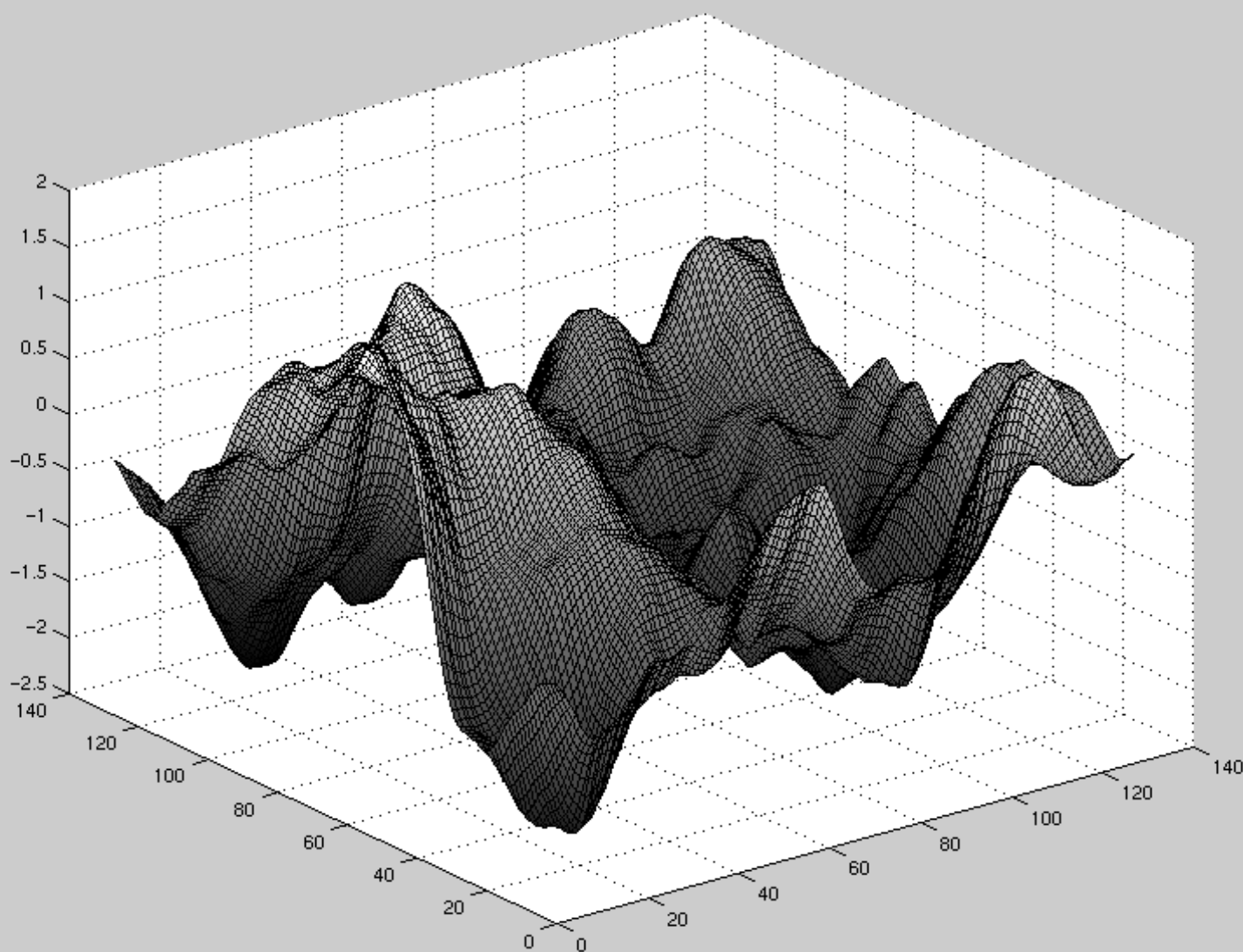


НОРМАЛЬНІ МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ І ПОЛЯ: АНАЛІЗ ТА АЛГОРИТМИ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

О. С. МАЗМАНІШВІЛІ
О. С. МЕЛЬНИКОВ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О. С. Мазманішвілі, О. С. Мельников

НОРМАЛЬНІ МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ І ПОЛЯ: АНАЛІЗ ТА АЛГОРИТМИ

Навчально-методичний посібник для самостійної роботи студентів
з дисципліни «Випадкові процеси»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 15.02.2024 р.

Харків
2024

УДК 519.2:004.94

М 13

Рецензенти:

В. А. Кушнір, д-р фіз.-мат. наук,
с.н.с. ННЦ «Харківський фізико-технічний інститут»

Л. М. Любчик, д-р техн. наук,
професор кафедри комп'ютерної математики та аналізу даних НТУ «ХП»

Мазманішвілі О. С., Мельников О. С.

М 13 Нормальні марковські процеси і поля: аналіз та алгоритми : навчально-методичний посібник для самостійної роботи студентів з дисципліни «Випадкові процеси» / О. С. Мазманішвілі, О. С. Мельников – Харків : НТУ «ХП», 2024. – 100 с.

ISBN 978-617-05-0480-7

Викладено основні теоретичні положення про нормальні марковські процеси та поля, що розміщені в декартовій системі координат на осі, на площині та у просторі. Побудовані умовні та безумовні щільності розподілу ймовірностей станів аналізованих процесів і полів. Описана методика застосування теоретичних результатів для побудови алгоритмів генерації нормальних марковських процесів і полів. Представлено приклади програмної реалізації алгоритмів в обчислювальному середовищі Mathcad, які дозволяють візуалізувати аналізовані процеси і поля.

Для студентів і аспірантів спеціальностей «Системний аналіз», «Комп'ютерні науки», «Прикладна математика», інженерів та науковців, які займаються моделюванням стохастичних процесів та систем.

Табл. – Іл. 35 Бібліогр. 15

УДК 519.2:004.94

© Мазманішвілі О. С., Мельников О. С., 2024

© НТУ "ХП", 2024

ISBN 978-617-05-0480-7

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень та скорочень	5
Вступ	6
1. Елементи теорії випадкових процесів та полів	8
1.1 Випадкові процеси: визначення, властивості і приклади	8
1.2 Броунівський рух. Гауссові процеси.....	11
1.3 Білий шум.....	15
1.4 Стохастичні інтеграли. Процес Орнштейна-Уленбека	17
1.5 Марковські випадкові поля	21
Контрольні запитання	22
Вправи для роботи з комп'ютером.....	23
2. Одновимірний нормальний марковський процес.....	24
2.1 Процес Орнштейна-Уленбека на інтервалі	24
2.2 Підвищення порядку процесу Орнштейна-Уленбека	28
Контрольні запитання	33
Вправи для роботи з комп'ютером.....	33
3. Нормальне марковське поле першого порядку на площині	34
3.1 Рішення рівнянь руху для нормального марковського поля	34
3.2 Алгоритм генерації нормальних марковських полів на площині	39
Контрольні запитання	43
Вправи для роботи з комп'ютером.....	45
4. Підвищення порядку нормального марковського поля на площині	46
4.1 Нормальні марковські двовимірні поля другого порядку	46
4.2 Алгоритм генерації НМД-поля k -го порядку	48
4.3 Результати генерації НМД-поля	50
4.4 Гармонічне нормальне марковське поле на площині.....	52
4.5 Результати генерації гармонічного НМД-поля	56
Контрольні запитання	57
Вправи для роботи з комп'ютером.....	59
5. Генерація нормальних марковських полів на викривлених поверхнях	60
5.1 Генерація нормального марковського поля на циліндричній поверхні	60
5.2 Генерація нормального марковського поля на тороїдальній поверхні	64
Контрольні запитання	71
Вправи для роботи з комп'ютером.....	71
6. Нормальне марковське поле першого порядку у просторі	72
6.1 Рівняння руху для тривимірних марковських полів.....	72
6.2 Алгоритм генерації нормальних тривимірних марковських полів.....	79

Контрольні запитання	83
Вправи для роботи з комп'ютером	84
7. Програмна реалізація алгоритмів генерації нормальних марковських процесів та полів.....	85
7.1 Генерація білого шуму.....	85
7.2 Генерація нормального марковського процесу на інтервалі	86
7.3 Генерація гармонічного нормального марковського процесу на інтервалі ..	87
7.4 Процедура підвищення порядку нормального марковського двовимірного поля на площині.....	88
7.5 Процедура генерації гармонічного марковського поля	90
7.6 Процедура підвищення порядку випадкового марковського тривимірного поля у просторі	93
Контрольні запитання	96
Вправи для роботи з комп'ютером	97
Післямова	98
Список використаної літератури	99

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

$\Pr\{A\}$	ймовірність події A
$\mathbf{M}[X], \langle X \rangle$	математичне сподівання випадкової величини X
$\mathbf{D}[X]$	дисперсія випадкової величини X
$\text{cov}(X, Y)$	коваріація між випадковими величинами X та Y
$f_X(x)$	щільність розподілу випадкової величини X в точці x
$f_X(x y)$	умовна щільність розподілу випадкової величини X в точці x за відомого значення y
$X \sim N(\mu, \sigma)$	випадкова величина X розподілена за нормальним законом із математичним сподіванням μ і дисперсією σ^2
$u(x)$	процес білого шуму
$h(x)$	випадковий процес
$\delta(x)$	дельта-функція Дірака
СКВ	середньоквадратичне відхилення
ОУ-процес	процес Орнштейна-Уленбека
НМ-процес	нормальний марковський процес
НМД-поле	нормальне марковське двовимірне поле
2D	двовимірний об'єкт
3D	тривимірний об'єкт

ВСТУП

Марковські процеси займають особливе положення серед інших видів випадкових процесів. Теорія марковських процесів широко використовується в самих різних напрямках, оскільки для неї існує добре розроблений математичний апарат, за допомогою якого можна адекватно описувати поведінку багатьох реальних систем та пристроїв.

У цій роботі аналізується важливий клас марковських процесів – гауссові, або нормальні марковські процеси. Крім марковської властивості, ці процеси мають також нормально розподілені прирости, внаслідок чого будь-який скінченновимірний розподіл процесу підпорядковується багатовимірному нормальному розподілу. Нормальні марковські процеси повністю характеризуються своєю коваріаційною функцією, що значно спрощує їх аналіз. Прикладами нормальних марковських процесів є броунівський рух, броунівський міст та процес Орнштейна-Уленбека. Останній процес володіє також властивістю стаціонарності, що робить його особливо зручним для вирішення задач інженерного моделювання.

У роботі розглядаються також нормальні марковські поля, які є узагальненням випадкових процесів для багатовимірних просторів.

На підставі загальної марковської властивості в роботі побудовані перехідні і безумовні щільності розподілу ймовірностей амплітуд марковських нормальних процесів і полів. Ці теоретичні результати застосовані для побудови алгоритмів генерації нормальних марковських процесів та полів. Представлені приклади застосування побудованих алгоритмічних процедур, які дозволяють візуалізувати аналізовані процеси і поля. Усі приклади програмно реалізовані в середовищі Mathcad, яке виявилось зручним для розрахунків, і супроводжуються переліком використаних параметрів для відтворюваності результатів.

Історично математичний апарат теорії нормальних марковських процесів був розроблений для вирішення задач термодинаміки та опису інших фізичних процесів (турбулентність, деформація поверхонь, розповсюдження електромагнітного випромінювання тощо). З часом сфера застосування цього апарату значно поширилась. Зараз він успішно використовується в економічній теорії для моделювання динаміки цін на фінансові активи при моделюванні динаміки цін на фінансові активи та природні ресурси, курсів валют, процентних ставок, ф'ючерсів, опціонів, в епідеміології при моделюванні розповсюдження інфекційних захворювань, в еволюційній біології при вивченні зміни чисельності популяцій, в комп'ютерній графіці для генерації реалістичних зображень хмар, хвиль та подібних об'єктів. Без сумніву, з плином часу і зростанням можливостей обчислювальної техніки коло можливих застосувань теорії нормальних марковських процесів буде поширюва-

тись і надалі. Зокрема, це стосується задач візуалізації даних. Видається перспективним застосування тривимірних нормальних марковських полів у завданнях розсіювання електромагнітних хвиль у обурених середовищах, зовнішньої балістики в турбулентній атмосфері, розсіювання заряджених частинок в аморфних середовищах, поширення акустичних коливань у твердому тілі.

Зміст роботи структурно організовано наступним чином.

В першому розділі наводяться стислі відомості з теорії випадкових процесів, необхідні для розуміння подальшого матеріалу, а також для систематизації позначок.

В другому розділі розглядаються марковські нормальні процеси першого та другого порядків.

В розділах 3–5 аналізуються нормальні марковські поля на двовимірних поверхнях. В розділі 3 розглядається нормальне марковське поле першого порядку на площині. В розділі 4 отримані результати узагальнюються для полів вищих порядків. В розділі 5 аналізуються марковські поля на викривлених поверхнях (циліндричній, тороїдальній).

В розділі 6 розглядаються властивості і процедури генерації нормальних марковських полів у тривимірному просторі.

Матеріал розділів 1–6 супроводжується алгоритмами генерації аналізованих випадкових об'єктів, викладеними на змістовному рівні. Розділ 7 містить рекомендації щодо програмної реалізації цих алгоритмів у обчислювальному середовищі Mathcad.

Робота розрахована на читачів, які знайомі з теорією ймовірностей і мають навички програмування чисельних алгоритмів. Вона буде корисною студентам, аспірантам, інженерам та науковцям, які займаються питаннями математичного моделювання стохастичних процесів та систем.

1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ТА ПОЛІВ

1.1 Випадкові процеси: визначення, властивості і приклади

Випадковий процес визначається як сімейство випадкових величин $\{H(x): x \in X\}$, індексованих деяким набором $X \subseteq \mathbf{R}$, який називається *множиною індексів* випадкового процесу. Якщо множина X є скінченною або зліченною (наприклад, складається із натуральних або цілих чисел), часто замість $H(x)$ використовується нотація H_x .

В природничих і соціальних науках найчастіше елементи індексної множини мають значення часу. В цьому разі вони позначаються як $t \in T$, а значення випадкового процесу $H(t)$ або H_t інтерпретуються як спостереження за деякою змінною протягом часу. Якщо множина T є зліченною, то говорять про випадковий процес у *дискретному часі*; якщо T є інтервалом числової осі – про процес у *неперервному часі*. Значення $H(t)$ або H_t називають *станом* процесу під час t . Сукупність всіх можливих станів S називають *простором станів* випадкового процесу.

Прикладами випадкових процесів можуть бути напруга в електричній мережі, довжина черги до каси в супермаркеті, або ціна нафти на світових ринках.

В деяких випадках зручніше вважати елементи індексної множини просторовою координатою або координатами. Наприклад, епідемії розповсюджуються як у часі, так і у просторі, і з точки зору локалізації джерела зараження просторовий аспект може бути важливішим, ніж часовий. Нижче ми повернемося до цієї теми більш докладно, але доти будемо вважати індекс випадкового процесу часом.

Реалізацією (або *траєкторією*) випадкового процесу називається не випадкова функція, в яку перетворюється випадковий процес після того, як кожна з випадкових величин, з яких він складається, прийме конкретне значення. Таким чином, траєкторія випадкового процесу – це один із його можливих виглядів на інтервалі спостереження. Вона може бути побудована як в результаті дослідів, так і за допомогою імітаційного моделювання.

Скінченновимірним розподілом випадкового процесу називається сумісний розподіл випадкового вектору $(H(t_1), H(t_2), \dots, H(t_n))$, де $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$. Цей розподіл можна розглядати як проекцію випадкового процесу на скінченну підмножину індексної множини T . Він може бути заданий за допомогою кумулятивної функції розподілу:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \Pr\{H(t_1) \leq x_1, \dots, H(t_n) \leq x_n\}. \quad (1.1)$$

Приростом випадкового процесу називається різниця між значеннями випадкового процесу в різні моменти часу: $H(t_2) - H(t_1)$, де $t_2 > t_1$. Випадковий процес

називається процесом із *незалежними приростами*, якщо для всіх можливих значень $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$ n випадкових величин $H(t_1) - H(t_0)$, $H(t_2) - H(t_1), \dots$, $H(t_n) - H(t_{n-1})$ є незалежними. Якщо, крім того, величина $H(t_2 + \tau) - H(t_1 + \tau)$ має такий самий розподіл, як і величина $H(t_2) - H(t_1)$ для будь-яких $t_1, t_2 \in T$, $\tau > 0$, то випадковий процес має *стаціонарні незалежні прирости*.

Приклад 1.1. Одновимірне симетричне *випадкове блукання*. Так називається випадковий процес у дискретному часі $S_t = \sum_{i=1}^t x_i$, де:

$$x_i = \begin{cases} +1, & p = 1/2 \\ -1, & p = 1/2 \end{cases}, i = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Цей процес можна також представити у рекурентній формі як $S_t = S_{t-1} + x_t$ і інтерпретувати як процес еволюції статків гравця, який грає у справедливую гру на кшталт «герб-решка», де шанс виграти дорівнює шансу програти.

На рис. 1.1 наводяться три приклади реалізацій випадкового блукання S_t .

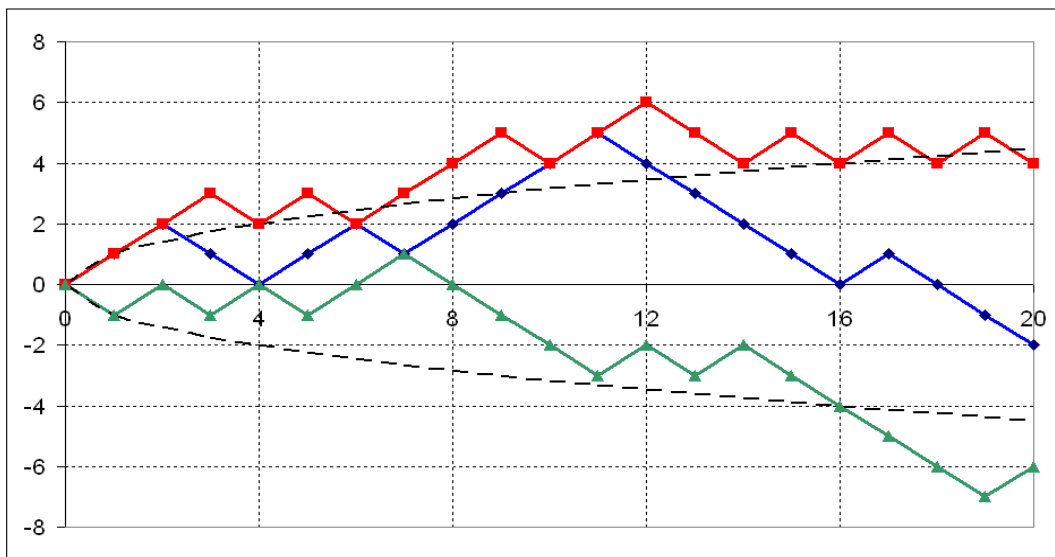


Рис. 1.1. Три приклади реалізацій випадкового блукання S_t .

Штрих-пунктирна лінія виділяє область $\pm\sqrt{t}$

Процес S_t є випадковим процесом у дискретному часі $T = N$ і з дискретним простором станів $S = \mathbb{Z}$. Він має властивості, що притаманні відразу декільком важливим класам випадкових процесів.

По-перше, S_t є процесом із незалежними стаціонарними приростами.

По-друге, S_t є *марковським* процесом. Так називаються випадкові процеси, для яких розподіл ймовірностей майбутнього стану залежить лише від поточного стану і не залежить від попередньої історії процесу. В дискретному часі цю властивість можна записати як:

$$\Pr\{S_{t+1} = j \mid S_0 = i_0, S_1 = i_1, \dots, S_t = i\} = \Pr(S_{t+1} = j \mid S_t = i) \quad (1.3)$$

для будь-яких $t \geq 0$ і $i_0, i_1, \dots, i, j \in \mathbf{Z}$.

Якщо до того ж $\Pr(S_{t+1} = j \mid S_t = i)$ не залежить від t , то процес називається *однорідним за часом* або процесом із *стаціонарними перехідними ймовірностями*. Саме цей випадок має місце для випадкового блукання S_t .

Легко переконатись, що будь-який процес із незалежними приростами є марковським, в той час як зворотне твердження не вірно.

По-третє, оскільки $\mathbf{M}[x_t] = 0$ для всіх $t \geq 0$, умовне математичне сподівання майбутнього значення S_t становить:

$$\mathbf{M}[S_{t+1} \mid S_0, S_1, \dots, S_t] = S_t. \quad (1.4)$$

Процес, який задовольняє умові (1.4), називають *мартингалом*.

Як видно з наведених вище означень, важливе місце в теорії випадкових процесів посідає властивість стаціонарності, тобто сталості ймовірнісних характеристик процесу. Ця тема розвивається більш формально у наступних визначеннях.

Випадковий процес називається *стаціонарним у вузькому сенсі* (або строго стаціонарним), якщо будь-який його скінченновимірний розподіл не залежить від зсуву за часом, тобто:

$$\Pr\{H(t_1) \leq x_1, \dots, H(t_n) \leq x_n\} = \Pr\{H(t_1 + \tau) \leq x_1, \dots, H(t_n + \tau) \leq x_n\} \quad (1.5)$$

для всіх $t_1, \dots, t_n, t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau \in T$.

Стаціонарність означає, що характеристики випадкового процесу не змінюються з часом. Зокрема, це стосується математичного сподівання та дисперсії.

Умова (1.5) є досить жорсткою, тому часто виокремлюють більш широкий клас випадкових процесів, які є *стаціонарними у широкому сенсі* (або слабо стаціонарними). Так називають процеси, для яких:

$$1. \mathbf{M}[H(t)] = c = \text{const} \quad \forall t \in T. \quad (1.6)$$

$$2. \mathbf{D}[H(t)] \neq \infty \quad \forall t \in T. \quad (1.7)$$

3. Коваріація між значеннями процесу у різні моменти часу залежить лише від довжини інтервалу часу між цими моментами:

$$\text{cov}(H(t), H(s)) = K(|s - t|), \quad t, s \in T. \quad (1.8)$$

Легко перевірити, що випадкове блукання S_t з прикладу 1.1 не є навіть слабо стаціонарним. Для математичного сподівання умова (1.6) виконується:

$$\mathbf{M}[S_{t+1}] = \mathbf{M}[S_t] + \mathbf{M}[x_{t+1}] = \mathbf{M}[S_t] = c,$$

але для дисперсії маємо:

$$\mathbf{D}[S_{t+1}] = \mathbf{D}[S_t] + \mathbf{D}[x_{t+1}] = \mathbf{D}[S_t] + 1,$$

тобто дисперсія випадкового блукання змінюється у часі і прагне нескінченності при $t \rightarrow \infty$.

При $S_0 = 0$ отримаємо $\mathbf{M}[S_t] = 0$, $\mathbf{D}[S_t] = t$ і, відповідно, середньоквадратичне відхилення (СКВ) для S_t в момент часу t складає $\sqrt{t}$ (межі області $\pm\sqrt{t}$ показано на рис. 1.1 штрих-пунктирною лінією).

Розподіл значень S_t є біноміальним з деякими поправками. Вочевидь, $|S_t| \leq t$. Для того, щоб відбулась подія $S_t = k \leq t$, кількість рухів випадкового блукання «вгору» повинна перевищувати кількість кроків «вниз» на k . Отже, крок +1 повинен зустрітись $(t+k)/2$ разів серед всіх кроків випадкового блукання, а кількість таких комбінацій дорівнює $C_t^{(t+k)/2}$. При цьому $(t+k)/2$ має бути цілим числом, звідки випливає, що t та k мають одночасно бути або парними, або непарними. З цими зауваженнями

$$\Pr\{S_t = k\} = \frac{C_t^{(t+k)/2}}{2^t}, \quad k \leq t, \quad \text{mod}(n+k, 2) = 0.$$

Із зростанням t біноміальний розподіл швидко збігається до нормального, тож логічно припустити, що випадкове блукання має більш зручне представлення у неперервному часі. Таким представленням є броунівський рух.

1.2 Броунівський рух. Гауссові процеси

Броунівський рух є аналогом випадкового блукання у неперервному часі. Воно названо на честь англійського ботаніка Роберта Броуна, який помітив, що рух пилкових зерен у рідині носить хаотичний характер. Альберт Ейнштейн в 1905 р. показав, що цей процес може бути пояснений бомбардуванням мікроскопічних частинок молекулами навколишнього середовища. Математично строга теорія броунівського руху була пізніше розвинена Норбертом Вінером, на честь якого цей процес також називають *вінерівським* і позначають $W(t)$.

Броунівським рухом $W(t)$, $t \geq 0$ називається випадковий процес у неперервному часі, який характеризується наступними властивостями:

1. $W(0) = 0$.
2. $W(t)$, $t \geq 0$ є процесом із незалежними стаціонарними приростами.
3. Для будь-якого $t > 0$ $W(t)$ має нормальний розподіл із $\mathbf{M}[W(t)] = 0$.

Якщо записати

$$W(t+s) = W(t+s) - W(t) + W(t) \quad (1.9)$$

і скористатись властивістю незалежних приростів, то для дисперсії отримаємо:

$$\mathbf{D}[W(t+s)] = \mathbf{D}[W(t+s) - W(t)] + \mathbf{D}[W(t)]. \quad (1.10)$$

Із стаціонарності приростів далі випливає:

$$\mathbf{D}[W(t+s)] = \mathbf{D}[W(s)] + \mathbf{D}[W(t)]. \quad (1.11)$$

Функціональне рівняння (1.11) є визначенням лінійності і має рішення

$$\mathbf{D}[W(t)] = \sigma^2 t. \quad (1.12)$$

Якщо встановити $\sigma^2 = 1$, то відповідний броунівський рух називають стандартним. Для такого руху $W(t) \sim N(0, \sqrt{t})$ з щільністю розподілу

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right). \quad (1.13)$$

Конструктивно, броунівський рух може бути побудований із випадкового блукання у наступний спосіб. Задамо крок дискретизації Δt по осі часу $0t$ і Δx по координатній осі $0x$. Будемо вважати, що за кожний інтервал Δt блукання $W(t)$ зсувається на $+\Delta x$ або $-\Delta x$ по осі $0x$ з рівними ймовірностями. Позиція блукання по осі $0x$ після n таких кроків буде $W(n\Delta t) = \Delta x(x_1 + \dots + x_n)$, де $x_1, \dots, x_n$ визначаються співвідношенням (1.2). Якщо позначити $t = n\Delta t$, то після n кроків маємо:

$$\mathbf{M}[W(t)] = 0; \quad (1.14)$$

$$\mathbf{D}[W(t)] = (\Delta x)^2 N = (\Delta x)^2 \frac{t}{\Delta t}. \quad (1.15)$$

Далі слід зробити граничний перехід, спрямувавши Δt і Δx до нуля. Але при цьому Δt і Δx мають знаходитись у «правильному» співвідношенні; наприклад, якщо обрати $\Delta t = \Delta x$, то $\mathbf{D}[W(t)]$ прямуватиме до нуля і ми отримуємо процес, який буде дорівнювати нулю з ймовірністю 1. Попередня дискусія і, зокрема, формула (1.12) натякають, що «правильним» співвідношенням є $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$. Дійсно,

в цьому випадку з (1.15) впливає $\mathbf{D}[W(t)] = \sigma^2 t$ і отриманий граничним переходом процес матиме властивості броунівського руху.

На рис. 1.2 наводяться три приклади траєкторій броунівського руху, побудованих за наведеним вище алгоритмом.

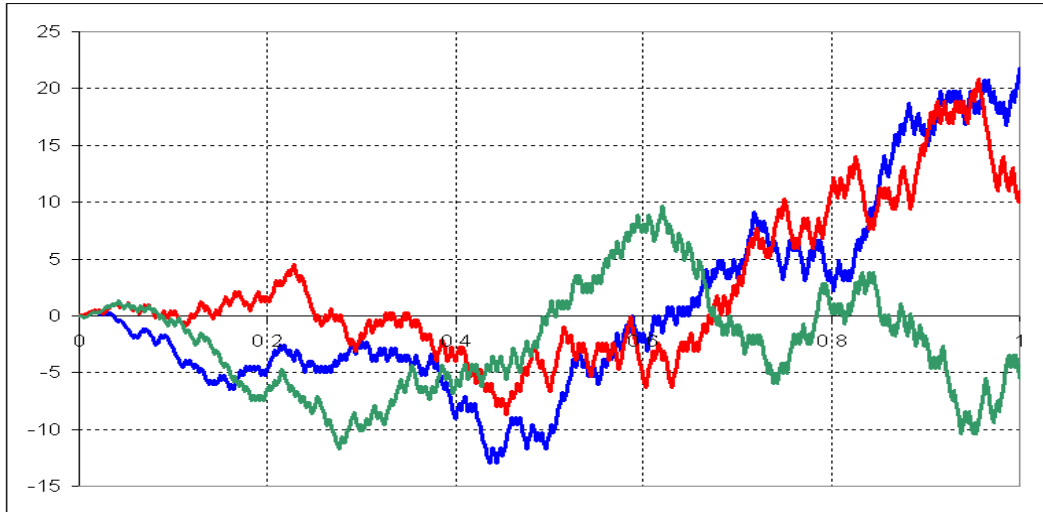


Рис. 1.2. Приклади траєкторій броунівського руху

Інтерпретація броунівського руху як границі випадкового блукання, як і його фізична інтерпретація, наводять на думку, що його траєкторії мають бути неперервними. Це твердження виявляється правдивим, але його доказ є нетривіальним і вимагає використання просунутих математичних конструкцій, які виходять за рамки стандартного апарату прикладної математики. Деталі можна знайти, наприклад, в [5].

Хоча траєкторії броунівського руху неперервні, вони мають багато досить дивних рис. Наприклад, траєкторії броунівського руху не є диференційованими в жодній точці інтервалу часу $[0, t]$. Більш того, для будь-якого такого інтервалу кожна траєкторія броунівського руху майже напевно перетинає горизонтальну вісь нескінченну кількість разів. Дискусію цих та інших властивостей броунівського руху також можна знайти в [5].

Наведемо ще один спосіб визначення броунівського руху, який часто виявляється корисним.

Випадковий процес $W(t)$ називається *нормальним* або *гауссовим*, якщо будь-який його скінченновимірний розподіл є багатовимірним нормальним розподілом. Це рівнозначно тому, що будь-яка лінійна комбінація $a_1 W(t_1) + \dots + a_n W(t_n)$ буде мати нормальний розподіл для $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, $t_1, \dots, t_n \geq 0$. Відмінною рисою гауссових процесів є те, що будь-який їх скінченновимірний розподіл повністю характеризується коваріаційною функцією:

$$K(s, t) = \text{cov}(W(s), W(t)). \quad (1.16)$$

Для стандартного броунівського руху має місце формула:

$$K(s, t) = \min(s, t). \quad (1.17)$$

Насправді, нехай для визначеності $s \leq t$. Тоді:

$$\begin{aligned} \text{cov}(W(s), W(t)) &= \text{cov}(W(s), W(s) + [W(t) - W(s)]) = \\ &= \mathbf{D}[W(s)] + \text{cov}(W(s), W(t) - W(s)) = s + 0 = s, \end{aligned} \quad (1.18)$$

оскільки $\text{cov}(W(s), W(t) - W(s)) = \text{cov}(W(s) - W(0), W(t) - W(s)) = 0$ із властивості незалежних приростів. Легко довести, що гауссовий процес $W(t)$ буде мати нульове математичне сподівання і коваріаційну функцію (1.17) тільки за умови стаціонарних незалежних приростів і $W(t) \sim N(0, t)$. Отже, броунівський рух можна визначити як гауссовий процес із коваріаційною функцією (1.17).

Приклад 1.2. Нехай $H(t) = tW(1/t)$ для $t > 0$ і $H(0) = 0$. Тоді $H(t)$ теж є стандартним броунівським рухом.

Спершу перевіримо, що $H(t)$ є гауссовим процесом. Насправді,

$$a_1 H(t_1) + \dots + a_n H(t_n) = a_1 t_1 W(1/t_1) + \dots + a_n t_n W(1/t_n)$$

є лінійною комбінацією значень гауссового процесу $W(t)$ у різні моменти часу і, отже, має нормальний розподіл. Що ж стосується його коваріаційної функції, нехай $s \leq t$; тоді

$$\text{cov}(H(s), H(t)) = \text{cov}(sW(s^{-1}), tW(t^{-1})) = st \text{cov}(W(s^{-1}), t^{-1}) = st \min\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right) = st \frac{1}{t} = s.$$

Із властивості незалежних стаціонарних приростів випливає, що щільність сумісного розподілу $W(t_1), \dots, W(t_n)$ задається формулою:

$$f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{t_1}(x_1) f_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1) \dots f_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1}). \quad (1.19)$$

Із формули (1.19) можна вивести будь-який умовний розподіл стану броунівського руху у будь-який час, виходячи із наявної інформації. Наприклад, умовний розподіл $W(s)$ за умови $W(t) = y$ для $s < t$ є нормальним із параметрами, що відповідають умовному математичному сподіванню і умовній дисперсії [13]:

$$\mathbf{M}[W(s) | W(t) = y] = \frac{s}{t} y; \quad \mathbf{D}[W(s) | W(t) = y] = \frac{s}{t} (t - s). \quad (1.20)$$

Якщо в останньому рівнянні обрати $t = T, y = 0$, то на інтервалі $[0, T]$ отримаємо випадковий процес $B(t)$, відомий як *броунівський міст*. Це варіант броунівського руху, «прив'язаного» одночасно до двох точок на кінцях інтервалу: $B(0) = 0$, $B(T) = 0$. Броунівський міст виявляється корисною конструкцією в ситуаціях, коли відомі значення випадкового блукання у певні моменти часу, і треба встановити ймовірнісні характеристики модельованого процесу між цими точками. Для броунівського мосту коваріаційна функція задається рівнянням

$$\text{cov}(B(s), B(t)) = \min(s, t) - \frac{st}{T} = \frac{s(T-t)}{T} \quad (1.21)$$

для $s \leq t$. Можна показати [9], що броунівський міст можна сконструювати із стандартного броунівського руху за допомогою перетворення

$$B(t) = W(t) - \frac{t}{T}W(T). \quad (1.22)$$

Як і випадкове блукання, броунівський рух не є стаціонарним процесом.

1.3 Білий шум

Найпростішим прикладом стаціонарного випадкового процесу є *білий шум*. У дискретному часі так називається випадковий процес u_t , для якого:

1. $\mathbf{M}[u_t] = 0$ для будь-якого $t \in T$;

2а. (білий шум у вузькому сенсі): для будь-яких $t, s \in T$ випадкові змінні u_t, u_s є незалежними або

2б. (білий шум у широкому сенсі): для будь-яких $t, s \in T$

$$\text{cov}(u_t, u_s) = \begin{cases} 0, & t \neq s \\ \sigma^2, & t = s \end{cases} = \sigma^2 \delta_{ts}, \quad (1.23)$$

де δ_{ij} – символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$, якщо $i = j$, та $\delta_{ij} = 0$ у іншому випадку.

Якщо на додаток до зазначених властивостей значення випадкового процесу u_t в будь-який час t мають нормальний розподіл, то білий шум називають гауссовим. Для нормально розподілених величин незалежність рівнозначна відсутності кореляції. Отже, гауссовий білий шум є стаціонарним як в широкому, так і в вузькому сенсі.

На рис. 1.3а наводиться приклад реалізації гауссового білого шуму у дискретному часі. Для порівняння на рис. 1.3b наводиться приклад стаціонарного процесу, який задається формулою $x_{t+1} = 0.9x_t + u_{t+1}$, де $u_t \sim N(0, 1)$ (такий процес називається *авторегресивним* першого порядку).

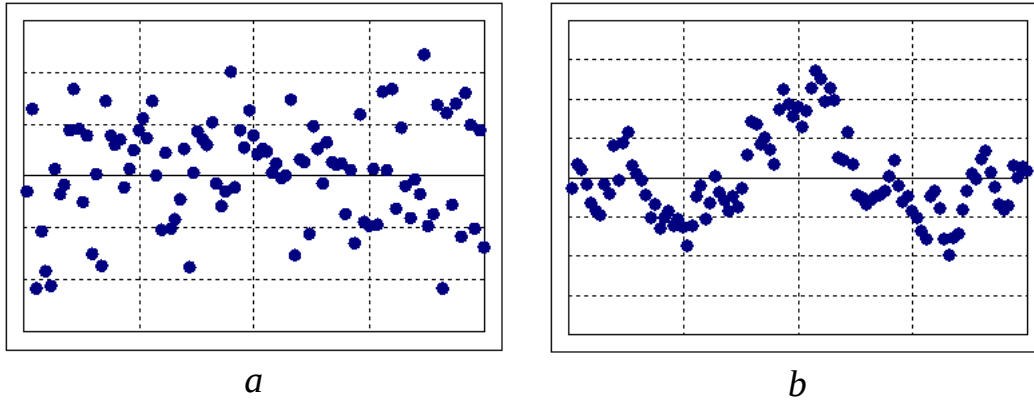


Рис. 1.3. Приклади траєкторій двох стаціонарних гауссових процесів у дискретному часі: a – білий шум; b – небілий шум

Неформально, для того, щоб отримати білий шум у неперервному часі, достатньо поєднати точки на рис. 1.3 лініями, в результаті чого отримаємо картину, подібну до наведеної на рис. 1.4.

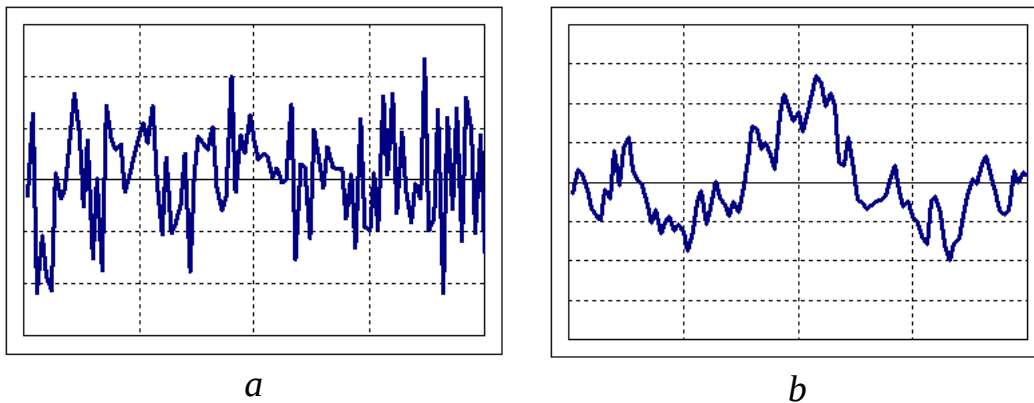


Рис. 1.4. Приклади траєкторій двох стаціонарних гауссових процесів у неперервному часі: a – білий шум; b – небілий шум

Але, як і для броунівського руху, у неперервному часі математично строге визначення білого шуму не є тривіальним і вимагає використання спеціальних математичних конструктів, з якими можна докладно ознайомитись в [5]. Одне із можливих визначень є подібним до (1.23), але роль символу Кронекера в ньому відіграє дельта-функція Дірака $\delta(x)$:

$$1. \mathbf{M}[u(t)] = \langle u(t) \rangle = 0 \text{ для будь-якого } t \in T. \quad (1.24)$$

$$2. \text{cov}(u(t), u(s)) = \sigma^2 \delta(t - s). \quad (1.25)$$

Властивості дельта-функції можна знайти, наприклад, в [1].

Якщо на додаток до властивостей (1.24)–(1.25) значення $u(t)$ в будь-який час t мають нормальний розподіл, то білий шум називають *гауссовим*. Для нормально

розподілених величин незалежність рівнозначна відсутності кореляції. Отже, гауссовий білий шум є стаціонарним як в широкому, так і в вузькому сенсі.

Розглянемо далі зв'язок між білим шумом та броунівським рухом.

Нехай $W(t)$ – стандартний броунівський рух. Позначимо

$$u(t) = W(t + dt) - W(t) = dW(t), \quad (1.26)$$

де $dt > 0$. Тоді:

$$1) \mathbf{M}[u(t)] = \mathbf{M}[W(t + dt)] - \mathbf{M}[W(t)] = 0;$$

2) $\text{cov}(u(t), u(s)) = \text{cov}(W(t + dt) - W(t), W(s + dt) - W(s)) = 0$ для $s \neq t$ завдяки властивості незалежних приростів броунівського руху;

$$3) \text{cov}(u(t), u(t)) = \mathbf{D}[W(t + dt) - W(t)] = \\ = \mathbf{D}[W(t + dt)] + \mathbf{D}[W(t)] - 2\text{cov}(W(t + dt), W(t)) = t + dt + t - 2t = dt,$$

де останнє перетворення впливає із формул (1.12) та (1.17).

Таким чином, дисперсія процесу $u(t)$ не залежить від часу, і в цілому він задовольняє умовам (1.24)–(1.25). Також через властивості броунівського руху впливає, що континуальний білий шум має неперервні, але ніде не диференційовані траєкторії.

Інтерпретація білого шуму як приросту броунівського руху є дуже корисною при інтегруванні функцій від випадкових блукань і рішенні стохастичних диференціальних рівнянь.

1.4 Стохастичні інтеграли. Процес Орнштейна-Уленбека

Розглянемо задачу інтегрування функції, значення якої залежить від реалізації деякого випадкового блукання. В якості ілюстрації можливої сфери застосування таких задач розглянемо наступний приклад.

Приклад 1.3. Припустимо, що ми моделюємо ціну деякого фінансового активу (наприклад, біткойну) як броунівський рух $W(t)$ ¹. Припустимо також, що ми можемо змінювати кількість такого активу в моменти часу $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Кількість одиниць активу, якими володіє трейдер в момент t_k позначимо через X_k . Тоді зміна його статків за період $[t_{k-1}, t_k]$ дорівнює $X_{k-1}(W(t_k) - W(t_{k-1}))$. Що ж стосується зміни статків за весь період часу $[0, T]$, то вона дорівнюватиме $\sum_{k=1}^n X_{k-1}(W(t_k) - W(t_{k-1}))$. Задача полягає в тому, щоби знайти значення цієї суми:

¹ Це не дуже слушне припущення щодо механізму зміни цін на фінансові активи, хоча б тому, що припускає можливість негативних цін. В даному прикладі воно використовується просто для пояснення класу задач, при вирішенні яких може знадобитися обчислення стохастичних інтегралів.

1) коли X_k може змінюватись у часі, тобто дозволена торгівля фінансовим активом, і 2) проміжки часу $t_k - t_{k-1}$ прямують до нуля, тобто торгівля здійснюється у неперервному часі.

Отже, нехай $f(t)$ – деяка диференційована на інтервалі $[0, T]$ функція. Стохастичний інтеграл цієї функції визначається як [9, 13]:

$$\int_0^T f(t) dW(t) = \lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_i) [W(t_i) - W(t_{i-1})], \quad (1.27)$$

де $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Сума під знаком границі в формулі (1.27) дорівнює:

$$\sum_{k=1}^n f(t_i) [W(t_i) - W(t_{i-1})] = f(T)W(T) - f(0)W(0) - \sum_{k=1}^n W(t_i) [f(t_i) - f(t_{i-1})] \quad (1.28)$$

(це формула інтегрування частинами, що застосована до сум). Отже,

$$\int_0^T f(t) dW(t) = f(T)W(T) - f(0)W(0) - \int_0^T W(t) df(t). \quad (1.29)$$

Останній вираз – це випадкова величина, до якої можна застосовувати оператори математичного сподівання, дисперсії, тощо. Взявши математичне сподівання від правої частини (1.29), отримаємо:

$$\mathbf{M} \left[\int_0^T f(t) dW(t) \right] = 0. \quad (1.30)$$

Для знаходження дисперсії інтегралу (1.29) скористуємось формулою (1.28):

$$\mathbf{D} \left[\sum_{k=1}^n f(t_i) [W(t_i) - W(t_{i-1})] \right] = \sum_{k=1}^n f^2(t_i) \mathbf{D}[W(t_i) - W(t_{i-1})] = \sum_{k=1}^n f^2(t_i) (t_i - t_{i-1}), \quad (1.31)$$

де останнє перетворення впливає із (1.12). Здійснивши граничний перехід, отримаємо:

$$\mathbf{D} \left[\int_0^T f(t) dW(t) \right] = \int_0^T f^2(t) dt. \quad (1.32)$$

Неформально можна сказати, що $\int_0^T f(t) dW(t)$ – це те, на що перетворюється функція $f(t)$ по мірі проходження через носій білого шуму $dW(t)$.

Приклад 1.4. Розглянемо частинку одиничної маси, що занурена у рідину. Припустимо, що через в'язкість рідини частинка гальмується із силою, яка пропорційна її поточній швидкості. Також припустимо, що швидкість частинки миттєво

змінюється під впливом білого шуму. Тоді, якщо позначити швидкість частинки під час t через $V(t)$, отримаємо:

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\nu V(t) + \sigma u(t), \quad (1.33)$$

де $u(t)$ – білий шум, а ν – коефіцієнт загасання (або *декремент* загасання).

Рівняння (1.33) називається *рівнянням Ланжевена*, а його рішення – *процесом Орнштейна-Уленбека* [11, 13]. Це рівняння носить конструктивний, але евристичний характер, бо, строго кажучи, білий шум не є диференційованою функцією. Тому часто рівняння Ланжевена записують через диференціали:

$$dV(t) = -\nu V(t)dt + \sigma dW(t). \quad (1.34)$$

Якщо б рівняння Ланжевена не містило білого шуму (тобто при $\sigma = 0$), його рішенням було б просте експоненційне загасання $V(t) = V(0)\exp(-\nu t)$. При $\nu = 0$ рівняння (1.34) описує броунівський рух. При наявності обох компонент процес Орнштейна-Уленбека є прикладом процесу із поверненням до середнього, бо внаслідок загасання він «тяжіє» до горизонтальної осі.

Якщо помножити обидві частини рівняння (1.33) на $\exp(\nu t)$, отримаємо:

$$\exp(\nu t) \left(\frac{dV(t)}{dt} + \nu V(t) \right) = \sigma \exp(\nu t) u(t); \quad (1.35)$$

$$\frac{d}{dt} [\exp(\nu t) V(t)] = \sigma \exp(\nu t) u(t). \quad (1.36)$$

Інтегрування останнього рівняння дає

$$\exp(\nu t) V(t) = V(0) + \sigma \int_0^t \exp(\nu s) u(s) ds \quad (1.37)$$

або

$$V(t) = V(0) \exp(-\nu t) + \sigma \int_0^t \exp(-\nu(t-s)) dW(s). \quad (1.38)$$

Звідси за допомогою рівняння (1.29) знаходимо:

$$V(t) = V(0) \exp(-\nu t) + \sigma \left[W(t) - \nu \int_0^t W(s) \exp(-\nu(t-s)) ds \right]. \quad (1.39)$$

З останнього рівняння безпосередньо випливає, що $\mathbf{M}[V(t)] = V(0) \exp(-\nu t)$. Можна також показати, що $V(t)$ є гауссовим процесом з коваріаційною функцією, яка задається формулою [13]:

$$\text{cov}(V(t), V(s)) = \frac{\sigma^2}{2\nu} (\exp(-\nu |t - s|) - \exp(-\nu(t + s))). \quad (1.40)$$

Більш докладно властивості процесу Орнштейна-Уленбека будуть розглянуті в розділі 2.1.

Для імітації процесу Орнштейна-Уленбека не обов'язково знати його точне рішення; траєкторії процесу можна побудувати безпосередньо на базі рівняння (1.34). На рис. 1.5 наведено декілька таких траєкторій для вихідних значень $\sigma = 1$, $\nu = 2$, $V(0) = 1$. Також пунктирною лінією показано функцію $V(t) = V(0)\exp(-\nu t)$.

Процес Орнштейна-Уленбека є одночасно марковським, гауссовим і стаціонарним (для $\nu > 0$). Це єдиний нетривіальний процес, який одночасно має всі ці три властивості. Тому не дивно, що цей процес займає важливе місце в практиці математичного моделювання. В наступних розділах буде описано застосування процесу у середовищах, які послідовно ускладнюються.

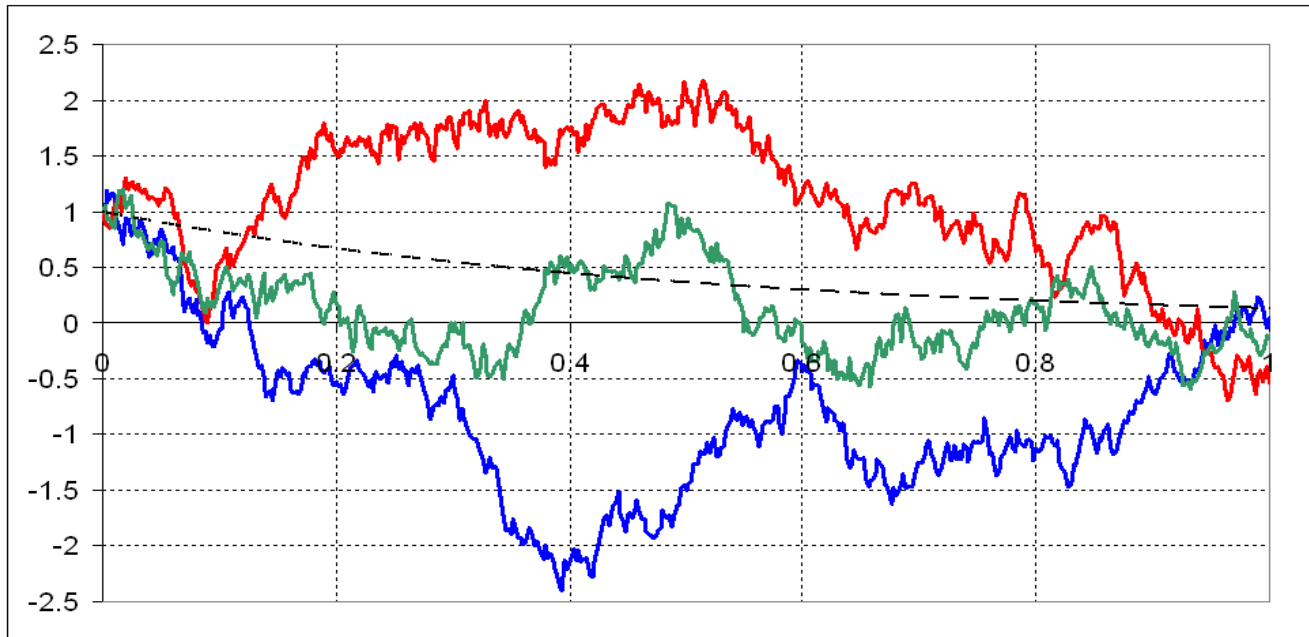


Рис. 1.5. Приклади траєкторій процесу Орнштейна-Уленбека. Параметри: $\sigma = 1$, $\nu = 2$, $V(0) = 1$. Пунктирною лінією показано функцію $V(t) = V(0)\exp(-\nu t)$.

Завдяки своїм властивостям процес Орнштейна-Уленбека називають також нормальним марковським процесом, процесом Гаусса-Маркова, стаціонарним гауссовим процесом тощо. В решті тексту ці терміни застосовуються як синоніми.

На рис. 1.6 показано фрагмент муралу в місті Утрехт (Нідерланди), в університеті якого працював один із співавторів процесу, Леонард Орнштейн. На муралі можна знайти формулу (1.34), а також малюнок п'яниці, що хитається, який уособлює процес випадкового блукання.



Рис. 1.6. Фрагмент муралу на честь Леонарда Орнштейна в м. Утрехт, Нідерланди

1.5 Марковські випадкові поля

Нагадаємо, що випадковий процес — це сукупність випадкових величин $\{H(x) : x \in X\}$, індексованих елементами підмножини дійсної лінії $\mathbf{R}$. Термін «випадкове поле» є узагальненням поняття випадкового процесу. Як і випадковий процес, випадкове поле $\{H(x), x \in G\}$ є набором випадкових величин, але набір індексів G може не бути підмножиною $\mathbf{R}$. Наприклад, G може бути підмножиною площини $\mathbf{R}^2$. Такі випадкові поля представляють інтерес, зокрема, для багатьох проблем обробки зображень, у яких спостережене зображення може моделюватися як невідоме «справжнє» зображення плюс деякий випадковий «шум».

Як і для випадкових процесів, розгляд випадкових полів спрощується, коли значення елемента поля залежить лише від порівняно невеликої кількості «сусідніх» елементів. Для формалізації цього поняття будемо розглядати G як набір вузлів неорієнтованого графа. Для заданого графа G будемо вважати, що два вузли s і x є сусідами, якщо вони поєднані ребром графа, і позначати цей факт як $s \sim x$. Будемо також вважати, що вузол не може бути сусідом для себе самого. Позначимо через $N(x)$ множину сусідів вузла x , тобто $N(x) = \{s \in G : s \sim x\}$.

Отже, нехай G – деякий граф, який складається з вузлів $\{1, 2, \dots, N\}$, для кожного з яких визначено множину сусідів $N(x)$. Набір випадкових величин $H_1, \dots, H_n$ називається випадковим *марковським полем* на G , якщо:

$$\Pr\{H_x = h_x \mid H_s = h_s, s \in G \setminus x\} = \Pr\{H_x = h_x \mid H_s = h_s, s \in N(x)\} \quad (1.41)$$

для всіх вузлів $t \in \{1, 2, \dots, N\}$ [8].

Важливим класом задач, пов'язаних з марковськими випадковими полями, є приховані моделі Маркова. Так називаються марковські поля, в яких деякі випадкові змінні можуть бути спостережені, а деякі інші – ні (такі змінні називаються *прихованими*). Наприклад, приховане марковське поле $H(x)$ може містити справжнє зображення, в той час як спостерігається зображення $Y(x)$, спотворене випадковим шумом. Для чорно-білих зображень проста модель шуму може полягати в тому, що кожний піксель зображення випадково змінює колір (з чорного на білий та навпаки) незалежно від інших пікселів з деякою ймовірністю p . Тоді:

$$\Pr\{Y(x) = y_x \mid H = h, Y(s) = y(s) \forall s \neq x\} = \Pr\{Y(x) = y(x) \mid H(x) = h(x)\} = p, \quad (1.42)$$

якщо $y(x) \neq h(x)$.

Більш реалістичною могла би бути модель шуму, де у деякій точці зображення випадково виникає спотворення, яке поступово загасає при віддаленні від свого джерела. Природним способом для опису таких шумів є модель Орнштейна-Уленбека, яку для цього потрібно узагальнити на випадок двох чи трьох вимірів. Саме такі моделі розглядаються в розділах 3–5 даної роботи.

Контрольні запитання

1. Що мається на увазі під випадковим процесом?
2. Що називається скінченновимірним розподілом випадкового процесу?
3. Що називається реалізацією випадкового процесу?
4. Як визначається випадковий процес із незалежними приростами?
5. Дайте визначення стаціонарного випадкового процесу.
6. В чому полягає різниця між строго та слабо стаціонарними процесами?
7. В чому полягає марковська властивість?
8. Дайте визначення випадкового блукання у дискретному часі.
9. Як знайти ймовірності станів випадкового блукання у будь-який момент часу?
10. Як побудувати броунівський рух на базі випадкового блукання?
11. Надайте формальне визначення броунівського руху.
12. Назвіть основні властивості броунівського руху.

13. Як визначається гауссовий процес?
14. Чому дорівнює дисперсія броунівського руху? Поясніть, чому.
15. Чому дорівнює коваріаційна функція броунівського руху? Поясніть, чому.
16. Якими властивостями визначається процес білого шуму?
17. Чому дорівнює коваріаційна функція білого шуму? Поясніть, чому.
18. Як визначається інтеграл функції, яка залежить від реалізації броунівського руху?
19. Чому дорівнює математичне сподівання стохастичного інтегралу?
20. чому дорівнює дисперсія стохастичного інтегралу?
21. В чому полягає фізичний сенс рівняння Ланжевена?
22. Які важливі властивості має процес Орнштейна-Уленбека?
23. Чому дорівнює безумовне математичне сподівання процесу Орнштейна-Уленбека?
24. Чим відрізняються випадковий процес і випадкове поле?
25. Як визначається марковське випадкове поле?

Вправи для роботи з комп'ютером²

Завдання 1. Згенеруйте 1000 реалізацій стандартного броунівського руху на інтервалі $[0,1]$ при $\Delta t = 0.001$.

а) Розрахуйте вибіркове середнє шляхом усереднення за реалізаціями:

$$\bar{W}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i(t)$$

де $W_i(t)$ – i -та реалізація процесу, $i = 1, \dots, N = 1000$.

б) Розрахуйте вибіркиму дисперсію та СКВ процесу:

$$S(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (W_i(t) - \bar{W}(t))^2; s(t) = \sqrt{S(t)}.$$

в) Побудуйте графік залежності отриманих характеристик від x разом із теоретичними значеннями $\mathbf{M}[W(t)]$, $\mathbf{D}[W(t)]$. Порівняйте результати.

г) Знайдіть емпіричну оцінку для $\Pr\{-2 \leq W(1) \leq 2\}$. Порівняйте результат із теоретичним значенням цієї ймовірності.

Завдання 2. Напишіть процедуру для генерації стандартного броунівського мосту на інтервалі $0 \leq t \leq T$ із заданим інтервалом дискретизації.

² Для написання програм можна використовувати будь-яке середовище програмування, що орієнтоване на обчислювальні задачі і має гарні засоби візуалізації даних. Хорошими варіантами будуть Python, Matlab, Mathcad або Mathematica. В останньому розділі цього посібника наводяться рекомендації щодо програмної реалізації розглянутих алгоритмів у середовищі Mathcad разом із фрагментами програм.

2. ОДНОВИМІРНИЙ НОРМАЛЬНИЙ МАРКОВСЬКИЙ ПРОЦЕС

2.1 Процес Орнштейна-Уленбека на інтервалі

Опис випадкового процесу Орнштейна-Уленбека (надалі ОУ-процесу) [15] почнемо з динамічного рівняння руху. Для ОУ-процесу першого порядку з параметром ν динамічне рівняння на горизонтальній осі має наступний вигляд:

$$\frac{dh(x)}{dx} = -\nu h(x) + u(x), \quad (2.1)$$

$$h(0) = u_0, \quad (2.2)$$

де $u(x)$ – білий шум з нульовим математичним сподіванням і інтенсивністю σ_u , а ν – декремент загасання. Це рівняння називається рівнянням Ланжевена. Початковою умовою до рівняння (2.1) є випадкова величина H_0 , яка підпорядковується нормальному закону з дисперсією σ_H^2 :

$$f_{H_0}(h_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_H} \exp\left(-\frac{h_0^2}{2\sigma_H^2}\right), \quad -\infty < h_0 < \infty. \quad (2.3)$$

Процес Орнштейна-Уленбека називають також *нормальним марковським процесом* (надалі НМ-процес).

Приклади чисельного рішення рівняння (2.1) з початковою умовою (2.2) наведені на рис. 2.1.

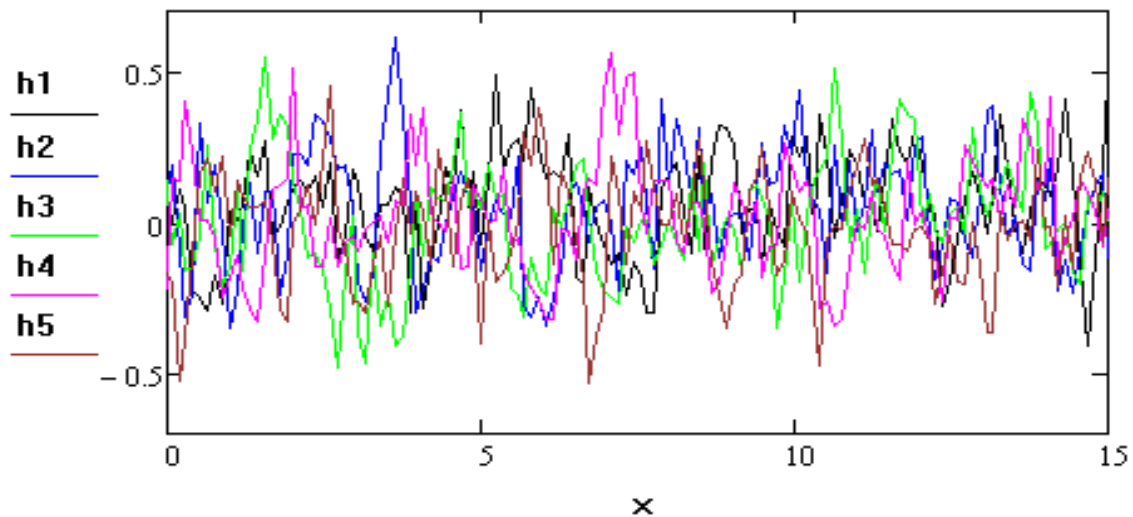


Рис. 2.1. Процес Орнштейна-Уленбека $h(x)$ на інтервалі $0 \leq x \leq 15$, середньоквадратичне відхилення $\sigma_H = 0.2$, декремент $\nu = 5.0$; наведено 5 траєкторій $h_1, \dots, h_5$

З рис. 2.1 можна бачити, що траєкторії процесу Орнштейна-Уленбека $h(x)$ групуються біля нульового рівня та мають розкид $\sigma_H = 0.2$.

Для побудови щільності розподілу ймовірностей ОУ-процесу розглянемо рішення рівняння (2.1) за умови (2.2). Воно має вигляд:

$$h(x) = h_0 \exp(-\nu x) + \int_0^x \exp(-\nu x + \nu x') u(x') dx' \quad (2.4)$$

і виражається за допомогою процесу білого шуму $u(x)$.

За допомогою рішення (2.4) можна побудувати чисельний алгоритм генерації НМ-процесу $h(x)$. Цей алгоритм буде ієрархічним алгоритмом генерації значень у вузлах випадкового нормального стаціонарного марковського процесу на осі $0x$ в інтервалі $0 \leq x \leq a$. Для цього інтервалу визначимо сітку $\{0 \leq n \leq N\}$ вузлів з кроком Δ_x по осі $0x$, для яких $N_x \Delta_x = a$.

Тоді ієрархічний алгоритм генерації значень $\{h_n\}$ НМ-процесу можна задати такими кроками.

Алгоритм 2.1. Генерація значень НМ-процесу першого порядку.

Крок 1. Генерація значення у вершині ($n = 0$):

$$a_0 = u_0. \quad (2.5)$$

Крок 2. Генерація значень ОУ-процесу (у загальному випадку, комплексно значного) в точках $n > 0$:

$$a_{n+1} = p a_n + \sqrt{1 - p^2} u_{n+1}, \quad (2.6)$$

де $p = \exp(-\nu \Delta_x)$.

Крок 3. Нормування отриманих значень ($n \geq 0$):

$$h_n = \sigma_H a_n. \quad (2.7)$$

Умовну щільність розподілу ймовірностей $f_H(h|h_0)$ випадкових значень h можна знайти із використанням властивостей δ -функції:

$$\begin{aligned} f_H(h|h_0) &= \langle \delta(h - h(x)) \rangle = \left\langle \delta \left(h - \left[h_0 \exp(-\nu x) + \int_0^x \exp(-\nu x + \nu x') u(x') dx' \right] \right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left\langle \exp \left(i\lambda h - i\lambda \left[h_0 \exp(-\nu x) + \int_0^x \exp(-\nu x + \nu x') u(x') dx' \right] \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Розглянемо дві випадкові величини

$$Z_1 = h - h_0 \exp(-\nu x); Z_2 = \int_0^x \exp(-\nu x + \nu x') u(x') dx'. \quad (2.9)$$

Безумовне математичне сподівання Z_2 дорівнює нулю, тому щільність розподілу випадкової величини Z_2 має вигляд (2.3), але з дисперсією

$$\sigma_{Z_2}^2 = \left\langle \int_0^x \exp(-\nu x + \nu x') u(x') dx' \int_0^x \exp(-\nu x + \nu x'') u(x'') dx'' \right\rangle. \quad (2.10)$$

Із врахуванням того, що $\langle u(x') u(x'') \rangle = \sigma_U^2 \delta(x' - x'')$, маємо:

$$\sigma_{Z_2}^2 = \sigma_U^2 \int_0^x \exp(-2\nu x + 2\nu x') dx' = \sigma_U^2 \frac{1 - \exp(-2\nu x)}{2\nu}. \quad (2.11)$$

Отже,

$$f_{Z_2}(z_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi[1 - \exp(-2\nu x)]/\nu\sigma_U}} \exp\left(-\frac{z_2^2}{\sigma_U^2[1 - \exp(-2\nu x)]/\nu}\right). \quad (2.12)$$

Згідно рівнянню (2.4), для кожної координати x випадкові величини Z_1 та Z_2 є статистично еквівалентними. Іншими словами, щільність (2.12) при заданому h_0 еквівалентна умовній щільності

$$f_H(h|h_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi[1 - \exp(-2\nu x)]/\nu\sigma_U}} \exp\left(-\frac{[h - h_0 \exp(-\nu x)]^2}{\sigma_U^2[1 - \exp(-2\nu x)]/\nu}\right). \quad (2.13)$$

Дисперсії випадкових величин Z_1 и Z_2 внаслідок рівняння (2.4) пов'язані співвідношенням $\mathbf{D}[H] = \mathbf{D}[h_0 \exp(-\nu x) + Z_2]$, звідки:

$$\sigma_H^2 = \sigma_H^2 \exp(-2\nu x) + \sigma_U^2 \frac{1 - \exp(-2\nu x)}{2\nu}. \quad (2.14)$$

Для забезпечення умови *стаціонарності* врахуємо, що $\sigma_H^2 = \sigma_{H_2}^2$. Це призводить до співвідношення:

$$\sigma_H^2 = \frac{1}{2\nu} \sigma_U^2, \quad (2.15)$$

відомого як співвідношення Ейнштейна [3, 7].

Тоді для умовної щільності розподілу ймовірностей $f_H(h|h_0)$ випадкової величини H отримаємо:

$$f_H(h|h_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[1 - \exp(-2\nu x)]}\sigma_H} \exp\left(-\frac{[h - h_0 \exp(-\nu x)]^2}{2\sigma_H^2[1 - \exp(-2\nu x)]}\right). \quad (2.16)$$

Виконаємо в рівнянні (2.16) граничний перехід $x \rightarrow \infty$. Тоді безумовна щільність розподілу ймовірностей $f_H(h)$ випадкової величини H складатиме:

$$f_H(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_H} \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma_H^2}\right). \quad (2.17)$$

На рис. 2.2 наведено 4 приклади перехідної щільності $f_H(h|h_0)$ для різних значень координати x . Можна побачити збіжність щільності $f_H(h|h_0)$ до рівноважної щільності $f_H(h)$.

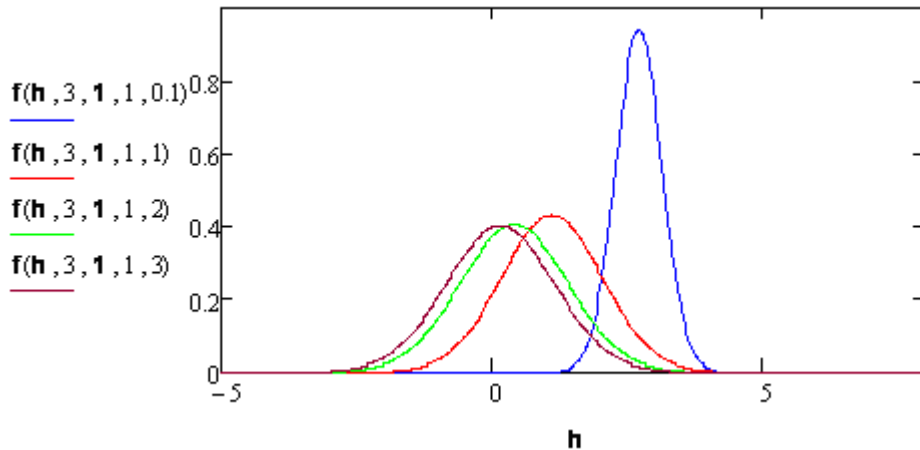


Рис. 2.2. Умовні щільності $f_H(h|h_0)$ процесу Орнштейна-Уленбека $h(x)$, середньоквадратичне відхилення $\sigma_H = 1.0$, декремент загасання $\nu = 1.0$; наведено 4 приклади для $x = 0.1, 1, 2$ і 3 .

Зауваження 1. При розгляді рівняння руху (2.1) ми користувались білими шумами різної природи, що можна побачити, якщо порівняти розмірності в (2.1) та (2.2). В (2.2) початковий стан за своєю суттю також є білим шумом. Отже, розмірності шуму у вершинній точці і на осі розрізняються. Далі, при ускладненні геометрії об'єктів будуть розглянуті шуми на площині і у просторі.

Зауваження 2. Рішення (2.4) рівняння (2.1) може бути записано у формі

$$h(x + \Delta x) = h_0 \exp(-\nu(x + \Delta x)) + \int_0^{x+\Delta x} \exp(-\nu(x + \Delta x) + \nu x') u(x') dx'. \quad (2.18)$$

З формул (2.14) та (2.15) випливає, що рішення (2.4) и (2.18) рівняння руху можуть бути записані у різнищевій формі:

$$h(x + \Delta x) = h(x) \exp(-\nu \Delta x) + \sqrt{1 - \exp(-2\nu \Delta x)} \sigma_U \bar{u}(x, y), \quad (2.19)$$

де $\bar{u}(x, y)$ – білий шум одиничної інтенсивності.

2.2 Підвищення порядку процесу Орнштейна-Уленбека

Природним розширенням рівняння (2.1) для отримання *гармонічного* ОУ-процесу є підвищення порядку диференційного рівняння руху:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + 2\beta \frac{d}{dx} + \Omega^2 \right) h(x) = u(x), \quad (2.20)$$

$$h(0) = u_0, \quad h'(0) = h'_0, \quad (2.21)$$

де $u(x)$ – білий шум з нульовим математичним сподіванням і одиничною інтенсивністю, β – декремент загасання (зверніть увагу, що в (2.20) декремент записано із множником 2 для скорочення подальших викладок), Ω – власна частота коливального контуру. Початковою умовою до рівняння (2.20) виступають випадкові величини $h(0)$ та $h'(0)$ (2.21), до яких ми повернемося нижче.

Зведемо рівняння (2.20) до виду, який буде зручним для факторизації. З цією метою розглянемо рівняння

$$\gamma^2 + 2\beta\gamma + \Omega^2 = 0. \quad (2.22)$$

Позначимо через $\gamma_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \Omega^2}$ корені цього квадратного рівняння.

Тоді можна записати явне рішення (2.8) рівняння (2.20) у вигляді системи рівнянь для двох функцій: $h(x)$ та $g(x) = \frac{dh(x)}{dx}$:

$$h(x) + \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[(h_0 \gamma_2 - g_0) \exp(\gamma_1 x) - (h_0 \gamma_1 - g_0) \exp(\gamma_2 x) \right] = \int_0^x \Psi(\xi) u(\xi) d\xi, \quad (2.23)$$

$$g(x) + \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[\gamma_1 (h_0 \gamma_2 - g_0) \exp(\gamma_1 x) - \gamma_2 (h_0 \gamma_1 - g_0) \exp(\gamma_2 x) \right] = \int_0^x \Phi(\xi) u(\xi) d\xi,$$

де функції $\Psi(\xi)$ та $\Phi(\xi)$ визначені як:

$$\begin{aligned}\Psi(\xi) &= \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[\exp(\gamma_1(x - \xi)) - \exp(\gamma_2(x - \xi)) \right], \\ \Phi(\xi) &= \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[\gamma_1 \exp(\gamma_1(x - \xi)) - \gamma_2 \exp(\gamma_2(x - \xi)) \right].\end{aligned}\quad (2.24)$$

Розглянемо дисперсії обох функцій $h(x)$ та $g(x)$ для випадку, коли $x \rightarrow \infty$.

Якщо розглянути стійке рішення, коли $\text{Re}[\gamma_{1,2}] < 0$, залежність від початкових умов в цьому граничному випадку зникає і можна записати:

$$\sigma_H^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{D}[h^2(x)] = \sigma_U^2 \int_0^\infty \Psi^2(\xi) d\xi; \quad \sigma_G^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{D}[g^2(x)] = \sigma_U^2 \int_0^\infty \Phi^2(\xi) d\xi. \quad (2.25)$$

Пряме обчислення інтегралів в (2.25) наводить до:

$$\sigma_H^2 = \sigma_U^2 \int_0^\infty \Psi^2(\xi) d\xi = \frac{\beta}{\Omega^2} \sigma_U^2; \quad \sigma_G^2 = \sigma_U^2 \int_0^\infty \Phi^2(\xi) d\xi = \beta \sigma_U^2. \quad (2.26)$$

Повернемося тепер до початкових умов рівняння (2.20). Компоненти (h_0, g_0) гармонічного НМ-процесу нормально розподілені із щільністю

$$f(h_0, g_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta} \Omega^{-1} \sigma_U} \exp\left(-\frac{1}{2\beta\Omega^{-2} \sigma_U^2} h_0^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta} \sigma_U} \exp\left(-\frac{1}{2\beta\sigma_U^2} g_0^2\right). \quad (2.27)$$

Спробуємо звести рівняння (2.23) до виду, який буде зручнішим для побудови алгоритму розрахунку гармонічного НМ-процесу:

$$\begin{aligned}h(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{\beta^2 - \Omega^2}} \left[(h_0\gamma_2 - g_0) \exp(\gamma_1 x) - (h_0\gamma_1 - g_0) \exp(\gamma_2 x) \right] + \sqrt{\frac{\beta}{\Omega^2}} u(x); \\ g(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{\beta^2 - \Omega^2}} \left[\gamma_1 g_0 \exp(\gamma_1 x) + \gamma_2 g_0 \exp(\gamma_2 x) \right] + \sqrt{\beta} u(x),\end{aligned}\quad (2.28)$$

де $u(x)$ – білий шум одиничної інтенсивності.

Проте, спроби такої побудови безпосередньо із системи рівнянь (2.28) викликають значні труднощі, насамперед, через необхідність коректного врахування внеску шуму $u(x)$ в його рекурентному аналогу. Щоб уникнути цих труднощів, повернемося до рівняння (2.20) і запишемо його у факторизованому вигляді:

$$\left(\frac{d}{dx} + \gamma_1 \right) f(x) = u(x); \quad \left(\frac{d}{dx} + \gamma_2 \right) h(x) = f(x), \quad (2.29)$$

де $f(x)$ – допоміжна функція. Початкова умова для неї випливає з першого із рівнянь (2.29) і має вигляд $f(0) = h'(0) + \gamma_1 h(0)$.

На базі системи (2.29) можна спочатку побудувати чисельний алгоритм генерації значень для пари функцій $\{h(x), f(x)\}$, а шуканий двокомпонентний гармонічний ОУ-процес $\{h(x), h'(x)\}$ отримати шляхом заміни $h'(x) = f(x) - \gamma_1 h(x)$. Цей алгоритм буде ієрархічним алгоритмом генерації значень компонент процесу у вузлах на осі $0x$ в інтервалі $0 \leq x \leq a$. Для цього інтервалу введемо сітку $\{0 \leq n \leq N\}$ вузлів з кроком Δ вздовж осі $0x$, для яких $N_x = a / \Delta_x$.

Тоді шуканий алгоритм генерації значень $\{h_n, g_n\}$ гармонічного НМ-процесу $h(x)$ та його похідної $g(x) = h'(x)$ можна задати у наступний спосіб.

Алгоритм 2.2. Генерація значень НМ-процесу другого порядку.

Крок 1. Генерація значень у вершині ($n = 0$):

$$w_0 = h'_0 + \gamma_1 h_0; \quad (2.30)$$

$$v_0 = u_0. \quad (2.31)$$

Крок 2. Генерація значень компонент ОУ-процесу (комплекснозначного, у загальному вигляді) вздовж інтервалу $n > 0$:

$$w_n = p_1 w_{n-1} + \sqrt{1 - p_1^2} u_n; \quad (2.32)$$

$$v_n = p_2 v_{n-1} + \sqrt{1 - p_2^2} w_n. \quad (2.33)$$

Крок 3. Нормування й надання компонентам НМ-процесу $\{h_n, g_n\}$ реальної частини компонент ОУ-процесу $\{v_n, w_n\}$ вздовж інтервалу $n \geq 0$:

$$g_n = \sigma_H \operatorname{Re}(w_n - \gamma_1 v_n); \quad (2.34)$$

$$h_n = \sigma_H \operatorname{Re}(v_n). \quad (2.35)$$

В алгоритмі 2.2 використані наступні позначки: σ_H – інтенсивність поля, що моделюється; $p_1 = \exp(\gamma_1 \Delta)$, $p_2 = \exp(\gamma_2 \Delta)$, де Δ – крок вузлів вздовж осі $0x$; $u(x)$ – білий шум одиничної інтенсивності; γ_1 та γ_2 – ефективні декременти ($\gamma_{1,2} < 0$).

Приклади чисельного застосування алгоритму 2.2 наведені на рис. 2.3. Використовувались такі параметри: середньоквадратичне відхилення $\sigma_H = 1.0$, декремент $\beta = 0.5$, частота коливального контуру $\Omega = 2.0$. Показано три приклади $h1$, $h2$, $h3$ функції $h(x)$ (зверху) та її похідної $h'(x)$ $hs1$, $hs2$, $hs3$ (знизу). Моделювання здійснювалось в інтервалі $0 \leq x \leq 15$.

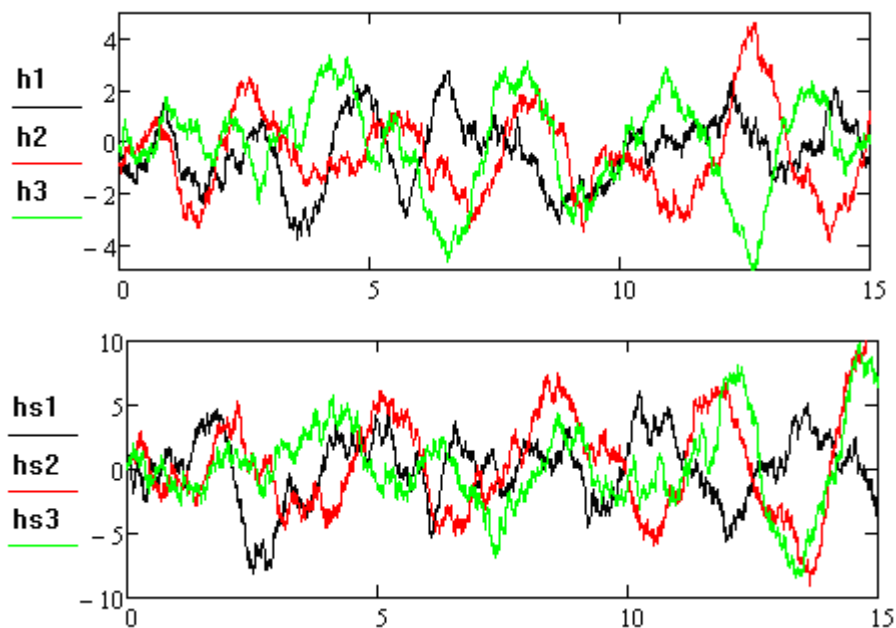


Рис. 2.3. Гармонічний процес Орнштейна–Уленбека на інтервалі $0 \leq x \leq 15$

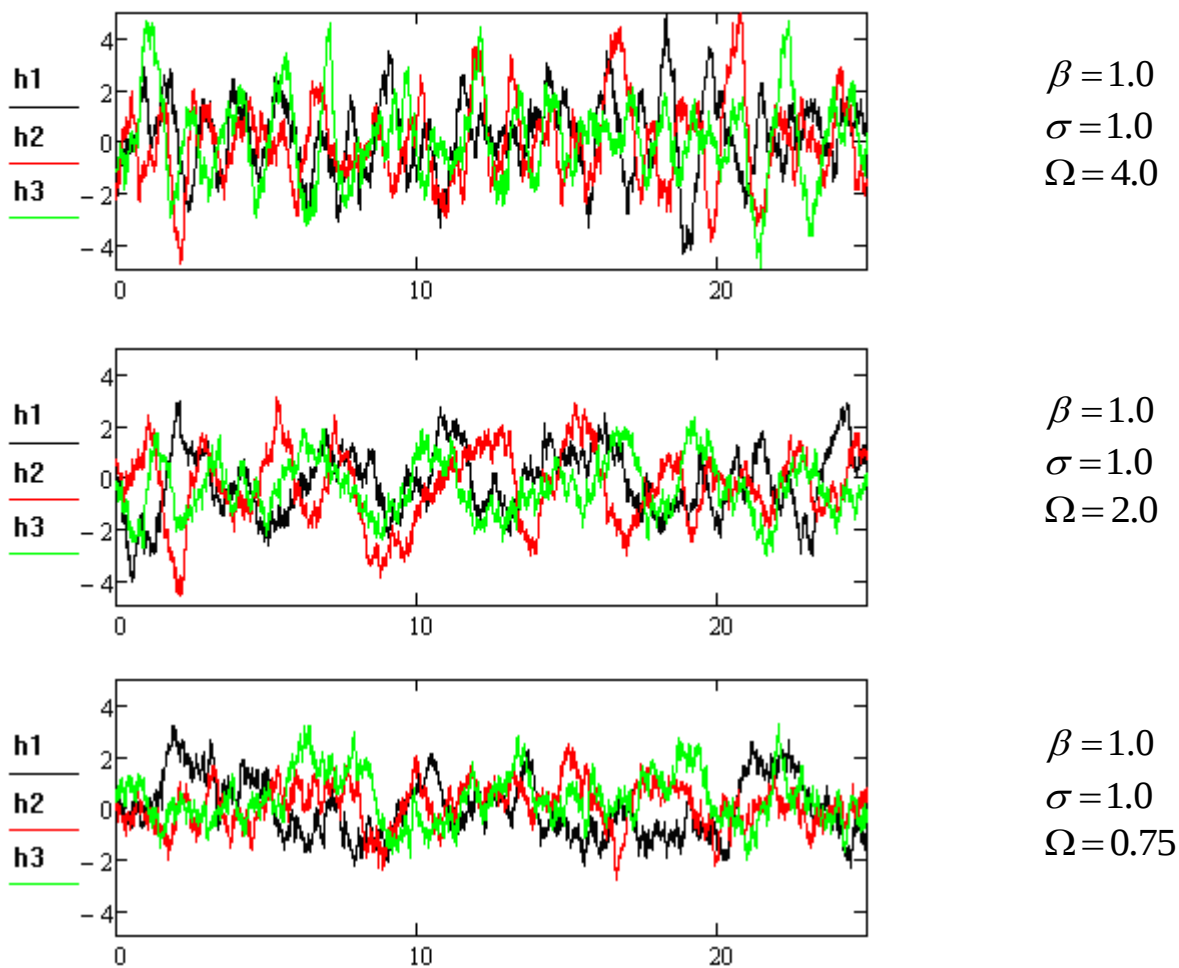


Рис. 2.4. Вплив частоти коливального контуру на поведінку ОУ-процесу

З теорії коливальних систем відомо, що тип руху визначається співвідношенням між декрементом β та частотою коливальної системи Ω . При цьому можливі три випадки:

- $\beta < \Omega$ – коливальний тип;
- $\beta = \Omega$ – аперіодичний тип;
- $\beta > \Omega$ – коливання, що загасають.

На рис. 2.4 наведені реалізації функції $h(x)$ для цих випадків. Відзначимо, що випадок $\beta > \Omega$ не має чисто загасаючого характеру, оскільки ОУ-процес $h(x)$ збуджується білим шумом.

В задачах моделювання руху транспортного засобу на збуреній поверхні треба задавати не тільки профіль рельєфу $h(x)$, але й його просторову похідну вздовж напрямку руху. На рис. 2.5 наведені реалізації функції $h'(x)$ для тих самих випадків, що й на рис. 2.4. Так само можна побачити, що у випадку $\beta > \Omega$ рух не характеризується виключно загасанням.

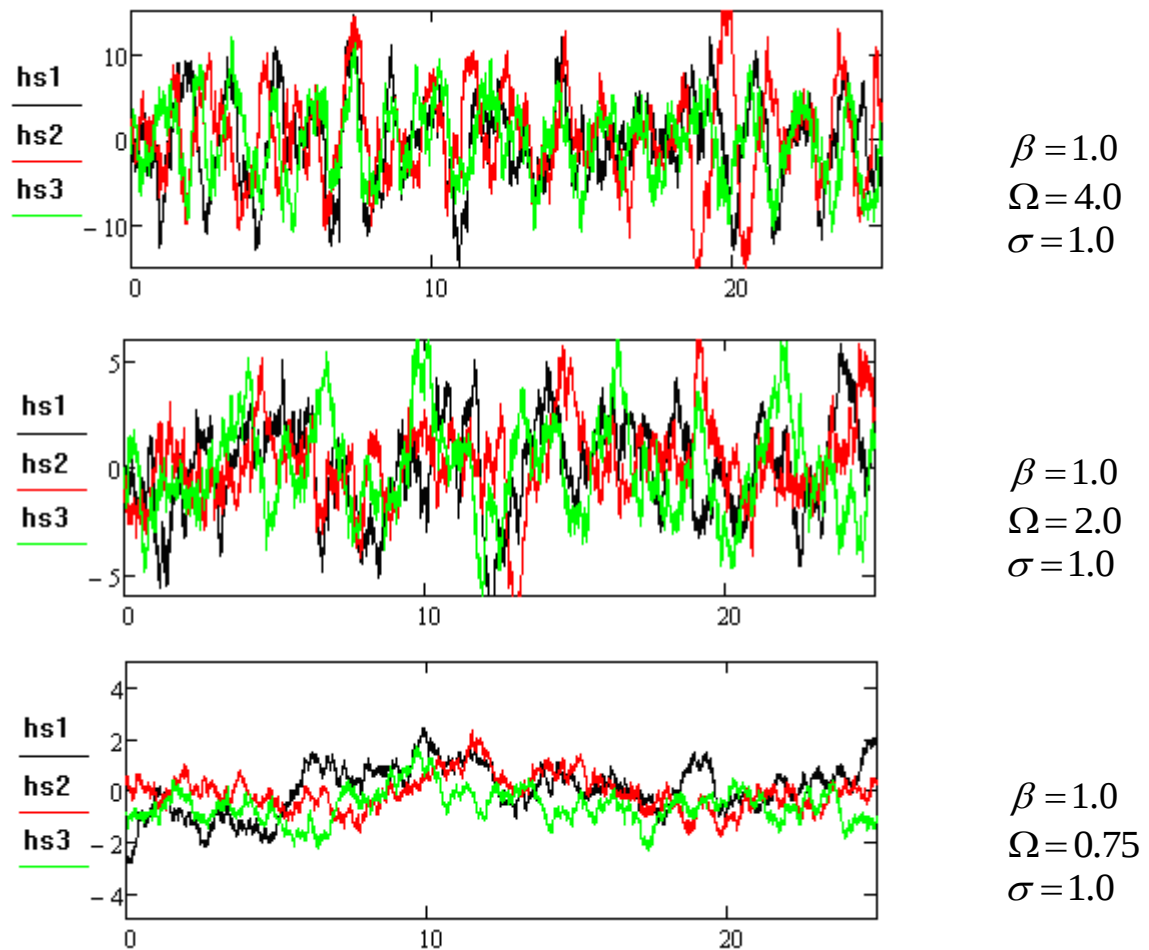


Рис. 2.5. Гармонічний ОУ-процес на інтервалі $0 \leq x \leq 25$; наведено 3 приклади похідної $h'(x)$ рельєфу hs1, hs2 и hs3

Контрольні запитання

1. Яким рівнянням визначається процес Орнштейна-Уленбека?
2. Як виглядає рішення рівняння Ланжевена для ОУ-процесу?
3. Чому дорівнює безумовне математичне сподівання значень ОУ-процесу?
4. Яку властивість ОУ-процесу забезпечує співвідношення Ейнштейна?
5. Якому розподілу підпорядковуються значення ОУ-процесу?
6. Як записати рішення рівняння Ланжевена у різницевій формі?
7. Як зміниться рівняння Ланжевена для ОУ-процесу другого порядку?
8. За яких умов ОУ-процес другого порядку буде стійким?
9. Як факторизувати рівняння Ланжевена для процесу другого порядку?
10. Від чого залежить наявність коливань в ОУ-процесі другого порядку?
11. За яких умов ОУ-процес другого порядку буде загасаючим?
12. Чому амплітуда ОУ-процесу не збігається до нуля навіть при загасаючому характері руху?

Вправи для роботи з комп'ютером

Завдання 1. Для параметрів $\nu = 1.0$, $\sigma = 1.0$, $\Delta_x = 0.01$, $a_0 = 1.0$ згенеруйте 1000 реалізацій ОУ-процесу на $x_0 = 0 \leq x \leq 10 = x_f$ за допомогою алгоритму 2.1.

а) Розрахуйте вибіркові середні та СКВ процесу $\bar{h}(x), s(x)$ як функції від x шляхом усереднення за реалізаціями.

б) Побудуйте графік залежності отриманих характеристик від x разом із теоретичними значеннями $\mathbf{M}[h(x)]$, $\sigma_h(x)$. Порівняйте результати.

в) Дослідить, як аналізовані характеристики залежать від параметрів ν та σ .

г) Знайдіть емпіричну оцінку для $\text{Pr}\{h(x_f) > a_0\}$. Перевірте гіпотезу про узгодженість результату із теоретичним значенням для рівня значущості 0.05.

Завдання 2. Згенеруйте 1000 реалізацій ОУ-процесу другого порядку на $x_0 = 0 \leq x \leq 10 = x_f$ за допомогою алгоритму 2.2. Використовуйте наступні значення параметрів: $\beta = 0.5$, $\Omega = 1.0$, $\sigma = 1.0$, $\Delta_x = 0.01$, $a_0 = 1.0$.

а) Розрахуйте вибіркові середні та СКВ процесу $\bar{h}(x), s(x)$ як функції від x шляхом усереднення за реалізаціями.

б) Побудуйте графік залежності отриманих характеристик від x . Порівняйте результати з тими, що були отримані при виконанні завдання 1.

в) Дослідить, як аналізовані характеристики залежать від параметрів β , Ω та σ . Зокрема, розгляньте випадки $\beta < \Omega$, $\beta = \Omega$ та $\beta > \Omega$. Зробіть висновки про якісну поведінку аналізованого процесу.

3. НОРМАЛЬНЕ МАРКОВСЬКЕ ПОЛЕ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ

3.1 Рішення рівнянь руху для нормального марковського поля

Вивчення нормального марковського поля (НМ-поля) на площині [6, 12, 14], як і раніше, почнемо з рівняння динаміки руху. Для амплітуди $h(x, y)$ НМ-поля $H(x, y)$ із парціальними декрементами ν та μ рівняння динаміки має наступний вигляд:

$$\left(\frac{d}{dx} + \nu \right) \left(\frac{d}{dy} + \mu \right) h(x, y) = u_{xy}(x, y) \quad (3.1)$$

з крайовими умовами на осях $0x$ та $0y$ виду

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} + \nu \right) h(x, y) &= u_x(x); \\ \left(\frac{d}{dy} + \mu \right) h(x, y) &= u_y(y), \end{aligned} \quad (3.2)$$

а також умовою у вершинній точці $(0,0)$:

$$h(0,0) = u_0. \quad (3.3)$$

В формулах (3.1)–(3.3) використовуються наступні позначки:

$u_{xy}(x, y)$ – білий шум, що реалізується на площині із нульовим математичним сподіванням і інтенсивністю σ_U ;

$u_x(x)$, $u_y(y)$ – білі шуми, що реалізуються на осях $0x$ та $0y$, відповідно. Вони мають нульові математичні сподівання і інтенсивності σ_{U_x} та σ_{U_y} .

Реалізація шуму $u_x(x)$ здійснюється на осі $0x$; отже, перша крайова умова в (3.2) справедлива для будь-яких значень координати y . Аналогічно, реалізація шуму $u_y(y)$ здійснюється на осі $0y$; отже, друга крайова умова в (3.2) справедлива для будь-яких значень координати x . Нарешті, початковою умовою у вершині до рівняння (3.1) виступає випадкова величина $u_0 \sim N(0, \sigma_{U_0}^2)$.

Структура білого шуму, що розглядається, є такою, що його компоненти за окремими координатами реалізуються незалежно:

$$u_{xy}(x, y) = u_x(x)u_y(y). \quad (3.4)$$

Ця властивість виявиться важливою у подальшому викладенні матеріалу.

Формальне рішення рівняння (3.1) з умовами (3.2) та (3.3) є наступним:

$$h(x, y) = h(0, 0) \exp(-\nu x - \mu y) + \int_0^x \exp(-\nu x + \nu x') u_x(x') dx' + \int_0^y \exp(-\nu y + \nu y') u_y(y') dy' + \int_0^x dx' \exp(-\nu x + \nu x') \int_0^y dy' \exp(-\mu y + \mu y') u_{xy}(x', y'). \quad (3.5)$$

Зауважимо, що другий доданок в рівнянні (3.5) реалізується незалежно від значення координати y . Відповідно, третій доданок реалізується незалежно від значення координати x . Тому аналіз рішення (3.5) почнемо саме з другого доданку. Цей компонент рішення (3.5) задовольняє співвідношенню, справедливому для ОУ-процесу, що реалізується вздовж осі $0x$. При цьому, як було зауважено, це співвідношення виконується для будь-якої координати y :

$$I_x = \int_0^x \exp(-\nu x + \nu x') u_x(x') dx' = h(x, y) - h(0, y) \exp(-\nu x). \quad (3.6)$$

Для третього доданку в рівнянні (3.5) отримуємо аналогічний вираз, але вже для ОУ-процесу, який реалізується вздовж осі $0y$:

$$I_y = \int_0^y \exp(-\mu y + \mu y') u_y(y') dy' = h(x, y) - h(x, 0) \exp(-\mu y), \quad (3.7)$$

при цьому співвідношення (3.7) виконується для будь-яких координат x та y .

Тепер для зручності запису будемо вважати, що поле покрито сіткою і перейдемо від неперервної координати x до набору $\{x_n\}$ і від неперервної координати y до набору $\{y_m\}$, де індекси n та m відрховуються від нуля. Перейдемо в рівнянні (3.7) до індексного запису. З цією метою будемо вважати точку з неперервними координатами $(0, 0)$ точкою з індексами $(n-1, m-1)$, а точку з неперервними координатами (x, y) – точкою з індексами (n, m) . Після підбору індексів у другому та третьому доданках в (3.5) і з врахуванням незалежності реалізацій шумів u_x та u_y , запишемо:

$$h_{n,m} = pqh_{n-1,m-1} + h_{n,m} - ph_{n-1,m} + h_{n,m} - qh_{n,m-1} + \int_0^x dx' \exp(-\nu x + \nu x') \int_0^y dy' \exp(-\mu y + \mu y') u_{xy}(x', y'), \quad (3.8)$$

де $p = \exp(-\nu(x_n - x_{n-1}))$; $q = \exp(-\mu(y_m - y_{m-1}))$ (тут і нижче індекси у величин p та q опущені для стислості).

Після приведення подібних членів розглянемо в (3.8) дві випадкових величини:

$$Z_1 = h_{n,m} - ph_{n-1,m} - qh_{n,m-1} + pqh_{n-1,m-1};$$

$$Z_2 = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \exp(-\nu x + \nu x') u_X(x') dx' \int_{y_{m-1}}^{y_m} \exp(-\mu y + \mu y') u_Y(y') dy'.$$

В силу (3.8) $Z_1 = Z_2$, отже статистичні властивості випадкових величин Z_1 і Z_2 еквівалентні. У зв'язку з нормальністю I_x та I_y випадкова величина Z_1 теж буде нормально розподілена із нульовим математичним сподіванням і дисперсією

$$\begin{aligned} \sigma_{Z_2}^2 = & \left\langle \int_{x_{n-1}}^{x_n} \exp(-\nu x + \nu x') u_X(x') dx' \int_{x_{n-1}}^{x_n} \exp(-\nu x + \nu x'') u_X(x'') dx'' \times \right. \\ & \left. \times \int_{y_{m-1}}^{y_m} \exp(-\mu y + \mu y') u_Y(y') dy' \int_{y_{m-1}}^{y_m} \exp(-\mu y + \mu y'') u_Y(y'') dy'' \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В результаті розчеплення за x - та y -флуктуаціями, усереднення та інтегрування знайдемо:

$$\sigma_{Z_2}^2 = \frac{1 - \exp(-2\nu(x_n - x_{n-1}))}{2\nu} \frac{1 - \exp(-2\mu(y_m - y_{m-1}))}{2\mu} \sigma_{U_{xy}}^2. \quad (3.10)$$

Отже, нормально розподілена випадкова величина Z_1 має дисперсію

$$\sigma_{Z_1}^2 = \frac{(1 - p^2)(1 - q^2)}{4\nu\mu} \sigma_{U_{xy}}^2. \quad (3.11)$$

Далі, так само як і вище, для умовної щільності розподілу ймовірностей $f_H(h_{n,m} | h_{n-1,m}, h_{n,m-1}, h_{n-1,m-1})$ випадкової величини $H_{n,m}$ – амплітуди нормального марковського поля першого порядку на площині xOy – отримаємо:

$$\begin{aligned} f_H(h_{n,m} | h_{n-1,m}, h_{n,m-1}, h_{n-1,m-1}) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)(1-q^2)} \sigma_H} \exp\left(-\frac{[h_{n,m} - ph_{n-1,m} - qh_{n,m-1} + pqh_{n-1,m-1}]^2}{2(1-p^2)(1-q^2)\sigma_H^2}\right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

При цьому маємо:

$$\sigma_H^2 = \frac{1}{4\nu\mu} \sigma_{U_{xy}}^2. \quad (3.13)$$

Останнє співвідношення можна вважати аналогом співвідношення Ейнштейна для випадку двовимірного поля на площині.

З рівняння (3.12) випливає, що умовна дисперсія амплітуди $h_{n,m}$ складає

$$\mathbf{D}[H_{n,m}|h_{n-1,m},h_{n,m-1},h_{n-1,m-1}]=(ph_{n-1,m}+qh_{n,m-1}-pqh_{n-1,m-1})^2+\sigma_H^2(1-p^2)(1-q^2), \quad (3.14)$$

тобто значення $h_{n,m}$ статистично пов'язано із значеннями амплітуд $h_{n-1,m}$, $h_{n,m-1}$ і $h_{n-1,m-1}$. Виконаємо в операторі (3.14) усереднення за всіма можливими станами амплітуд $h_{n-1,m}$, $h_{n,m-1}$ і $h_{n-1,m-1}$. Далі, із врахуванням марковської властивості перейдемо по осі Ox від n до $n-1$, а по осі Oy перейдемо від m до $m-1$. В результаті отримаємо, що безумовна дисперсія амплітуди $H_{n,m}$ є постійною для будь-яких значень індексів n та m :

$$\mathbf{D}[H_{n,m}]=\sigma_H^2. \quad (3.15)$$

Отже, побудоване нормальне марковське поле першого порядку на площині є стаціонарним.

При синтезі нормального марковського 2D-поля $H(x,y)$ в точці (x,y) спираються на статистичну вагу $f_H(h(x,y)|h(x',y),h(x,y'),h(x',y'))$. Ця умовна щільність ймовірності (яку називають *пропагатор*) пов'язує значення $h(x,y)$ випадкового поля $H(x,y)$ у обраній точці (x,y) із значеннями в «попередніх» точках $h(x',y)$, $h(x,y')$ та $h(x',y')$. Для нормального марковського 2D-поля цих даних достатньо, щоб описати ймовірнісні властивості поля у точці (x,y) . Нормальності 2D-поля відповідає властивість нормальності перехідної щільності розподілу ймовірностей $f_H(h(x,y)|h(x',y),h(x,y'),h(x',y'))$, тобто:

$$\begin{aligned} f_H(h(x,y)|h(x',y),h(x,y'),h(x',y')) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}S} \exp\left\{-\frac{1}{2S^2}V(h(x,y)|h(x',y),h(x,y'),h(x',y'))\right\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Функцію $V(h(x,y)|h(x',y),h(x,y'),h(x',y'))$ і відповідну їй дисперсію S^2 можна побудувати, якщо скористатись незалежністю випадкових реалізацій по осям Ox і Oy , відповідно. В силу марковості аналізованого 2D-поля умовний корелятор дорівнює

$$\langle h(x,y)|h(x',y),h(x,y'),h(x',y') \rangle = ph(x',y) + qh(x,y') - pqh(x',y') \quad (3.17)$$

і виражається за допомогою парціальних кореляторів, які тепер мають вигляд $p = \exp(-\nu(x - x'))$ та $q = \exp(-\mu(y - y'))$. Нагадаємо, що в цих формулах ν та μ – це декременти загасання по осях $0x$ та $0y$, відповідно. Це дає:

$$\begin{aligned} V(h(x, y) | h(x', y), h(x, y'), h(x', y')) = \\ = [h(x, y) - ph(x', y) - qh(x, y') + pqh(x', y')]^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Введемо оператори P : $P(x, y) = -ph(x', y)$ та Q : $Q(x, y) = -qh(x, y')$. Тоді:

$$V(h(x, y) | h(x', y), h(x, y'), h(x', y')) = [(E + P)(E + Q)h(x, y)]^2, \quad (3.19)$$

де E – одиничний оператор.

Врахуємо тепер, що всі перші моменти поля $H(x, y)$ тотожно дорівнюють нулю в силу нормальності. Тоді:

$$S^2 = \langle [(E + P)(E + Q)h(x, y)]^2 \rangle = \sigma_H^2 (1 - p^2)(1 - q^2). \quad (3.20)$$

Отже, для перехідної ймовірності (3.16) отримуємо:

$$\begin{aligned} f_H(h(x, y) | h(x', y), h(x, y'), h(x', y')) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - p^2)(1 - q^2)}\sigma_H^2} \exp\left(-\frac{[h(x, y) - ph(x', y) - qh(x, y') + pqh(x', y')]^2}{2(1 - p^2)(1 - q^2)\sigma_H^2}\right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Зауваження. Рішення (3.5) рівняння (3.1) може бути записано в формі

$$\begin{aligned} h(x + \Delta x, y + \Delta y) = h(0, 0) \exp(-\nu(x + \Delta x) - \mu(y + \Delta y)) + \\ + \int_0^{x+\Delta x} \exp(-\nu(x + \Delta x) + \nu x') u_X(x') dx' + \int_0^{y+\Delta y} \exp(-\mu(y + \Delta y) + \mu y') u_Y(y') dy' + \\ + \int_0^{x+\Delta x} \exp(-\nu(x + \Delta x) + \nu x') dx' \int_0^{y+\Delta y} \exp(-\mu(y + \Delta y) + \mu y') u_{XY}(y') dy'. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Із (3.10) та (3.11) випливає, що рішення (3.5) рівняння руху можуть бути записані у різницевій формі:

$$\begin{aligned} h(x + \Delta x, y + \Delta y) = \\ = ph(x, y + \Delta y) + qh(x + \Delta x, y) - pqh(x, y) + \sqrt{(1 - p^2)(1 - q^2)} \sigma_U \bar{u}(x, y), \end{aligned} \quad (3.23)$$

де через p та q позначені покрокові корелятори $p = \exp(-\nu \Delta x)$ та $q = \exp(-\mu \Delta y)$, а $\bar{u}(x, y)$ – білий шум одиничної інтенсивності.

Отримане у різницевій формі рівняння руху на площині буде далі використано при побудові чисельних алгоритмів.

3.2 Алгоритм генерації нормальних марковських полів на площині

Алгоритми генерації двовимірних марковських полів пристосовані для застосування у прямокутнику, сторони якого паралельні до декартових осей координат на площині. Далі розглянуто синтез алгоритму генерації випадкового об'єкта – нормального марковського поля, що реалізується на плоскій поверхні.

З усього різноманіття можливих варіантів і моделей двовимірних випадкових процесів дійснозначне нормальне марковське двовимірне поле $H(x, y)$ (НМД-поле), мабуть, найчастіше використовується, оскільки воно поєднує зручність для аналізу і важливість у прикладному відношенні. Будь-які ортогональні перерізи НМД-поля є стаціонарним процесом Орнштейна-Уленбека.

Визначальною властивістю НМД-поля є його кореляційний функціонал:

$$K_{xy} = K_{xy}(x, y | x', y') = \langle H(x, y)H(x', y') \rangle = pq\sigma_H^2, \quad (3.24)$$

де $h(x, y)$ – реалізація гауссового двовимірного поля $H(x, y)$ у прямокутній області $\{x \in [0, a], y \in [0, b]\}$ на площині xOy , $\sigma_H^2 = \langle H^2(x, y) \rangle$ – інтенсивність НМД-поля, ν та μ – декременти загасання поля по осі абсцис x і по осі ординат y , відповідно. Перехідна щільність розподілу ймовірностей для амплітуди $h(x, y)$ НМД-поля (3.21) є узагальненням відомих конструкцій – перехідних ймовірностей для нормального марковського процесу.

Спрямовуючи в рівнянні (3.21) $x' \rightarrow -\infty$ або $y' \rightarrow -\infty$, отримаємо крайові перехідні щільності розподілу ймовірностей:

$$f_H(h(x, y) | h(x', y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)}\sigma_H} \exp\left(-\frac{[h(x, y) - ph(x', y)]^2}{2(1-p^2)\sigma_H^2}\right); \quad (3.25)$$

$$f_H(h(x, y) | h(x, y')) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-q^2)}\sigma_H} \exp\left(-\frac{[h(x, y) - qh(x, y')]^2}{2(1-q^2)\sigma_H^2}\right), \quad (3.26)$$

які виступають перехідними щільностями для парціальних ОУ-процесів. При $x' \rightarrow -\infty$ в (3.25) або $y' \rightarrow -\infty$ в (3.26) отримаємо вершинну щільність розподілу ймовірностей рівноважного виду:

$$f_H(h(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_H} \exp\left(-\frac{[h(x, y)]^2}{2\sigma_H^2}\right) \quad (3.27)$$

для випадкової реалізації $h(x, y)$ НМД-поля $H(x, y)$ в точці з координатами (x, y) , і тому з наведених співвідношень випливає кореляційна функція (3.24).

Розмістимо тепер на площині декартову систему координат. Динаміку випадкового НМД-поля $H(x, y)$ у прямокутнику $\{x \in [0, a], y \in [0, b]\}$ з вершиною в $(0, 0)$ можна описати за допомогою рівняння, яке є узагальненням рівняння Ланжевена для процесу Орнштейна-Уленбека:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + \mu\right)h(x, y) = \sigma_H u(x, y), \quad (3.28)$$

де $u(x, y)$ – випадкове поле, що має властивості гауссового двовимірного білого шуму з одиничною інтенсивністю.

В якості крайових умов до рівняння (3.28) використаємо два нормальних стохастичних процеси, що описуються рівняннями Ланжевена:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \nu\right)h(x, 0) = \sigma_H u(x, 0); \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} + \mu\right)h(0, y) = \sigma_H u(0, y) \quad (3.29)$$

і реалізуються вздовж осей x та y , відповідно. Початковою умовою до них буде значення випадкової величини у початку системи координат

$$h(0, 0) = \sigma_H u(0, 0). \quad (3.30)$$

Рішення рівняння (3.28) при крайових умовах (3.29) і початковій умові (3.30) має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= h(0, 0) \exp(-\nu x) + \sigma_H \int_0^x \exp[-\nu(x - x')] u(x', 0) dx', \\ h(0, y) &= h(0, 0) \exp(-\mu y) + \sigma_H \int_0^y \exp[-\mu(y - y')] u(0, y') dy', \\ h(x, y) &= h(0, 0) \exp(-\nu x - \mu y) + \sigma_H^2 \int_0^x \int_0^y \exp[-\nu(x - x') - \mu(y - y')] u(x', y') dx' dy' + \\ &+ \sigma_H \int_0^x \exp[-\nu(x - x')] u(x', 0) dx' + \sigma_H \int_0^y \exp[-\mu(y - y')] u(0, y') dy'. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Можна побачити, що у поля $H(x, y)$ марковська властивість виконується для всіх точок вздовж осей x та y .

На базі рішення (3.31) можна побудувати чисельний алгоритм генерації НМД-поля $H(x, y)$.

Алгоритм 3.1. Генерація двовимірного нормального марковського поля.

Крок 1. Генерація значення у вершині:

$$g_{0,0} = u_{0,0}. \quad (3.32)$$

Крок 2. Генерація значення процесу вздовж x -межі прямокутника:

$$g_{n+1,0} = pg_{n,0} + \sqrt{1-p^2} u_{n+1,0}. \quad (3.33)$$

Крок 3. Генерація значення процесу вздовж y -межі прямокутника:

$$g_{0,m+1} = qg_{0,m} + \sqrt{1-q^2} u_{0,m+1}. \quad (3.34)$$

Крок 4. Послідовне (зліва-направо та пошарово) заповнення значеннями внутрішніх вузлів прямокутника ($n > 0, m > 0$):

$$g_{n+1,m+1} = pg_{n,m+1} + qg_{n+1,m} - pqg_{n,m} + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)} u_{n+1,m+1}. \quad (3.35)$$

Крок 5. Нормування амплітуди поля ($n \geq 0, m \geq 0$):

$$h_{n,m} = \sigma_H g_{n,m}. \quad (3.36)$$

В алгоритмі 3.1 використані наступні позначки: $u(x, y)$ – поле білого шуму з одиничною інтенсивністю, $p = \exp(-\nu\Delta_x)$, $q = \exp(-\mu\Delta_y)$, де ν и μ – парціальні декременти, Δ_x та Δ_y – кроки вузлів по осям x та y , відповідно. Інтенсивність σ_H амплітуди $h(x, y)$ породженого поля $H(x, y)$ пов'язана із інтенсивністю породжувального поля $u(x, y)$ співвідношенням $\sigma_H = \frac{1}{\sqrt{4\nu\mu}} \sigma_{u_{xy}}$, що випливає із (3.13).

Відзначимо, що для обраних значень Δ_x та Δ_y (тобто при кількості кроків $N_x = a / \Delta_x$, $N_y = b / \Delta_y$, що відповідають заданим розмірам сторін прямокутника a та b), інтенсивність в чисельному алгоритмі слід перенормувати так, щоб енергія НМД-поля $H(x, y)$ у розрахунку на одиницю площі співпадала із заданою енергією при будь-якій кількості кроків.

Із алгоритму 3.1 можна отримати для значення $h_{n,m}$ в будь-якому (n, m) -вузлі:

$$\mathbf{M}[H_{n,m}] = 0; \mathbf{M}[H_{n,m}^2] = \sigma_H^2 = \text{const}, \quad (3.37)$$

якщо послідовно знижувати значення n -індексу и m -індексу і, нарешті, знайти безумовне рівноважне середнє. Отже, алгоритм 3.1 генерації значень випадкового поля в прямокутнику на площині є стаціонарним.

Наступні рисунки є ілюстраціями до роботи програми, за допомогою якої візуалізуються розраховані 2D-поля.

На рис. 3.1 наведено приклад генерації білого шуму $u(x, y)$. Налаштування: крок по осі абсцис $\Delta x = 1.0$, кількість кроків $N = 40$; крок по осі ординат $\Delta y = 1.0$, кількість кроків $M = 20$; інтенсивність амплітуди $h(x, y)$ поля $H(x, y) - \sigma = 1$.

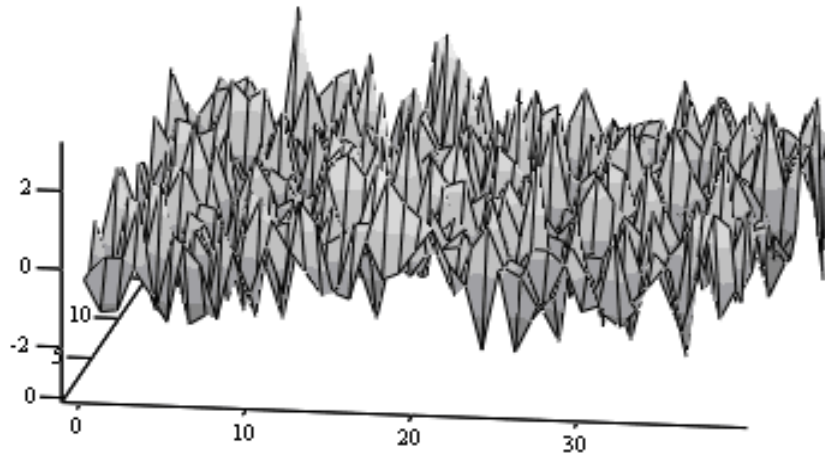


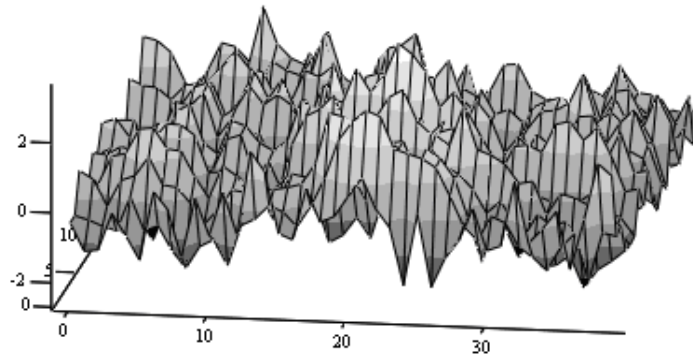
Рис. 3.1. Поле $u(x, y)$ вихідного 2D-генератору білого шуму

На рис. 3.2 наведені приклади генерації випадкових НМД-полів першого порядку $H(x, y)$ на базі наведеного на рис. 3.1 поля $u(x, y)$ білого шуму. Параметри розрахунків: крок по осі абсцис $\Delta x = 1.0$, кількість кроків $N_x = 40$; крок по осі ординат $\Delta y = 1.0$, кількість кроків $N_y = 20$; інтенсивність амплітуди $h(x, y)$ поля $H(x, y)$ становить $\sigma = 1$ і визначається у відповідності з рівнянням (3.31).

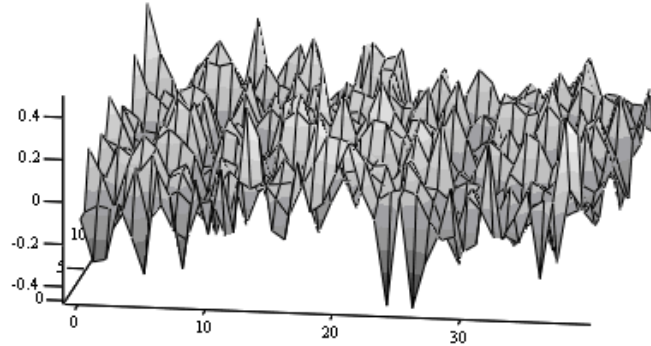
Розрахунки виконано при постійному y -декременті $\mu = 1.0$ і трьох значеннях x -декременту ν : 0.5, 1.0 та 2.0. Як видно з рис. 3.2, амплітуда поля зменшується із збільшенням декременту ν , але рельєф поля суттєво не змінюється.

На рис. 3.3 показано результат суперпозиції НМД-поля першого порядку $H(x, y)$ з декрементами $\nu = 2.0$, $\mu = 2.0$ і параболоїду $P(x, y) = 0.002(x^2 + y^2)$ на ділянці площини $(-20 \leq x \leq 20, -20 \leq y \leq 20)$.

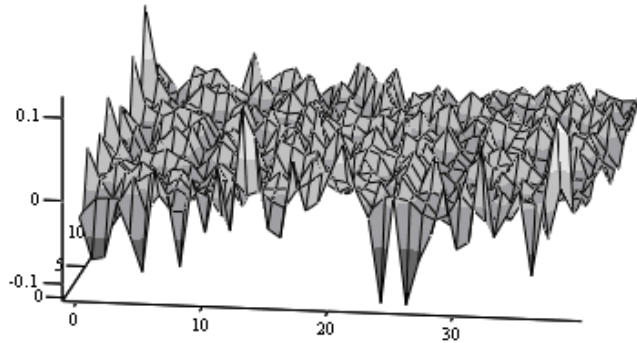
Параметри розрахунків: крок по осі абсцис $\Delta x = 1.0$, кількість кроків $N_x = 40$; крок по осі ординат $\Delta y = 1.0$, кількість кроків $N_y = 40$. Розрахунки виконані при незмінних декрементах і трьох значеннях інтенсивності випадкового поля σ : 0.0, 0.05 і 0.1. На рис. 3.3 можна побачити, як збільшення інтенсивності σ наводить до послідовного спотворення випадковим полем $H(x, y)$ рельєфу параболоїду.



a



b



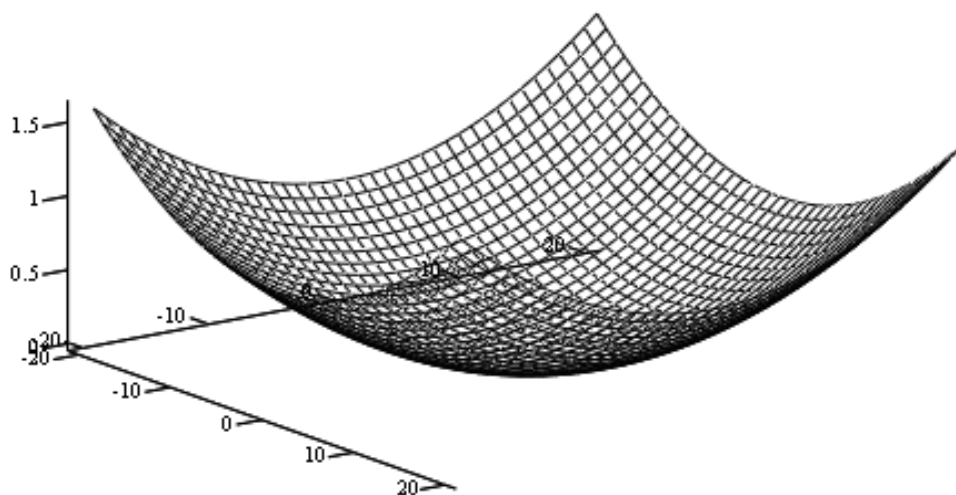
c

Рис. 3.2. Марковське стохастичне поле $H(x, y)$;

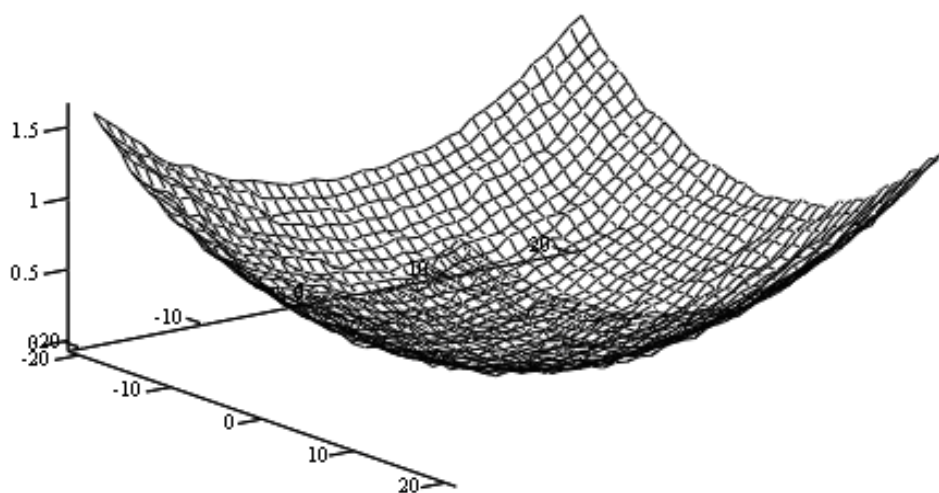
$a - \nu = 0.25, \mu = 1.0$; $b - \nu = 1.0, \mu = 1.0$; $c - \nu = 4.0, \mu = 1.0$

Контрольні запитання

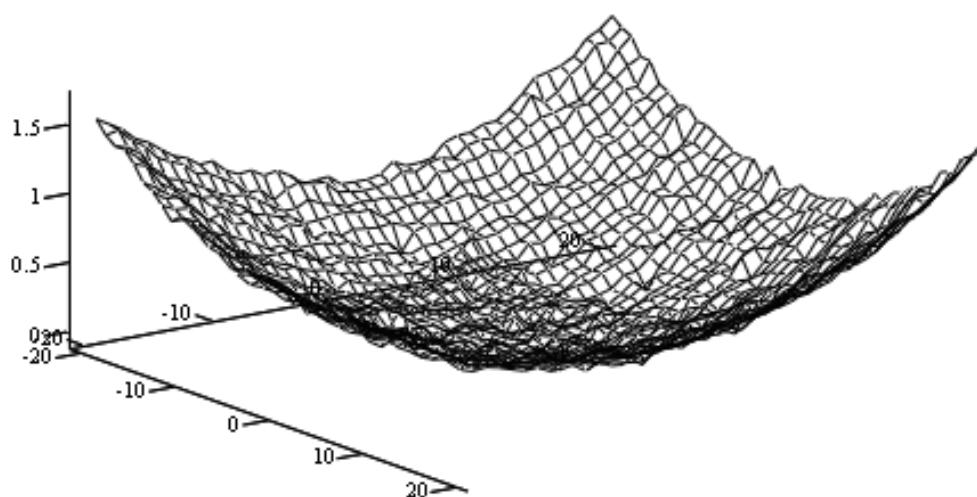
1. Якими рівняннями визначається нормальне марковське поле на площині?
2. Як виглядає структура білого шуму на площині?
3. Запишіть рішення рівняння Ланжевена для НМД-поля.
4. Чому дорівнює безумовне математичне сподівання значень НМД-поля на площині?
5. Чому дорівнює безумовна дисперсія значень НМД-поля на площині?
6. Як виглядає аналог співвідношення Ейнштейна для нормального марковського поля на площині?
7. Що мається на увазі під умовним корелятором марковського поля?
8. Як записати рівняння Ланжевена на площі у різницьевій формі?



a



b



c

Рис. 3.3. Результат суперпозиції НМД-поля першого порядку $H(x, y)$ з декрементами $\nu = 2.0$, $\mu = 2.0$ та параболоїду $P(x, y) = 0.002(x^2 + y^2)$;
a – $\sigma = 0.0$, *b* – $\sigma = 0.05$, *c* – $\sigma = 0.1$

Вправи для роботи з комп'ютером

Завдання 1. Для параметрів $\nu = \mu = 1.0$, $\sigma_x = \sigma_y = 1.0$, $\Delta_x = \Delta_y = 0.01$, $g_{0,0} = 1$ згенеруйте реалізацію нормального марковського поля у прямокутнику на $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$ за допомогою алгоритму 3.1.

- а) Побудуйте на графіку результат суперпозиції поля з поверхнею $\sin(xy)$.
- в) Дослідите, як буде змінюватись результат при варіації параметрів ν та μ .

Завдання 2. Для параметрів $\nu = \mu = 1.0$, $\sigma = 1.0$, $\Delta_x = \Delta_y = 0.01$, $g_{0,0} = 1.0$ згенеруйте 1000 реалізацій нормального марковського поля у прямокутнику на $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 10$ за допомогою алгоритму 3.1.

- а) Розрахуйте вибірові середні та СКВ поля $\bar{h}(x, y), s(x, y)$ як функції від (x, y) шляхом усереднення за реалізаціями.
- б) Побудуйте поверхню залежності отриманих характеристик від (x, y) разом із теоретичними значеннями $\mathbf{M}[h(x, y)]$, $\sigma_h(x, y)$. Порівняйте результати.
- в) Дослідите, як аналізовані характеристики залежать від параметрів ν та μ .

Завдання 3. Для параметрів $\nu = \mu = 1.0$, $\sigma = 1.0$, $\Delta_x = \Delta_y = 0.01$, $g_{0,0} = 1.0$ здійсніть суперпозицію НМД-поля першого порядку $H(x, y)$ з декрементами $\nu = 1.5$, $\mu = 1.5$ та параболоїду $P(x, y) = 0.002(x^2 + y^2)$ у прямокутнику на $-20 \leq x \leq 20$, $-20 \leq y \leq 20$ за допомогою алгоритму 3.1. Дослідите, як впливають на результат суперпозиції параметри ν , μ та σ .

Завдання 4. Для параметрів $\nu = \mu = 1.0$, $\sigma = 1.0$, $\Delta_x = \Delta_y = 0.01$, $g_{0,0} = 1.0$ здійсніть суперпозицію НМД-поля першого порядку $H(x, y)$ з декрементами $\nu = 1.5$, $\mu = 1.5$ та поверхні синусного типу $P(x, y) = 0.5\sin(0.2x + 0.1y)$ у прямокутнику на $-20 \leq x \leq 20$, $-20 \leq y \leq 20$ за допомогою алгоритму 3.1. Дослідите, як впливають на результат суперпозиції параметри ν , μ та σ .

4. ПІДВИЩЕННЯ ПОРЯДКУ НОРМАЛЬНОГО МАРКОВСЬКОГО ПОЛЯ НА ПЛОЩИНІ

4.1 Нормальні марковські двовимірні поля другого порядку

В багатьох прикладних задачах виникає проблема генерації випадкових величин з необхідними властивостями. Часто потрібна генерація не скалярних випадкових величин, а двовірних випадкових полів або полів ще більш високої розмірності. Так, при моделюванні руху транспортних засобів необхідна генерація випадкового об'єкту на площині, для чого, у свою чергу, потрібна генерація випадкового двовимірного марковського поля.

Існуючі алгоритми генерації двовимірних марковських полів в основному пристосовані для побудови полів лише нульового або першого порядку. Тим часом, у багатьох прикладних задачах випадкові поля мають характеризуватися, принаймні, другим порядком. Це зумовлено, насамперед, необхідністю їх застосування при моделюванні об'єктів, динаміка яких описується диференціальними рівняннями другого або вищих порядків.

У цьому розділі побудовано послідовність вкладених алгоритмів генерації нормального марковського поля другого та вищих порядків, будь-які ортогональні перерізи якого є стаціонарними випадковими процесами Орнштейна-Уленбека. Для цього будуть представлені алгоритми підвищення порядку нормального марковського поля.

У теорії стохастичних марковських процесів відоме рівняння Ланжевена першого порядку. Його рішенням є диференційована функція. Це означає, що функція має порядок на одиницю вище, ніж процес білого шуму, який породжує марковське поле. Рівняння руху для марковського поля має вигляд (3.1), а крайові умови задаються рівняннями (3.2)–(3.3). Продублюємо їх тут для зручності:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + \mu\right)h(x, y) = u_{xy}(x, y); \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \nu\right)h(x, 0) = u_x(x, 0); \left(\frac{\partial}{\partial y} + \mu\right)h(0, y) = u_y(0, y). \quad (4.2)$$

Далі будемо виходити з того, що основною властивістю нормального марковського поля є його кореляційний функціонал

$$K_{xy} = K_{xy}(x, y | x', y') = \mathbf{M}[H(x, y)H(x', y')] = pq\sigma_H^2 \quad (4.3)$$

із парціальними кореляторами $p = \exp(-\nu|x - x'|)$, $q = \exp(-\mu|y - y'|)$. В формулах

(4.1)–(4.3) $h(x, y)$ – реалізація гауссового двовимірного поля $H(x, y)$ в прямокутній області $\{x \in [0, a], y \in [0, b]\}$ на площині xOy , а ν та μ – як і раніше, декременти загасання поля вздовж осей x та y , відповідно.

Узагальненням відомих конструкцій – перехідних ймовірностей для нормального марковського процесу – може бути перехідна щільність розподілу ймовірностей для амплітуди $h(x, y)$ НМД-поля $H(x, y)$:

$$f_H(h(x, y) | h(x', y), h(x, y'), h(x', y')) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)(1-q^2)}\sigma_H} \exp\{-Q[h(x, y)]\}, \quad (4.4)$$

де $Q[h(x, y)]$ – квадратична форма відносно змінних поля

$$Q[h(x, y)] = \frac{[h(x, y) - ph(x', y) - qh(x, y') + pqh(x', y')]^2}{2(1-p^2)(1-q^2)\sigma_H^2}. \quad (4.5)$$

Якщо $x' \rightarrow \infty$ або $y' \rightarrow \infty$, отримаємо граничні перехідні щільності ймовірностей $f_H(h(x, y) | h(x', y))$ та $f_H(h(x, y) | h(x, y'))$, які розглядаються в якості перехідних щільностей для парціальних ОУ-процесів. Якщо ж одночасно $x' \rightarrow \infty$ та $y' \rightarrow \infty$, отримаємо вершинну щільність розподілу ймовірностей рівноважного виду $f_H(h(x, y))$ для випадкової реалізації $h(x, y)$ поля $H(x, y)$ у точці з координатами (x, y) , звідки й виходить кореляційна функція (4.3).

Отже, якщо позначити $u(x, y)$ через $H^{(0)}(x, y)$, а $h(x, y)$ через $H^{(1)}(x, y)$, то ефект диференційного рівняння (4.1), крайових початкових умов (4.2) і вершинної початкової умови $h(0, 0) = u(0, 0)$ можна формально записати як операторне співвідношення із диференційним оператором $D(\nu, \mu)$ виду

$$D(\nu, \mu)H^{(0)}(x, y) = H^{(1)}(x, y), \quad (4.6)$$

або як операторне співвідношення з інтегральним оператором $I(\nu, \mu)$:

$$H^{(1)}(x, y) = I(\nu, \mu)H^{(0)}(x, y) = (D(\nu, \mu))^{-1}H^{(0)}(x, y). \quad (4.7)$$

У явному виді це операторне співвідношення можна записати у вигляді:

$$H^{(1)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\nu\mu}} \exp(-\nu x - \mu y) H^{(0)}(0, 0) + \int_0^x \int_0^y \exp[-\nu(x-x') - \mu(y-y')] H^{(0)}(x', y') dx' dy' +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int_0^x \exp[-\nu(x-x')] H^{(0)}(x', 0) dx' + \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \int_0^y \exp[-\mu(y-y')] H^{(0)}(0, y') dy'. \quad (4.8)$$

Отже, якщо задано поле $H^{(0)}(x, y)$ разом із крайовими умовами, то при заданій наступній парі парціальних декрементів ν та μ загасання поля вздовж осей $0x$ та $0y$, відповідно, можна визначити поле $H^{(1)}(x, y)$.

4.2 Алгоритм генерації НМД-поля k -го порядку

Нехай тепер шукається поле k -го порядку $H^{(k)}(x, y)$, яке описується рівнянням руху на площині із диференційними операторами k -го порядку для кожній із змінних x та y . Вважатимемо, що поле попереднього $(k-1)$ -го порядку $H^{(k-1)}(x, y)$ є заданим разом із вершинною умовою, крайовими умовами, та відповідними декрементами. Тоді обидва поля $H^{(k-1)}(x, y)$ та $H^{(k)}(x, y)$ пов'язані співвідношенням:

$$D(\nu_k, \mu_k) H^{(k)}(x, y) = H^{(k-1)}(x, y). \quad (4.9)$$

Отже, для шуканого поля $H^{(k)}(x, y)$ отримаємо, згідно (4.6) та (4.7):

$$H^{(k)}(x, y) = I(\nu_k, \mu_k) H^{(k-1)}(x, y). \quad (4.10)$$

Можна перевірити, що марковська властивість для поля $H^{(1)}(x, y)$ згідно (4.8) має місце вздовж граничних осей $0x$ та $0y$, а також на площині $x0y$.

На базі рішення (4.8) можна побудувати чисельний алгоритм генерації НМД-поля $H^{(k)}(x, y)$ за умови, що раніше отримані всі значення амплітуд поля $H^{(k-1)}(x, y)$. Цей рекурентний алгоритм забезпечує генерацію значень у вузлах випадкового нормального стаціонарного марковського поля в прямокутній області зі сторонами a та b .

Розглянемо на площині $x0y$ прямокутник з однією із вершин, що розташована в точці $(0,0)$. Виберемо сітку вузлів $\{0 \leq n \leq N, 0 \leq m \leq M\}$ з кроком Δ_x вздовж осі x та з кроком Δ_y вздовж осі y так, щоб $N = a / \Delta_x$ та $M = b / \Delta_y$. Тоді шуканий рекурентний алгоритм генерації значень $\{h_{n,m}^{(k+1)}, 0 \leq n \leq N, 0 \leq m \leq M\}$ НМД-поля $H^{(k)}(x, y)$ зручно подати у наступний спосіб.

Алгоритм 4.1. Генерація НМД-поля k -го порядку на базі НМД-поля $(k-1)$ -го порядку

Крок 1. Генерація значення у вершині, $n = 0, m = 0$:

$$g_{0,0} = h_{0,0}^{(k-1)}. \quad (4.11)$$

Крок 2. Генерація значень ОУ-процесу вздовж x -межі, $n > 0, m = 0$:

$$g_{n+1,0} = p_k g_{n,0} + \sqrt{1 - p_k^2} h_{n+1,0}^{(k-1)}. \quad (4.12)$$

Крок 3. Генерація значень ОУ-процесу вздовж y -межі, $n = 0, m > 0$:

$$g_{0,m+1} = q_k g_{0,m} + \sqrt{1 - q_k^2} h_{0,m+1}^{(k-1)}. \quad (4.13)$$

Крок 4. Послідовне (зліва–праворуч та пошарово) заповнення значеннями внутрішніх вузлів прямокутника, $n > 0, m > 0$:

$$g_{n+1,m+1} = p_k g_{n,m+1} + q_k g_{n+1,m} - p_k q_k g_{n,m} + \sqrt{(1 - p_k^2)(1 - q_k^2)} h_{n+1,m+1}^{(k-1)}. \quad (4.14)$$

Крок 5. Отримання значень для $n \geq 0, m \geq 0$:

$$h_{n,m}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{4\nu_k \mu_k}} g_{n,m}. \quad (4.15)$$

В алгоритмі 4.1 позначено: $p_k = \exp(-\nu_k \Delta_x)$, $q_k = \exp(-\mu_k \Delta_y)$, ν_k та μ_k – парціальні декременти, Δ_x та Δ_y – відстані між вузлами вздовж осей $0x$ та $0y$.

Відзначимо, що при обраних значеннях Δ_x та Δ_y (тобто при кількості кроків N та M , які відповідають заданим розмірам прямокутника із сторонами a та b), інтенсивність в чисельному алгоритмі треба перенормувати так, щоб енергія НМД-поля $H^{(k)}(x, y)$ у розрахунку на одиницю площини співпадала із заданою при будь-якій кількості кроків.

Із формул (4.11)–(4.15) можна розрахувати математичне сподівання для значень $h_{n,m}^{(k)}$ та $\left(h_{n,m}^{(k)}\right)^2$ для будь-яких (n, m) -вузлів поля $H^{(k)}(x, y)$, якщо послідовно зменшувати значення n -індексу, потім значення m -індексу, і, нарешті, знайти безумовне рівноважне середнє при $n = m = 0$, а саме:

$$\mathbf{M}\left[H_{n,m}^{(k)}\right] = 0; \mathbf{M}\left[\left(H_{n,m}^{(k)}\right)^2\right] = \text{const}. \quad (4.16)$$

Отже, алгоритм 4.1 генерації значень випадкового поля $H^{(k)}(x, y)$ в прямокутнику на площині є стаціонарним.

Поєднання формул (4.8)–(4.15) дає можливість сформулювати наступне.

Твердження 1. Нехай на обраній декартовій сітці з кроками Δ_x та Δ_y між вузлами вздовж осей $0x$ та $0y$ задано для $k = 0$ поле $H^{(0)}$ білого шуму з інтенсивніс-

ттю σ_0 , а для $j=1,2,...,k-1$ відома послідовність декрементів $\{(v_1, \mu_1), (v_2, \mu_2), ..., (v_{k-1}, \mu_{k-1})\}$. Тоді для перехідних ймовірностей $\{f_{H^{(k)}}(.)\}$ амплітуд $\{h_{n,m}^{(k)}\}$ нормального марковського поля $H^{(k)}(x, y)$ порядку k можуть бути використані наступні перехідні ймовірності для амплітуд НМД-поля:

$$f_{H^{(k)}}(h_{n,m}^{(k)} | h_{n-1,m}^{(k)}, h_{n,m-1}^{(k)}, h_{n-1,m-1}^{(k)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p_k^2)(1-q_k^2)}\sigma_k} \exp \left\{ -\frac{[h_{n,m}^{(k)} - p_k h_{n-1,m}^{(k)} - q_k h_{n,m-1}^{(k)} + p_k q_k h_{n-1,m-1}^{(k)}]^2}{2(1-p_k^2)(1-q_k^2)\sigma_k^2} \right\}, \quad (4.17)$$

де корелятори $p_k = \exp(-v_k |x - x'|)$ і $q_k = \exp(-\mu_k |y - y'|)$, v_k і μ_k – парціальні декременти, а $\sigma_k^2 = \mathbf{M}[(H_{n,m}^{(k)})^2] = \sigma_{k-1}^2 / (4v_k \mu_k)$.

Набір $\{f_{H^{(k)}}(.)\}$ цих щільностей разом із набором $H^{(k)}(x, y)$ НМД-полів створюють послідовність, яка є самоузгодженою у сукупності.

Твердження 2. Нехай вираз (4.8) описує інтегральний оператор $I(v, \mu)$ підвищення порядку НМД-поля на одиницю відповідно до заданої пари v та μ . Тоді для заданого K і заданих декрементних наборів $\{v_1, v_2, ..., v_K\}$ та $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_K\}$ за допомогою інтегрального оператора

$$H^{(K)}(x, y) = \prod_{k=1}^K I(v_k, \mu_k) H^{(0)}(x, y) \quad (4.18)$$

може бути отримано НМД-поле порядку K .

Можна очікувати, що аналогічні твердження мають місце і для полів, які генеруються у просторах вищої розмірності.

Зауваження. Рішення (4.8) та його узагальнення (4.17) можна вважати явним видом рішення рівняння Ланжевена на площині для першого та K -го порядку.

4.3 Результати генерації НМД-поля

На рис. 4.1 наведено приклад генерації поля $H^{(0)}$ білого шуму і пов'язані з ним приклади генерації НМ-поля $H^{(1)}$ першого порядку і НМ-поля $H^{(2)}$ другого порядку. Використовувались такі параметри розрахунків: крок по осі абсцис $\Delta x = 1.0$, кількість кроків $N = 40$, крок по осі ординат $\Delta y = 1.0$, кількість кроків $M = 20$; інтенсивність породжувального поля $H^{(0)}$ $\sigma = 1.0$; декременти породженого поля $H^{(1)}$ $v_1 = 1.0$, $\mu_1 = 1.0$; декременти поля $H^{(2)}$ $v_2 = 2.0$, $\mu_2 = 2.0$.

На рис. 4.2 показано результат накладення полів першого порядку $H^{(1)}$ і другого порядку $H^{(2)}$ на поверхню $Z(x, y) = \exp[-0.1(x-10)^2] + \exp[-0.2(y-10)^2]$.

Використовувались ті ж самі параметри розрахунків, що й при побудові рис. 4.1. З рис. 4.2 видно послідовне спотворення випадковим полем $H(x, y)$ рельєфу поверхні $Z(x, y)$.

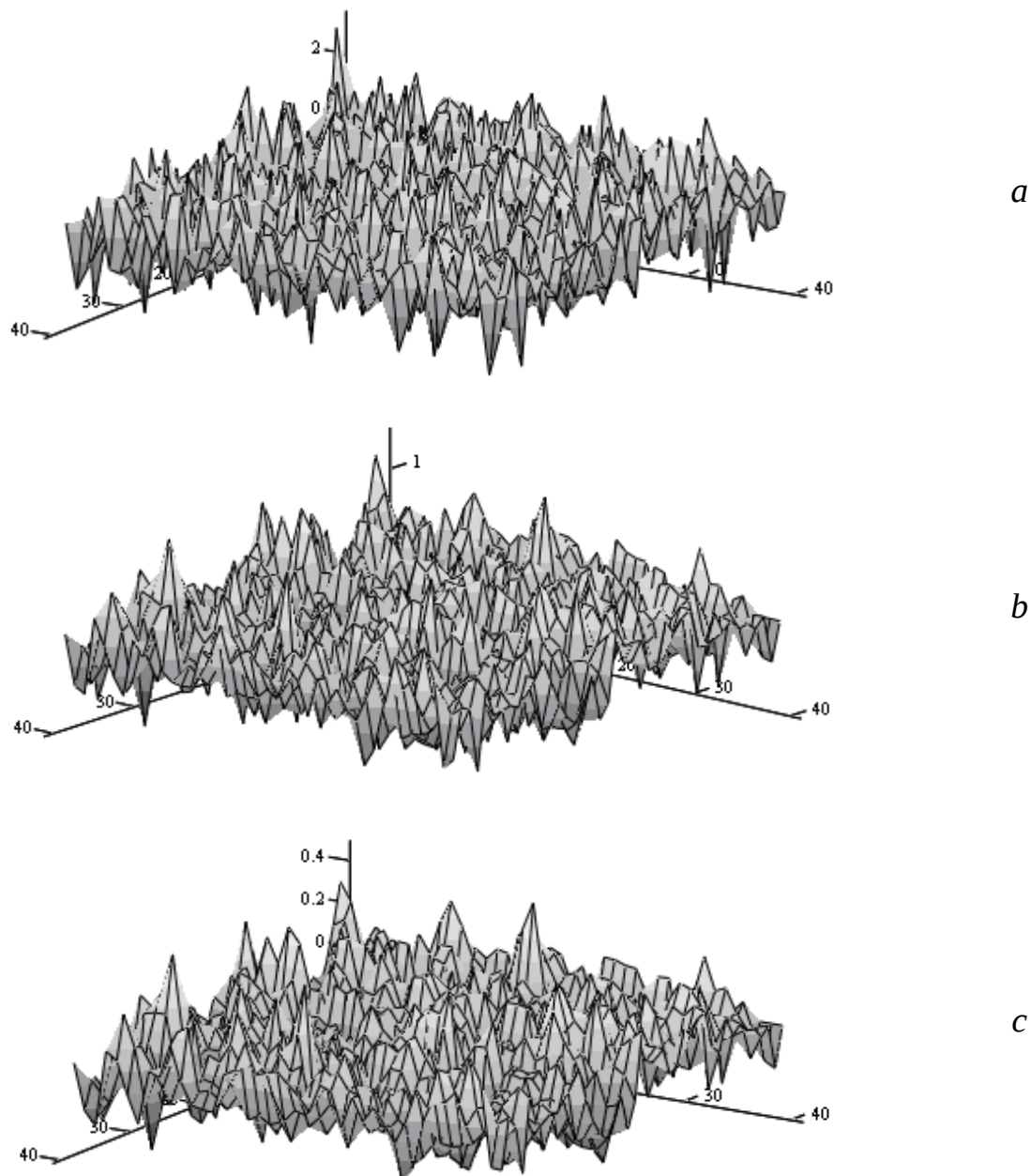
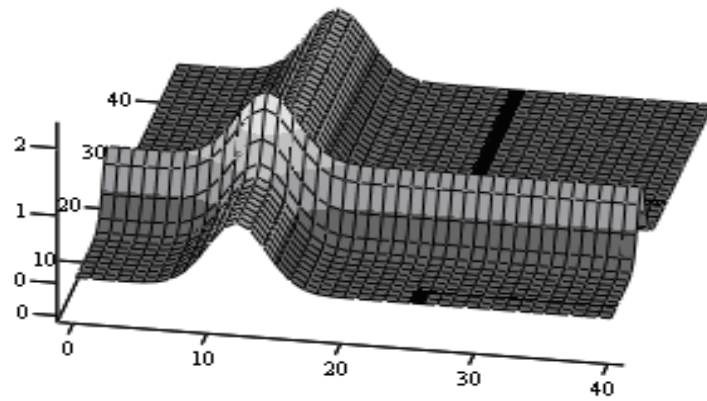
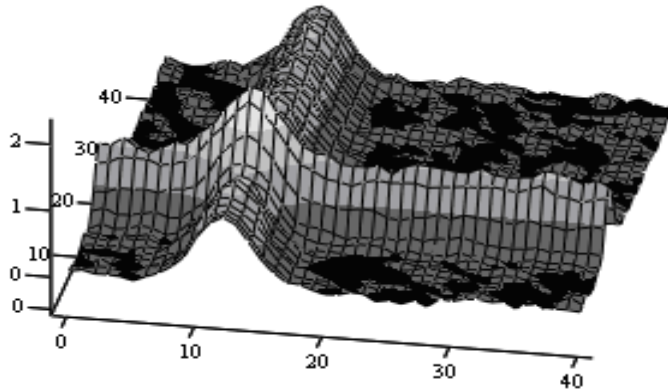


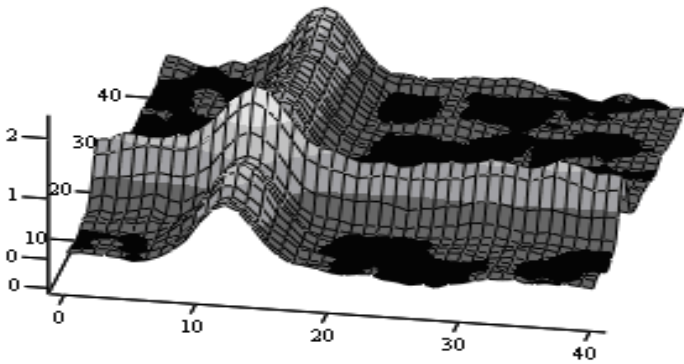
Рис. 4.1. Поля $H^{(0)}, H^{(1)}, H^{(2)}$. Параметри: $N = 40, \Delta x = 1.0, M = 20, \Delta y = 1.0$;
a – поле білого шуму $H^{(0)}, \sigma = 1.0$; *b* – поле першого порядку $H^{(1)},$
 $\nu_1 = 1.0, \mu_1 = 1.0$; *c* – поле другого порядку $H^{(2)}, \nu_2 = 2.0, \mu_2 = 2.0$



a



b



c

Рис. 4.2. Накладення полів першого $H^{(1)}$ та другого $H^{(2)}$ порядку на поверхню $Z(x, y) = \exp[-0.1(x-10)^2] + \exp[-0.2(y-10)^2]$;

a – поверхня $Z(x, y)$; *b* – поле $H^{(1)}$, $\nu_1 = 1.0$, $\mu_1 = 1.0$;

c – поле $H^{(2)}$, $\nu_2 = 0.5$, $\mu_2 = 0.5$. Інтенсивність поля $H^{(0)}$ складає $\sigma = 0.1$

4.4 Гармонічне нормальне марковське поле на площині

При рішенні практичних задач, пов'язаних з визначенням збурень, що діють на корпус транспортного засобу з боку ґрунту, потрібно не тільки знання випадкової функції двох змінних $h(x, y) = h_2(x, y)$, але й її похідної. В таких випадках поле

$H_2(x, y)$ має бути полем другого порядку, тобто описуватись диференціальним рівнянням порядку не нижче другого. Випадкове НМД-поле другого порядку $H_2(x, y)$ в прямокутнику $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$ можна описати рівнянням:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\beta_x \frac{\partial}{\partial x} + \Omega_x^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\beta_y \frac{\partial}{\partial y} + \Omega_y^2 \right) h(x, y) = \sigma_U u(x, y), \quad (4.19)$$

де β_x, Ω_x та β_y, Ω_y – парціальні декременти і частоти, що відповідають руху по осям $0x$ та $0y$, відповідно. До рівняння (4.19) слід додати крайові умови

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\beta_x \frac{\partial}{\partial x} + \Omega_x^2 \right) h(x, 0) = \sigma_U u(x, 0), \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\beta_y \frac{\partial}{\partial y} + \Omega_y^2 \right) h(0, y) = \sigma_U u(0, y) \end{cases} \quad (4.20)$$

для осей $0x$ та $0y$, відповідно.

В рівнянні (4.19) $u(x, y)$ – двовимірний гауссовий білий шум на площині $x0y$ з одиничною інтенсивністю. Також задано початкову умову $h(0, 0) = \sigma_U u(0, 0)$.

Приведемо рівняння (4.19)–(4.20) до виду, зручного для факторизації. З цією метою розглянемо рівняння

$$\gamma^2 + 2\beta_x \gamma + \Omega_x^2 = 0; \quad \gamma^2 + 2\beta_y \gamma + \Omega_y^2 = 0. \quad (4.21)$$

Нехай $\gamma_{1,x}$, $\gamma_{2,x}$ та $\gamma_{1,y}$, $\gamma_{2,y}$ – рішення цих квадратних рівнянь. Тоді (4.19) можна записати у вигляді системи з двох рівнянь з білим шумом в правій частині першого з них:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_{1,x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + \gamma_{1,y} \right) h_1(x, y) = \sigma_U u(x, y), \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_{2,x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + \gamma_{2,y} \right) h_2(x, y) = h_1(x, y), \end{cases} \quad (4.22)$$

разом із крайовими умовами (4.20). Отже, простір, пов'язаний з диференціальним рівнянням другого порядку для кожної із змінних, розширюється на два підпростори, які відповідають парам власних чисел $\gamma_{1,x}$, $\gamma_{1,y}$ та $\gamma_{2,x}$, $\gamma_{2,y}$. Структура рівнянь (4.20), (4.22) та (4.1) співпадає. Отже, рішення системи (4.22) можна записати у такий спосіб:

$$h_1(x, 0) = \exp(-\gamma_{1,x} x) h_1(0, 0) + \sigma_U \int_0^x \exp[-\gamma_{1,x}(x - x')] u(x', 0) dx'; \quad (4.23)$$

$$h_1(0, y) = \exp(-\gamma_{1,y}y)h_1(0, 0) + \sigma_U \int_0^y \exp[-\gamma_{1,y}(y - y')]u(0, y')dy'; \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} h_1(x, y) &= \exp(-\gamma_{1,x}x - \gamma_{1,y}y)h_1(0, 0) + \\ &+ \sqrt{4\gamma_{1,x}\gamma_{1,y}}\sigma_U \int_0^x \int_0^y \exp[-\gamma_{1,x}(x - x') - \gamma_{1,y}(y - y')]u(x', y')dx'dy' + \\ &+ \sqrt{2\gamma_{1,x}}\sigma_U \int_0^x \exp[-\gamma_{1,x}(x - x')]u(x', 0)dx' + \sqrt{2\gamma_{1,y}}\sigma_U \int_0^y \exp[-\gamma_{1,y}(y - y')]u(0, y')dy'. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Аналогічно,

$$h_2(x, 0) = \exp(-\gamma_{2,x}x)h_1(0, 0) + \int_0^x \exp[-\gamma_{2,x}(x - x')]h_1(x', 0)dx'; \quad (4.26)$$

$$h_2(0, y) = \exp(-\gamma_{2,y}y)h_1(0, 0) + \int_0^y \exp[-\gamma_{2,y}(y - y')]h_1(0, y')dy'; \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} h_2(x, y) &= \exp(-\gamma_{2,x}x - \gamma_{2,y}y)h(0, 0) + \\ &+ \sqrt{4\gamma_{2,x}\gamma_{2,y}} \int_0^x \int_0^y \exp[-\gamma_{2,x}(x - x') - \gamma_{2,y}(y - y')]h_1(x', y')dx'dy' + \\ &+ \sqrt{2\gamma_{2,x}}\sigma_U \int_0^x \exp[-\gamma_{2,x}(x - x')]h_1(x', 0)dx' + \sqrt{2\gamma_{2,y}} \int_0^y \exp[-\gamma_{2,y}(y - y')]h_1(0, y')dy'. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Із співвідношень (4.23)–(4.28) випливає, що НМД-поле другого порядку $H^{(2)}(x, y)$ породжується НМД-полем $H^{(1)}(x, y)$ першого порядку, а НМД-поле $H^{(1)}(x, y)$ першого порядку породжується полем білого шуму $H^{(0)}(x, y) = u(x, y)$ нульового порядку.

За допомогою рішення (4.23)–(4.28) можна побудувати чисельний алгоритм генерації НМД-поля $H^{(2)}(x, y)$. Цей алгоритм так само, як і для поля $H^{(1)}(x, y)$, буде ієрархічним алгоритмом генерації значень у вузлах випадкового нормального стаціонарного марковського поля у прямокутній області зі сторонами a та b . Для такого ж прямокутника з вершиною в точці $(0, 0)$ на координатній площині xOy побудуємо сітку $(0 \leq n \leq N, 0 \leq m \leq M)$ вузлів з кроком Δ_x по осі Ox і з кроком Δ_y по осі Oy , де $N\Delta_x = a$ та $M\Delta_y = b$.

Тоді шуканий ієрархічний алгоритм генерації значень $h_{j,k}$ НМД-поля $H^{(2)}(x, y)$ можна задати такими кроками.

Алгоритм 4.2. Генерація НМД-поля другого порядку.

Етап 1.

Крок 1. Генерація значення у вершині ($n = 0, m = 0$):

$$a_{0,0} = u_{0,0}. \quad (4.29)$$

Крок 2. Генерація значень ОУ-процесу (у загальному випадку комплексно значного) вздовж x -межі прямокутника ($n > 0, m = 0$):

$$a_{n+1,0} = p_1 a_{n,0} + \sqrt{1 - p_1^2} u_{n+1,0}. \quad (4.30)$$

Крок 3. Генерація значень ОУ-процесу (у загальному випадку комплексно значного) вздовж y -межі прямокутника ($n > 0, m = 0$):

$$a_{0,m+1} = q_1 a_{0,m} + \sqrt{1 - q_1^2} u_{0,m+1}. \quad (4.31)$$

Крок 4. Послідовне (зліва-праворуч і пошарово) заповнення значеннями внутрішніх вузлів прямокутника ($n > 0, m > 0$):

$$a_{n+1,m+1} = p_1 a_{n,m+1} + q_1 a_{n+1,m} - p_1 q_1 a_{n,m} + \sqrt{(1 - p_1^2)(1 - q_1^2)} u_{n+1,m+1}. \quad (4.32)$$

Крок 5. Нормування отриманого поля ($n \geq 0, m \geq 0$):

$$b_{n,m} = \frac{a_{n,m}}{\sqrt{4\gamma_{1,x}\gamma_{1,y}}}. \quad (4.33)$$

В формулах (4.30)–(4.32) $p_1 = \exp(-\gamma_{1,x}\Delta_x)$, $q_1 = \exp(-\gamma_{1,y}\Delta_y)$, де $\gamma_{1,x}$ і $\gamma_{1,y}$ – перша пара парціальних декрементів, Δ_x, Δ_y – кроки вузлів вздовж осей Ox, Oy .

Етап 2.

Крок 6. Генерація значення у вершині ($n = 0, m = 0$):

$$g_{0,0} = b_{0,0}. \quad (4.34)$$

Крок 7. Генерація значень ОУ-процесу (у загальному випадку комплексно значного) вздовж x -межі прямокутника ($n > 0, m = 0$):

$$g_{n+1,0} = p_2 g_{n,0} + \sqrt{1 - p_2^2} b_{n+1,0}. \quad (4.35)$$

Крок 8. Генерація значень ОУ-процесу (у загальному випадку комплексно значного) вздовж y -межі прямокутника ($n > 0, m = 0$):

$$g_{0,m+1} = q_2 g_{0,m} + \sqrt{1 - q_2^2} b_{0,m+1}. \quad (4.36)$$

Крок 9. Послідовне (зліва-праворуч і пошарово) заповнення значеннями внутрішніх вузлів прямокутника ($n > 0, m > 0$):

$$g_{n+1,m+1} = p_2 g_{n,m+1} + q_2 g_{n+1,m} - p_2 q_2 g_{n,m} + \sqrt{(1 - p_2^2)(1 - q_2^2)} b_{n+1,m+1}. \quad (4.37)$$

Крок 10. Нормування отриманого поля ($n \geq 0, m \geq 0$):

$$h_{n,m} = \frac{\sigma_U g_{n,m}}{\sqrt{4\gamma_{2,x}\gamma_{2,y}}}. \quad (4.38)$$

В формулах (4.34)–(4.38) $u(x)$ – білий шум одиничної інтенсивності з амплітудою σ_U ; $p_2 = \exp(-\lambda_{2,x}\Delta_x)$, $q_2 = \exp(-\lambda_{2,y}\Delta_y)$, де $\gamma_{2,x}$, $\gamma_{2,y}$ – друга пара парціальних декрементів, Δ_x, Δ_y – кроки вузлів вздовж осей $0x, 0y$.

4.5 Результати генерації гармонічного НМД-поля

На рис. 4.3 наведено приклад генерації поля H_0 білого шуму і пов'язаного з ним гармонічного нормального марковського поля H_2 другого порядку. В прикладі розглядалась система, для якої параметри коливальних контурів складали: $\beta_x = \beta_y = 0.5$, $\Omega_x = \Omega_y = 2.0$. Знайдемо рішення рівнянь (4.21): $\gamma_{1,x} = -0.50 - i1.936$, $\gamma_{2,x} = -0.50 + i1.936$; $\gamma_{1,y} = -0.25 - i0.433$, $\gamma_{2,y} = -0.25 + i0.433$.

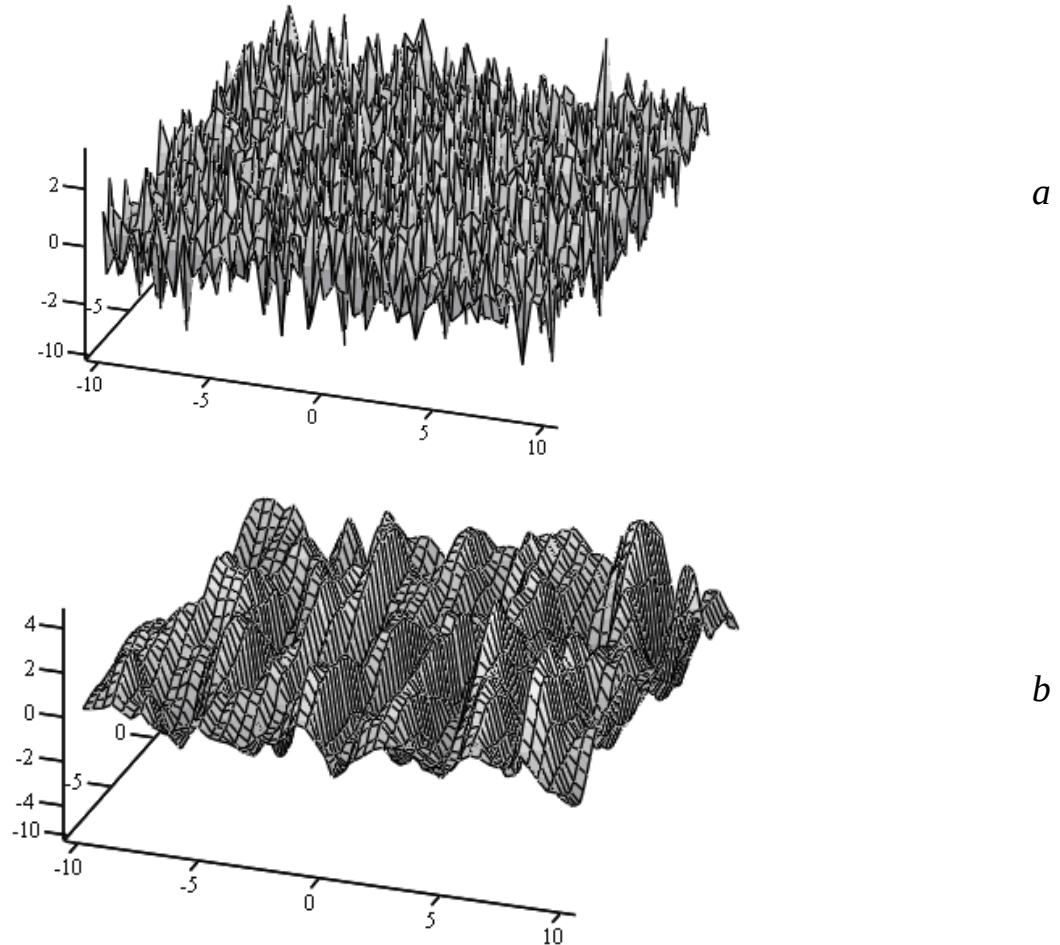


Рис. 4.3. Гармонічне НМД-поле. Параметри: $N = M = 50$, $\Delta_x = \Delta_y = 0.5$.

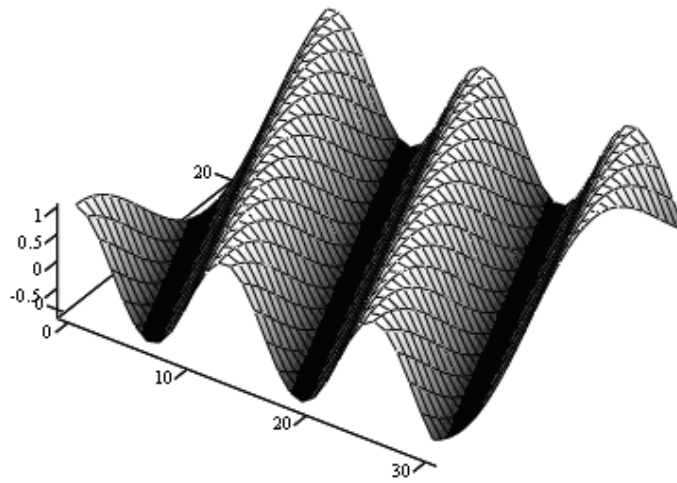
a – поле білого шуму $H^{(0)}$, $\sigma = 0.2$; b – гармонічне поле другого порядку $H^{(2)}$

Відзначимо, що хоча результат H_2 є дійснозначним, можлива поява дуже малої уявної частини, тому на рисунки виносяться тільки дійсна частина результатів розрахунків.

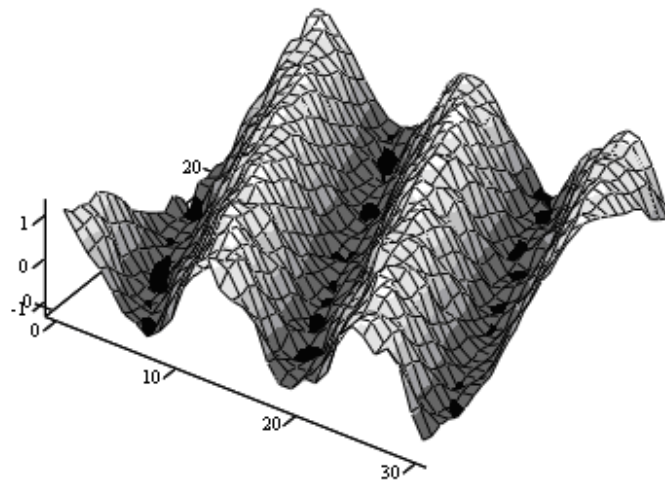
На рис. 4.4 наведено результат суперпозиції гармонічного НМД-поля $H^{(2)}(x, y)$ і поверхні $S(x, y) = \cos(0.5x + 0.2y)$ на ділянці площини $0 \leq x \leq 30$, $0 \leq y \leq 30$. Параметри розрахунків: розміри кроків по осях $\Delta x = \Delta y = 1.0$, кількість кроків $N = M = 30$. Характеристики коливальних систем: $\beta_x = \beta_y = 0.6$, $\Omega_x = \Omega_y = 2.0$, звідки $\gamma_{1,x} = \gamma_{1,y} = 0.300 - i1.382$, $\gamma_{2,x} = \gamma_{2,y} = 0.300 + i1.382$. Розрахунки здійснено для трьох значень інтенсивності початкового поля H_0 σ : 0.0, 0.5 і 1.0. З рис. 4.4 можна побачити послідовне спотворення полем $H^{(2)}(x, y)$ косінусного рельєфу.

Контрольні запитання

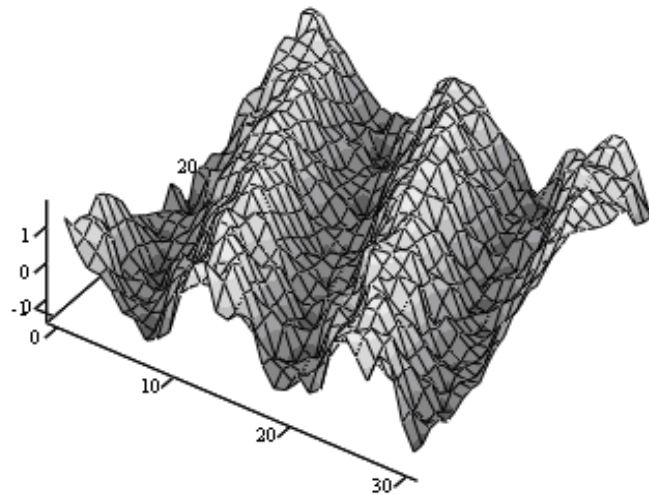
1. Наведіть приклади задач, для вирішення яких необхідно згенерувати нормальне марковське поле другого порядку на площині.
2. Запишіть рівняння Ланжевена для двовірного нормального марковського поля в диференціальній операторній формі.
3. Запишіть рівняння Ланжевена для двовірного нормального марковського поля в інтегральній операторній формі.
4. Як виглядає коваріаційна функція для нормального марковського поля другого порядку?
5. Що називають парціальними кореляторами і як вони розраховуються?
6. Чому дорівнює безумовне математичне сподівання значень нормального марковського поля другого порядку на площині?
7. Чому дорівнює безумовна дисперсія значень нормального марковського поля другого порядку на площині?
8. В чому полягає марковська властивість для випадкових полів на площині?
9. Як виражається умовна щільність розподілу значення поля в точці в залежності від значень поля у сусідніх вузлах?
10. Для чого необхідно нормування значень нормального марковського поля на площині за формулою (4.15)?
11. Як буде виглядати нормальне марковське поле другого порядку на площині, якщо корені характеристичних рівнянь (4.21) будуть дійсними?
12. Як буде виглядати нормальне марковське поле другого порядку на площині, якщо корені характеристичних рівнянь (4.21) будуть мати уявну частину?



a



b



c

Рис. 4.4. Результат суперпозиції гармонічного поля $H^{(2)}(x, y)$ і поверхні

$S(x, y) = \cos(0.5x + 0.2y)$. Параметри коливальних систем:

$\beta_x = \beta_y = 0.6$, $\Omega_x = \Omega_y = 2.0$. *a* – $\sigma = 0.0$; *b* – $\sigma = 0.5$; *c* – $\sigma = 1.0$

Вправи для роботи з комп'ютером

Завдання 1. Для параметрів $\beta_x = \beta_y = 1.0$, $\sigma_x = \sigma_y = 1.0$, $\Omega_x = \Omega_y = 1.0$ згенеруйте реалізацію нормального гармонічного марковського поля у прямокутнику на $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$ за допомогою алгоритму 4.2.

а) Побудуйте на графіку результат суперпозиції поля з поверхнею $\sin(xy)$.

в) Дослідить, як буде змінюватись результат при варіації параметрів β_x, β_y та Ω_x, Ω_y . Розгляньте випадки: 1) $\beta_x < \Omega_x, \beta_y < \Omega_y$; 2) $\beta_x > \Omega_x, \beta_y > \Omega_y$; 3) $\beta_x < \Omega_x, \beta_y > \Omega_y$.

Завдання 2. Для параметрів $\beta_x = \beta_y = 1.0$, $\sigma_x = \sigma_y = 1.0$, $\Omega_x = \Omega_y = 1.0$, $h_{0,0} = 1$ згенеруйте 1000 реалізацій нормального марковського поля у прямокутнику на $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 10$ за допомогою алгоритму 4.2.

а) Розрахуйте вибіркові середні та СКВ процесу, який реалізується вздовж лінії $y = x$ шляхом усереднення за реалізаціями.

б) Чи узгоджується випадковий процес вздовж лінії $y = x$ із властивостями процесу Орнштейна-Уленбека? Запропонуйте статистичні тести, за допомогою яких можна було б перевірити гіпотезу про наявність такої узгодженості.

Завдання 3. Для параметрів $\beta_x = \beta_y = 1$, $\sigma_x = \sigma_y = 1$, $\Omega_x = \Omega_y = 1$, $\Delta_x = 0.1$, $\Delta_y = 0.1$, $h_{0,0} \sim N(0,1)$ згенеруйте 1000 реалізацій нормального марковського поля у прямокутнику на $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 10$ за допомогою алгоритму 4.2. Побудуйте оцінку коваріаційної функції $\hat{K}_{xy}(x, y | 0, 0) = \langle H(x, y)H(0, 0) \rangle$ шляхом усереднення за реалізаціями та відкладіть її на графіку. Порівняйте результати з формулою (4.3) і зробіть висновки про узгодженість імітаційного експерименту з теоретичною формою коваріаційної функції.

Завдання 4. Виконайте завдання 3 для наступних значень параметрів коливального контуру:

а) $\Omega_x = \Omega_y = 2$;

б) $\Omega_x = 1$; $\Omega_y = 2$;

в) $\Omega_x = 4$; $\Omega_y = 1$.

Решту параметрів взяти такими ж, як у попередньому завданні.

5. ГЕНЕРАЦІЯ НОРМАЛЬНИХ МАРКОВСЬКИХ ПОЛІВ НА ВИКРИВЛЕНИХ ПОВЕРХНЯХ

5.1 Генерація нормального марковського поля на циліндричній поверхні

Нижче описано алгоритм побудови випадкового об'єкта – нормального марковського поля, що реалізується на поверхні ідеального циліндра. Перетинами такого поля вздовж утворювальної (паралельно осі z) будуть звичайні марковські процеси Орнштейна-Уленбека. Перетинами поля перпендикулярно осі будуть також марковські процеси, значення яких періодично повторюються («броунівський міст») із зростанням азимуту. У вузлах буде синтезовано стаціонарне і самоузгоджене марковське поле, при цьому із збільшенням азимутальної сторони поле буде періодично повторено. Побудову алгоритму генерації марковського поля буде засновано на ієрархічному принципі. На нижньому рівні ієрархії буде використаний стандартний генератор нормального білого шуму з дисперсією $\sigma_U^2 = 1$. На його основі буде побудований процес Орнштейна-Уленбека уздовж утворювальної та броунівський міст за азимуту.

Нехай Δ_z – крок вздовж осі z на поверхні ідеального циліндра радіуса R , а Δ_ϕ – азимутальний крок. Позначимо через N кількість вузлів по ϕ , обрану так, що $N\Delta_\phi = 2\pi$, а M – число вузлів уздовж осі z . Позначимо через N поле, синтезоване у вузлах $1 \leq n \leq N$ та $1 \leq m \leq M$. Якщо позначити через ν_ϕ , ϕ_z декременти загасання нормального марковського поля по азимуту та по довжній осі відповідно, то його безумовні корелятори в сусідніх вузлах дорівнюватимуть:

$$p = \exp(-\nu_z \Delta_z); q = \exp(-\nu_\phi R \Delta_\phi). \quad (5.1)$$

Розглянемо спочатку переріз поля при $z = 0$. Спільна щільність розподілу ймовірностей випадкових значень $\{h_{n,m}\}$ при $1 \leq n \leq N$, обумовлена щільністю білого шуму в тих же точках, матиме наступний вигляд:

$$f_H(\{h_{n,0}\}) = \left[2\pi\sigma_U^2(1-q^2) \right]^{-N/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_U^2(1-q^2)} \left[(h_{1,0} - qh_{0,0})^2 + (h_{2,0} - qh_{1,0})^2 + \dots + (h_{N,0} - qh_{N-1,0})^2 \right] \right\}. \quad (5.2)$$

При цьому справедливе таке нумераційне правило періодичності, що $h_{N,0} = h_{0,0}$ і т.д. Нехай $u_{n,0}$ – генератор білого шуму у вузлах з нульовим середнім і

$\langle u_{n,0}^2 \rangle = \sigma_U^2$, $n=1,2,\dots,N$. Тоді з виду квадратичної форми в (5.2) випливає система зв'язків

$$\begin{aligned} h_{1,0} &= qh_{N,0} + \alpha u_{1,0}; \\ h_{2,0} &= qh_{1,0} + \alpha u_{2,0}; \\ h_{3,0} &= qh_{2,0} + \alpha u_{3,0}; \\ &\dots \\ h_{N-1,0} &= qh_{N-2,0} + \alpha u_{N,0} \end{aligned} \quad (5.3)$$

з постійною α , яку виберемо з умови $\alpha^2 = (1-q^2) (1-q^{2N})^{-1}$.

На підставі (5.3) виразимо явно значення $\{h\}$ через стандартний генератор білого шуму $\{u\}$ у наступний спосіб:

$$\begin{aligned} h_{1,0} &= \alpha (u_{1,0} + qu_{2,0} + q^2 u_{3,0} + \dots + q^{N-1} u_{N,0}); \\ h_{2,0} &= \alpha (q^{N-1} u_{1,0} + u_{2,0} + qu_{3,0} + \dots + q^{N-2} u_{N,0}); \\ h_{3,0} &= \alpha (q^{N-2} u_{1,0} + q^{N-1} u_{2,0} + u_{3,0} + \dots + q^{N-3} u_{N,0}); \\ &\dots \\ h_{N,0} &= \alpha (qu_{1,0} + q^2 u_{2,0} + q^3 u_{3,0} + \dots + u_{N,0}). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Таким чином, за допомогою (5.4) збудовано «нульовий» броунівський міст. При обраному значенні α з (5.2) і (5.4) для безумовних середніх випливає

$$\langle h_{n,0} h_{n+k,0} \rangle = q^k \sigma_H^2; \quad \langle h_{n,0}^2 \rangle = \sigma_H^2 = \text{const} \quad (5.5)$$

для всіх $k=1,\dots,N$.

З (5.5) випливають властивості однорідності та стаціонарності значень поля у вузлах броунівського мосту в нульовому перерізі.

Розглянемо тепер перетин при $z = \Delta_z$, тобто $m=1$. При фіксованих значеннях у нульовому перерізі $\{h_{n,0}\}$ щільність сумісного розподілу ймовірностей значень $\{h_{n,1}\}$ матиме наступний вигляд:

$$f_H(\{h_{n,1}\}) = \left[2\pi\sigma_U^2 (1-q^2) \right]^{-N/2} \times \exp \left\{ -\frac{A}{2\sigma_U^2 (1-q^2)} \right\}, \quad (5.6)$$

для $1 \leq n \leq N$, де

$$A = (h_{1,1} - qh_{0,1} - ph_{1,0} + pqh_{1,1})^2 + (h_{2,1} - qh_{1,1} - ph_{2,0} + pqh_{1,0})^2 + \dots \\ + (h_{N,1} - qh_{N-1,1} - ph_{N,0} + pqh_{N-1,1})^2.$$

При цьому діє циклічне правило нумерації, так що $h_{N,1} = h_{0,1}$. (5.6) призводить до наступної системи зв'язків для броунівського мосту в першому перерізі:

$$\begin{aligned} h_{1,1} &= ph_{1,0} + qh_{0,1} - pqh_{0,0} + \alpha u_{1,1}; \\ h_{2,1} &= ph_{2,0} + qh_{1,1} - pqh_{1,0} + \alpha u_{2,1}; \\ &\dots \\ h_{N,1} &= ph_{N,0} + qh_{N-1,1} - pqh_{N-1,0} + \alpha u_{N,1}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

З (5.7) видно, що система величин $g_{n,1} \equiv h_{n,1} - ph_{n,0}$, де $n = 1, \dots, N$, підпорядковується тим самим співвідношенням, що і (5.3). Тому два кроки обчислень

$$\begin{aligned} g_{1,1} &= \alpha(u_{1,1} + qu_{2,1} + q^2u_{3,1} + \dots + q^{N-1}u_{N,1}); \\ g_{2,1} &= \alpha(q^{N-1}u_{1,1} + u_{2,1} + qu_{3,1} + \dots + q^{N-2}u_{N,1}); \\ g_{3,1} &= \alpha(q^{N-2}u_{1,1} + u_{2,1} + qu_{3,1} + \dots + q^{N-3}u_{N,1}); \\ &\dots \\ g_{N,1} &= \alpha(qu_{1,1} + q^2u_{2,1} + q^3u_{3,1} + \dots + u_{N,1}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

і

$$h_{n,1} = ph_{n,0} + qh_{n,1}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (5.9)$$

дадуть набір вузлів броунівського мосту в першому перерізі.

Якщо тепер у (5.8)–(5.9) скрізь замінити в z -му індексі 0 на $(m-1)$ і 1 на m , то отримаємо алгоритм знаходження набору значень поля u у вузлах броунівського мосту в m -му перерізі. А саме, для довільного перетину заповнення його вузлів здійснюється наступними двома кроками:

$$\begin{aligned} g_{1,m+1} &= \alpha(u_{1,m} + qu_{2,m} + q^2u_{3,m} + \dots + q^{N-1}u_{N,m}); \\ g_{2,m+1} &= \alpha(q^{N-1}u_{1,m} + u_{2,m} + qu_{3,m} + \dots + q^{N-2}u_{N,m}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{3,m+1} &= \alpha \left(q^{N-2} u_{1,m} + u_{2,m} + q u_{3,m} + \dots + q^{N-3} u_{N,m} \right); \\
&\dots \\
g_{N,m+1} &= \alpha \left(q u_{1,m} + q^2 u_{2,m} + q^3 u_{3,m} + \dots + u_{N,m} \right)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

та

$$h_{n,m} = p h_{n,m-1} + q h_{n,m}, \quad n = 1, \dots, N. \tag{5.11}$$

Поєднуючи формулу (5.3) з M раз повтореними формулами (5.10)–(5.11), отримаємо підсумковий алгоритм генерації значень поля у прямокутнику, натягнутому на поверхню ідеального циліндра і утвореному з $(N, M+1)$ вузлів. При обраному значенні α з цих формул і щільностей (5.2), (5.6) для безумовних середніх випливає:

$$\begin{aligned}
\langle h_{n,m} h_{n+k,m+j} \rangle &= q^k p^j \sigma_H^2; \quad k, j = 1, \dots, N; \\
\langle h_{n,m}^2 \rangle &= \sigma_H^2 = \text{const}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Таким чином, у всіх перерізах згенероване поле H є однорідним та стаціонарним. Властивість марковості безпосередньо випливає з виду безумовної (5.2) і перехідної (5.6) щільностей розподілу ймовірностей.

Отримане поле H має вздовж обраних напрямків експоненційні корелятори для значень поля у вибраній парі вузлів.

На рис. 5.1 показано приклад генерації марковського поля на циліндрі. Торцеві ділянки циліндра залишені ідеальними. Параметри розрахунку: радіус $R=1.0$, довжина $L=4.0$, дисперсія породжувального білого шуму $\sigma=0.05$, кількість вузлів по азимуту $N=40$, по утворювальній $M=15$, кроки $\Delta_\phi = 2\pi / N$ та $\Delta_z = L / M$, декременти $\nu_z = 1.0$ та $\nu_\phi = 5.0$. На рис. 5.1а показано ідеальний циліндр у різних ракурсах (ліворуч – вид зверху, посеред – вид з торця, праворуч – вид збоку). На рис. 5.1b показані результати збурення поверхні циліндру нормальним марковським полем. З рисунків можна бачити самоузгоджену поведінку значень поля, еволюцію перерізів – випадкових процесів по осі z та по азимуту ϕ , а також їх зв'язок у сусідніх точках. Аналогічно можна спостерігати обурення поверхні циліндричного отвору в суцільному тілі, вивчати інженерні задачі, пов'язані з використанням поршнів і гайок, моделювати розсіювання електромагнітного випромінювання.

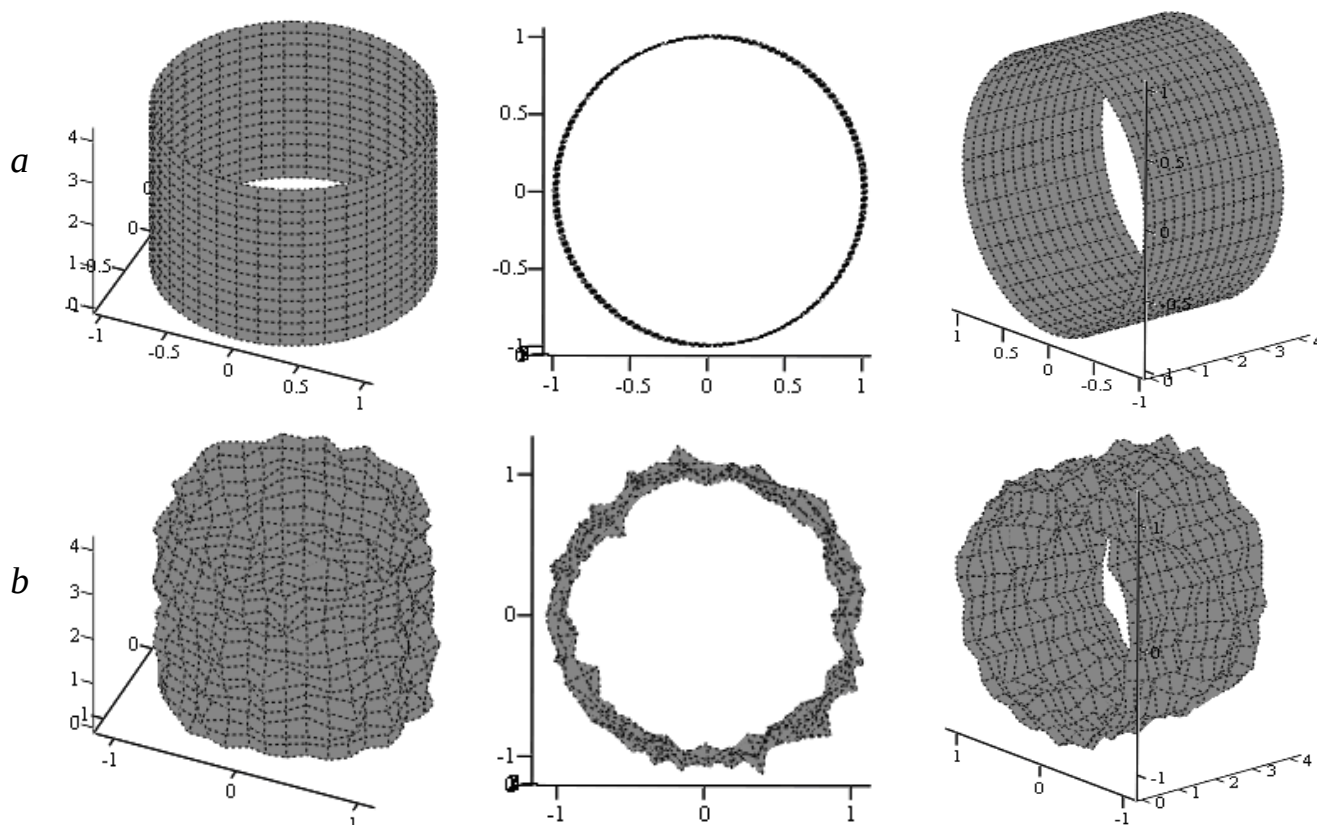


Рис. 5.1. Ідеальний циліндр (а) та циліндр із збуреною поверхнею (b)

5.2 Генерація нормального марковського поля на тороїдальній поверхні

Даний розділ присвячений спробі побудувати алгоритм генерації випадкового об'єкта – нормального марковського поля, що реалізується на поверхні ідеального тора. Поперечними перерізами такого поля, що реалізуються вздовж великого радіусу R , будуть стаціонарні марковські процеси Орнштейна-Уленбека, значення яких періодично повторюються (броунівський міст). Перетинами того ж самого поля, що реалізуються на колі малого радіусу тора r , також будуть марковські процеси, значення яких періодично повторюються (броунівський міст) зі зростанням поперечного азимуту. У вузлах всередині двічі замкнутого прямокутника, натягнутого на тор, буде синтезовано стаціонарне і самоузгоджене марковське поле. При цьому із збільшенням азимутальних сторін «прямокутника» поле буде двічі-періодично повторено.

Побудова алгоритму генерації аналізованого марковського поля буде заснована на ієрархічному принципі. При цьому на нижньому рівні ієрархії буде використано стандартний генератор нормального білого шуму $u(t)$ з інтенсивністю σ_u . На його основі будуть побудовані процеси вздовж утворювальних та броунівських мостів. Послідовне заповнення поверхні тора зчепленими броунівськими мостами і дозволить згенерувати шукане марковське поле.

Алгоритми генерації двовимірних марковських полів пристосовані для застосування у прямокутнику, сторони якого паралельні до декартових осей координат на площині. Проте, в багатьох прикладних задачах машинобудування, навігації, технічної електродинаміки тощо аналізовані об'єкти часто не є плоскими або прямокутними, а їх статистична природа не дозволяє задовільно описати їх у прямокутній декартовій системі.

Побудуємо алгоритм генерації нормального марковського поля на тороїдальній поверхні. Нехай Δ_x, Δ_y – відстань між вузлами вздовж координатних осей Ox та Oy на площині, відповідно, а N та M – кількість таких вузлів. Позначимо через H поле, синтезоване у вузлах $\{h_{n,m}\}$, $0 \leq n \leq N$ та $0 \leq m \leq M$. Далі, нехай ν_x, ν_y – декременти загасання нормального марковського поля по поздовжній та поперечній осях, відповідно. Безумовні корелятори у сусідніх вузлах будуть тоді рівні

$$p = \exp(-\nu_x \Delta_x); q = \exp(-\nu_y \Delta_y). \quad (5.13)$$

Розглянемо спочатку перетин поля при $y = 0$, коли $m = 0$. Щільність сумісного розподілу ймовірностей випадкових значень $\{h_{n,0}\}$ у вузлах з номерами $0 \leq n \leq N$ впливає із щільності білого шуму в тих же точках і має вигляд:

$$f_H(\{h_{n,0}\}) = \frac{1}{[2\pi\sigma_H^2]^{N/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_H^2(1-p^2)} \sum_{n=1}^N (h_{n,0} - ph_{n-1,0})^2 \right\}. \quad (5.14)$$

При цьому справедливо наступне нумераційне правило періодичності: $h_{N,0} = h_{0,0}$, $h_{N+1,0} = h_{1,0}$ і т.д. Нехай $u_{n,0}$ – генератор білого шуму у вузлах з нульовим середнім і $\langle u_{n,0}^2 \rangle = \sigma_U^2$, $n = 1, \dots, N$. Тоді квадратична форма щодо $\{h_{n,0}\}$ в щільності (5.14) породжує систему зв'язків

$$h_{n,0} = ph_{n-1,0} + \alpha u_{n,0}, \quad n = 1, \dots, N \quad (5.15)$$

з постійною

$$\alpha = \sqrt{(1-p^2)(1-p^{2N})^{-1}}, \quad (5.16)$$

яка необхідна для нормування других моментів амплітуди поля.

Набір значень поля $\{h_{n,0}\}$ в нульовому перерізі по осі y ($m = 0$) може бути виражений через стандартний генератор нормального шуму u у наступний спосіб:

$$\begin{aligned}
h_{1,0} &= \alpha(u_{1,0} + pu_{2,0} + p^2u_{3,0} + p^{N-1}u_{N,0}); \\
h_{2,0} &= \alpha(p^{N-1}u_{1,0} + u_{2,0} + pu_{3,0} + p^{N-2}u_{N,0}); \\
h_{3,0} &= \alpha(p^{N-2}u_{1,0} + p^{N-1}u_{2,0} + u_{3,0} + p^{N-3}u_{N,0}); \\
&\dots \\
h_{N,0} &= \alpha(u_{1,0} + p^2u_{2,0} + p^3u_{3,0} + u_{N,0}).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Таким чином, на основі (5.17) побудовано нульовий броунівський міст. При обраному значенні α з (5.14) і (5.17) для безумовних середніх впливає:

$$\langle h_{n,0} h_{n+k,0} \rangle = p^k \sigma_H^2, \quad k = 1, \dots, N; \quad \langle (h_{n,0})^2 \rangle = \sigma_H^2 = \text{const}. \tag{5.18}$$

З формули (5.18) випливають властивості однорідності та стаціонарності значень броунівського мосту в нульовому перерізі.

Розглянемо тепер перетин поля при $y = \Delta_y$, тобто при $m = 1$. При фіксованих значеннях в нульовому перерізі $\{h_{n,0}\}$ щільність сумісного розподілу ймовірностей випадкових значень $\{h_{n,1}\}$ при $0 \leq n \leq N$ має наступний вигляд:

$$f_H(\{h_{n,1}\}) = \frac{1}{[2\pi(1-p^2)(1-q^2)\sigma_H^2]^{N/2}} \exp\left\{-\frac{Q_1}{2\sigma_H^2(1-p^2)(1-q^2)}\right\}, \tag{5.19}$$

де Q_1 – квадратична форма щодо $\{h_{n,1}\}$:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= (h_{1,1} - ph_{0,1} - qh_{1,0} + pqh_{0,0})^2 + (h_{2,1} - ph_{1,1} - qh_{2,0} + pqh_{1,0})^2 + \dots \\
&\quad + (h_{N,1} - ph_{N-1,1} - qh_{N,0} + pqh_{N-1,0})^2.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

При цьому також діє циклічне правило нумерації: $h_{N,1} = h_{0,1}$ і т.д. З виду квадратичної форми (5.20) випливає, що значення амплітуди $\{h_{n,1}\}$ пов'язане із трьома «попередніми» значеннями. Тоді на основі щільності (5.19) можна дійти до наступної системи зв'язків для броунівського мосту в першому перерізі:

$$h_{n,0} = ph_{n-1,1} + qu_{n,0} - pqh_{n,1} + \alpha u_{n,0}, \quad n = 1, \dots, N. \tag{5.21}$$

З (5.21) видно, що система величин $s_{n,1} \equiv h_{n,1} - ph_{n,0}$, де $n = 1, \dots, N$, підпорядковується тим самим співвідношенням, що й у (5.15). Отже, два кроки обчислень:

$$\begin{aligned}
s_{1,1} &= \alpha(u_{1,1} + pu_{2,2} + p^2u_{3,3} + \dots + p^{N-1}u_{N,1}), \\
s_{2,1} &= \alpha(p^{N-1}u_{1,2} + u_{2,1} + pu_{3,2} + \dots + p^{N-2}u_{N,2}), \\
s_{3,1} &= \alpha(p^{N-2}u_{1,3} + p^{N-1}u_{2,3} + u_{3,2} + \dots + p^{N-3}u_{N,3}), \\
&\dots \\
s_{N,1} &= \alpha(u_{1,N} + p^2u_{2,N} + p^3u_{3,N} + \dots + u_{N,N});
\end{aligned} \tag{5.22}$$

та

$$h_{n,1} = ph_{n,0} + s_{n,1}, \quad n = 1, \dots, N \tag{5.23}$$

дадуть набір значень броунівського мосту в першому перерізі.

Розглянемо перетин за номером m . Для нього щільність амплітуди поля у вузлах (n, m) є наступною:

$$f_H(\{h_{n,m}\}) = \frac{1}{[2\pi(1-p^2)(1-q^2)\sigma_H^2]^{N/2}} \exp\left\{-\frac{Q_m}{2\sigma_H^2(1-p^2)(1-q^2)}\right\}, \tag{5.24}$$

де Q_m – квадратична форма щодо $\{h_{n,m}\}$:

$$\begin{aligned}
Q_m &= (h_{1,m} - ph_{0,m} - qh_{1,m-1} + pqh_{0,m-1})^2 + (h_{2,m} - ph_{1,m} - qh_{2,m-1} + pqh_{1,m-1})^2 + \dots \\
&\quad + (h_{N,m} - ph_{N-1,m} - qh_{N,m-1} + pqh_{N-1,m-1})^2.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Тепер якщо в (5.22) і (5.23) скрізь замінити в y -му індексі 0 на $m-1$ та 1 на m , то отримаємо алгоритм знаходження набору значень броунівського мосту в m -му перерізі. А саме, для довільного m -го перерізу заповнення його вузлів здійснюється наступними двома кроками:

$$\begin{aligned}
s_{1,m} &= \alpha(u_{1,m} + pu_{2,m} + p^2u_{3,m} + \dots + p^{N-1}u_{N,m}), \\
s_{2,m} &= \alpha(p^{N-1}u_{1,m} + u_{2,m} + pu_{3,m} + \dots + p^{N-2}u_{N,m}), \\
s_{3,m} &= \alpha(p^{N-2}u_{1,m} + p^{N-1}u_{2,m} + u_{3,m} + \dots + p^{N-3}u_{N,m}), \\
&\dots
\end{aligned} \tag{5.26}$$

$$s_{N,m} = \alpha(pu_{1,m} + p^2u_{2,m} + p^3u_{3,m} + \dots + u_{N,m});$$

$$h_{n,m} = ph_{n,m-1} + s_{n,m}, \quad 1 \leq n \leq N. \tag{5.27}$$

Поєднуючи формулу (5.17) і M раз повторені формули (5.24), (5.26) і (5.27), отримаємо підсумковий алгоритм генерації значень поля у прямокутнику, натягнутому на поверхню ідеального циліндру і утвореному з $N \times (M + 1)$ вузлів з урахуванням їх періодичності вздовж осі $0x$. При обраному значенні α з цих формул, щільностей (5.14), (5.19) та нумераційного правила періодичності для безумовних середніх впливає наступна формула:

$$\langle h_{n,m} h_{n+k,m+j} \rangle = p^k q^j \sigma_H^2, \quad k = 1, \dots, N; \quad \langle (h_{n,m})^2 \rangle = \sigma_H^2 = \text{const}. \quad (5.28)$$

Таким чином, у всіх перерізах згенероване на циліндрі поле H характеризується властивостями однорідності та стаціонарності. Марковська властивість безпосередньо впливає із форми безумовної (5.14) і перехідної (5.19) щільностей розподілу ймовірностей. Отримане на циліндрі поле H має властивості нормальності і марковості в тому сенсі, що воно має вздовж обраних напрямків експоненційні корелятори (5.28) для значень поля у обраній парі вузлів.

Тепер з метою побудови стохастичного поля на поверхні тора здійснимо замикання побудованого циліндричного поля вздовж осі $0y$. Зауважимо, що якщо у виразах для замикання вздовж осі $0x$ скрізь виконати заміни за правилом $N \rightarrow M$, $p \rightarrow q$, то буде отримано замикання вздовж осі $0y$. А саме, для довільного n -го перерізу заповнення його вузлів здійснюється наступними двома кроками:

$$\begin{aligned} t_{n+1,1} &= \beta (u_{n,1} + qu_{n+2} + q^2 u_{n,3} + \dots + q^{N-1} u_{n,M}), \\ t_{n+1,2} &= \beta (q^{N-1} u_{n,1} + u_{n+2} + qu_{n,3} + \dots + q^{N-2} u_{n,M}), \\ t_{n+1,3} &= \beta (q^{N-2} u_{n,1} + q^{N-1} u_{n+2} + u_{n,3} + \dots + q^{N-3} u_{n,M}), \\ &\dots \\ t_{n+1,M} &= \beta (qu_{n,1} + q^2 u_{n+2} + q^3 u_{n,3} + \dots + q^{N-3} u_{n,M}); \end{aligned} \quad (5.29)$$

та

$$h_{n,m} = qh_{n-1,m} + tu_{n,m}, \quad 1 \leq m \leq M. \quad (5.30)$$

При цьому повинна бути використана нова постійна нормування β , що необхідна для збереження других моментів амплітуди дійснозначного поля:

$$\beta = \sqrt{(1 - q^2)(1 - q^{2M})^{-1}}. \quad (5.31)$$

В результаті зазначеного замикання буде побудовано стохастичне поле на поверхні циліндра, орієнтованого вздовж осі $0x$.

Спільна дія цих двох замикань призведе до побудови стохастичного поля на поверхні ідеального тора. При цьому також повинна бути використана нова постійна нормування γ , необхідна для збереження других моментів амплітуди поля:

$$\gamma = \alpha\beta = \sqrt{(1-p^2)(1-p^{2N})^{-1}(1-q^2)(1-q^{2M})^{-1}}. \quad (5.32)$$

Розглянемо далі питання, пов'язані з геометричною інтерпретацією результатів, отриманих в результаті застосування побудованого алгоритму генерації нормального двовимірного марковського поля на тороїдальній поверхні.

Ідеальний тор характеризується двома радіусами – азимутальним R і радіусом r кругового перерізу площиною, що проходить через центр тора. Відповідно, при заданих радіусах R та r рівняння, що задають ідеальний тор, можна параметризувати за допомогою двох азимутальних кутів: ϕ – кут в площині, що проходить перпендикулярно осі xOy , і ψ – фазовий кут кругового перерізу. Задавши сітку із $N \times M$ вузлів, ідеальний тор можна визначити формулами:

$$\begin{aligned} X_{n,m} &= (R + r \sin \psi_m) \cos \phi_m, \\ Y_{n,m} &= (R + r \sin \psi_m) \sin \phi_m, \\ Z_{n,m} &= r \cos \phi_m. \end{aligned} \quad (5.33)$$

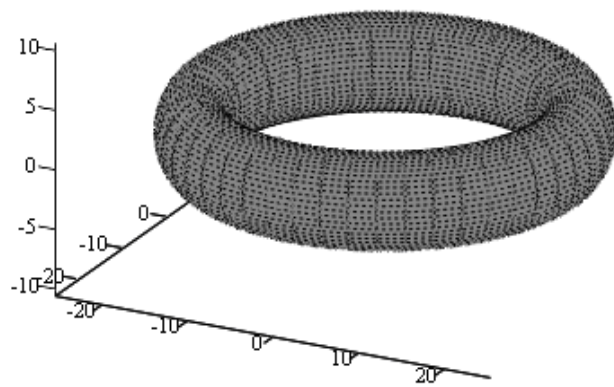
Суперпозицію цієї поверхні з випадковим полем H , заданим значеннями $\{h_{n,m}\}$ у вузлах обраної сітки можна здійснити за допомогою виразів:

$$\begin{aligned} X_{n,m} &= [R + (r + h_{n,m}) \sin \psi_m] \cos \phi_m, \\ Y_{n,m} &= [R + (r + h_{n,m}) \sin \psi_m] \sin \phi_m, \\ Z_{n,m} &= [(r + h_{n,m}) \sin \psi_m] \cos \phi_m. \end{aligned} \quad (5.34)$$

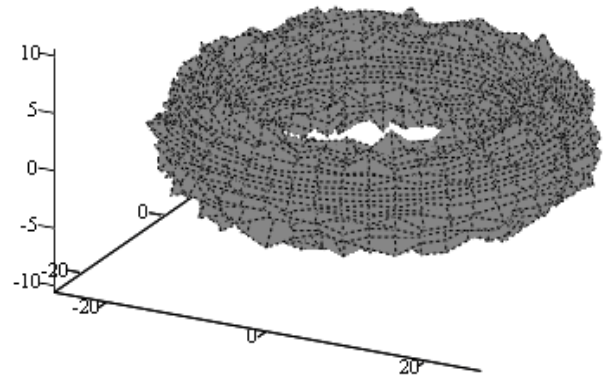
На рис. 5.2a зображено ідеальний тор із параметрами: великий радіус $R=6$, малий радіус $r=3$, кількість вузлів просторової сітки: $N=50$, $M=50$.

На рис. 5.2b показаний приклад генерації марковського поля на торі з наступними параметрами: корелятори по осях Ox та Oy $p=q=0.5$; інтенсивність $\sigma_U=1.0$.

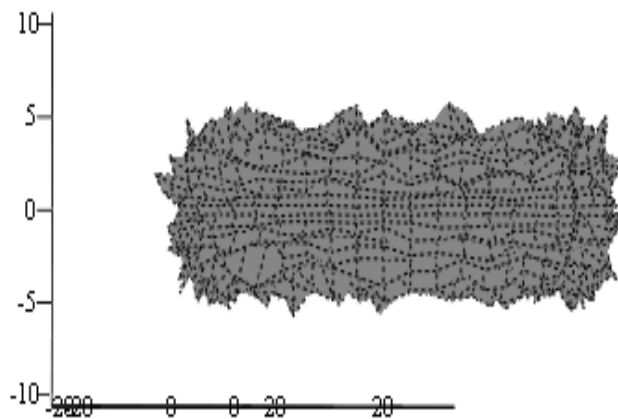
На рисунках 5.2c і 5.2d показано, як виглядає той же самий спотворений стохастичним полем тор збоку і зверху. На рисунках можна побачити самоузгоджену поведінку значень поля, еволюцію випадкових процесів у перерізах, а також зв'язок між ними у сусідніх вузлах.



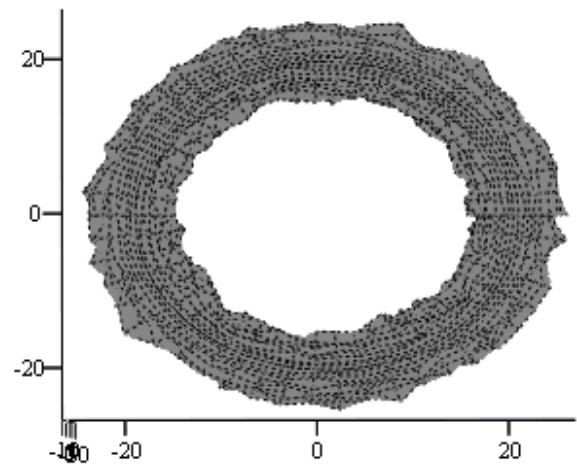
a



b



c



d

Рис. 5.2. Приклад побудованого марковського поля на торі: *a* – ідеальний тор; *b–d* – побудоване марковське поле: *b* – вид під кутом; *c* – вид збоку, *d* – вид зверху

Стохастичне поле H , синтезоване у вузлах сітки $\{h_{n,m}\}$, є стаціонарним, оскільки для нього, з урахуванням нормування (5.29), справедливе співвідношення (5.27), що гарантує інваріантність середніх щодо зрушень уздовж осей.

Таким чином, ієрархічний підхід дає можливість генерувати марковські поля на поверхні ідеального тора. По суті, розглянутий метод відрізняється від методу генерації полів на площині дією подвійного правила періодичності, а в ролі рівноважного стану, необхідного для дисипативних випадкових об'єктів, виступають броунівські мости. Подібні об'єкти можуть бути корисними при вирішенні широкого класу задач, де суттєвим є врахування відхилення поверхні від її ідеального значення. Питання можливості застосування розглянутого підходу для просторових тіл більш складної структури, наприклад, сферичних, залишається відкритим.

Контрольні запитання

1. Наведіть приклади задач, для вирішення яких може знадобиться генерація нормального марковського поля на викривлених поверхнях.
2. Як визначаються корелятори марковського поля у вузлах сітки циліндра?
3. Для чого використовується броунівський міст в алгоритмі генерації нормального марковського поля на циліндрі?
4. Як забезпечується система зв'язків між вузлами сітки вздовж утворювальної та по азимуту при генерації нормального марковського поля на циліндрі?
5. Чому дорівнює коваріаційна функція для нормального марковського поля на циліндрі?
6. З чого впливає марковська властивість випадкового поля на циліндрі, побудованого за допомогою формул (5.3), (5.10) і (5.11)?
7. Як виглядає правило періодичності при побудові вузлів сітки на торі?
8. Як забезпечується система зв'язків між вузлами сітки вздовж координатних осей при генерації нормального марковського поля на торі?
9. Для чого необхідно і як здійснюється нормування нормального марковського поля на торі?
10. Як побудоване марковське поле проектується на тороїдальну поверхню?

Вправи для роботи з комп'ютером

Завдання 1. Розробіть і програмно реалізуйте алгоритм для генерації нормального марковського поля на циліндрі радіусом $R=0.5$ на базі формул (5.3), (5.10) і (5.11). Наведіть декілька прикладів суперпозиції циліндричної поверхні із випадковим полем з параметрами: дисперсія білого шуму $\sigma_U=2.0$, декременти $\nu_z=1.0$ та $\nu_\phi=5.0$, кількість вузлів по азимуту $N=50$, по утворювальній $M=20$.

Завдання 2. Розробіть і програмно реалізуйте алгоритм для генерації нормального марковського процесу на еліпсі, який утворюється перетином марковського поля на циліндрі довільною площиною $a_0 + a_1x + a_2y + a_3z = 0$. Для генерації нормального марковського поля на циліндрі використовувати ті ж самі параметри, що й у попередньому завданні.

Завдання 3. Розробіть і програмно реалізуйте алгоритм для генерації нормального марковського поля на торі на базі формул (5.17), (5.24), (5.26) і (5.27). Розробіть процедуру проектування побудованого поля на тороїдальну поверхню за допомогою формул (5.34). Наведіть декілька прикладів суперпозиції тороїдальної поверхні із побудованим випадковим полем.

6. НОРМАЛЬНЕ МАРКОВСЬКЕ ПОЛЕ ПЕРШОГО ПОРЯДКА У ПРОСТОРИ

6.1 Рівняння руху для тривимірних марковських полів

Розглянемо паралелепіпед у декартовій системі координат, і дослідимо нормальні марковські флуктуації в ньому. В основу розгляду марковських нормальних полів у просторі покладемо ієрархічний принцип. А саме, вже побудовані поля на осі та на площині використаємо як граничні умови при синтезі поля у просторі. Вивчення нормального марковського поля (НМ-поля) у просторі, як і вище, почнемо з динамічного рівняння руху. Для амплітуди $h(x, y, z)$ НМ-поля $H(x, y, z)$ із парціальними декрементами ν , μ та λ динамічне рівняння має наступний вигляд:

$$\left(\frac{d}{dx} + \nu\right)\left(\frac{d}{dy} + \mu\right)\left(\frac{d}{dz} + \lambda\right)h(x, y, z) = u_{xyz}(x, y, z) \quad (6.1)$$

із початковою умовою у вершинній точці $(0,0,0)$

$$h(0,0,0) = u_0, \quad (6.2)$$

крайовими умовами на ребрах $0x$, $0y$ та $0z$ виду

$$\left(\frac{d}{dx} + \nu\right)h(x, y, z) = u_x(x); \left(\frac{d}{dy} + \mu\right)h(x, y, z) = u_y(y); \left(\frac{d}{dz} + \lambda\right)h(x, y, z) = u_z(z), \quad (6.3)$$

а також крайовими умовами на гранях $x0y$, $x0z$ та $y0z$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} + \nu\right)\left(\frac{d}{dy} + \mu\right)h(x, y, z) &= u_{xy}(x, y); \\ \left(\frac{d}{dx} + \nu\right)\left(\frac{d}{dz} + \lambda\right)h(x, y, z) &= u_{xz}(x, z); \\ \left(\frac{d}{dy} + \mu\right)\left(\frac{d}{dz} + \lambda\right)h(x, y, z) &= u_{yz}(y, z). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Початковою умовою до рівняння (6.2) є випадкова величина $u_0 \sim N(0, \sigma_{u_0}^2)$.

В рівнянні (6.1) $u_{xyz}(x, y, z)$ позначає білий шум у просторі, що має нульове математичне сподівання та інтенсивність σ_{u_0} . В рівняннях (6.3) $u_x(x)$, $u_y(y)$, $u_z(z)$ – білі шуми, які реалізуються на ребрах $0x$, $0y$ та $0z$, відповідно. Вони мають нульові математичні сподівання та інтенсивності σ_{u_x} , σ_{u_y} та σ_{u_z} . Реалізація шуму $u_x(x)$ здійснюється на ребрі $0x$, отже, перша крайова умова в (6.3) виконується для будь-яких значень координат z та y . Аналогічно, друга крайова умова в

(6.3) справедлива для будь-яких значень координат x та z , а третя – для будь-яких значень координат x та y . В рівняннях (6.4) $u_{xy}(x, y)$, $u_{xz}(x, z)$, $u_{yz}(y, z)$ позначають білі шуми, які реалізуються на гранях $x0y$, $x0z$ та $y0z$, відповідно. Ці шуми мають нульові математичні сподівання та інтенсивності σ_{u_x} , σ_{u_y} , σ_{u_z} . Реалізація шуму $u_{xy}(x, y)$ здійснюється на грані $x0y$, отже, перша крайова умова в (6.4) справедлива для будь-яких значень координати z . Аналогічно, друга та третя крайові умови є справедливими для будь-яких значень координат y та x , відповідно.

Структура аналізованого білого шуму є такою, що на гранях білі шуми реалізуються незалежно:

$$u_{xyz}(x, y, z) = u_{xy}(x, y)u_{xz}(x, z)u_{yz}(y, z). \quad (6.5)$$

Ця властивість виявиться важливою у подальшому розгляді. Незалежними є також шуми на ребрах-осях:

$$u_{xy}(x, y) = u_x(x, y)u_y(y); \quad u_{xz}(x, z) = u_x(x)u_z(z); \quad u_{yz}(y, z) = u_y(y)u_z(z). \quad (6.6)$$

Формальне рішення рівняння (6.1) із умовами (6.2)–(6.4) має вигляд:

$$h(x, y, z) = h(0, 0, 0) \exp(-\nu x - \mu y - \lambda z) + I_x + I_y + I_z + I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} + I_{xyz}, \quad (6.7)$$

де:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^x \exp(-\nu x + \nu x') u_x(x') dx'; \\ I_y &= \int_0^y \exp(-\mu y + \mu y') u_y(y') dy'; \\ I_z &= \int_0^z \exp(-\lambda z + \lambda z') u_z(z') dz'; \\ I_{xy} &= \int_0^x dx' \exp(-\nu x + \nu x') \int_0^y dy' \exp(-\mu y + \mu y') u_{xy}(x', y'); \\ I_{xz} &= \int_0^x dx' \exp(-\nu x + \nu x') \int_0^z dz' \exp(-\lambda z + \lambda z') u_{xz}(x', z'); \\ I_{yz} &= \int_0^y dy' \exp(-\mu y + \mu y') \int_0^z dz' \exp(-\lambda z + \lambda z') u_{yz}(y', z'); \\ I_{xyz} &= \int_0^x dx' \exp(-\nu x + \nu x') \int_0^y dy' \exp(-\mu y + \mu y') \int_0^z dz' \exp(-\lambda z + \lambda z') u_{xyz}(x', y', z'). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Розглянемо статистичні властивості доданків в рівненні (6.8). Як видно із цього рівняння, рішення для поля $h(x, y, z)$ лінійно залежить від породжувального бі-

лого шуму $u(x, y, z)$. Тому амплітуда породженого поля $h(x, y, z)$ буде підпорядковуватись нормальному закону. При цьому безумовне середнє поля $h(x, y, z)$ буде дорівнювати нулю, а його дисперсія σ_h^2 буде пов'язана з дисперсією $\sigma_{u_0}^2$.

Перша складова рівняння (6.7) пов'язана із вершинною умовою (6.2).

Наступні доданки I_x , I_y та I_z забезпечують виконання крайових умов на ребрах паралелепіпеду. Наприклад, для I_x ця умова в інтегральній формі має вигляд:

$$I_x = \int_0^x \exp(-\nu x + \nu x') u_x(x') dx' = h(x, y, z) - h(0, y, z) \exp(-\nu x). \quad (6.9)$$

Цей доданок рішення (6.8) задовольняє співвідношенню, справедливому для ОУ-процесу, що реалізується вздовж осі $0x$. При цьому, як було зазначено, це співвідношення виконується для будь-яких координат y та z .

На основі циклічної перестановки координат x , y та z приходимо до аналогічних висновків стосовно властивостей I_y та I_z :

$$I_y = \int_0^y \exp(-\mu y + \mu y') u_y(y') dy' = h(x, y, z) - h(x, 0, z) \exp(-\mu y); \quad (6.10)$$

$$I_z = \int_0^z \exp(-\lambda z + \lambda z') u_z(z') dz' = h(x, y, z) - h(x, y, 0) \exp(-\lambda z). \quad (6.11)$$

Аналіз властивостей доданків I_x , I_y та I_z було проведено у розділі 2.

Наступні три доданки I_{xy} , I_{xz} та I_{yz} забезпечують виконання крайових умов на гранях паралелепіпеду. Наприклад, для I_{xy} ця умова в інтегральній формі для будь-якого z має вигляд:

$$h(x, y, z) - h(0, 0, 0) \exp(-\nu x - \mu y) = \int_0^x \exp(-\nu x + \nu x') u_x(x') dx' + \int_0^y \exp(-\mu y + \mu y') u_y(y') dy' + \int_0^x dx' \exp(-\nu x + \nu x') \int_0^y dy' \exp(-\mu y + \mu y') u_{xy}(x', y'). \quad (6.12)$$

Аналогічно, для I_{xz} при будь-якому y справедливо:

$$h(x, y, z) - h(0, 0, 0) \exp(-\nu x - \lambda z) = \int_0^x \exp(-\nu x + \nu x') u_x(x') dx' + \int_0^z \exp(-\lambda z + \lambda z') u_z(z') dz' + \int_0^x dx' \exp(-\nu x + \nu x') \int_0^z dz' \exp(-\lambda z + \lambda z') u_{xz}(x', z'). \quad (6.13)$$

Нарешті, для I_{YZ} при будь-якому x справедливо:

$$h(x, y, z) - h(0, 0, 0) \exp(-\mu y - \lambda z) = \int_0^y \exp(-\mu y + \mu y') u_Y(y') dy' + \int_0^z \exp(-\lambda z + \lambda z') u_Z(z') dz' + \int_0^y dy' \exp(-\mu y + \mu y') \int_0^z dz' \exp(-\lambda z + \lambda z') u_{XZ}(x', z'). \quad (6.14)$$

Аналіз властивостей доданків вигляду I_{XY} , I_{XZ} та I_{YZ} було проведено в розділах 3 та 4.

Тепер, для зручності запису, припустимо, що 3D-поле покрите сіткою і перейдемо від безперервних координат x , y та z до наборів $\{x_n\}$, $\{y_m\}$ та $\{z_k\}$, де індекси n , m та k відраховуються від нуля. Перейдемо в рішенні (6.8) до індексного запису. З цією метою будемо вважати точку з координатами $(0, 0, 0)$ точкою з індексами $(n-1, m-1, k-1)$, а точку (x, y, z) – точкою з індексами (n, m, k) .

Позначимо парціальні корелятори p , q та r через

$$p = \exp(-\nu(x_n - x_{n-1})); q = \exp(-\mu(y_m - y_{m-1})); r = \exp(-\lambda(z_k - z_{k-1})) \quad (6.15)$$

(тут і нижче індекси у парціальних кореляторів p , q та r опущені для стислості).

Розглянемо дві групи точок з 4 точок кожна: $(x_{n-1}, y_{m-1}, z_{k-1})$, (x_n, y_{m-1}, z_{k-1}) , (x_{n-1}, y_m, z_{k-1}) , (x_{n-1}, y_{m-1}, z_k) та (x_{n-1}, y_m, z_k) , (x_n, y_{m-1}, z_k) , (x_{n-1}, y_{m-1}, z_k) , (x_n, y_m, z_k) . У «верхньому» прямокутнику внесок до ймовірності потрапити у фінішну точку (x_n, y_m, z_k) дають три точки (x_{n-1}, y_m, z_k) , (x_n, y_{m-1}, z_k) , (x_{n-1}, y_{m-1}, z_k) з ймовірностями p , q та pq , відповідно. При цьому умовна ймовірність потрапити з точок (x_{n-1}, y_m, z_k) , (x_n, y_{m-1}, z_k) , (x_{n-1}, y_{m-1}, z_k) до точки (x_n, y_m, z_k) складає:

$$\Pr(H_{n,m,k} | h_{n-1,m,k}, h_{n,m-1,k}, h_{n-1,m-1,k}) = p + q - pq. \quad (6.16)$$

В останньому виразі знак « $\leftarrow$ » відповідає компенсації умовної ймовірності потрапляння з точки (x_{n-1}, y_{m-1}, z_k) до точки (x_n, y_m, z_k) .

В «нижньому» прямокутнику умовна ймовірність потрапляння в точку (x_n, y_m, z_{k-1}) з точок $(x_{n-1}, y_{m-1}, z_{k-1})$, (x_n, y_{m-1}, z_{k-1}) , (x_{n-1}, y_m, z_{k-1}) також складає із врахуванням зазначеної компенсації

$$\Pr(H_{n,m,k-1} | h_{n-1,m-1,k-1}, h_{n,m-1,k-1}, h_{n-1,m,k-1}) = p + q - pq. \quad (6.17)$$

Тоді умовна ймовірність потрапити до точки (x_n, y_m, z_{k-1}) вже з 4 точок «нижнього» прямокутника складає:

$$\Pr(H_{n,m,k-1} | h_{n-1,m-1,k-1}, h_{n,m-1,k-1}, h_{n-1,m,k-1}, h_{n-1,m-1,k}) = r - r(p + q - pq). \quad (6.18)$$

Отже, умовна ймовірність потрапити у фінішну точку (x_n, y_m, z_k) з семи інших вершин паралелепіпеду з урахуванням подвійної компенсації складає:

$$\Pr(H_{n,m,k} | h_{n-1,m,k}, h_{n,m-1,k}, h_{n-1,m-1,k}, h_{n-1,m-1,k-1}, h_{n,m-1,k-1}, h_{n-1,m,k-1}, h_{n-1,m-1,k-1}) = p + q + r - pq - pr - qr + pqr. \quad (6.19)$$

Для знаходження дисперсії в умовному розподілі випадкової величини $h_{n,m,k}$ введемо умовну характеристичну функцію:

$$G(\xi) = \mathbf{M}[\exp(i\xi H_{n,m,k} | S)], \quad (6.20)$$

де $S = ph_{n-1,m,k} + qh_{n,m-1,k} + rh_{n,m,k-1} - pqh_{n-1,m-1,k} - qrh_{n,m-1,k-1} - prh_{n-1,m,k-1} + pqrh_{n-1,m-1,k-1}$.

Тоді

$$\mathbf{M}[(H_{n,m,k})^2] = -\frac{d^2}{d\xi^2} G(\xi) \Big|_{\xi=0}. \quad (6.21)$$

Обчислення $G(\xi)$ зручно почати з точок, прилеглих до фінішної точки $h_{n,m,k}$, тобто з точок $h_{n-1,m,k}$, $h_{n,m-1,k}$ та $h_{n,m,k-1}$. Якщо розглянути грані, де вони розташовані, і скористатись двовимірними перехідними щільностями розподілу ймовірностей, отримаємо:

$$G(\xi) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\xi^2\sigma_H^2[p^2(1-q^2)(1-r^2) + q^2(1-p^2)(1-r^2) + r^2(1-p^2)(1-q^2)]\right\} \times \mathbf{M}[\exp(i\xi(pqH_{n-1,m-1,k} + prH_{n-1,m,k-1} + qrH_{n,m-1,k-1} - 2pqrH_{n-1,m-1,k-1}))]. \quad (6.22)$$

Із властивостей трьох граней паралелепіпеду, що залишаються (на яких розташовані точки $h_{n-1,m-1,k}$, $h_{n-1,m,k-1}$, $h_{n,m-1,k-1}$), знайдемо другий множник в (6.22):

$$\mathbf{M}[\exp(\square)] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\xi^2\sigma_H^2[p^2q^2(1-r^2) + p^2r^2(1-q^2) + q^2r^2(1-p^2)]\right\} \times \mathbf{M}[\exp(i\xi pqrH_{n-1,m-1,k-1})]. \quad (6.23)$$

Приймемо, що $n=1$, $m=1$ і $k=1$. Оскільки на основі (6.2) у вершинній точці $h_{0,0,0}$ виконується умова ініціалізації

$$\mathbf{M}[\exp(i\xi pqrH_{0,0,0})] = \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\sigma_H^2 p^2 q^2 r^2\right), \quad (6.24)$$

то після об'єднання всіх трьох співмножників з (6.23) отримаємо при $n=m=k=1$:

$$G(\xi) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \xi^2 \sigma_H^2 \left[1 - (1 - p^2)(1 - q^2)(1 - r^2) \right] \right\}. \quad (6.25)$$

В силу (6.8) $H_{n,m,k} = S + I_{XYZ}$, тому

$$\mathbf{D}[H_{1,1,1}] = \mathbf{D}[S] + \mathbf{D}[I_{XYZ}]. \quad (6.26)$$

Із (6.24) випливає, що:

$$\mathbf{D}[S] = \left[1 - (1 - p^2)(1 - q^2)(1 - r^2) \right] \sigma_H^2. \quad (6.27)$$

У зв'язку із нормальністю I_{XYZ} щільність розподілу випадкових значень I_{XYZ} має гауссову форму з нульовим математичним сподіванням і дисперсією:

$$\begin{aligned} \sigma_{I_{XYZ}}^2 = & \left\langle \int_{x_0}^{x_1} \exp(-\nu x + \nu x') u_X(x') dx' \int_{x_0}^{x_1} \exp(-\nu x + \nu x'') u_X(x'') dx'' \times \right. \\ & \times \int_{y_0}^{y_1} \exp(-\mu y + \mu y') u_Y(y') dy' \int_{y_0}^{y_1} \exp(-\mu y + \mu y'') u_Y(y'') dy'' \times \\ & \left. \times \int_{z_0}^{z_1} \exp(-\lambda z + \lambda z') u_Z(z') dz' \int_{z_0}^{z_1} \exp(-\lambda z + \lambda z'') u_Z(z'') dz'' \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.28)$$

В результаті розчеплення за x -, y - та z -флуктуаціями, усереднення та інтегрування знайдемо:

$$\sigma_{I_{XYZ}}^2 = \frac{1 - \exp(-2\nu(x_1 - x_0))}{2\nu} \frac{1 - \exp(-2\mu(y_1 - y_0))}{2\mu} \frac{1 - \exp(-2\lambda(z_1 - z_0))}{2\lambda} \sigma_{U_{XYZ}}^2. \quad (6.29)$$

Отже, нормальна випадкова величина I_{XYZ} має дисперсію

$$\sigma_{I_{XYZ}}^2 = \frac{(1 - p^2)(1 - q^2)(1 - r^2)}{8\nu\mu\lambda} \sigma_{U_{XYZ}}^2. \quad (6.30)$$

Оскільки $H_{n,m,k} = S + I_{XYZ}$, то статистичні властивості доданків в цій рівності еквівалентні, звідки:

$$\sigma_H^2 = \left[1 - (1 - p^2)(1 - q^2)(1 - r^2) \right] \sigma_H^2 + \frac{(1 - p^2)(1 - q^2)(1 - r^2)}{8\nu\mu\lambda} \sigma_{U_{XYZ}}^2. \quad (6.31)$$

Для забезпечення стаціонарності приймемо

$$\sigma_H^2 = \frac{1}{8\nu\mu\lambda} \sigma_{U_{XYZ}}^2. \quad (6.32)$$

Це співвідношення можна розглядати як аналог співвідношення Ейнштейна, але для випадку 3D-поля.

Отже, показано, що якщо справедливо $\mathbf{M}\left[\left(H_{0,0,0}\right)^2\right]=\sigma_H^2$, то виконується $\mathbf{M}\left[\left(H_{1,1,1}\right)^2\right]=\sigma_H^2$. Продовжуючи цю рівність за індукцією, для точки 3D-поля із довільним набором індексів отримаємо:

$$\mathbf{M}\left[\left(H_{n,m,k}\right)^2\right]=\sigma_H^2. \quad (6.33)$$

Тепер, так само як і вище, для умовної щільності розподілу ймовірностей $f_H(h_{n,m,k}|S)$ випадкової величини $H_{n,m,k}$ – амплітуди нормального марковського 3D-поля – отримаємо:

$$f_H(h_{n,m,k}|S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)}\sigma_H} \exp\left(-\frac{[h_{n,m}-d_{n,m}]^2}{2\sigma_H^2(1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)}\right), \quad (6.34)$$

де

$$d_{n,m} = ph_{n-1,m,k} + qh_{n,m-1,k} + rh_{n,m,k-1} - pqh_{n-1,m-1,k} - qrh_{n,m-1,k-1} - prh_{n-1,m,k-1} + pqrh_{n-1,m-1,k-1}.$$

Тому на базі (6.24) і (6.34) отримуємо, що безумовна дисперсія амплітуди $h_{n,m,k}$ є постійною для будь-яких значень індексів n, m та k :

$$\mathbf{D}[H_{n,m,k}] = \sigma_H^2. \quad (6.35)$$

Таким чином, побудоване нормальне марковське 3D-поле першого порядку є стаціонарним.

При синтезі нормального марковського 3D-поля $H(x, y, z)$ в точці (x, y, z) будемо спиратися на статистичну вагу (6.34). Ця умовна щільність ймовірності пов'язує значення $h(x, y, z)$ випадкового поля $H(x, y, z)$ у обраній точці (x, y, z) із значеннями у «попередніх» точках $h(x', y, z)$, $h(x, y', z)$, $h(x', y', z)$ та $h(x', y, z')$, $h(x, y', z')$, $h(x', y', z')$. Для нормального марковського 3D-поля цих даних достатньо, щоби описати імовірнісні властивості амплітуди поля $h(x, y, z)$ в точці (x, y, z) . Нормальності 3D-поля відповідає властивість гауссовості перехідної щільності ймовірностей (6.34), яка виражається за допомогою парціальних кореляторів, які тепер мають вигляд $p = \exp(-\nu(x-x'))$, $q = \exp(-\mu(y-y'))$ та $r = \exp(-\lambda(z-z'))$. Нагадаємо, що ν, μ та λ – це декременти загасання по осям $0x$, $0y$ та $0z$, відповідно.

6.2 Алгоритм генерації нормальних тривимірних марковських полів

Алгоритми генерації тривимірних марковських полів орієнтовані для застосування у паралелепіпеді, сторони якого паралельні декартовим осям координат у просторі. Далі розглянуто синтез алгоритму генерації випадкового об'єкта $H(x, y, z)$ – нормального марковського 3D-поля.

Визначальною властивістю аналізованого нормального марковського 3D-поля є його кореляційний функціонал

$$K_{xyz} = K_{xyz}(x, y, z | x', y', z') = \langle H(x, y, z)H(x', y', z') \rangle = pqr\sigma_H^2, \quad (6.36)$$

де $h(x, y, z)$ – реалізація гауссового тривимірного поля $H(x, y, z)$ у паралелепіпеді $\{x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c]\}$, $\sigma_H^2 = \langle H^2(x, y, z) \rangle$ – інтенсивність цього поля, ν , μ та λ – декременти загасання поля по осі абсцис $0x$, осі ординат $0y$ та осі аплікату $0z$, відповідно.

Розташуємо у просторі декартову систему координат із початком у точці $(0,0,0)$. Динаміку значень $h(x, y, z)$ випадкового НМ-поля $H(x, y, z)$ у паралелепіпеді $\{x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c]\}$ з вершиною в точці $(0,0,0)$ можна описати за допомогою рівняння (6.1), яке є узагальненням рівняння Ланжевена для процесу Орнштейна-Уленбека.

На базі рішення (6.8) можна побудувати чисельний алгоритм генерації значень $h(x, y, z)$ НМ-поля $H(x, y, z)$. Цей ієрархічний алгоритм генерації значень у вузлах нормального марковського 3D-поля у паралелепіпеді зручно представити наступними чотирма кроками.

Алгоритм 6.1. Генерація значень нормального марковського 3D-поля у паралелепіпеді

Крок 1. Генерація значення у вершині:

$$g_{0,0,0} = u_{0,0,0}. \quad (6.37)$$

Крок 2. Генерація значень поля вздовж x -, y - та z -меж паралелепіпеду:

$$\begin{aligned} g_{n+1,0,0} &= pg_{n,0,0} + \sqrt{1-p^2} u_{n+1,0,0}, \quad n > 0; \\ g_{0,m+1,0} &= qg_{0,m,0} + \sqrt{1-q^2} u_{0,m+1,0}, \quad m > 0; \\ g_{0,0,k+1} &= rg_{0,0,k} + \sqrt{1-r^2} u_{0,0,k+1}, \quad k > 0. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Крок 3. Послідовне заповнення значень внутрішніх вузлів прямокутників $x0y$, $x0z$ та $y0z$:

$$\begin{aligned}
g_{n+1,m+1,k} &= pg_{n,m+1,k} + qg_{n+1,m,k} - pqg_{n,m,k} + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)} u_{n+1,m+1,k}, \quad n > 0, m > 0; \\
g_{n+1,m,k+1} &= pg_{n,m,k+1} + rg_{n+1,m,k} - prg_{n,m,k} + \sqrt{(1-p^2)(1-r^2)} u_{n+1,m,k+1}, \quad n > 0, k > 0; \\
g_{n,m+1,k+1} &= qg_{n,m,k+1} + rg_{n+1,m+1,k} - qrg_{n,m,k} + \sqrt{(1-q^2)(1-r^2)} u_{n,m+1,k+1}, \quad m > 0, k > 0.
\end{aligned} \tag{6.39}$$

Крок 4. Послідовне заповнення значеннями внутрішніх вузлів xyz -паралелепіпеду ($n > 0, m > 0, k > 0$):

$$\begin{aligned}
g_{n+1,m+1,k+1} &= pg_{n,m+1,k+1} + qg_{n+1,m,k+1} + rg_{n+1,m+1,k} - pqg_{n,m,k+1} - qrg_{n+1,m,k} - \\
&\quad - prg_{n,m+1,k} + pqr g_{n,m,k} + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)} u_{n+1,m+1,k+1}.
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Крок 5. Нормування амплітуди поля ($n \geq 0, m \geq 0, k \geq 0$):

$$h_{n,m,k} = \sigma_H g_{n,m,k}. \tag{6.41}$$

Заповнення вузлів розрахованими значеннями виконується, наприклад, для чергового k -го шару. Його, у свою чергу, заповнюють у вузлах прямокутника так, як це виконувалось для випадку генерації марковського поля у прямокутнику.

В формулах (6.37)–(6.41) використані наступні позначки: $p = \exp(-v\Delta_x)$, $q = \exp(-\mu\Delta_y)$ і $r = \exp(-\lambda\Delta_z)$, де v, μ та λ – парціальні декременти; Δ_x, Δ_y та Δ_z – кроки вузлів по осях x, y та z , відповідно. Інтенсивність σ_H амплітуди породженого поля $H(x, y, z)$ пов'язана з інтенсивністю породжувального поля $u(x, y)$ співвідношенням (6.32).

Відзначимо, що для обраних значень Δ_x, Δ_y и Δ_z (тобто при кількості кроків $N_x = a / \Delta_x$, $N_y = b / \Delta_y$ и $N_z = c / \Delta_z$, які відповідають заданим розмірам паралелепіпеду a, b та c), інтенсивність в чисельному алгоритмі треба перенормувати так, щоби енергія НМ-поля $H(x, y, z)$ у розрахунку на одиницю об'єму співпадала із заданою для будь-якої кількості кроків.

Із (6.37)–(6.41) можна отримати, що для будь-якого значення $h_{n,m,k}$ в будь-якому (n, m, k) -вузлі

$$\mathbf{M}[H_{n,m,k}] = 0; \quad \mathbf{M}[(H_{n,m,k})^2] = \sigma_H^2 = \text{const}. \tag{6.42}$$

Для цього треба послідовно знижувати значення n -го індексу, потім m -го індексу та k -го індексу і, нарешті, знайти безумовне рівноважне середнє.

Отже, алгоритм (6.37)–(6.41) генерації значень випадкового поля у паралелепіпеді є стаціонарним.

Деякі програмні середовища не підтримують тривимірні матриці. Тому наведемо алгоритм генерації двох двовимірних полів, нижнього – $a(x, y)$ і верхнього – $b(x, y)$, які у сукупності мають властивості одного тривимірного поля $h(x, y, z)$. Будемо вважати, що виконано ініціалізацію двохвимірних полів білим шумом одиничної інтенсивності:

$$v_{n,m} = \sigma N(0,1); u_{n,m} = \sigma N(0,1), n \geq 0, m \geq 0. \quad (6.43)$$

Тоді отримаємо наступний

Алгоритм 6.2. Генерація перерізів тривимірного марковського поля

Крок 1. Генерація значень у вершині нижнього прямокутника ($n = 0, m = 0$):

$$a_{0,0} = u_{0,0}. \quad (6.44)$$

Крок 2. Генерація значень поля вздовж x - та y -меж нижнього прямокутника ($n > 0, m = 0$):

$$\begin{aligned} a_{n+1,0} &= pa_{n,0} + \sqrt{1-p^2} u_{n+1,0}; \\ a_{0,m+1} &= qa_{0,m} + \sqrt{1-q^2} u_{0,m+1}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Крок 3. Послідовне заповнення значеннями внутрішніх вузлів нижнього прямокутника ($n > 0, m > 0$):

$$a_{n+1,m+1} = pa_{n,m+1} + qa_{n+1,m} - pqa_{n,m} + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)} u_{n+1,m+1}. \quad (6.46)$$

Крок 4. Генерація значень у вершині верхнього прямокутника ($n = 0, m = 0$):

$$b_{0,0} = ra_{0,0} + \sqrt{1-r^2} v_{0,0}. \quad (6.47)$$

Крок 5. Генерація значень поля вздовж x - та y -меж верхнього прямокутника ($n > 0, m = 0$):

$$\begin{aligned} b_{n+1,0} &= pb_{n,0} + ra_{n,0} - pra_{n+1,0} + \sqrt{(1-p^2)(1-r^2)} v_{n+1,0}; \\ b_{0,m+1} &= qa_{0,m} + rb_{0,m} - qra_{0,m+1} + \sqrt{(1-q^2)(1-r^2)} v_{0,m+1}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Крок 6. Послідовне заповнення значеннями внутрішніх вузлів верхнього прямокутника ($n > 0, m > 0$):

$$\begin{aligned} b_{n+1,m+1} &= pb_{n,m+1} + qb_{n+1,m} + ra_{n+1,m+1} - pqb_{n,m} - qra_{n+1,m} - pra_{n,m+1} + \\ &+ pqra_{n,m} + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)} v_{n+1,m+1}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Крок 7. Нормування амплітуди поля ($n \geq 0, m \geq 0$):

$$h_{n,m} = \sigma_H b_{n,m}. \quad (6.50)$$

В алгоритмі 6.2 використані ті ж самі позначки, що й в алгоритмі 6.1. Інтенсивність σ_H амплітуди породженого поля $H(x, y, z)$ пов'язана з інтенсивністю σ_U породжувального поля $u(x, y)$ співвідношенням (6.32). За допомогою алгоритму 6.2 можна знайти значення на заданому породженому шарі, виходячи із знайдених раніше значень попереднього породжувального шару.

Візуалізація тривимірного НМ-поля ускладнена образотворчими можливостями. Наступні рисунки є ілюстрацією до роботи програмного засобу, за допомогою якого візуалізуються розраховані 3D-поля. У ньому 3D-поле показано обмеженим набором шарів.

На рис. 6.1 наведено приклад генерації реалізації $h(x, y, z)$ випадкового поля $H(x, y, z)$. Це зображення поля $H(x, y, z)$ утворено з трьох рисунків полів $H(x, y, z_0)$, $H(x, y, z_1)$ і $H(x, y, z_2)$, сукупність яких $\{h(x_n, y_m, z_0)\}$, $\{h(x_n, y_m, z_1)\}$ і $\{h(x_n, y_m, z_2)\}$ складається із значень, знайдених у відповідності з алгоритмом 6.2. Параметри розрахунків: розмір кроків $\Delta_x = 1.0$, $\Delta_y = 1.0$, $\Delta_z = 3.0$; кількість кроків $N_x = 40$, $N_y = 40$, $N_z = 2$; декременти загасання $\nu = 1.0$, $\mu = 1.0$, $\lambda = 1.0$. Інтенсивність σ_U амплітуди $h(x, y, z)$ поля $H(x, y, z)$ обрана рівною $\sigma_U = 0.2$. На рис. 6.1 ось Oz є вертикальною.

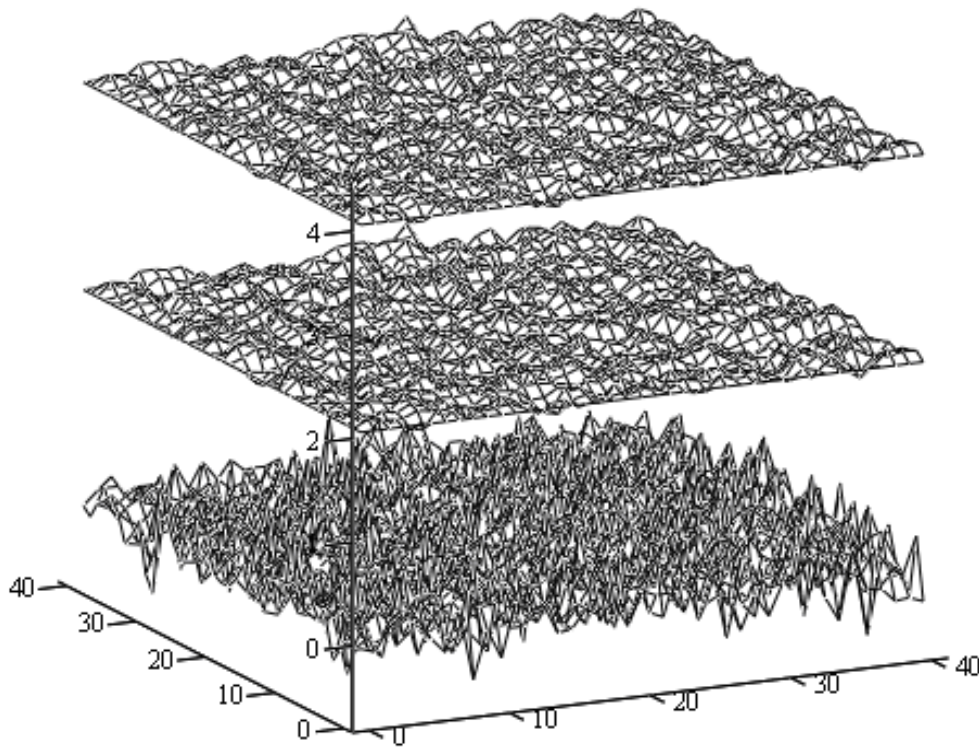


Рис. 6.1. Нормальне марковське 3D-поле $H(x, y, z)$: $\nu = \mu = \lambda = 1.0$; $\sigma_U = 0.2$

На рис. 6.2 наведено аналогічний приклад генерації $h(x, y, z)$ випадкового поля $H(x, y, z)$. Параметри розрахунку теж самі, що у рис. 6.1, крім $\sigma_U = 1.0$.

З наведених рисунків можна бачити динаміку флуктуацій за різними напрямками, зокрема по осі Oz .

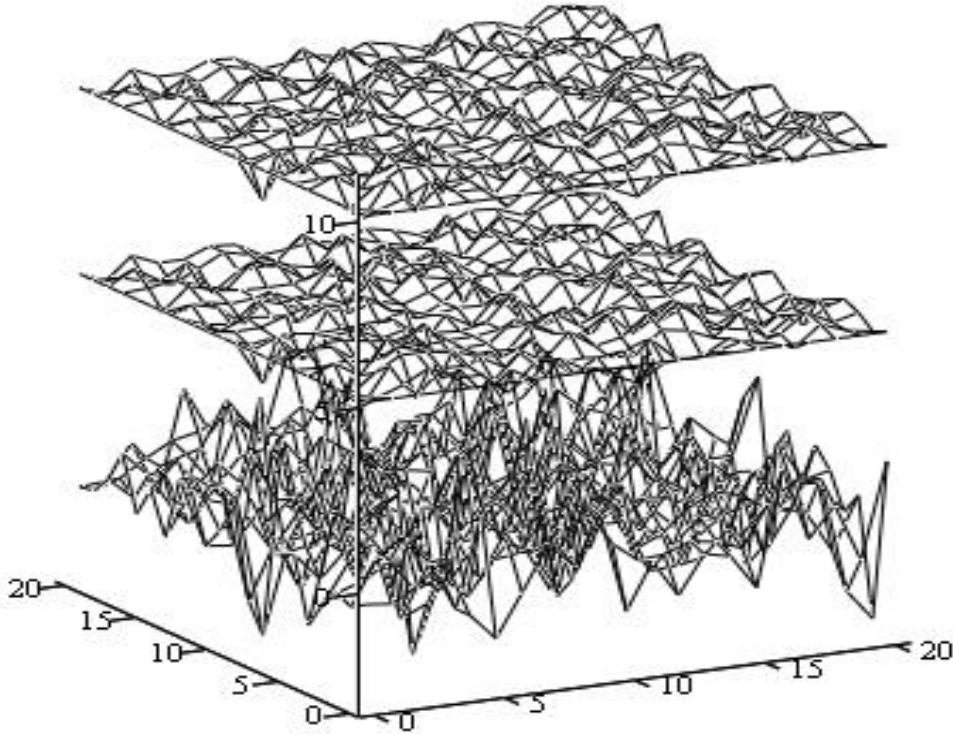


Рис. 6.2. Нормальне марковське 3D-поле $H(x, y, z)$: $\nu = \mu = \lambda = 1.0$; $\sigma_U = 1.0$

Таким чином, розглянуто тривимірне поле, що має властивості стаціонарності, нормальності та марковості. Аналіз ґрунтується на рівнянні руху амплітуди тривимірного поля, породжуваного тривимірним білим шумом. Для випадкової величини – амплітуди тривимірного нормального марковського поля першого порядку у просторі – отримані перехідні умовні щільності розподілу ймовірностей разом із безумовною щільністю розподілу ймовірностей. На їх основі побудовано та обґрунтовано алгоритм генерації такого поля в паралелепіпеді. Наведено чисельний приклад реалізації запропонованого алгоритму.

Контрольні запитання

1. Наведіть приклади задач, для вирішення яких може знадобиться генерація нормального марковського поля у просторі.
2. Як визначаються корелятори марковського поля у вузлах тривимірної сітки у просторі?
3. Як генерується нормальне марковське поле у просторі?

4. Як забезпечується система зв'язків між вузлами сітки при генерації нормального марковського поля у просторі?
5. Чому дорівнює коваріаційна функція для нормального марковського поля на x -осі, на y -осі та на z -осі?
6. Як співвідносяться кореляційні функції на площині та у просторі?
7. Як співвідносяться інтенсивності марковського поля на площині та у просторі?
8. Дайте інтерпретацію співвідношення Ейнштейна (6.32).

Вправи для роботи з комп'ютером

Завдання 1. Розробіть і програмно реалізуйте процедуру для генерації z -перетинів тривимірного нормального марковського поля на базі алгоритму 6.2. В якості аргументів процедура повинна сприймати параметри поля (декременти, СКВ білого шуму) та вектор значень $z = (z_1, \dots, z_r)$ координати z , для яких необхідно побудувати перетин.

Завдання 2. Розробіть і програмно реалізуйте на базі алгоритму 6.1 процедуру для генерації перетину тривимірного нормального марковського поля площиною, заданою рівнянням $2 + x + y + 2z = 0$. Побудуйте на графіку суперпозицію виділеного марковського поля з цією площиною.

Завдання 3. Розробіть і програмно реалізуйте на базі алгоритму 6.1 процедуру для генерації довільного перетину тривимірного нормального марковського поля площиною, заданою рівнянням $a_0 + a_1x + a_2y + a_3z = 0$. Процедура повинна сприймати вектор параметрів площини (a_0, a_1, a_2, a_3) в якості аргументу.

Завдання 4. Розробіть і програмно реалізуйте на базі алгоритму 6.1 процедуру для генерації перетину тривимірного нормального марковського поля довільною тривимірною поверхнею, заданою співвідношенням $f(x, y, z; \theta) = 0$, де θ – вектор параметрів функції $f(\cdot)$. Побудуйте на графіку суперпозицію виділеного у такий спосіб марковського поля з поверхнями:

а) $z = \sin(xy)$;

б) $z = \sin(x)\cos(y)$;

в) $z = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$;

г) $z = \sin(x^2 + y^2)$.

7. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМІВ ГЕНЕРАЦІЇ НОРМАЛЬНИХ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ ТА ПОЛІВ

В цьому розділі будуть описані деталі реалізації алгоритмів, що використовуються при моделюванні випадкових марковських полів. В якості програмного середовища використано пакет Mathcad [2] у зв'язку з близькістю його операторів до традиційних математичних конструктів.

Моделювання в обраному програмному середовищі починається з завдання глобальних та інших параметрів, що використовуються в задачі. Вважатимемо, що основні геометричні, програмні та фізичні параметри відомі та задані.

Вкажемо ті параметри, які використовуються найчастіше:

N, M, K – максимальний індекс масивів, що використовуються (з урахуванням нульового індексу кількість компонент масивів складає $N + 1, M + 1, K + 1$);

a, b, c – довжини інтервалів по осях $0x, 0y, 0z$, відповідно;

$\Delta_x = a / N, \Delta_y = b / M, \Delta_z = c / K$ – розміри кроків по осях $0x, 0y, 0z$;

ν, μ, λ – парціальні декременти випадкових процесів по осях $0x, 0y, 0z$;

σ_U (або σ) – інтенсивність породжувального поля;

σ_H – інтенсивність породженого поля.

7.1 Генерація білого шуму

В середовищі Mathcad в якості генератора нормальних випадкових величин використовується вбудована функція $\text{rnorm}(m, \mu, \sigma)$, яка повертає вектор із m випадкових чисел із розподілом $N(\mu, \sigma)$. Індеси масивів в Mathcad починаються з нуля.

Наведемо приклади використання цієї функції:

– генерація скалярного значення із стандартного нормального розподілу:

$x := \text{rnorm}(1, 0, 1)_0$

– генерація одновимірного білого шуму на інтервалі з інтенсивністю $\sigma = 2$:

$N := 10$

$\sigma := 2$

$H_0 := \text{rnorm}(N+1, 0, 2)$ // елементи матриці матимуть індекси $0, 1, \dots, N$

– генерація двовимірного білого шуму на площині з інтенсивністю $\sigma = 0.5$:

$N := 10$

$M := 10$

$\sigma := 0.5$

$n := 0..N$ // об'єкт типу діапазон

```

m:=0..M
H0n,m:=rnorm(1,0,σ)0

```

Отже, за допомогою функції `rnorm` легко ініціювати масиви `H0` для породжувального поля білого шуму.

Зауваження. Виклик датчика випадкових значень даватиме щоразу чергову псевдовипадкову реалізацію, що відрізняється від попередніх. При цьому сукупність значень буде підкорятися заданому розподілу випадкової величини. Тому при різних викликах значення масиву `H0`, що містить породжувальне поле, будуть відрізнятися, хоча ймовірнісні властивості генеральної сукупності випадкової величини зберігатимуться. Це відноситься і до всіх породжених полів, що потрібно мати на увазі при їхній візуалізації та інтерпретації. В деяких випадках, наприклад, при порівнянні різних алгоритмів, доцільно зберегти конкретну реалізацію породжувального поля.

7.2 Генерація нормального марковського процесу на інтервалі

Процедура `OUProc` повертає масив $\{h_n\}$ значень випадкового процесу $h(x)$ в заданому числі точок на інтервалі. Її аргументами є значення декременту ν і інтенсивності σ .

```

OUProc(ν, σ) :=
  for n ∈ 0 .. N
    xn ← x0 + n · Δx
  p ← exp[-ν · Δx]
  v0 ← rnorm(1, 0, 1)0
  for n ∈ 1 .. N
    vn ← p · vn-1 + √(1 - p2) · rnorm(1, 0, 1)0
  for n ∈ 0 .. N
    hn ← σ · vn
  Rez ← h
  Rez

```

Рис. 7.1. Процедура `OUProc` отримання значень ОУ-процесу

Кожне нове звертання до процедури надає нову траєкторію процесу; так, двократним зверненням `h1:=OUProc(ν,σ)`, `h2:=OUProc(ν,σ)` отримаємо дві різних траєкторії.

7.3 Генерація гармонічного нормального марковського процесу на інтервалі

Процедура OUHarm повертає масиви $\{h_n, h'_n\}$ значень випадкового векторного процесу $(h(x), h'(x))$ в заданому числі точок $\{x_n\}$ на інтервалі. Код процедури наведено нижче. Аргументами процедури є декремент β і частота коливань Ω .

$$\text{OUHarm}(\beta, \Omega) := \left\{ \begin{array}{l} p_1 \leftarrow \exp\left[\left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \Omega^2}\right) \cdot \Delta x\right] \\ p_2 \leftarrow \exp\left[\left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \Omega^2}\right) \cdot \Delta x\right] \\ w_0 \leftarrow \sqrt{\beta} \cdot \text{rnorm}(1, 0, 1)_0 + \sqrt{\beta} \cdot \left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \Omega^2}\right) \cdot \Omega^{-1} \cdot \text{rnorm}(1, 0, 1)_0 \\ v_0 \leftarrow \text{rnorm}(1, 0, 1)_0 \\ \text{for } n \in 1..N \\ \quad \begin{pmatrix} w_n \\ v_n \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} p_1 \cdot w_{n-1} \\ p_2 \cdot v_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{1 - (p_1)^2} \cdot \text{rnorm}(1, 0, 1)_0 \\ \sqrt{1 - (p_2)^2} \cdot \text{rnorm}(1, 0, 1)_0 \end{bmatrix} \\ \text{for } n \in 0..N \\ \quad \begin{pmatrix} g_n \\ h_n \end{pmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \text{Re}\left[w_n - \left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \Omega^2}\right) \cdot v_n\right] \\ \text{Re}(v_n) \end{bmatrix} \\ \text{Rez} \leftarrow \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \\ \text{Rez} \end{array} \right.$$

Рис. 7.2. Процедура OUProc отримання значень гармонічного ОУ-процесу

Результатом роботи процедури є масив $\{h'_n, h_n\}$, що містить вектори $\{h'_n\}$ та $\{h_n\}$. Повторним викликом процедури із збереженням результатів отримаємо приклади шуканих масивів $\{h'_n\}$ та $\{h_n\}$:

$x_0 := 0$	// початковий момент
$x_1 := 25$	// кінцевий момент
$N := 1000$	// кількість кроків
$\Delta x := \frac{x_1 - x_0}{N}$	// крок чисельного інтегрування
$\sigma := 1.0$	// СКВ амплітуд коливання
$\beta := 0.5$	// декремент
$\Omega := 2.0$	// частота коливання

```

n:=0..N           // змінна циклу
xn:=x0+n·Δx       // поточна координата
hs1:=OUHarm(β,Ω)0   h1:=OUHarm(β,Ω)1
hs2:=OUHarm(β,Ω)0   h2:=OUHarm(β,Ω)1

```

Рис. 7.3. Генерація значень гармонічного процесу Орнштейна-Уленбека

Отримані вектори hs1, hs2 містять згенеровані масиви похідної $h'(x)$. Їм відповідає нульовий індекс результату, що повертається процедурою. Вектори h1, h2 містять масиви функції $h(x)$; їм відповідає результат звернення з індексом 1.

На рис. 7.4 наведена фазова карта $\{h(x), h'(x)\}$ коливань даного процесу.

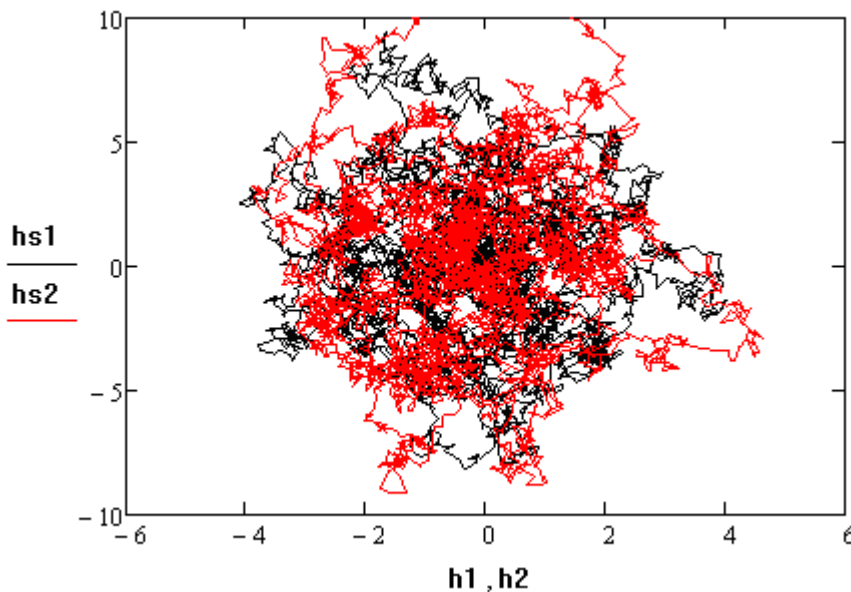


Рис. 7.4. Фазові карти коливань гармонічного ОУ-процесу $\{h(x), h'(x)\}$ на інтервалі $0 \leq x \leq 25$.

Параметри: декремент $\beta = 0.5$, частота коливального контуру $\Omega = 2.0$, середньоквадратичне відхилення породжувального білого шуму $\sigma_U = 1.0$. Показано 2 приклади (h1, hs1), (h2, hs2) для функції $h(x)$ та її похідної $h'(x)$

7.4 Процедура підвищення порядку нормального марковського двовимірного поля на площині

Процедура P1 на базі заданого поля OldF розміром $\{(N+1) \times (M+1)\}$ на площині генерує масив, який містить нове поле NewF такого ж розміру й тієї ж розмірності. Код процедури наведено на рис. 7.5.

Наведемо приклад отримання із масиву породжувального білого шуму H0 масиву двовимірного нормального марковського поля H1. Ініціалізація параметрів наводиться нижче.

```

 $\sigma := 0.5$            $\nu := 2.0$        $\mu := 1.0$ 
 $N := 40$             $M := 40$ 
 $n := 0..N$           $m := 0..M$ 
 $H0_{n,m} := \text{rnorm}(1,0,1)_0$ 

```

Отримаємо масив H1 за допомогою виклику $H1 := \text{Re}(P1(H0, \nu, \mu))$:

```

P1(OldF,  $\nu, \mu$ ) :=
   $p \leftarrow \exp(-\nu \cdot \Delta x)$ 
   $q \leftarrow \exp(-\mu \cdot \Delta y)$ 
   $\text{sqrt\_pq} \leftarrow \sqrt{1 - p^2} \cdot \sqrt{1 - q^2}$ 
   $A_{0,0} \leftarrow \text{OldF}_{0,0}$ 
  for  $n \in 1..N$ 
     $A_{n,0} \leftarrow p \cdot A_{n-1,0} + \sqrt{1 - p^2} \cdot \text{OldF}_{n,0}$ 
  for  $m \in 1..M$ 
     $A_{0,m} \leftarrow q \cdot A_{0,m-1} + \sqrt{1 - q^2} \cdot \text{OldF}_{0,m}$ 
  for  $n \in 1..N$ 
    for  $m \in 1..M$ 
       $A_{n,m} \leftarrow p \cdot A_{n-1,m} + q \cdot A_{n,m-1} - p \cdot q \cdot A_{n-1,m-1} + \text{sqrt\_pq} \cdot \text{OldF}_{n,m}$ 
  for  $n \in 0..N$ 
    for  $m \in 0..M$ 
       $\text{NewF}_{n,m} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \nu \cdot \mu}} \cdot A_{n,m}$ 
  NewF

```

Рис. 7.5. Процедура P1 підвищення порядку випадкового марковського поля

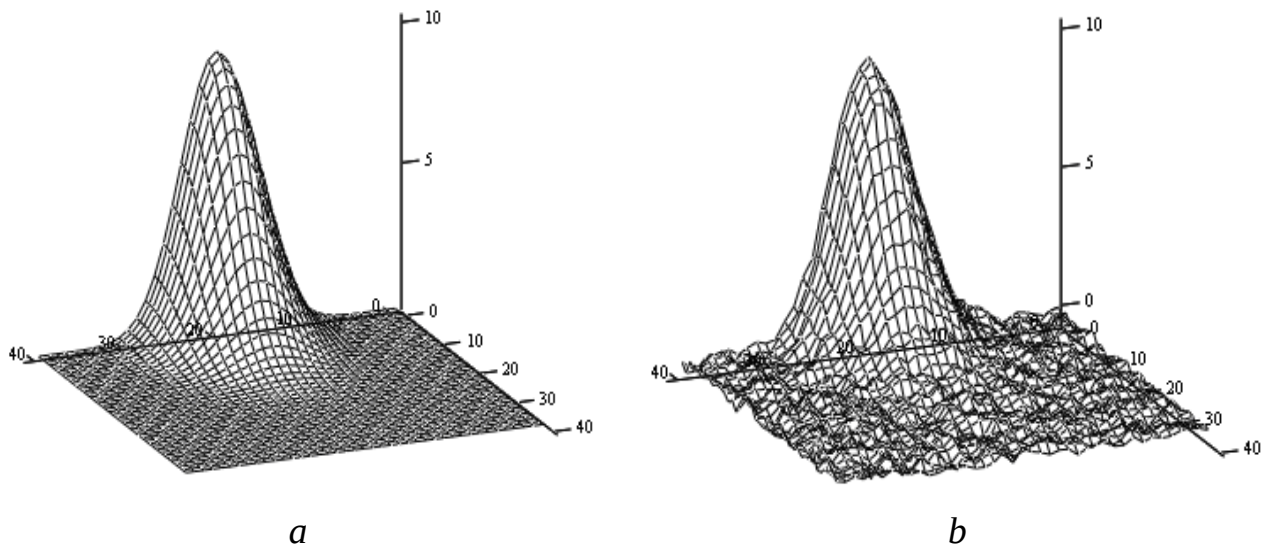


Рис. 7.6. Функція $Z0(x, y)$ (a) і функція $Z1(x, y) = Z0(x, y) + H1(x, y)$ (b)

На рис. 7.6 наведено результат суперпозиції двовимірного нормального марковського поля H1 і гауссоїди $Z_0(x, y) = 10 \exp \left[-0.03(x - 20)^2 - 0.01y^2 \right]$.

7.5 Процедура генерації гармонічного марковського поля

Підхід, що використовувався у процедурі підвищення порядку, можна адаптувати для вирішення задачі побудови гармонічного марковського поля H2 на базі наявного породжувального поля H0. Код процедури наведено на рис. 7.7.

```

Pole_Har(H,  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ) :=
    p ← exp( $\gamma_x \cdot \Delta x$ )
    q ← exp( $\gamma_y \cdot \Delta y$ )
    g0,0 ← H0,0
    for n ∈ 1 .. N
        gn,0 ← p · gn-1,0 +  $\sqrt{1 - p^2} \cdot Hn,0$ 
    for m ∈ 1 .. M
        g0,m ← q · g0,m-1 +  $\sqrt{1 - q^2} \cdot H0,m$ 
    for n ∈ 1 .. N
        for m ∈ 1 .. M
            an,m ← p · gn-1,m + q · gn,m-1 - p · q · gn-1,m-1
            gn,m ← an,m +  $\sqrt{(1 - p^2) \cdot (1 - q^2)} \cdot Hn,m$ 
    Rez ←  $\frac{\sigma U}{\sqrt{4 \cdot \gamma_x \cdot \gamma_y}} \cdot g$ 
    Rez

```

Рис. 7.7. Процедура Pole_Har побудови гармонічного марковського поля

Для запуску програми треба встановити значення глобальних параметрів:

```

σU:=1.0           // СКВ породжувального шуму
N:=51             // кількість кроків алгоритму рішення
M:=51             // кількість кроків алгоритму рішення
x0:=-10 x1:=10    // початковий і кінцевий моменти
y0:=-10 y1:=10    // початковий і кінцевий моменти

```

Далі, після введення

```

β_x:=0.5          Ω_x:=2.0          // декремент, частота
β_y:=0.25         Ω_x:=0.5          // декремент, частота

```

знаходяться значення власних чисел:

$$\gamma_{1_x} := -\beta_x + \sqrt{\beta_x^2 - \Omega_x^2} = -0.5 + 1.936i$$

$$\gamma_{2_x} := -\beta_x - \sqrt{\beta_x^2 - \Omega_x^2} = -0.5 - 1.936i$$

$$\gamma_{1_y} := -\beta_y + \sqrt{\beta_y^2 - \Omega_y^2} = -0.25 + 0.433i$$

$$\gamma_{2_y} := -\beta_y - \sqrt{\beta_y^2 - \Omega_y^2} = -0.25 - 0.433i$$

На рис. 7.8 наведено процедуру отримання із масиву породжувального поля білого шуму H0 масив породженого поля другого порядку H2 (праворуч наведено її аналог для контрольного отримання поля H0).

```

Pole_Harm2 := | for n ∈ 0.. N
                |   for m ∈ 0.. M
                |     H0n,m ← mnorm(1,0,1)0
                |   H1 ← Pole_Har(H0, γ1_x, γ1_y)
                |   H2 ← Re(Pole_Har(H1, γ2_x, γ2_y))
                |   Rez ← H2
                |   Rez

```

Рис. 7.8. Процедура Pole_Harm2 генерації гармонічного марковського поля

Із коду процедури Pole_Harm2 видно вкладеність при виклику та обчисленні полів: з H0 отримуємо H1, а з H1 отримуємо H2. Це здійснюється за допомогою виклику H2:=Pole_Harm2.

При розрахунках треба визначити величини $\gamma_{x,1,2} = \beta_x \pm \sqrt{\beta_x^2 - \Omega_x^2}$ та $\gamma_{y,1,2} = \beta_y \pm \sqrt{\beta_y^2 - \Omega_y^2}$, які пов'язані з параметрами коливальної системи β_x , Ω_x та β_y , Ω_y . Хоча вони у загальному випадку є комплекснозначними, пари $(\gamma_{1,x}, \gamma_{2,x})$ та $(\gamma_{1,y}, \gamma_{2,y})$ є комплексно сполученими. При обчисленні може залишитися мала уявна частина, тому при отриманні H2 використовується оператор виділення дійсної частини Re. Отже, генерація гармонічного поля здійснюється шляхом двократного виклику процедури Pole_Har.

Наведемо приклади гармонічних полів, які генеруються за допомогою описаних вище процедур. На рис. 7.9 в наведено результат суперпозиції гармонічного поля H2 з поверхнею $S(x, y) = \exp(-0.1x)\sin(y)$ в області $-10 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 10$. Параметри гармонічного поля: $\beta_x = 0.6$, $\Omega_x = 2.0$, $\beta_y = 0.6$, $\Omega_y = 2.0$, інтенсивність породжувального поля $\sigma = 0.5$. Ліворуч показана поверхня $S(x, y)$, праворуч – результат суперпозиції $S(x, y) + H2(x, y)$.

На рис. 7.10 показано результат суперпозиції НМ гармонічного поля $H(x, y)$ з поверхнею $S(x, y) = \cos(0.5x + 0.2y)$ на ділянці площини $(0 \leq x \leq 30, 0 \leq y \leq 30)$. Параметри розрахунків: крок по осі абсцис $\Delta x = 1.0$, кількість кроків $N = 30$, крок по осі ординат $\Delta y = 1.0$, кількість кроків $M = 30$. Декременти коливальних систем:

$\beta_x = 1.0$ та $\beta_y = 1.0$. Частоти обирались в двох варіантах: $\Omega_x = 2.0$, $\Omega_y = 0.1$ та $\Omega_x = 0.1$, $\Omega_y = 2.0$. Розрахунки виконувались при інтенсивності $\sigma = 0.2$ породжувального поля Н0.

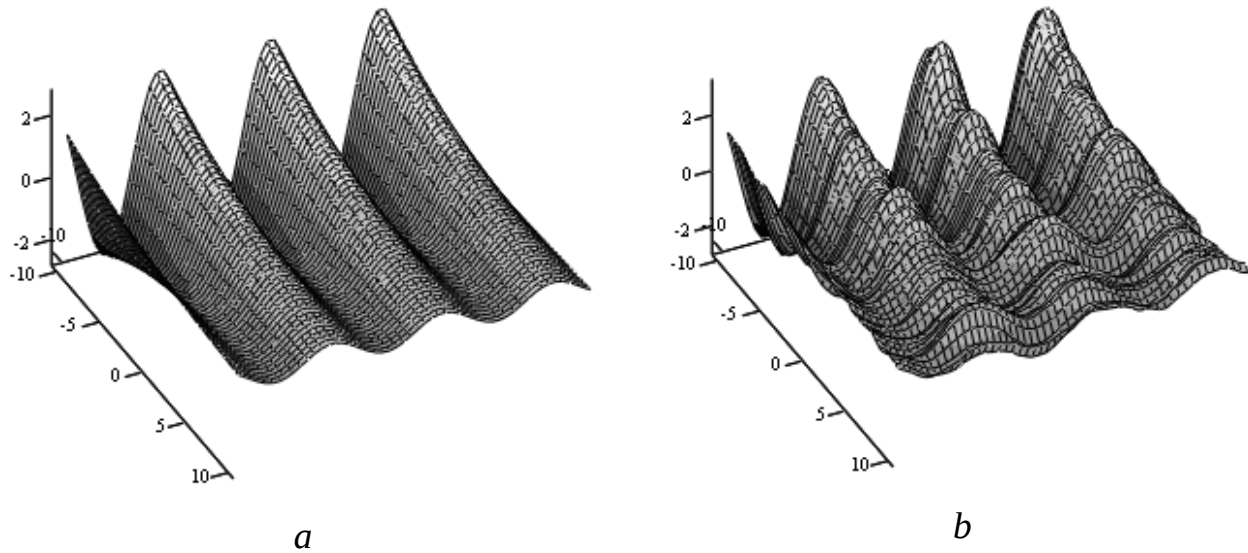


Рис. 7.9. Поверхня $S(x, y) = \exp(-0.1x)\sin(y)$ (a) та результат її суперпозиції із гармонічним полем $S(x, y) + H2(x, y)$ (b).
Параметри гармонічного поля: $\beta_x = 0.6$, $\Omega_x = 2.0$, $\beta_y = 0.6$, $\Omega_y = 2.0$,
інтенсивність породжувального поля $\sigma = 0.5$

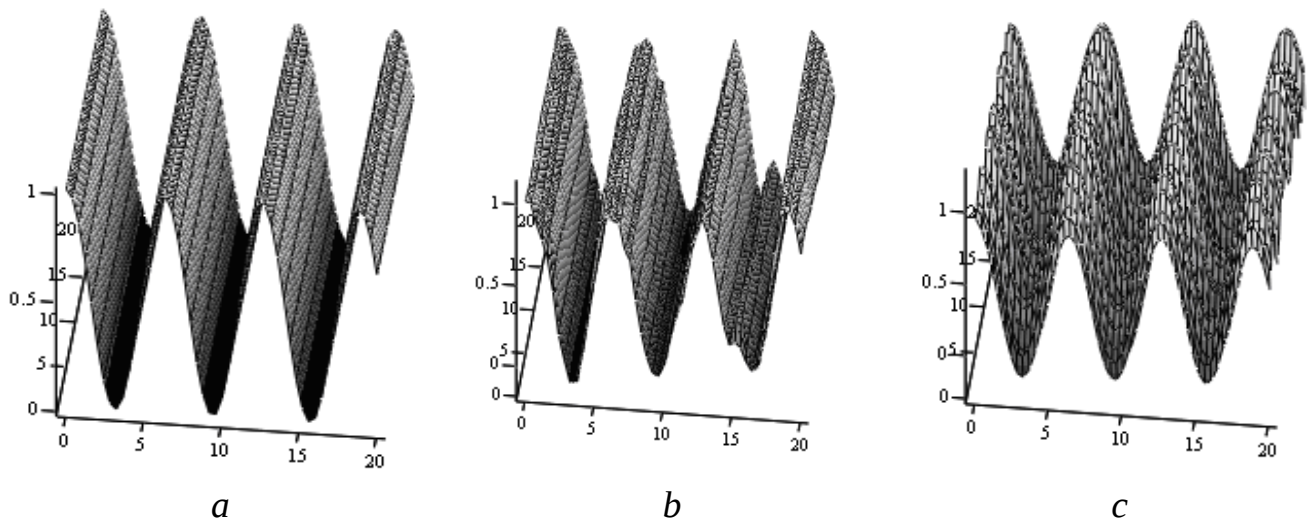


Рис. 7.10. Результат суперпозиції гармонічних полів $H2_{a,b}(x, y)$ з поверхнею $S(x, y) = \cos(0.5x)$. Параметри коливальних систем: $\sigma = 0.2$; $\beta_x = 1.0$, $\beta_y = 1.0$; для поля $H2_a(x, y)$: $\Omega_x = 2.0$, $\Omega_y = 0.1$; для поля $H2_b(x, y)$: $\Omega_x = 0.1$, $\Omega_y = 2.0$.
 a – поверхня $S(x, y)$; b – $S(x, y) + H2_a(x, y)$; c – $S(x, y) + H2_b(x, y)$

Із рис. 7.10 можна побачити послідовне спотворення випадковим полем $H_2(x, y)$ косінусного рельєфу, при цьому друга комбінація частот вносить сильніші спотворення.

7.6 Процедура підвищення порядку випадкового марковського тривимірного поля у просторі

Можливості візуалізації тривимірних об'єктів не дозволяють показати на екрані тривимірне марковське поле. Тому обмежимося описом алгоритму отримання одного шару (перетину на заданій висоті z) тривимірного марковського поля.

Спочатку згенеруємо два поля (U та V) білого шуму з інтенсивністю σ :

$$\begin{aligned} n &:= 0..N & m &:= 0..M \\ U_{n,m} &:= \text{rnorm}(1, 0, \sigma)_0 & V_{n,m} &:= \text{rnorm}(1, 0, \sigma)_0 \end{aligned}$$

Після ініціалізації всіх потрібних параметрів, обчислимо декрементні множники: $p = \exp(-\nu \Delta x)$, $q = \exp(-\mu \Delta y)$, $r = \exp(-\lambda \Delta z)$.

На рис. 7.11 наведено код процедури `Pole_3`. Вона на базі заданих двовимірних полів білого шуму U та V розмірністю $(N+1) \times (M+1)$ повертає масив, який містить нове поле H_3 тієї ж розмірності, яке має властивості шару тривимірного марковського поля (тобто двовимірного перетину 3D-поля на заданій висоті z).

Наведемо приклад отримання із породжувальних полів білого шуму U та V масив, який міститиме набір перетинів породженого поля третього порядку H_1 . Для отримання першого перетину треба виконати команду $H_1 := \text{Pole_3}(U, V)$. Для отримання решти перетинів треба послідовно звертатися до `Pole_3`, використовуючи результати попередніх розрахунків як вихідні дані. Послідовність розрахунків проілюстрована на наведеному нижче програмному фрагменті.

$z := 0$	$H_0 := U$	$P_0 := U$
$z := \Delta z$	$H_1 := \text{Pole_3}(U, V)$	$P_1 := H_1 + \Delta z$
$z := 2 \cdot \Delta z$	$H_2 := \text{Pole_3}(H_1, V)$	$P_2 := H_2 + 2 \cdot \Delta z$
$z := 3 \cdot \Delta z$	$H_3 := \text{Pole_3}(H_2, V)$	$P_3 := H_3 + 3 \cdot \Delta z$
$z := 4 \cdot \Delta z$	$H_4 := \text{Pole_3}(H_3, V)$	$P_4 := H_4 + 4 \cdot \Delta z$
$z := 5 \cdot \Delta z$	$H_5 := \text{Pole_3}(H_4, V)$	$P_5 := H_5 + 5 \cdot \Delta z$

Після виконання цього фрагменту масиви H_1 , H_2 , H_3 , H_4 та H_5 будуть містити шукані перетини, а масиви P_1 , P_2 , P_3 , P_4 та P_5 кожного разу «піднімаються на наступний рівень» для зручності візуалізації. Наступними командами вихідні масиви об'єднуються в один масив.

$G0 := P0$	$G1 := \text{augment}(G0, P1)$	$G2 := \text{augment}(G1, P2)$
$G3 := \text{augment}(G2, P3)$	$G4 := \text{augment}(G3, P4)$	$G5 := \text{augment}(G4, P5)$
$F0 := P0$	$F1 := \text{stack}(F0, P1)$	$F2 := \text{stack}(F1, P2)$
$F3 := \text{stack}(F2, P3)$	$F4 := \text{stack}(F3, P4)$	$F5 := \text{stack}(F4, P5)$

```

Pole_3(U, V) :=
  A0,0 ← U0,0
  for n ∈ 1..N
    An,0 ← p·An-1,0 + √(1-p2)·Un,0
  for m ∈ 1..M
    A0,m ← q·A0,m-1 + √(1-q2)·U0,m
  for n ∈ 1..N
    for m ∈ 1..M
      Cn,m ← p·An-1,m + q·An,m-1 - p·q·An-1,m-1
      An,m ← Cn,m + √((1-p2)(1-q2))·Un,m
  B0,0 ← V0,0
  for n ∈ 1..N
    Gn,0 ← p·Bn-1,0 + r·An-1,0 - p·r·An,0
    Bn,0 ← Gn,0 + √((1-p2)(1-r2))·Vn,0
  for m ∈ 1..M
    Gn,m ← q·A0,m-1 + r·B0,m-1 - q·r·A0,m
    B0,m ← Gn,m + √((1-q2)(1-r2))·V0,m
  for n ∈ 1..N
    for m ∈ 1..M
      C1n,m ← p·Bn-1,m + q·Bn,m-1 + r·An,m
      C2n,m ← -p·q·Bn-1,m-1 - q·r·An,m-1 - p·r·An-1,m-1
      C3n,m ← C1n,m + C2n,m + p·q·r·An-1,m-1
      HHn,m ← C3n,m + √((1-p2)(1-q2)(1-r2))·Vn,m
  H3 ←  $\frac{1}{\sqrt{8 \cdot \nu \cdot \mu \cdot \lambda}}$  · HH
  H3

```

Рис. 7.11. Процедура Pole_3 обчислення шару тривимірного марковського поля

Наведемо приклад. Після ініціалізації параметрів

```
N:=30      M:=30      K:=1
Δx:=1.0    Δy:=1.0    Δz:=5
ν:=1.0     μ:=1.0     λ:=0.3    σ:=0.25
```

за допомогою команд:

```
n:=0..N      m:=0..M
Sn,m:=4·exp(−0.1·n·Δx−0.1·m·Δy)
P1:=H1+S+2·Δz  P2:=H2+S+2·Δz
P3:=H3+S+6·Δz  P4:=H4+S+8·Δz
```

отримаємо зображення функції $S(x, y) = 4\exp(-0.1x - 0.1y)$ під впливом трьох перетинів тривимірного шуму (див. рис. 7.12).

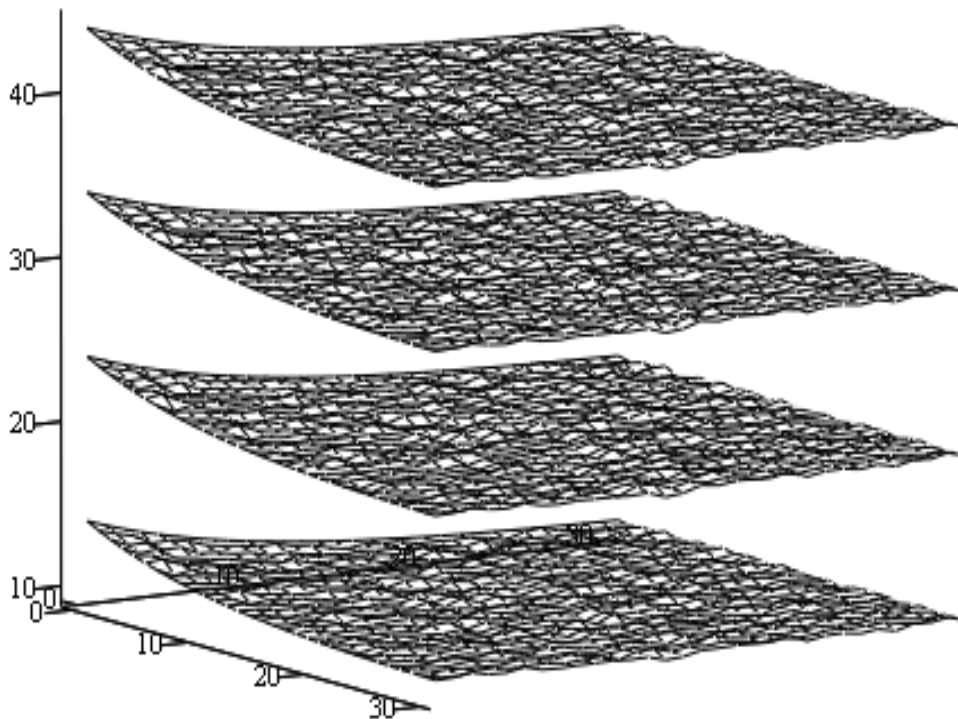


Рис. 7.12. Зображення функції $S(x, y) = 4\exp(-0.1x - 0.1y)$ під впливом трьох перетинів тривимірного шуму

Зауваження. Для практичних розрахунків необхідно задавати параметри модельованого поля (амплітуду, парціальні декременти та частоти), спираючись на експериментальні дані. При цьому можуть виникнути труднощі, пов'язані з визначенням кутових характеристик поля. Для подолання труднощів подібного роду рекомендується здійснити перехід стану поля з початкового до стаціонарного шляхом наступних дій:

– задати СКВ кутових характеристик поля приблизно, у межах допустимої похибки;

– почати моделювання поля на просторовому інтервалі, вихідна точка якого напевно перевищує інтервал кореляції поля $L_{\text{кор}} = 1 / \nu_{\text{min}}$, де ν_{min} – мінімальний серед декрементів;

– продовжити генерацію поля до отримання поля потрібного розміру, яке можна використати при моделюванні.

Отже, розглянуто основні алгоритми та їх програмні реалізації, за допомогою яких можливо вирішувати задачу генерації значень нормальних марковських процесів та полів. В якості програмного середовища використано пакет Mathcad у зв'язку з близькістю його операторів до традиційних математичних конструкцій. Підкреслимо, що всі програмні алгоритми ґрунтуються на використанні саме генератора нормальних випадкових величин, для чого в Mathcad використовується вбудована функція $\text{gnorm}(m, \mu, \sigma)$.

Побудова нормального марковського процесу або нормального марковського поля на площині чи у просторі починається з рівняння динаміки руху, в якому в якості породжувального фактору використовується процес білого шуму. Далі використовується ієрархічний підхід побудови випадкових полів. На підставі генератора білого шуму $\text{gnorm}(m, \mu, \sigma)$ послідовно отримуються:

- одновимірний процес Орнштейна-Уленбека на осі;
- двовимірне нормальне марковське поле на площині;
- тривимірне нормальне марковське поле у просторі.

На підставі цих основних об'єктів виконуються процедури просторового замикання чи підвищення порядку випадкового об'єкту.

Контрольні запитання

1. Дайте інтерпретацію процедури генерації одновимірного гармонічного процесу Орнштейна-Уленбека (рис. 7.3).

2. Поясніть принцип роботи процедури підвищення порядку нормального марковського поля.

3. В чому полягає сутність ієрархічного принципу при генерації нормальних марковських полів порядку вище першого?

4. Дайте інтерпретацію процедури генерації гармонічного поля (рис. 7.8).

5. Дайте інтерпретацію процедури обчислення шару тривимірного марковського поля (рис. 7.11).

6. Як здійснити перехід до стаціонарного марковського поля при неточно визначених кутових характеристиках поля?

Вправи для роботи з комп'ютером

Завдання 1. За допомогою генератора нормальних випадкових величин (вбудована функція $\text{gnorm}(m, \mu, \sigma)$) згенеруйте вибірку випадкових значень обсягом $m=1000$ з математичним сподіванням $\mu = 5$ та СКВ $\sigma = 2$.

Завдання 2. За допомогою генератора нормальних випадкових величин (вбудована функція $\text{gnorm}(m, \mu, \sigma)$) згенеруйте вибірку випадкових значень двовимірного білого шуму на площині обсягом $N=1000$ з математичними сподіваннями $\mu_x = 5$ та $\mu_y = 2$ і СКВ $\sigma_x = 1$ та $\sigma_y = 3$.

Завдання 3. Практично перевірте дію процедури отримання значень процесу Орнштейна-Уленбека (рис. 7.1) з обраними значеннями необхідних параметрів.

Завдання 4. Практично перевірте дію процедури отримання значень гармонічного процесу Орнштейна-Уленбека (рис. 7.2) з обраними значеннями необхідних параметрів. Розгляньте випадки: коливальний тип, аперіодичний тип, загасаючий тип.

Завдання 5. Практично перевірте дію процедури підвищення порядку марковського поля (рис. 7.7) з обраними значеннями необхідних параметрів.

Завдання 6. Практично перевірте дію процедури генерації випадкового марковського тривимірного поля у просторі (рис. 7.11) з обраними значеннями необхідних параметрів.

Завдання 7. Практично перевірте дію процедури обчислення шару тривимірного марковського поля (рис. 7.11) з обраними значеннями необхідних параметрів.

Завдання 8. Побудуйте програму зображення функції $S(x, y) = 2 \exp(-x^2 - y^2)$ під впливом трьох перетинів тривимірного шуму (рис. 7.12).

Завдання 9. Побудуйте програму зображення функції $S(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ під впливом трьох перетинів тривимірного шуму (рис. 7.12).

ПІСЛЯМОВА

Виклад методів і алгоритмів генерації нормальних марковських процесів і полів у посібнику мав на меті дати уявлення про практичні можливості використання цього математичного апарату в різноманітних прикладних задачах. Нормальні марковські процеси та поля мають широку застосовність для моделювання стаціонарних лінійних систем, що обумовлено їх властивостями.

В посібнику розглянуто інструментарій теоретичного аналізу нормальних марковських процесів та полів, а також методи та алгоритми їх імітаційного моделювання. Прийнятий підхід (від рівнянь руху до аналітичних результатів, алгоритмів та графіків) дещо звузив коло розглянутих нормальних марковських полів та їх застосувань. Для наочності викладу матеріалу основну увагу було приділено об'єктам відносно простої структури.

Наводяться також рекомендації щодо програмної реалізації розглянутих алгоритмів в обчислювальному середовищі Mathcad.

Можна запропонувати широке коло задач, для вирішення яких доцільне застосування математичного апарату двовимірних та тривимірних нормальних марковських полів. Насамперед, це розширення кола традиційних задач із застосуванням одновимірних стохастичних процесів на випадок двох і трьох просторових змінних. Зокрема, видається перспективним застосування тривимірних нормальних марковських полів у завданнях розсіювання електромагнітних хвиль у обурених середовищах, зовнішньої балістики в турбулентній атмосфері, розсіювання заряджених частинок в аморфних середовищах, поширення акустичних коливань у твердому тілі.

Дуже плідним виявилось застосування апарату нормальних марковських процесів в фінансах при моделюванні динаміки цін на фінансові активи та природні ресурси, курсів валют, процентних ставок, ф'ючерсів, опціонів тощо.

Можливості обчислювальних засобів дають підставу сподіватися на успішне застосування двовимірних та тривимірних нормальних марковських полів у задачах чисельного моделювання. Перспективним є застосування двовимірних та тривимірних нормальних марковських полів у завданнях оцінювання, фільтрації, тривимірного шифрування та декодування. Також розглянуті алгоритми побудови марковських полів на площині і викривлених поверхнях можуть бути безпосередньо використані в комп'ютерній графіці для генерації фотореалістичних зображень. Можна упевнено припустити, що сфера застосування нормальних марковських процесів і полів продовжуватиме розширюватися.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гнеденко Б.В. Курс теорії ймовірностей : підручник / Б. В. Гнеденко. Київ: ВПЦ "Київський університет", 2010. 464 с.
2. Дзісь В.Г. Прикладна математика на основі MathCAD : Навчальний посібник. / В.Г. Дзісь, О.В. Левчук, О.М. Дячинська. Вінниця: ВНАУ, 2020. 378с.
3. Довідник по теорії ймовірностей і математичній статистиці. Під ред. акад. АН УРСР В.С. Королюка. Київ: Наукова думка, 1978. 582 с.
4. Мазманишвили А.С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. Київ: Наукова думка, 1987. 224 с.
5. Мішура Ю.С. Випадкові процеси: теорія, статистика, застосування : підручник / Ю. С. Мішура, К. В. Ральченко, Г. М. Шевченко. 2-ге вид., випр. і допов. Київ : ВПЦ "Київський університет", 2021. 496 с.
6. Adler, R.J. The geometry of random fields. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010. 280 p.
7. Chandrasekhar S. Stochastic problems in physics and astronomy. Reviews of modern physics. 1943, 15(1), pp. 1–89.
8. Clifford, P. Markov random fields in statistics. In Grimmett, G. R., Welsh, D. J. A. (eds.), Disorder in Physical Systems: A Volume in Honour of John M. Hammersley, Oxford University Press, 1990, pp. 19–32.
9. Hajek, B. Random Processes for Engineers. Cambridge: Cambridge University Press. 2015. 414 p.
10. van Handel, R. Probability and Random Processes. Lecture Notes. Princeton University, 2016. <https://web.math.princeton.edu/~rvan/ORF309.pdf>.
11. Herzog, F. Stochastic Differential Equations. 2013. URL: <https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/mavt/dynamic-systems-n-control/idsc-dam/Lectures/Stochastic-Systems/SDE.pdf>.
12. Ibragimov, I. A. and Rozanov, Yu. A. Gaussian random processes (Vol. 9). New York–Heidelberg–Berlin: Springer Science & Business Media, 2012. 277 p.
13. Ross, Sheldon M. Introduction to Probability Models. 13th ed. Academic Press, 2023. 870 pp.
14. Rue, H. and Held, L. Gaussian Markov random fields: theory and applications. New York: Chapman and Hall/CRC press, 2005. 280 p.
15. Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S. On the theory of Brownian Motion. Physical Review, 1930, v. 36, p. 823-841.

Навчальне видання

МАЗМАНІШВІЛІ Олександр Сергійович
МЕЛЬНИКОВ Олег Станіславович

НОРМАЛЬНІ МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ І ПОЛЯ: АНАЛІЗ ТА АЛГОРИТМИ

Навчально-методичний посібник для самостійної роботи
з дисципліни «Випадкові процеси»
для студентів галузі знань «Інформаційні технології»

Відповідальний за випуск
Роботу до видання рекомендував

Юрій ДОРОФЄЄВ
Микола БЕЗМЕНОВ

В авторській редакції

План 2024 р., поз. 33

Підп. до друку 18.03.2024 р. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 6,25.

Видавничий центр НТУ «ХП».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Електронне видання



МАЗМАНІШВІЛІ Олександр Сергійович
Старший науковий співробітник
Національного наукового центру
«Харківський фізико-технічний інститут»
Доктор фізико-математичних наук,
професор, автор біля 350 наукових
та навчально-методичних праць



МЕЛЬНИКОВ Олег Станіславович
Доцент кафедри системного аналізу та
інформаційно-аналітичних технологій
Національного технічного університету
«Харківський політехнічний інститут»
Кандидат економічних наук, доцент,
автор біля 140 наукових та навчально-
методичних праць