\overrightarrow{\tau_0}\left(M_i\right)$. Для дуги з номером i складемо скалярний добуток:

$$\left(\vec{a}\left(M_i\right)\cdot\overrightarrow{\Delta s_i}\right)=\left(\vec{a}\left(M_i\right)\cdot\overrightarrow{\tau_0}\left(M_i\right)\right)\cdot\Delta s_i\ ,$$

а потім укладемо суму:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{a}\left(M_i\right)\cdot\overrightarrow{\tau_0}\left(M_i\right)\right)\cdot\Delta s_i\ . \tag{3.1}$$

Сума (3.1) – це є інтегральна сума для функції $\left(\vec{a}\left(M\right)\cdot\overrightarrow{\tau_0}\left(M\right)\right)$ вздовж кривої AB.

Нехай тепер $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta s_i$ – найбільша з довжин Δs_i.

Якщо існує скінчена границя послідовності інтегральних сум (3.1), за умови, що $\lambda\to 0$ (або $n\to\infty$), і ця границя не залежить ані від способу розбиття кривої на дуги, ані від вибору зазначених точок, то вона є *криволінійним інтегралом* від функції $\left(\vec{a}\left(M\right)\cdot\overrightarrow{\tau_0}\left(M\right)\right)$ вздовж кривої AB і позначається

$$\int\limits_{AB}\vec{a}\cdot\overrightarrow{\tau_0}\,ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{a}\left(M_i\right)\cdot\overrightarrow{\tau_0}\left(M_i\right)\right)\cdot\Delta s_i\ . \tag{3.2}$$

В даному виразі розкриваємо скалярний добуток $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\tau_0}$, і тоді

$$\int\limits_{AB}\vec{a}\cdot\overrightarrow{\tau_0}\,ds=\int\limits_{AB}\left(P\cdot\cos\alpha+Q\cdot\cos\beta+R\cdot\cos\gamma\right)ds\ . \tag{3.3}$$

Введемо вектор $\overrightarrow{ds}=\overrightarrow{\tau_0}\,ds=\left\{dx;dy;dz\right\}$. Тоді маємо наступний запис:

$$\int\limits_{AB}\vec{a}\cdot\overrightarrow{ds}=\int\limits_{AB}\vec{a}\cdot\overrightarrow{\tau_0}\,ds=\int\limits_{AB}Pdx+Qdy+Rdz\ . \tag{3.4}$$

Криволінійний інтеграл (3.3) є *криволінійним інтегралом 1-го роду* (по довжині дуги), а інтеграл (3.4) – *криволінійним інтегралом 2-го роду* (по координатам). Далі будемо розглядати криволінійні інтеграли 2-го роду.

Обчислення криволінійних інтегралів 2-го роду

Теорема 3.1. Якщо крива AB міститься на площині і задана рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

де функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ визначені та неперервні на проміжку $[\alpha, \beta]$, причому $\varphi'(t)$ і $\psi'(t)$ також існують й неперервні на $[\alpha, \beta]$, а параметр t зростає від α до β, і, якщо в кожній точці кривої AB функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – координати векторної функції $\vec{a}(M) = \{P(x, y);\ Q(x, y)\}$ – неперервні, то тоді криволінійний інтеграл другого роду вздовж кривої AB існує і виражається через визначений інтеграл:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(P\big[\varphi(t), \psi(t)\big] \cdot \varphi'(t) + Q\big[\varphi(t), \psi(t)\big] \cdot \psi'(t) \Big) dt. \qquad (3.5)$$

Якщо крива AB є кривою у просторі та задається параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \eta(t), \end{cases}$$

$t \in [\alpha, \beta]\ (\alpha < \beta)$ і функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\eta(t)$ – неперервно-диференційовані на проміжку $[\alpha, \beta]$, функції $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ – координати векторної функції $\vec{a}(M)$ – неперервні в кожній точці кривої AB, то справедливе твердження

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \Big[P(\varphi(t),\psi(t),\eta(t)) \cdot \varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t),\eta(t)) \cdot \psi'(t) +$$

$$+ R(\varphi(t),\psi(t),\eta(t)) \cdot \eta'(t) \Big] dt. \qquad (3.6)$$

Приклад 3.1. Обчислити інтеграл $\int\limits_L x^3dx + 2xy^2dy - 3x^2zdz$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(1;2;-2)$ і $B(0;-1;0)$.

Розв'язання. Складемо рівняння прямої AB. Використаємо наступну формулу для запису рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y-2}{-1-2} = \frac{z+2}{0+2},$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+2}{2}.$$

Запишемо рівняння прямої AB у параметричній формі.

$$\begin{cases} x = 1-t, \\ y = 2-3t, \\ z = -2+2t, \end{cases}$$

а для ділянки AB параметр, очевидно, змінюється в межах: $0 \le t \le 1$.

Отже, $x'(t) = -1, y'(t) = -3, z'(t) = 2$.

Тоді $dx = -dt,\ dy = -3dt,\ dz = 2dt.$

Отримуємо:

$$\int_L x^3dx + 2xy^2dy - 3x^2zdz =$$

$$= \int_0^1 \Big(-(1-t)^3 dt - 6(1-t)(2-3t)^2 dt - 6(1-t)^2(-2+2t)dt \Big) =$$

$$=\int_0^1 (43t^3-93t^2+63t-13)dt=\left(\frac{43}{4}t^4-\frac{93}{3}t^3+\frac{63}{2}t^2-13t\right)\Bigg|_0^1=-\frac{7}{4}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{4}$.

Розглянемо застосування інтеграла 2-го роду для обчислення роботи силового поля.

Якщо векторна функція $\vec{a}(M)$ є силовим полем, то криволінійний інтеграл (3.4) виражає *роботу* даного поля, що витрачена на переміщення матеріальної точки вздовж траєкторії AB.

Приклад 3.2. Обчислити роботу сили $\vec{F}=\{y;\ z;\ -x\}$ вздовж одного вітка гвинтової лінії

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \\ z=bt, \end{cases}$$

від точки $A(a;0;2b\pi)$ до точки $B(a;0;0)$.

Розв'язання. Орієнтація лінії відповідає зміні параметра t від $t=2\pi$ (в точці A) до $t=0$ (в точці B).

Робота сили поля

$$A=\int_{AB} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\int_{AB} ydx+zdy-xdz=$$

$$=\int_{2\pi}^{0}\left(a\sin t\cdot(-a\sin t)+bt\cdot a\cos t-ba\cos t\right)dt=$$

$$=\int_{2\pi}^{0}\left(-a^2\frac{1-\cos 2t}{2}+ab(t-1)\cdot\cos t\right)dt.$$

Інтеграл $\int\limits_{2\pi}^{0} ab(t-1)\cos t dt$ обчислюємо методом інтегрування частинами, обираючи частини наступним чином:

$$u=(t-1), dv=\cos t dt \Rightarrow du=dt, v=\sin t .$$

Таким чином,

$$A=\int\limits_{2\pi}^{0}\left(-a^2\frac{1-\cos 2t}{2}+ab(t-1)\cdot\cos t\right)dt=$$

$$=\left(-\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+ab(t-1)\cdot\sin t+ab\cos t\right)\Bigg|_{2\pi}^{0}=a^2\pi .$$

Відповідь: $A=a^2\pi$.

Коли точка A співпадає з точкою B, тобто коли крива AB є замкненим контуром L, криволінійний інтеграл другого роду позначається символом:

$$\oint\limits_{L} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz ,$$

причому не має значення, в якій точці починається рух вздовж контуру.

Слід зазначити, якщо L – плоский замкнений контур, який сам себе не перетинає, то у нього розрізняють додатний і від’ємний напрямки обходу, а саме: *додатний напрямок обходу* – напрямок, при якому область, що обмежена контуром L, залишається ліворуч, якщо спостерігач рухається вздовж контуру за цим напрямком. Якщо L – крива у просторі, то напрямок обходу контуру обговорюють окремо.

Властивості криволінійних інтегралів другого роду

Властивість 3.2. При визначенні криволінійного інтеграла другого роду $\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz$ слід розрізняти початок та кінець шляху інтегрування, а саме:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = -\int\limits_{BA} Pdx + Qdy + Rdz\,. \qquad (3.7)$$

Властивість 3.3. В тому випадку, коли крива AB замкнена, тобто замкненим є контур L, то

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz = -\oint\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz\,, \qquad (3.8)$$

тобто зміна напряму обходу контуру L змінює знак інтеграла на протилежний.

Властивість 3.4. Якщо точка C розбиває криву на дві криві AC та CB, то

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int\limits_{AC} Pdx + Qdy + Rdz + \int\limits_{CB} Pdx + Qdy + Rdz \qquad (3.9)$$

Властивість 3.5. (*Лінійність*). Нехай

$$\overrightarrow{a_1}(M) = \{P_1(x,y,z);\ Q_1(x,y,z);\ R_1(x,y,z)\}\,,$$

$$\overrightarrow{a_2}(M) = \{P_2(x,y,z);\ Q_2(x,y,z);\ R_2(x,y,z)\} \ -$$

векторні функції, α, β – сталі величини, тоді

$$\int\limits_{AB} \left(\alpha\overrightarrow{a_1} + \beta\overrightarrow{a_2}\right)\cdot\overrightarrow{ds} = \alpha\int\limits_{AB} \overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{ds} + \beta\int\limits_{AB} \overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{ds}\,. \qquad (3.10)$$

Зауваження. Якщо лінія AB є прямолінійним відрізком, перпендикулярним до осі OX, то

$$\int\limits_{AB} \vec{a}\cdot\overrightarrow{ds} = 0\,,$$

бо рівняння кривої $x = \text{const}$ і $dx = 0$.

Формула Гріна

Нехай в області D, яка міститься на площині XOY і контур L є межею даної області, задана неперервна векторна функція $\vec{a}(M) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, тоді справедлива формула

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \tag{3.11}$$

при цьому рух вздовж контуру відбувається в додатному напрямі, тобто в такому напрямі, щоб область залишалася ліворуч.

Приклад 3.3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\oint_L (x+y)dx + (x-y)dy$ вздовж замкненого контуру L, який складається з частин кривих $y = -x^2, y = -1$ (напрям обходу додатний).

Розв'язання.

Зробимо рисунок замкненого контуру L (Рис. 13).

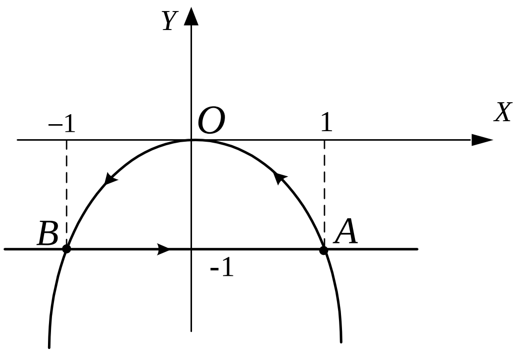

Рис. 13

Спочатку обчислимо криволінійний інтеграл безпосередньо. Очевидно, криволінійний інтеграл вздовж замкненого контуру складатиметься з двох доданків:

$$\oint_L (x+y)dx+(x-y)dy=$$

$$=\int_{BA}(x+y)dx+(x-y)dy+\int_{AOB}(x+y)dx+(x-y)dy$$

Відрізок прямої BA, з врахуванням напрямку руху, можна записати: $y=-1, -1\le x\le 1$. Відповідно $dy=0$ і інтеграл

$$\int_{AB}(x+y)dx+(x-y)dy=\int_{-1}^{1}\left(x-1\right)dx=\left.\frac{\left(x-1\right)^2}{2}\right|_{-1}^{1}=-2\,.$$

Дуга параболи AOB задається рівнянням $y=-x^2$, відповідно $dy=-2xdx,$ а змінна x змінюється від 1 до -1, тому

$$\int_{AOB}(x+y)dx+(x-y)dy=$$

$$=\int_{1}^{-1}\left(x-x^2+x\cdot\left(-2x\right)+x^2\cdot\left(-2x\right)\right)dx=$$

$$=\int_{1}^{-1}\left(x-3x^2-2x^3\right)dx=$$

$$=\left.\left(\frac{x^2}{2}-x^3-\frac{x^4}{2}\right)\right|_{1}^{-1}=2.$$

Остаточно:

$$\oint_L (x+y)dx+(x-y)dy=0\,.$$

Цей інтеграл можна обчислити іншім способом.

Контур L (рис. 13) – замкнений, застосуємо формулу Гріна, враховуємо те, що

$$P(x,y)=x+y\Rightarrow\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=1\,,$$

$$Q(x,y)=x-y\Rightarrow\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=1\,.$$

Остаточно маємо:

$$\oint_L (x+y)dx+(x-y)dy=\iint_D (1-1)dxdy=0.$$

Відповідь: $\oint_L (x+y)dx+(x-y)dy=0.$

Розглянемо умову незалежності криволінійного інтеграла від форми кривої інтегрування.

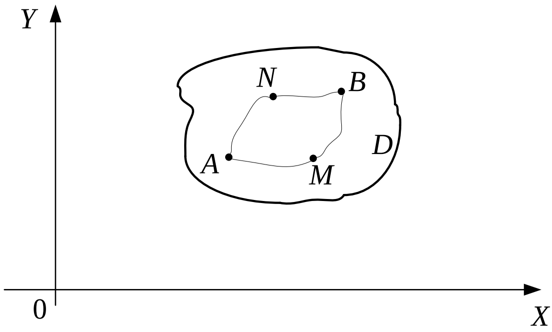

Рис. 14

Інтеграл $I=\int_{AB} \vec{a}\cdot\overrightarrow{ds}$ *не залежить від шляху інтегрування,* якщо результати інтегрування вздовж будь-яких кривих, які з'єднують точки A та B, співпадають (Рис. 14), тобто, якщо

$$\int_{AMB} \vec{a}\cdot\overrightarrow{ds}=\int_{ANB} \vec{a}\cdot\overrightarrow{ds}$$

Теорема 3.6. Для того, щоб інтеграл

$$I=\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

був незалежним від шляху інтегрування необхідно і достатньо, щоб в кожній точці області D виконувалася умова

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\ . \tag{3.12}$$

Теорема 3.7. Якщо в кожній точці області D функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні та мають неперервні частинні похідні, для яких $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$, то вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом неперервної функції

$$\Phi(x, y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

тобто

$$d\Phi(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Функцію $\Phi(x, y)$ в такому разі називають *потенційною функцією*.

ЗРАЗОК РОЗВ’ЯЗАННЯ ПРИКЛАДІВ КОНТРОЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

Задача 1. Дослідити ряди на збіжність

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+n}{5n}\right)^{3n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+3n-1}$.

Розв’язання.

а) Запишемо $u_n=\frac{5^n}{n+1}$, $u_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{n+2}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot 5}{n+2}\cdot\frac{n+1}{5^n}=$$

$$=5\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\left\|\begin{matrix}\text{за правилом}\\ \text{старших степенів}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}k=1, a_0=1\\ m=1, b_0=1\end{matrix}\right\|=5\cdot 1>1.$$

Відповідь: а) за ознакою Д’Аламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n+1}$ розбігається.

б) В нашому прикладі $u_n=\left(\frac{3+n}{5n}\right)^{3n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3+n}{5n}\right)^{3n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+n}{5n}\right)^{3}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\text{за правилом}\\ \text{старших степенів}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}k=3, a_0=1\\ m=3, b_0=5^3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{5^3}<1.$$

Відповідь: б) за радикальною ознакою Коші ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+n}{5n}\right)^{3n}$ збігається.

в) В даному прикладі $u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+3n-1}$. Розглянемо допоміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Це гармонічний ряд, відомо, що він розбігається. За граничною ознакою порівняння:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^3+3n-1} \cdot \frac{n}{1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \left\| \begin{matrix} \text{за правилом} \\ \text{старших степенів} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} k=3, a_0=1 \\ m=3, b_0=1 \end{matrix} \right\| = 1 = \mathrm{const} \neq 0.$$

Отже, ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+3n-1}$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ поводять себе однаково, розбігаються.

Відповідь: в) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+3n-1}$ розбігається за граничною ознакою порівняння.

Задача 2. Дослідити ряди на абсолютну та умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Розв'язання.

а) Ряд знакопереміжний. Перевіримо умови Лейбніца:

$$1)\ \frac{1}{2} > \frac{1}{\sqrt{7}} > \frac{1}{\sqrt{10}} > \ldots;$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}} = 0.$$

Отже, ряд збіжний. Потрібно дослідити, абсолютно чи умовно?

Складемо ряд із модулів членів даного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Дослідимо отриманий ряд на збіжність за допомогою граничної ознаки порівняння. Розглянемо допоміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ – узагальнений гармонічний ряд, цей ряд розбіжний $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1 \right)$. Обчислимо границю відповідного відношення, для того, щоб потім скористатися ознакою порівняння в граничній формі:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_n'} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \left\| \begin{matrix} \text{за правилом} \\ \text{старших степенів} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} k = \frac{1}{2}, a_0 = 1 \\ m = \frac{1}{2}, b_0 = \sqrt{3} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{const} \neq 0 .$$

Отже ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ поводять себе однаково, розбігаються. Тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n+1}}$ збігається умовно.

Відповідь: а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n+1}}$ збігається умовно.

б) Ряд в умові знакопереміжний. Перевіримо умови Лейбніца:

$$1)\ \frac{1}{2!} > \frac{1}{3!} > \frac{1}{4!} > \ldots ;$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0 .$$

Отже, ряд збіжний. Абсолютно чи умовно?

Складемо ряд із модулів членів даного ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$. Дослідимо цей ряд на збіжність за допомогою ознаки Д'Аламбера.

Запишемо $u_n = \frac{1}{(n+1)!}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+2)!}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = \left\| \frac{1}{\infty} \right\| = 0 < 1.$$

За ознакою Д'Аламбера, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$ збігається, отже ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ збігається абсолютно.

Відповідь: б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ збігається абсолютно.

Задача 3. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n-1)3^n}$.

Розв'язання. Заданий функціональний ряд є степеневим. За ознакою Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1}}{(2(n+1)-1)3^{n+1}} \cdot \frac{(2n-1)3^n}{(x+2)^n} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^n \cdot (x+2)}{(2n+1)3^n \cdot 3} \cdot \frac{(2n-1)3^n}{(x+2)^n} \right| = |x+2| \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3 \cdot (2n+1)} =$$

$$= \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \left\| \begin{matrix} \text{за правилом} \\ \text{старших степенів} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} k=1, a_0 = 2 \\ m=1, b_0 = 6 \end{matrix} \right\| = \frac{2}{6}|x+2| = \frac{1}{3}|x+2| < 1.$$

Розв'язуючи нерівність, маємо наступне:

$$|x+2| < 3 \Rightarrow -3 < x+2 < 3 .$$

Остаточно отримуємо інтервал збіжності:

$$-5 < x < 1.$$

Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу, для цього підставимо відповідні значення x в умову задачі:

$$x = -5: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5+2)^n}{(2n-1)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n-1)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(2n-1)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

Цей ряд знакопереміжний. Перевіримо умови Лейбніца:

$$1)\ 1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \ldots;$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

Отже, ряд збіжний. Абсолютно чи умовно? Щоб відповісти на це питання, складемо ряд із модулів членів даного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{2n-1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}.$$

Дослідимо цей ряд на збіжність за допомогою граничної ознаки порівняння. Розглянемо допоміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонічний ряд, розбіжний.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{n}{1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \left\| \begin{matrix} \text{за правилом} \\ \text{старших степенів} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} k = 1, a_0 = 1 \\ m = 1, b_0 = 2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} = \text{const} \neq 0.$$

Отже ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ поводять себе однаково, розбігаються. Тому, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ збігається умовно. Отже, $x = -5$ є точкою збіжності ряду.

Далі,

$$x=1:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+2)^n}{(2n-1)3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n-1)3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1},$$

цей ряд розбігається.

Таким чином, область збіжності вихідного ряду є $[-5,1)$.

Відповідь: $[-5,1)$ – область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n-1)3^n}$.

Задача 4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)}(x+2y)\,dxdy$, де область (D) обмежена лініями: $y=x^2-2x,\ y=x.$

Розв'язання. Розглянемо лінії, якими обмежена область (D). Пряма $y=x$ – бісектриса I та III координатних кутів, $y=x^2-2x$ – це парабола, вітки вгору ($a=1>0$). Обчислимо координати вершини $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2}=1,\ y_0=1-2=-1$. Отже, точка $(1;-1)$ – вершина параболи. Знайдемо точки перетину прямої та параболи. Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y=x^2-2x, \\ y=x, \end{cases}$$

звідси $x^2-2x=x\Rightarrow x^2-3x=0$.

Розв'язавши квадратне рівняння, знайдемо, що $x_1=0$, $x_2=3$, $y_1=0$, $y_2=3$ відповідно.

Отже, лінії, що обмежують область, перетинаються в точках $O(0;0)$ та $M(3;3)$.

Зобразимо фігуру (D) за рівняннями її межі (Рис. 15).

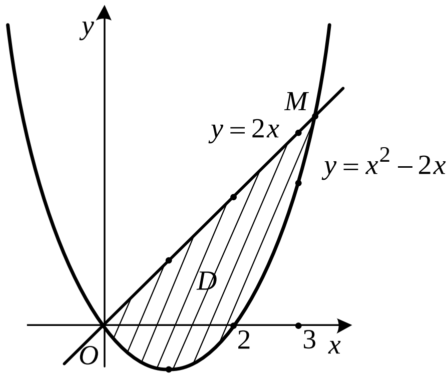

Рис. 15

Таким чином, область (D) задається системою нерівностей

$$(D):\begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ x^2 - 2x \le y \le x. \end{cases}$$

Область (D) в напрямку осі OY є правильною (стрілку ставимо вздовж осі OY: лінія «входу» одна, лінія «виходу» одна). Подвійний інтеграл зобразимо у вигляді двократного:

$$\iint\limits_{(D)} (x+2y)\,dxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-2x}^{x} (x+2y)\,dy\ .$$

Обчислимо внутрішній інтеграл:

$$\int\limits_{x^2-2x}^{x} (x+2y)\,dy = x\int\limits_{x^2-2x}^{x} dy + 2\int\limits_{x^2-2x}^{x} ydy$$

$$= xy\Big|_{x^2-2x}^{x} + 2\left.\frac{y^2}{2}\right|_{x^2-2x}^{x} =$$

$$= x\Big(x - \big(x^2 - 2x\big)\Big) + x^2 - \big(x^2 - 2x\big)^2 = 3x^3 - x^4.$$

Обчислимо зовнішній інтеграл:

$$\int_0^3\left(3x^3-x^4\right)dx=3\int_0^3 x^3dx-\int_0^3 x^4dx=$$

$$=3\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^3-\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^3=3\cdot\frac{81}{4}-\frac{243}{5}=$$

$$=\frac{243\cdot5-243\cdot4}{20}=\frac{243}{20}.$$

Відповідь: $\frac{243}{20}$.

Задача 5. Переходячи до полярної системи координат, знайти масу пластинки, яка займає область обмежену кругом $x^2+y^2=a^2$, що лежить в I чверті, та прямими $y=x$ та $y=\sqrt{3}\cdot x$ і має поверхневу щільність $\gamma(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Зробимо рисунок області (Рис. 16).

Перейдемо до полярної системи координат:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi.\end{cases}$$

Запишемо межі області в полярних координатах.

Рівняння кола має вигляд:

$$x^2+y^2=a^2\Rightarrow(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=a^2\Rightarrow\rho^2=a^2.$$

Остаточно, $\rho=a$ – рівняння кола. Відрізки прямих $y=x$ та $y=\sqrt{3}x$ є променями $\varphi=\frac{\pi}{4}$ та $\varphi=\frac{\pi}{3}$. При визначенні цих кутів використано, що кутові коефіцієнти прямих $k=\operatorname{tg}\varphi$.

Маса пластинки, яка займає область (D) визначається за формулою:

$$m=\iint_D\gamma(x,y)dxdy.$$

В нашому випадку:

$$m = \iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy = \iint\limits_{(D)} \sqrt{\rho^2}\, \rho d\rho d\varphi = \iint\limits_{(D)} \rho^2 d\rho d\varphi .$$

Перейдемо до двократного інтегралу:

$$m = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{0}^{a} \rho^2 d\rho.$$

Обчислимо спочатку внутрішній, а потім зовнішній інтеграли:

$$1)\ \frac{\rho^3}{3}\bigg|_0^a = \frac{a^3}{3},$$

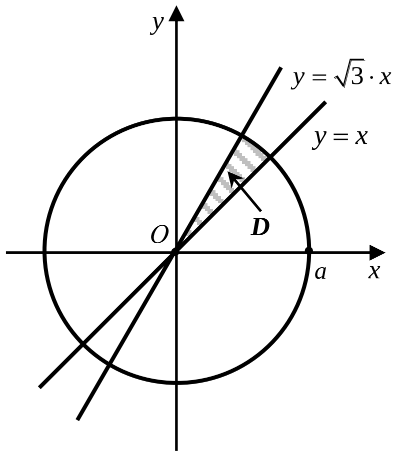

Рис. 16

$$2)\ \frac{a^3}{3} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = \frac{a^3}{3} \varphi \bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a^3}{3} \frac{\pi}{12} = \frac{a^3\pi}{36}.$$

Відповідь: $\frac{a^3\pi}{36}$.

Задача 6. Обчислити за формулою Гріна криволінійний інтеграл другого роду $\oint\limits_L (x^2y+y)dx+(xy^3-y)dy$, де L – контур, утворений лініями $y=x^2$, $y=1$, який має додатну орієнтацію

Розв'язання. Зробимо рисунок контуру, утвореного лініями $y=x^2$, $y=1$, (Рис. 17). Визначимо точки перетину параболи та прямої: $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1.$

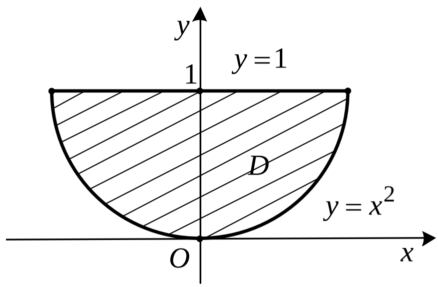

Рис. 17

В нашому прикладі $P(x,y)=x^2y+y,\ Q(x,y)=xy^3-y.$

Обчислимо відповідні частинні похідні $\dfrac{\partial P}{\partial y}=x^2+1,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=y^3$, далі скористаємось формулою Гріна:

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Отримуємо :

$$\oint\limits_L (x^2y+y)dx+(xy^3-y)dy=\iint\limits_{(D)}\left(y^3-\left(x^2+1\right)\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{(D)}\left(y^3-x^2-1\right)dxdy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}\left(y^3-x^2-1\right)dy.$$

Обчислимо внутрішній інтеграл:

$$\int_{x^2}^{1}\left(y^3-x^2-1\right)dy=\int_{x^2}^{1}y^3dy-\left(x^2+1\right)\int_{x^2}^{1}dy=$$

$$=\left.\frac{y^4}{4}\right|_{x^2}^{1}-\left(x^2+1\right)y\Big|_{x^2}^{1}=\frac{1}{4}\left(1-x^8\right)-\left(x^2+1\right)\left(1-x^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}x^8-1+x^4=x^4-\frac{1}{4}x^8-\frac{3}{4}.$$

Обчислимо тепер зовнішній інтеграл:

$$\int_{-1}^{1}\left(x^4-\frac{1}{4}x^8-\frac{3}{4}\right)dx=2\int_{0}^{1}\left(x^4-\frac{1}{4}x^8-\frac{3}{4}\right)dx=$$

$$=2\left.\left(\frac{x^5}{5}-\frac{1}{4}\frac{x^9}{9}-\frac{3}{4}x\right)\right|_{0}^{1}=$$

$$=2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{36}-\frac{3}{4}\right)=2\cdot\frac{36-5-135}{180}=2\cdot\frac{-104}{180}=-\frac{52}{45}.$$

Відповідь: $-\dfrac{52}{45}.$

Задача 7. Обчислити роботу сили $\vec{F}=\left\{x^2-y;\ y\right\}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої $y=x^3$ від точки $A(1;1)$ до точки $B(2;8)$.

*Розв'язання.*Робота сили поля обчислюється за формулою:

$$A=\int_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

В нашому прикладі

$$P(x,y)=x^2-y,\ Q(x,y)=y.$$

Отримуємо криволінійний інтеграл 2-го роду

$$A=\int_{AB}\left(x^2-y\right)dx+ydy.$$

Оскільки переміщення матеріальної точки здійснюється вздовж кривої $y = x^3$, то $dy = \left(x^3\right)' dx = 3x^2 dx.$ Нижня та верхня межі інтегрування це абсциси точок $A(1;1)$ і $B(2;8)$ відповідно.

Отже, криволінійний інтеграл 2-го роду перетворюється на наступний визначений інтеграл:

$$\int_1^2 \left(\left(x^2 - x^3\right)dx + x^3 \cdot 3x^2 dx\right) =$$

$$= \int_1^2 \left(x^2 - x^3 + 3x^5\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + \frac{2^6}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3} - 4 + 32 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} =$$

$$= 28 + \frac{7}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 28 + \frac{28 + 3 - 6}{12} = 28 + \frac{25}{12} = 30\frac{1}{12}.$$

Відповідь: $A = 30\frac{1}{12}$.

ВАРІАНТИ ПІДСУМКОВОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Номер варіанта – остання цифра в номері залікової книжки. Якщо цей номер закінчується цифрою 0, то – десятий варіант.

ВАРІАНТ 1

1. Дослідити ряди на збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{n+1}};\ \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{3n+1}\right)^n;\ \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{4n+1}{9n-5}}.$$

2. Дослідити ряди на абсолютну та умовну збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2-n+1};\ \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{7^n}{(n+1)!}.$$

3. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n}x^n$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)}(2x+y)\,dxdy$, де область (D) обмежена лініями $y=2-x^2$, $y=x$.

5. Переходячи до полярної системи координат, знайти масу пластинки, яка займає область $x^2+y^2\le 9$, $y\ge 0$, $y\le x$ і має поверхневу щільність $\gamma(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

6. Обчислити за формулою Гріна криволінійний інтеграл другого роду $\oint\limits_L\left(2x^3-3y\right)dx+\left(y^3+2x\right)dy$, де L – контур, утворений прямими $x-y=1$, $x=0$, $y=0$, який має додатню орієнтацію.

7. Обчислити роботу сили $\vec{F}=\left\{x^2-2y;\ y^2-2x\right\}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж прямої $x-y+4=0$ від точки $A(-4;0)$ до точки $B(0;4)$.

ВАРІАНТ 2

1. Дослідити ряди на збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}\text{; б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n\text{; в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-2}.$$

2. Дослідити ряди на абсолютну та умовну збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2+3}{2n^3-1}\text{; б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{9^n}.$$

3. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} (y-4x)\,dxdy$, де область (D) обмежена лініями $y = x^2$, $y = x$.

5. Переходячи до полярної системи координат, знайти масу пластинки, яка займає область $x^2+y^2 \ge 1$, $x^2+y^2 \le 4$, $x \ge 0,\ y \ge 0$ і має поверхневу щільність $\gamma(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

6. Обчислити за формулою Гріна криволінійний інтеграл другого роду $\oint\limits_L (x^3 - y)\,dx + (y^3 + x)\,dy$, де L – контур, утворений прямими $x + y = 3$, $x = 3,\ \ y = 3$, який має додатню орієнтацію.

7. Обчислити роботу сили $\vec{F} = \{x^2 + 2y;\ y^2 + 2x\}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж прямої $2x + y - 2 = 0$ від точки $A(0;\,2)$ до точки $B(1;\,0)$.

ВАРІАНТ 3

1. Дослідити ряди на збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2}\text{; б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+3}{7n-2}\right)^n\text{; в) } \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{8n+1}{27n-2}}.$$

2. Дослідити ряди на абсолютну та умовну збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n^2-2}\text{; б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2\sqrt{n}}{n!}.$$

3. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} x^n$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} x\,dx\,dy$, де область (D) обмежена лініями $y = 9 - x^2$, $y = x + 3$.

5. Переходячи до полярної системи координат, знайти масу пластинки, яка займає область $x^2 + y^2 \le 16$, $y \ge x$, $y \le x\sqrt{3}$ і має поверхневу щільність $\gamma(x, y) = x^2 + y^2$.

6. Обчислити за формулою Гріна криволінійний інтеграл другого роду $\oint\limits_L (2x-3)y\,dx + x^2 dy$, де L – контур, утворений лініями $y = x^2 + 2$, $x = 1$, $x = 3$, $y = x$, який має додатню орієнтацію.

7. Обчислити роботу сили $\vec{F} = \{x + 2y;\ y - 2x\}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої $y = x^2 + 3$ від точки $A(1; 4)$ до точки $B(3; 12)$.

ВАРІАНТ 4

1. Дослідити ряди на збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\ ;\ \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+5}{n+7} \right)^{n}\ ;\ \text{в) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{5n^3+1}\ .$$

2. Дослідити ряди на абсолютну та умовну збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}\ ;\ \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{5^n}\ .$$

3. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^n x^n$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} (y-x)\,dxdy$, де область (D) обмежена лініями $y = 2x - x^2$, $y = x$.

5. Переходячи до полярної системи координат, знайти масу пластинки, яка займає область $x^2 + y^2 \geq 2$, $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq x$ і має поверхневу щільність $\gamma(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

6. Обчислити за формулою Гріна криволінійний інтеграл другого роду $\oint\limits_{L} (x+2y)\,dx + 5xdy$, де L – контур, утворений лініями $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$, який має додатню орієнтацію.

7. Обчислити роботу сили $\vec{F} = \left\{ x^2 y - x;\ 2y \right\}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої $y = 2 - x^2$ від точки $A(-1;1)$ до точки $B(0;2)$.

ВАРІАНТ 5

1. Дослідити ряди на збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}\text{; б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n+1}\right)^n\text{; в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{3n^2-2n}.$$

2. Дослідити ряди на абсолютну та умовну збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n+4}}\text{; б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+3}{2^n}.$$

3. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+2} x^n$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} (x+2)\,dxdy$, де область (D) обмежена лініями $y = 2 - x^2$, $y = x^2$.

5. Переходячи до полярної системи координат, знайти масу пластинки, яка займає область $x^2 + y^2 \le 1$, $y \ge 0$, $y \le \frac{x}{\sqrt{3}}$ і має поверхневу щільність $\gamma(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$.

6. Обчислити за формулою Гріна криволінійний інтеграл другого роду $\oint\limits_L (\sqrt{x} - y)dx + (3x - y^2)dy$, де L – контур, утворений прямими $2x + y = 6$, $x = 0$, $y = 0$, який має додатню орієнтацію.

7. Обчислити роботу сили $\vec{F} = \{x^2 y;\ -y\}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж прямої $y = 3x + 1$ від точки $A(1; 4)$ до точки $B(3;10)$.

ВАРІАНТ 6

1. Дослідити ряди на збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n}\text{; б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n+5}{7n+1} \right)^n\text{; в) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{2n+7}}.$$

2. Дослідити ряди на абсолютну та умовну збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}\text{; б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2+1}{(n+1)!}.$$

3. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3} x^n$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} 2xydxdy$, де область (D) обмежена лініями $y = x^2$, $y = x + 2$.

5. Переходячи до полярної системи координат, знайти масу пластинки, яка займає область $x^2 + y^2 \geq 3$, $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ і має поверхневу щільність $\gamma(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$.

6. Обчислити за формулою Гріна криволінійний інтеграл другого роду $\oint\limits_{L} (x^2 - 5y)dx + (5x - y^2)dy$, де L – контур, утворений лініями $y = -2x - x^2$, $y = 0$, який має додатню орієнтацію.

7. Обчислити роботу сили $\vec{F} = \{xy;\ y - x\}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої $y = 2x - x^2$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(3;-3)$.

ВАРІАНТ 7

1. Дослідити ряди на збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{(n+1)!}\text{; б) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{n+9}\right)^n\text{; в) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5n-3}.$$

2. Дослідити ряди на абсолютну та умовну збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n^3-1}{n^4+2n^2+3}\text{; б) } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}.$$

3. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n^2+1}x^n$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} y\,dx\,dy$, де область (D) обмежена лініями $y=2x+x^2$, $y=-x$.

5. Переходячи до полярної системи координат, знайти масу пластинки, яка займає область $x^2+y^2\geq 4$, $x^2+y^2\leq 9$, $y\geq 0$, $y\leq x$ і має поверхневу щільність $\gamma(x,y)=\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$.

6. Обчислити за формулою Гріна криволінійний інтеграл другого роду $\oint\limits_L \left(x^2+y\right)dx+\left(y^2-x\right)dy$, де L – контур, утворений лініями $y=5-x^2$, $x=1$, $x=2$, $y=0$, який має додатню орієнтацію.

7. Обчислити роботу сили $\vec{F}=\left\{3x-y^2;\ 3y+x^2\right\}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж прямої $y=3-4x$ від точки $A(-1;7)$ до точки $B(1;-1)$.

ВАРІАНТ 8

1. Дослідити ряди на збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n+3}\text{; б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{2n+3}\right)^n\text{; в) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{4n+1}{9n+4}}.$$

2. Дослідити ряди на абсолютну та умовну збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n^2+5}{n^3+2n+5}\text{; б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{n!}.$$

3. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^n$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} (3+2y)\,dxdy$, де область (D) обмежена лініями $y=\sqrt{x}$, $y=x$.

5. Переходячи до полярної системи координат, знайти масу пластинки, яка займає область $x^2+y^2 \le 5$, $y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \le x$ і має поверхневу щільність $\gamma(x, y) = \left(x^2+y^2\right)^2$.

6. Обчислити за формулою Гріна криволінійний інтеграл другого роду $\oint\limits_L \left(3x^2+2y\right)dx + \left(y^2-2x\right)dy$, де L – контур, утворений лініями $y=1-x^2$, $x+y=1$, який має додатню орієнтацію.

7. Обчислити роботу сили $\vec{F} = \left\{x^2-2y;\ y\right\}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L: $y = x^2+2x$ від точки $A(0; 0)$ до точки $B(3; 15)$.

ВАРІАНТ 9

1. Дослідити ряди на збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}\text{; б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^n \text{; в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+4n-2}.$$

2. Дослідити ряди на абсолютну та умовну збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[5]{n^3+3}}\text{; б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+1}}{(2n+1)!}.$$

3. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} x^n$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_{(D)} (x-2y)\,dxdy$, де область (D) обмежена лініями $y = 6 - x$, $y = x^2$.

5. Переходячи до полярної системи координат, знайти масу пластинки, яка займає область $x^2 + y^2 \geq 3$, $x^2 + y^2 \leq 16$, $y \geq 0$, $y \leq x\sqrt{3}$ і має поверхневу щільність $\gamma(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$.

6. Обчислити за формулою Гріна криволінійний інтеграл другого роду $\oint_L \left(\sqrt[3]{x} - 3y\right)dx + \left(\sqrt[3]{y} + 2x\right)dy$, де L – контур, утворений лініями $y = x^2 + 1$, $y = 2$, який має додатню орієнтацію.

7. Обчислити роботу сили $\vec{F} = \left\{y;\ y^2 - 2x\right\}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж прямої $y = 5 - 4x$ від точки $A(0; 5)$ до точки $B(2; -3)$.

ВАРІАНТ 10

1. Дослідити ряди на збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}\text{; б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9n+7}{12n+5}\right)^n\text{; в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{7n+5}.$$

2. Дослідити ряди на абсолютну та умовну збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3+5}{6n^4-n+1}\text{; б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+5}{7^n}.$$

3. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^n x^n$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} (4-x)\,dxdy$, де область (D) обмежена лініями $y = x^2 - 2,\ y = x.$

5. Переходячи до полярної системи координат, знайти масу пластинки, яка займає область $x^2 + y^2 \geq 1$, $x^2 + y^2 \leq 25$, $x \geq 0$, $y \geq x\sqrt{3}$ і має поверхневу щільність $\gamma(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

6. Обчислити за формулою Гріна криволінійний інтеграл другого роду $\oint\limits_L \left(x + y^4\right)dx + x\left(4y^3 + 2\right)dy$, де L – контур, утворений лініями $y = x^2 + 3$, $y = -x$, $x = 0$, $x = 1$, який має додатню орієнтацію.

7. Обчислити роботу сили $\vec{F} = \left\{xy - y^2;\ x\right\}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої $y = x^2$ від точки $A(1;1)$ до точки $B(3;9)$.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Бізюк В. В., Якунін А. В. Вища математика для електротехніків. Модуль 3: Числові та функціональні ряди. Функції декількох змінних. Елементи теорії поля. Криволінійні та поверхневі інтеграли. Рівняння математичної фізики. Харків: ХНАМГ, 2011. -383 с. https://vm.kname.edu.ua/images/Files/metod_literatura/Yakunin/VM_dlya_elektrotehnikiv_M3_1chastyna.pdf
2. Веретельник В. В., Тимченко Г. Н. Теорія функцій комплексної змінної. Харків:НТУ«ХПІ»,2012.-208 с.
3. Геворкян Ю. Л., Чікіна Н. О., Антонова І. В. Вища математика: Теорія і практика [Електронний ресурс] : електронний медійний інтерактивний навч. посібник: у 2 ч. Ч. 2: Функції декількох змінних. Диференціальні рівняння. Ряди. Кратні інтеграли. Харків: Друкарня Мадрид, 2018. 1 ел. опт. диск (DVD-ROM). https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/37953
4. Дорошенко Н. К., Мясникова В. Ф. Ряди: Навч. посібник. Х.: ХДПУ, 2000. -116 с.
5. Курпа Л. В. Вища математика в прикладах і задачах. Т.2. Харків: НТУ«ХПІ»,2009. -432с. https://repository.kpi.kharkov.ua/server/api/core/bitstreams/b90227cb-96dc-48c3-a2a3-b89c6b339f72/content
6. Подвійний та потрійний інтеграли: навч. посіб. / Першина Ю.І., Пріщенко О.П., Черемська Н.В., Черногор Т.Т. – Харків : Видавництво «Друкарня Мадрид», 2022. – 106 с. https://repository.kpi.kharkov.ua/server/api/core/bitstreams/854cb7fa-da18-4e56-a8a5-1319b42723c8/content
7. Ряди: навч. Посібник для студентів електротехнічних спеціальностей / Тулученко Г.Я. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2024. - 220 с. https://repository.kpi.kharkov.ua/server/api/core/bitstreams/b7503848-b66c-4950-9276-674f80fe20b3/content

8. Чікіна Н. О. Криволінійні та поверхневі інтеграли : навч.-метод. посібник для студентів техн. спец. усіх форм навчання вищ. навч. закл. / Н. О. Чікіна, І. В. Антонова ; Нац. техн. ун-т "Харків. політехн. ін-т". – Харків : НТУ "ХПІ", 2019. – 76 с. https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/44521

9. Вища математика: Числові та функціональні ряди: Практикум [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. техн. спеціальностей / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: М.В. Савчук. – Електронні текстові дані (1 файл: 725 Кбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 46 с. https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/41853/1/VyshchMat_Chyslovi-ta-funktsionalniriady_Praktykum.pdf

ЗМІСТ

Навчальне видання

ЧЕРЕМСЬКА Надія Валентинівна
ГИРЯ Наталія Петрівна
НЕМЧЕНКО Тетяна Адальбертівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчально-методичний посібник
для студентів заочної форми навчання ННІ МІТ та ННІ ЕЕЕ

Відповідальна за випуск проф. Першина Ю. І.
Роботу до видання рекомендувала проф. Чікіна Н. О.

В авторській редакції

План 2025 р., поз. 21

Підп. до друку 13.02.2025 р.
Гарнітура Times New Roman
Ум. друк арк. 3,6

Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Електронне видання