



ПОСІБНИК З ФІЗИКИ

Частина 1

МЕХАНІКА.

КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Г. П. Ніколайчук, А. О. Перетятко, С. С. Кривоніс,
Г. М. Кочурова, Т. І. Храмова, О. М. Андрєєва

ПОСІБНИК З ФІЗИКИ

Частина 1

МЕХАНІКА.

КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

Навчальний посібник у 3-х частинах
для студентів першого бакалаврського рівня освіти
усіх технічних спеціальностей

За редакцією О. А. Любченко

Затверджено
редакційно-видавничою
радою НТУ «ХПІ»,
протокол №3 від 24.10.2023 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2025

УДК 531+534(075.8)
П 61

Рецензенти:

Є. С. Сиркін, д-р фіз.-мат. наук, провідний науковий
співробітник, ФТІНТ НАНУ;

Д. Б. Глушкова, д-р техн. наук, проф., завідувачка кафедри
технології металів і матеріалознавства, ХНАДУ

П 61 **Посібник** з фізики. Частина 1. Механіка. Коливання і хвилі :
навчальний посібник у 3-х частинах для студентів першого
бакалаврського рівня освіти усіх технічних спеціальностей /
Г. П. Ніколайчук, А. О. Перетятко, С. С. Кривоніс, Г. М. Кочурова,
Т. І. Храмова, О. М. Андреєва; за ред. О. А. Любченко. – Харків :
НТУ «ХПІ», 2025. – 315 с.

ISBN 978-617-05-0572-9

Навчальний посібник з курсу «Фізика» містить теоретичний матеріал, методичні
вказівки до розв'язання задач з прикладами розв'язаних задач та контрольні задачі з
відповідями з розділів, що розглядаються в курсі «Фізика» в НТУ «ХПІ».

Призначено для студентів першого бакалаврського рівня освіти усіх технічних
спеціальностей.

Іл. 114. Табл. 2. Бібліогр. 5 назв.

УДК 531+534(075.8)

© Ніколайчук Г. П., Перетятко А. О.,
Кривоніс С. С., Кочурова Г. М., Храмова Т. І.,
Андреєва О. М., Любченко О. А., 2025

ISBN 978-617-05-0572-9

© НТУ «ХПІ», 2025

ВСТУП

Основною ідеєю посібника, що пропонується, є намагання органічно поєднати в одному виданні висвітлення принципів теорії та практику розв'язання задач. Він пропонується студентам в якості одного з основних джерел, що може бути використаним під час вивчення курсу фізики. Його головна мета – ознайомити студентів з основними поняттями та методами фізики, роз'яснити зміст фізичних законів і явищ, навчити свідомо застосовувати отримані знання на практиці.

Посібник складається з трьох частин: Частина 1 «Механіка. Коливання та хвилі», Частина 2 «Молекулярна фізика. Термодинаміка. Електромагнетизм», Частина 3 «Оптика. Атомна і ядерна фізика». 21 розділ охоплює більшість тем, що розглядаються в основному курсі фізики в технічному університеті. На початку кожного розділу наданий теоретичний матеріал з відповідної теми, для зручності використання поділений на підрозділи. Матеріал супроводжується ілюстраціями та практичними прикладами, основні поняття і визначення виділені жирним шрифтом. Наскільки це можливо, автори намагалися уникнути зайвої математизації, переносячи основний акцент на фізичну сутність питань, що розглядаються. В процесі підготовки посібника велика увага приділялася коректному застосуванню україномовної фізичної термінології на основі нової редакції Українського правопису, що був затверджений Постановою Кабінету Міністрів України у 2019 році.

В другій частині кожного розділу пропонуються розібрані задачі, зміст яких тісно пов'язаний з теоретичною частиною. Задачі, що розглядаються, здебільшого є доповненням теоретичного матеріалу, його розвитком. Вони допомагають краще засвоїти матеріал і опанувати навички застосування математичних знань для прикладних цілей.

Третя частина кожного розділу, яка містить задачі для самостійної роботи з відповідями, дозволяє студентам перевірити своє розуміння тем і рівень

засвоєння теоретичного матеріалу і практичних методик, попрактикуватися в умінні розв'язувати фізичні задачі. Загалом в посібнику детально розібрано більш ніж 300 задач, і така ж кількість задач з відповідями запропонована для самоконтролю.

Усі викладки теоретичного матеріалу і розрахунки, що містяться у посібнику, проведені із використанням одиниць СІ (Системи Інтернаціональної). Застосування деяких загальноприйнятих несистемних одиниць оговорювалося окремо. В багатьох задачах, особливо коли розмірність результату не є очевидною, наведені перевірки розмірностей.

Підбір задач, що розглядаються у посібнику, проводився авторами протягом багатьох років викладання фізики: використовувалися задачі, взяті з численних джерел як вітчизняних, так і закордонних, зокрема, англомовних, а також з інтернету.

Така побудова посібника робить його дуже корисним для роботи в рамках онлайн навчання, самостійного освоєння матеріалу, підготовки до іспитів і заліків, а також для застосування як бази при вивченні предметів професійної підготовки. Він може бути застосованим для усіх тих, хто цікавиться фізикою і бажає поліпшити свій рівень її розуміння.

Матеріал посібника є узагальненням багаторічного досвіду колективу кафедри фізики НТУ «ХПІ». В редагуванні та написанні усіх розділів Посібника брала участь Любченко О.А. Авторами розділів, що увійшли в «Посібник з фізики. Частина 1. Механіка. Коливання і хвилі» є

1	Кінематика поступального руху	Ніколайчук Г.П.
2	Кінематика обертального руху	Перетятко А.О.
3	Динаміка поступального руху. Сили в динаміці	Кривоніс С.С.
4	Динаміка поступального руху. Закони збереження	Кочурова Г.М.
5	Динаміка обертального руху	Храмова Т.І.
6	Механічні коливання та хвилі	Андрєєва О.М.

1. КІНЕМАТИКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

1.1. Теоретичні відомості

1.1.1. Основні визначення кінематики поступального руху

Механіка є частиною фізики, що вивчає взаємодію руху, сил та енергії.

Вона поділяється на:

- **кінематику**, яка вивчає рух без врахування сил або енергій, які можуть бути залучені;
- **динаміку**, яка вивчає причини руху в вигляді сил та енергій;
- **статику**, яка вивчає сили без змін руху чи енергії.

В механіці використовуються такі **фізичні моделі**: матеріальна точка (елементарна маса) – об'єкт, розміром якого можна знехтувати в порівнянні з відстанню, на яку переміщається цей об'єкт; система матеріальних точок; тверде тіло, суцільне середовище.

Рух відбувається у просторі та в часі. Під **рухом** розуміється зміна положення точки (тіла) в просторі. Існують такі види руху:

1. **Поступальний** рух призводить до зміни місця розташування (будь-яка пряма, жорстко скріплена з тілом, рухається паралельно самій собі);
2. **Обертальний** рух відбувається при обертанні предмета (будь-яка пряма, жорстко скріплена з тілом, повертається на кут);
3. **Коливальний** рух – це будь-який рух чи зміна стану, що повторюється у часі, під час якого повторюються значення фізичних величин, які характеризують цей рух чи стан;
4. **Хаотичний** рух – це безладний рух, передбачуваний в теорії, але непередбачуваний на практиці, що робить його випадковим.

Кінематикою поступального руху називається розділ механіки, в якому вивчається рух тіл без врахування їх обертання і причин, за якими вони

рухаються. При поступальному русі всі точки тіла рухаються однаково. Розмірами тіла нехтують і розглядають його як матеріальну точку, за рухом якої стежать, використовуючи кінематичні рівняння руху.

Рух матеріальної точки характеризується траєкторією руху, координатами точки, довжиною шляху, переміщенням, швидкістю та прискоренням.

1.1.2. Траєкторія, довжина шляху, переміщення

Траєкторією називається лінія, вздовж якої рухається матеріальна точка. В залежності від типу траєкторії рух буває **прямолінійним** і **криволінійним**.

Рух тіла в просторі розглядається за допомогою використання системи координат, наприклад, декартової. Положення тіла у просторі, тобто його **координати**, задаються радіус-вектором $\vec{r}$, який має три проєкції на осі координат (x, y, z). Але в більшості випадків рух можна розглядати таким, що відбувається в певній площині. Тому надалі будемо розглядати рух в площині $ХОУ$ і не будемо враховувати координату z . Це суттєво не впливає на розгляд руху, але скорочує кількість рівнянь, які треба використовувати. Таким чином, розгляд руху спрощується з математичної точки зору. Під точкою O розуміють початок системи відліку.

Довжиною шляху ΔS (рис. 1.1) матеріальної точки за проміжок часу Δt називається сума довжин усіх ділянок траєкторії, які пройдені точкою за цей проміжок часу. Довжина шляху – скалярна величина, яка в СІ (Системі Інтернаціональній) вимірюється в метрах, що позначається як

$$[S] = \text{метр} = \text{м}.$$

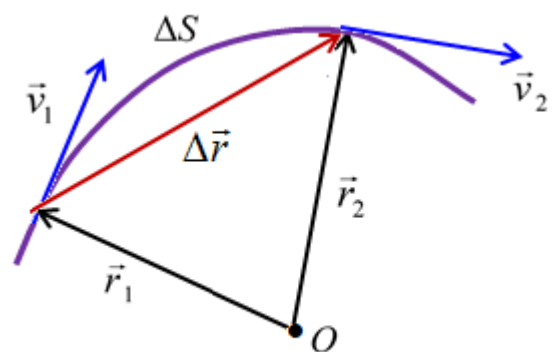


Рисунок 1.1

Переміщенням $\Delta \vec{r}$ матеріальної точки за проміжок часу Δt називається вектор, який проведено із початкової точки траєкторії (1) в кінцеву точку (2). З рис. 1.1 виходить, що $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, де $\vec{r}_1$ та $\vec{r}_2$ – це радіус-вектори матеріальної точки в моменти часу t_1 та t_2 , відповідно. Переміщення, як і довжина шляху, вимірюється в метрах,

$$[r] = \text{м.}$$

При прямолінійному русі шлях дорівнює модулю вектора переміщення.

Час вимірюється в секундах.

$$[t] = \text{с.}$$

1.1.3. Швидкість. Миттєва і середня швидкості

Швидкість – це величина, що показує, як швидко змінюється положення об'єкта в просторі.

Миттєвою називають швидкість тіла в певній точці траєкторії руху в певний момент часу, яка визначається як перша похідна від переміщення $\Delta \vec{r}$ за часом

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (1.1)$$

Оскільки похідна береться в певній точці, то напрямок вектора швидкості завжди буде спрямований вздовж дотичній до траєкторії руху в цій точці в напрямку руху, як показано на рис. 1.1.

Модуль миттєвої швидкості дорівнює похідній від довжини шляху за часом

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \dot{S}. \quad (1.2)$$

Швидкість вимірюється в метрах за секунду,

$$[v] = \text{м/с.}$$

Середньою швидкістю $\langle v \rangle$ матеріальної точки за проміжок часу Δt називається фізична величина, яка визначається співвідношенням

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.3)$$

Середня швидкість вимірюється в метрах за секунду.

Вектор швидкості $\vec{v}$ має дві проєкції на осі координат, які позначаються як v_x та v_y . На рис. 1.2 показана векторна діаграма швидкості, на якій α – це кут між вектором швидкості та його проєкцією на вісь OX . Виходячи з того, що вектор $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$, модуль вектора швидкості з діаграми швидкостей знаходиться за теоремою Піфагора:

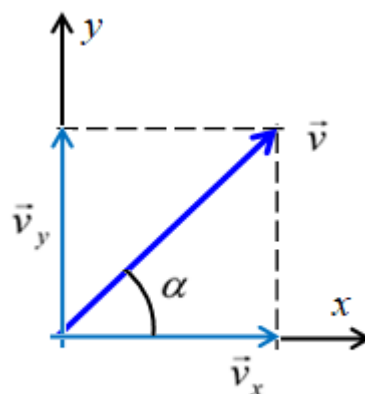


Рисунок 1.2

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (1.4)$$

Якщо тіло рухається в рухомому середовищі, або система відліку є рухомою, то треба враховувати відносну швидкість руху матеріальної точки $\vec{v}$, яка визначається за векторним законом складання швидкостей

$$\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{u}, \quad (1.5)$$

де $\vec{v}_T$ – швидкість тіла, а $\vec{u}$ – швидкість руху середовища, або системи відліку. Зазвичай рух тіла розглядається в нерухомій системі відліку ($\vec{u} = 0$).

Рух, коли швидкість об'єкта є незмінною, називається **рівномірним** рухом, а якщо швидкість змінюється за модулем чи напрямком, то **нерівномірним** або прискореним.

1.1.4. Прискорення. Нормальна та тангенціальна складові прискорення

Прискорення характеризує зміну вектора швидкості за часом. **Миттєве** прискорення – це прискорення тіла в певній точці траєкторії руху в певний момент часу.

Миттєве прискорення $\vec{a}$ матеріальної точки в даний проміжок часу визначається як перша похідна від вектора швидкості $\vec{v}$, або друга похідна від переміщення точки $\vec{r}$ за часом

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}. \quad (1.6)$$

Модуль прискорення дорівнює похідній від модуля швидкості, або другій похідній від довжини шляху за часом

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2 S}{dt^2} = \ddot{S}. \quad (1.7)$$

Прискорення вимірюється в метрах за секунду у квадраті.

$$[a] = \text{м/с}^2.$$

Під **середнім прискоренням** $\langle a \rangle$ розуміють відношення зміни швидкості руху тіла до проміжку часу Δt , за який відбулася ця зміна,

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.8)$$

Середнє прискорення вимірюється в метрах за секунду у квадраті.

Як будь-який вектор, вектор швидкості можна записати як добуток модуля (величини) швидкості і її напрямку.

$$\vec{v} = v \cdot \vec{e}_v, \quad (1.7)$$

де $\vec{e}_v$ – одиничний вектор, спрямований вздовж вектора швидкості.

З огляду на те, що прискорення характеризує зміну швидкості, розглянемо три типи руху:

1. $v \neq \text{const}$; $\vec{e}_v = \text{const}$ (нерівномірний прямолінійний рух)

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{e}_v) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_v + v \cdot \dot{\vec{e}}_v = \dot{v} \cdot \vec{e}_v = \vec{a}_\tau. \quad (1.8)$$

Тангенціальна складова прискорення (тангенціальне прискорення) $\vec{a}_\tau$ – це складова вектора прискорення, спрямована вздовж дотичної до траєкторії в певній точці руху, яка характеризує зміну швидкості по модулю. Тангенціальне (дотичне) прискорення збігається з напрямом швидкості при прискореному русі та протилежно напрямку швидкості при уповільненому русі.

2. $v = \text{const}; \quad \vec{e}_v \neq \text{const}$ (рівномірний криволінійний рух)

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{e}_v) = v \cdot \frac{d\vec{e}_v}{dt} = v \cdot \dot{\vec{e}}_v. \quad (1.9)$$

Треба з'ясувати, що таке похідна від одиничного вектору $\dot{\vec{e}}_v = \frac{d\vec{e}_v}{dt}$.

Згідно з визначенням похідної

$$\dot{\vec{e}}_v = \frac{d\vec{e}_v}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{e}_v}{\Delta t}.$$

За малий проміжок часу Δt одиничний вектор швидкості $\vec{e}_v$ повертається на кут (рис. 1.3, а)

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta s}{R} = \frac{v \cdot \Delta t}{R}.$$

Розглянемо два одиничні вектори $\vec{e}_{v1}$ та $\vec{e}_{v2}$, поєднавши їх початки (рис. 1.3, б). Ці вектори мають однакові модулі (бо обидва одиничні), але повернуті на кут $\Delta \varphi$ відносно один одного. При русі точки вздовж криволінійної траєкторії кінець одиничного вектора рухається вздовж дуги AB . Ця дуга дорівнює центральному куту, що вона стягує, тобто $\Delta \varphi$. Коли $\Delta t \rightarrow 0$ дуга AB стає майже рівною хорді AB : $AB = \cup AB = \Delta \varphi$, яка, своєю чергою, дорівнює довжині вектора $\Delta \vec{e}_v = |\Delta \vec{e}_v|$.

Отже, в граничному випадку

$$\Delta \vec{e}_v = |\Delta \vec{e}_v| = \Delta \varphi.$$

Якщо $\vec{n}$ і $\vec{n}'$ – нормалі до одиничних векторів, тоді $\Delta \vec{e}_v \approx |\Delta \vec{e}_v| \vec{n}' = \Delta \varphi \cdot \vec{n}'$.

Отже, при $\Delta t \rightarrow 0$, $\vec{n}' \rightarrow \vec{n}$.

Тоді похідна одиничного вектора становить

$$\dot{\vec{e}}_v = \frac{d\vec{e}_v}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{e}_v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi \cdot \vec{n}'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \cdot \Delta t \cdot \vec{n}'}{R \cdot \Delta t} = \frac{v}{R} \cdot \vec{n}. \quad (1.10)$$

А вираз (1.9) набуває вигляду

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{e}_v) = v \cdot \frac{d\vec{e}_v}{dt} = v \cdot \dot{\vec{e}}_v = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n} = \vec{a}_n. \quad (1.11)$$

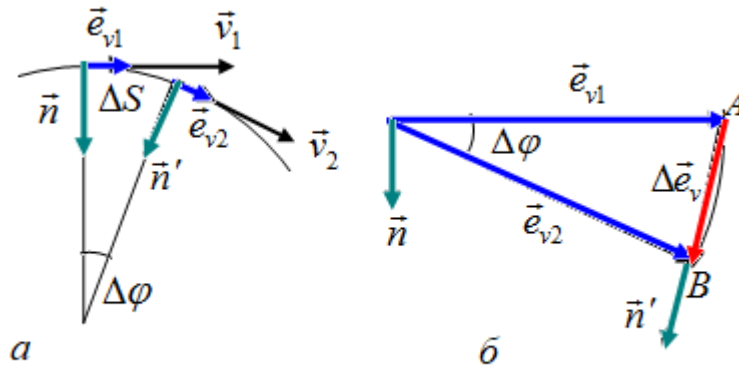


Рисунок 1.3

Нормальна складова прискорення (нормальне прискорення) характеризує зміну швидкості за напрямком. Часто нормальне прискорення називають **доцентровим**, оскільки воно завжди спрямоване вздовж радіуса кривизни траєкторії до її центру.

3. $v \neq \text{const}$; $\vec{e}_v \neq \text{const}$ (**нерівномірний криволінійний рух**)

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{e}_v) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_v + v \cdot \frac{d\vec{e}_v}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (1.12)$$

Як видно з рис. 1.4, вектори $\vec{a}_\tau$ і $\vec{a}_n$ є складовими вектора прискорення $\vec{a}$ точки, що рухається нерівномірно вздовж криволінійної траєкторії, тобто вони є проекціями прискорення на дві перпендикулярні, фізично обґрунтовані осі, що вибрані вздовж напрямку швидкості точки, що рухається, і

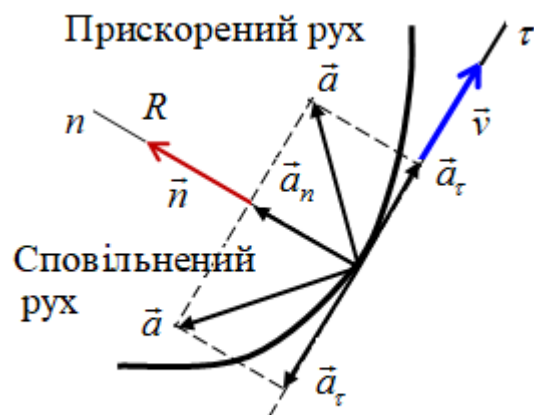


Рисунок 1.4

перпендикулярно цьому напрямку: осі τ та n . Якщо прискорення і швидкість утворюють гострий кут, то рух буде прискорений, а якщо кут між $\vec{a}$ і $\vec{v}$ тупий, то сповільнений.

Модуль прискорення дорівнює

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (1.13)$$

Якщо рух відбувається вздовж прямої лінії, то $a_n = 0$. Якщо тіло рухається по криволінійній траєкторії $a_n \neq 0$, тобто рух без прискорення вздовж криволінійної траєкторії неможливий.

При розгляданні задач нас, як правило, будуть цікавити скалярні кінематичні рівняння руху і значення скалярних величин характеристик руху. Тому розглянемо рівняння кінематики поступального руху матеріальної точки для різних випадків в скалярному вигляді.

1.1.5. Кінематичні рівняння для рівномірного, рівнозмінного і нерівномірного рухів

Рівномірний рух. При рівномірному русі швидкість є незмінною $v = \text{const}$, а залежність шляху, який пройшло тіло, від часу t має лінійний характер і визначається як

$$S = v \cdot t; \quad v = S/t. \quad (1.14)$$

В цьому випадку прискорення тіла $\vec{a} = 0$, а тангенціальна та нормальна складові $\vec{a}_\tau = 0$ та $\vec{a}_n = 0$, відповідно.

Якщо тіло рухається вздовж криволінійної траєкторії, нормальна складова прискорення завжди $\vec{a}_n \neq 0$, а тангенціальна може бути $a_\tau \neq 0$ або $a_n = \text{const}$ (в разі рівномірного руху по колу).

Рівнозмінний рух. При рівнозмінному русі прискорення є сталим $a = \text{const}$, а швидкість лінійно змінюється з часом. Залежність шляху, який пройшло

тіло, від часу t має квадратичний характер. Формули для швидкості та шляху мають наступний вигляд:

$$v = v_0 \pm at; \quad (1.15)$$

$$S = S_0 + v_0 t \pm \frac{at^2}{2}. \quad (1.16)$$

У формулах (1.15) та (1.16) v_0 та S_0 – значення швидкості та шляху на початку руху. Плюс береться якщо рух буде рівноприскореним, а мінус, якщо рух буде рівносповільненим. При розгляді задач береться проєкція цих рівнянь на осі координат OX та OY . Якщо за умовами задачі значення початкової швидкості v_0 та початкового шляху S_0 не вказані, то вони вважаються рівними нулю.

Якщо тіло рухається в полі тяжіння Землі тільки під дією сили тяжіння, то повне прискорення тіла буде дорівнювати **прискоренню вільного падіння** $\vec{a} = \vec{g}$. Прискорення вільного падіння завжди спрямоване вертикально донизу, а його проєкція на вісь OX буде дорівнювати нулю, а на вертикальну вісь OY $\vec{a} = \vec{g}$.

Якщо тіло рухається у вертикальному напрямку, то вертикальна складова швидкості та шлях, пройдений вздовж вертикалі, який часто позначається літерою h , описуються рівняннями

$$v_y = v_{0y} \pm gt; \quad (1.17)$$

$$h = h_0 + v_{0y} t \pm \frac{gt^2}{2}. \quad (1.18)$$

У випадку, коли тіло мало початкову горизонтальну швидкість, його рух є складним: в горизонтальному напрямку це рівномірний рух тіла, для якого

$$v_x = v_{0x} = \text{const}; \quad S = v_x \cdot t; \quad v_x = \frac{S}{t}, \quad (1.19)$$

а в вертикальному – описується рівняннями (1.17) та (1.18).

В рівняннях (1.19) під S розуміють шлях, який проходить тіло в горизонтальному напрямку за час t , маючи в цьому напрямку початкову швидкість v_{0x} .

У вертикальному напрямку, тобто вздовж осі OY , рух буде рівноприскореним з прискоренням вільного падіння $\vec{g}$. Рівняння для швидкості і шляху, який в цьому напрямку зручно позначати літерою h , в залежності від часу t будуть мати вигляд (1.17), (1.18).

Нерівномірний рух. При нерівномірному русі прискорення буде змінюватись з часом. Тому готових рівнянь, як при рівномірному або рівнозмінному русі, не існує. У випадку нерівномірного руху розгляд кінематичних рівнянь можливий лише при використанні інтегрально-диференціального аналізу.

Шлях, який проходить тіло, задають у вигляді певної функції часу $S = f(t)$. При цьому ця функція повинна мати ступінь залежності шляху S від часу t не нижчу трьох.

Швидкість знаходять шляхом диференціювання функції для шляху $S = f(t)$ за часом

$$v = \frac{dS}{dt} = \dot{S} . \quad (1.20)$$

При цьому швидкість теж буде функцією часу $v(t)$.

Довжину шляху, який проходить тіло за певний проміжок часу, знаходять інтегруючи функцію швидкості $v(t)$ за часом

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt . \quad (1.21)$$

Середню швидкість руху за певний проміжок часу знаходять наступним чином

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt . \quad (1.22)$$

Прискорення знаходиться диференціюванням функції швидкості $v(t)$ за часом

$$a = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = \frac{d^2 S}{dt^2} = \ddot{S} . \quad (1.23)$$

При цьому прискорення теж буде певною функцією часу $a(t)$.

Зміну значення швидкості Δv за певний проміжок часу знаходять, інтегруючи функцію прискорення $a(t)$ за часом

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt . \quad (1.24)$$

Середнє прискорення руху за певний проміжок часу є

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt . \quad (1.25)$$

Рівняння кінематики нерівномірного руху можна використовувати й при розгляді простіших видів руху. Наприклад, диференціюючи рівняння для довжини шляху (1.16) за часом, можна отримати рівняння (1.15) для швидкості рівнозмінного руху. І навпаки, інтегруючи рівняння (1.15) за часом, можна отримати рівняння (1.16). Інколи використання інтегрально-диференціального аналізу спрощує розгляд деяких задач, суттєво скорочуючи використання проміжних математичних розрахунків, що буде розглянуто надалі.

При розгляді задач треба обов'язково слідкувати за тим, щоб розмірності усіх складових, які входять у рівняння руху, були однаковими. Якщо це буде не так, то рівняння не матимуть фізичного сенсу.

1.2. Приклади розв'язання задач

Задача 1.2.1

Знайти середню швидкість руху, якщо: 1) автомобіль першу половину часу руху їхав зі швидкістю $v_1 = 40$ км/год, другу половину – зі швидкістю $v_2 = 60$ км/год; 2) автомобіль проїхав половину шляху зі швидкістю $v_1 = 40$ км/год, а другу половину – зі швидкістю $v_2 = 60$ км/год.

Дано:	Розв'язання
$v_1 = 40$ км/год	В задачі розглядається рівномірний рух, тому для її розв'язання треба використовувати рівняння (1.11), а до розрахунку середньої швидкості – (1.3). Спочатку треба записати формули в загальному вигляді, а потім підставляти
$v_2 = 60$ км/год	
1) $t_1 = t_2$	
2) $S_1 = S_2$	
$\langle v \rangle = ?$	числові дані та робити розрахунки. Треба пам'ятати, що згідно

з визначенням, середня швидкість дорівнює пройденому шляху, поділеному на час його подолання.

1) Якщо t – час руху, тоді за першу половину часу $t_1 = \frac{t}{2}$ буде подоланий шлях

$$S_1 = v_1 t_1 = v_1 \frac{t}{2}, \text{ а за другу половину часу } t_2 = \frac{t}{2} - \text{ шлях } S_2 = v_2 t_2 = v_2 \frac{t}{2}.$$

Пройдений шлях за весь час руху становить

$$S = S_1 + S_2 = \frac{t}{2}(v_1 + v_2).$$

Тоді середня швидкість

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t} = \frac{t(v_1 + v_2)}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{40 + 60}{2} = 50 \text{ км/год.}$$

2) Якщо швидкості руху на першій та другій половині шляху відрізняються, то першу половину шляху $S_1 = \frac{S}{2}$ автомобіль подолає за час

$$t_1 = \frac{S_1}{v_1}, \text{ а другу половину шляху } S_2 = \frac{S}{2} - \text{ за час } t_2 = \frac{S_2}{v_2}.$$

Тоді час, за який буде пройдений весь шлях S , становитиме

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S_1}{v_1} + \frac{S_2}{v_2} = \frac{S}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) = \frac{S}{2} \cdot \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}.$$

Виходячи з цього, середня швидкість дорівнюватиме

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t} = \frac{S \cdot 2v_1 v_2}{S(v_1 + v_2)} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 60}{40 + 60} = 48 \text{ км/год.}$$

В розрахунок входять лише швидкості, тому змінювати розмірності швидкостей в м/с не потрібно, і можна залишити їх в км/год.

Відповідь: $\langle v \rangle_1 = 50 \text{ км/год}$, $\langle v \rangle_2 = 48 \text{ км/год}$.

Задача 1.2.2

На човні, швидкість якого відносно води 5 м/с, перепливають річку завширишки 300 м, швидкість течії якої 2 м/с. На яку відстань знесе човен течією, якщо рухатися перпендикулярно до берега? Як необхідно спрямувати човен, щоб перетнути річку вздовж найкоротшого шляху? Яким буде час руху в обох випадках?

Дано:	Розв'язання
$v_{\text{ч}} = 5 \text{ км/с}$	Рух човна є складним: він рухається зі швидкістю $\vec{v}_{\text{ч}}$ перпендикулярно берегам річки та зі швидкістю $\vec{u}$ його зносить течією, як показано на рисунку (а). У кожному із рухів човен бере участь незалежно від іншого.
$u = 2 \text{ км/с}$	
$L = 300 \text{ м}$	
$S = ? \quad \alpha = ?$	
$t_1 = ? \quad t_2 = ?$	

За законом складання швидкостей результуюча швидкість $\vec{v} = \vec{v}_q + \vec{u}$.

а) Коли човен рухається перпендикулярно берегам, то відстань $L = 300$ м човен зі швидкістю $\vec{v}_q$ подолає за час

$$t_1 = \frac{L}{v_q} = \frac{300}{5} = 60 \text{ с.}$$

За цей же час t його знесе вздовж течії на відстань

$$S = ut = 2 \cdot 60 = 120 \text{ м.}$$

б) Для того, щоб перетнути річку вздовж найкоротшої відстані, необхідно спрямувати човен під кутом α до лінії, що з'єднує протилежні береги, як показано на рисунку (б). З трикутника швидкостей $\sin \alpha = \frac{u}{v_q} = \frac{2}{5} = 0,4$, звідки $\alpha = 23,58^\circ$.

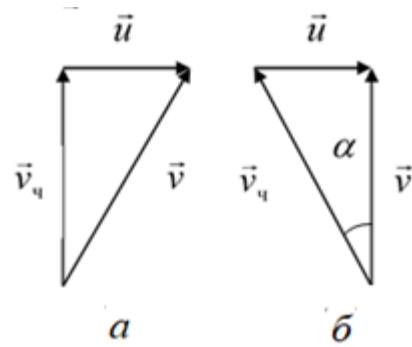
При цьому результуюча швидкість руху $\vec{v} = \vec{v}_q + \vec{u}$ за модулем дорівнює

$$v = \sqrt{v_q^2 - u^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21} = 4,58 \text{ м/с.}$$

Час переправи на інший берег становить

$$t_2 = \frac{L}{v} = \frac{300}{4,58} = 65,5 \text{ с.}$$

Відповідь: $S = 120$ м; $\alpha = 23,58^\circ$; $t_1 = 60$ с; $t_2 = 65,5$ с.



Задача 1.2.3

Кабіна ліфта підіймається рівноприскорено протягом часу $t_1 = 4$ с та сягає швидкості $v = 4$ м/с. З такою швидкістю кабіна рухається протягом $t_2 = 8$ с, а останні $t_3 = 3$ с до зупинки вона рухається рівносповільнено. Визначити переміщення кабіни ліфта.

Дано:	Розв'язання
$t_1 = 4 \text{ с}$	Переміщення – це вектор, що починається в початковій точці руху, а закінчується – в кінцевій точці. У випадку руху вздовж прямої довжина вектора переміщення збігається з величиною пройденого шляху.
$v = 4 \text{ м/с}$	
$t_2 = 8 \text{ с}$	
$t_3 = 3 \text{ с}$	Виходячи з умов задачі, маємо три етапи руху ліфта, що рухається прямолінійно вертикально доверху.
$S - ?$	

1) Рівноприскорений рух зі стану спокою. Тоді рух ліфта описують рівняння,

$$\begin{cases} S = S_0 + v_0 t \pm \frac{at^2}{2}, \\ v = v_0 \pm at, \end{cases}$$

в яких $S_0 = 0$ і $v_0 = 0$, тому

$$\begin{cases} S_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2}, \\ v = a_1 t_1. \end{cases}$$

З рівняння для швидкості

$$a_1 = \frac{v}{t_1} = \frac{4}{4} = 1 \text{ м/с}^2.$$

Тоді шлях, що пройшов ліфт на першому етапі руху, дорівнюватиме

$$S_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2} = \frac{1 \cdot 16}{2} = 8 \text{ м.}$$

2) На другому етапі ліфт рухається рівномірно, тому шлях, що подолає ліфт за час t_2 , становить

$$S_2 = v \cdot t_2 = 4 \cdot 8 = 32 \text{ м.}$$

3) Третій етап – рівносповільнений рух, наприкінці якого ліфт зупиняється. Тому його кінцева швидкість дорівнюватиме нулю.

$$\begin{cases} S_3 = vt_3 - \frac{a_3 t_3^2}{2}, \\ 0 = v - a_3 t_3. \end{cases}$$

З рівняння для швидкості визначимо прискорення

$$a_3 = \frac{v}{t_3} = \frac{4}{3} = 1,33 \text{ м/с}^2.$$

Шлях S_3 , що був подоланий за час t_3 , становитиме:

$$S_3 = vt_3 - \frac{a_3 t_3^2}{2} = 4 \cdot 3 - \frac{1,33 \cdot 9}{2} = 6 \text{ м.}$$

Загальне переміщення, що збігається з пройденим шляхом, дорівнює

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 8 + 32 + 6 = 46 \text{ м.}$$

Відповідь: $S = 46 \text{ м.}$

Задача 1.2.4

Рівняння прямолінійного руху матеріальної точки має вигляд $x = A + Bt + Ct^2$, де $A = 4 \text{ м}$, $B = 2 \text{ м/с}$, $C = -0,5 \text{ м/с}^2$. Визначити для моментів часу $t_1 = 2 \text{ с}$ та $t_2 = 4 \text{ с}$: 1) координату точки; 2) пройдений шлях; 3) переміщення; 4) миттєву швидкість; 5) миттєве прискорення; 6) середню швидкість руху за цей проміжок часу.

Дано:	Розв'язання
$x = A + Bt + Ct^2$ $A = 4 \text{ м}$ $B = 2 \text{ м/с}$ $C = -0,5 \text{ м/с}^2$	1) Рівняння руху точки $x = A + Bt + Ct^2$ є залежністю координати точки від часу $x = f(t)$. Це рівняння є квадратичним відносно часу, тому рух буде рівнозмінним. Координати точки в певні моменти часу знайдемо, підставивши $t_1 = 2 \text{ с}$ та $t_2 = 4 \text{ с}$ до рівняння: $x_1 = A + Bt_1 + Ct_1^2 = 4 + 2 \cdot 2 - 0,5 \cdot 2^2 = 6 \text{ м,}$ $x_2 = A + Bt_2 + Ct_2^2 = 4 + 2 \cdot 4 - 0,5 \cdot 4^2 = 4 \text{ м.}$ В початковий момент часу ($t_0 = 0$) координата точки становить $x_0 = A + Bt_0 + Ct_0^2 = 4 \text{ м.}$
$x_1 = ?$ $x_2 = ?$ $S_{01} = ?$ $S_{02} = ?$ $r_{01} = ?$ $r_{02} = ?$ $v_1 = ?$ $v_2 = ?$ $a = ?$ $\langle v \rangle = ?$	

2) Шлях, пройдений за 2 с руху, дорівнює

$$S_{01} = x_1 - x_0 = 6 - 4 = 2 \text{ м},$$

а за 4 с руху, врахувавши те, що пройдений шлях завжди є додатною величиною, одержимо

$$S_{02} = S_{01} + S_{12} = |x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| = |6 - 4| + |4 - 6| = 4 \text{ м}.$$

3) Модуль переміщення за перші 2 с руху дорівнює

$$|\vec{r}_{01}| = r_{01} = |x_1 - x_0| = 6 - 4 = 2 \text{ м},$$

а за 4 с руху:

$$|\vec{r}_{02}| = r_{02} = |x_2 - x_0| = 4 - 4 = 0.$$

4) Миттєву швидкість знайдемо як першу похідну від координати:

$$v = \frac{dx}{dt} = B + 2Ct.$$

Підставивши $t_1 = 2 \text{ с}$ та $t_2 = 4 \text{ с}$ в це рівняння, отримаємо:

$$v_1 = 0 \text{ м/с}; \quad v_2 = -2 \text{ м/с}.$$

5) Прискорення, яке є другою похідною від координати, дорівнює:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 2C = -1 \text{ м/с}^2.$$

Видно, що прискорення під час руху не змінюється і буде негативним, тому рух матеріальної точки є рівносповільненням.

6) Середню швидкість руху за проміжок часу від 2 до 4 секунд можна знайти за формулою (1.19), підставляючи в неї функцію для швидкості руху $v(t)$.

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \frac{1}{4 - 2} \int_2^4 (B + 2Ct) dt = \frac{1}{2} (Bt + Ct^2) \Big|_{t_1}^{t_2} = \\ &= \frac{1}{2} (4B - 2B) + \frac{1}{2} (16C - 4C) = \frac{1}{2} (8 - 4) + \frac{1}{2} (-8 + 2) = 2 - 3 = -1 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Середня швидкість буде негативною, бо рух рівносповільнений.

Відповідь: $x_1 = 6 \text{ м}$; $x_2 = 4 \text{ м}$; $S_{01} = 2 \text{ м}$; $S_{02} = 4 \text{ м}$; $r_{01} = 2 \text{ м}$; $r_{02} = 0$; $v_1 = 0 \text{ м/с}$; $v_2 = -2 \text{ м/с}$; $a = -1 \text{ м/с}^2$; $\langle v \rangle = -1 \text{ м/с}$.

Задача 1.2.5

Залежність пройденого шляху від часу описується рівнянням $S = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $C = 0,14 \text{ м/с}^2$ та $D = 0,01 \text{ м/с}^3$. Через який час після початку руху прискорення тіла буде 1 м/с^2 . Чому дорівнює середнє прискорення тіла за цей проміжок часу?

Дано:

$$S = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$$

$$C = 0,14 \text{ м/с}^2$$

$$D = 0,01 \text{ м/с}^3$$

$$a = 1 \text{ м/с}^2$$

$$t, \langle a \rangle - ?$$

Розв'язання

Рівняння руху точки $S = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$. Це рівняння є кубічним відносно часу, тому рух буде нерівномірним. Для нерівномірного руху всі розрахунки потрібно робити, використовуючи інтегрально-диференціальний аналіз. За умовами

задачі нам відоме значення прискорення, тому треба отримати рівняння для прискорення і з нього визначити час руху, а потім знайти значення середнього прискорення за цей проміжок часу.

Формулу для швидкості руху від часу знаходимо, диференціюючи функцію $S(t)$ за часом.

$$v = \frac{dS}{dt} = \dot{S} = B + 2Ct + 3Dt^2 = v(t).$$

Диференціюючи функцію $v(t)$ за часом, отримаємо прискорення, яке, своєю чергою, є також залежною від часу функцією

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = 2C + 6Dt = a(t).$$

Підставляючи числові дані в цю формулу, отримаємо значення часу

$$a = 1 = 2 \cdot 0,14 + 6 \cdot 0,01 \cdot t, \quad t = 12 \text{ с}.$$

Тепер можемо знайти середнє значення прискорення за цей проміжок часу

$$\langle a \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt = \frac{1}{12} \int_0^{12} (2C + 6Dt) dt = \frac{1}{12} (2Ct + 3Dt^2) \Big|_0^{12} =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 0,14 \cdot 12 + \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 0,01 \cdot 144 = 0,28 + 0,36 = 0,64 \text{ м/с}^2.$$

Значення постійних A і B не задані, тому що вони не використовуються при розв'язанні задачі.

Відповідь: $t = 12 \text{ с}$, $\langle a \rangle = 0,64 \text{ м/с}^2$.

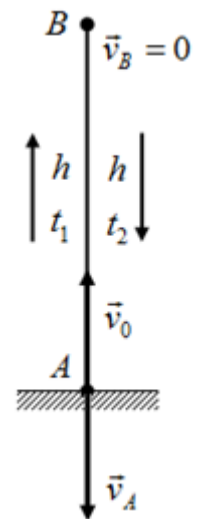
Задача 1.2.6

Тіло, що було кинуте вертикально вгору, повернулося на землю через $t = 3 \text{ с}$. Визначити висоту підйому тіла та його початкову швидкість.

Дано: $t = 3 \text{ с}$ $h = ?$ $v_0 = ?$	Розв'язання. Рух тіла догори на ділянці AB є рівносповільненим із прискоренням $-g$ та тривалістю t_1 . Рух донизу на ділянці BA – це рівноприскорений рух з прискоренням $+g$ тривалістю t_2 , тобто вільне падіння, оскільки швидкість в найвищій точці траєкторії B , де починається цей етап руху, дорівнює нулю. Рівняння, що описують рух на цих ділянках, а також рівняння, яке відображує умову задачі, щодо того, що загальний час руху складається із часів рухів догори t_1 та донизу t_2 , складають систему:
--	---

$$\begin{cases} h = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2}, \\ v_B = v_0 - gt_1, \\ h = \frac{gt_2^2}{2}, \\ v_A = gt_2, \\ t = t_1 + t_2. \end{cases}$$

Оскільки швидкість в найвищій точці B $v_B = 0$, то друге рівняння системи має вигляд $v_0 = gt_1$, звідки висота підйому



$$h = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = gt_1^2 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{gt_1^2}{2}.$$

Якщо порівняти цей вираз з третім рівнянням системи, то можна дійти висновку, що час підйому дорівнює часу падіння, тобто

$$t_1 = t_2 = \frac{t}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ с.}$$

З порівняння другого та четвертого рівнянь системи випливає, що початкова швидкість та швидкість приземлення є рівними по модулю (але спрямованими у протилежні боки), а саме

$$v_A = v_0 = gt_1 = 9,8 \cdot 1,5 = 14,7 \text{ м/с.}$$

Висота підйому тіла дорівнює

$$h = \frac{gt_1^2}{2} = \frac{9,8 \cdot 1,5^2}{2} = 11,03 \text{ м.}$$

Відповідь: $v_0 = 14,7 \text{ м/с}$, $h = 11,03 \text{ м}$.

Задача 1.2.7

Тіло, що знаходилось на висоті 2 метри від землі, кинули вгору зі швидкістю 30 м/с. Визначити: час польоту тіла до його падіння на землю; максимальну висоту підйому; кінцеву швидкість у момент падіння на землю.

Дано:	Розв'язання
$h_0 = 2 \text{ м}$	Тіло кинули вгору, коли воно знаходилося в точці A , тому на ділянці AB воно рухається рівносповільнено. Кінематичні рівняння, що описують рівноприскорений (рівносповільнений) рух, враховуючи, що в точці B швидкість тіла дорівнює нулю, мають вигляд
$v_0 = 30 \text{ м/с}$	
$t = ?$ $h = ?$	
$v_c = ?$	

$$\begin{cases} h_1 = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2}, \\ 0 = v_0 - gt_1. \end{cases}$$

З другого рівняння час підйому t_1 становить

$$t_1 = \frac{v_0}{g} = \frac{30}{9,8} = 3,06 \text{ с.}$$

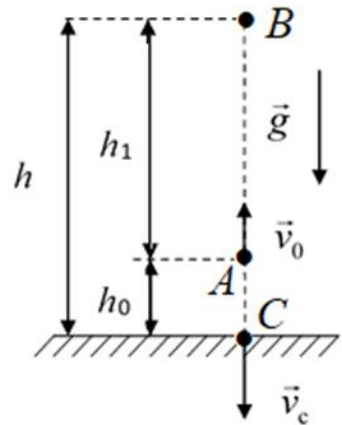
Підставивши це значення в першу формулу системи, знайдемо шлях від початкової точки A до найвищої точки B :

$$h_1 = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = 30 \cdot 3,06 - \frac{9,8 \cdot 3,06^2}{2} = 45,9 \text{ м.}$$

Тоді максимальна висота підйому (точка B), що відрахована від рівня землі, складе

$$h = h_0 + h_1 = 2 + 45,9 = 47,9 \text{ м.}$$

Рух донизу з точки B до точки C є вільним падінням, тобто рівноприскореним рухом з прискоренням $\vec{g}$ та нульовою початковою швидкістю, тому



$$\begin{cases} h = \frac{gt_2^2}{2}, \\ v_c = gt_2. \end{cases}$$

Визначений з першого рівняння системи час падіння t_2 становить

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 47,9}{9,8}} = 3,13 \text{ с.}$$

Шукана швидкість в точці C у момент торкання землі складає

$$v_c = gt_2 = 9,8 \cdot 3,13 = 30,6 \text{ м/с.}$$

Час польоту тіла до його падіння на землю, що складається з часу руху від точки старту A до найвищої точки B і вільного падіння з висоти до землі,

$$t = t_1 + t_2 = 3,06 + 3,13 = 6,19 \text{ с.}$$

Відповідь: $t = 6,19 \text{ с}$; $h = 47,9 \text{ м}$; $v_c = 30,6 \text{ м/с}$.

Задача 1.2.8

Тіло вільно рухається донизу в полі тяжіння Землі без початкової швидкості. Визначити шлях, який воно пройде за другу секунду руху.

Дано:	Розв'язання
$t_1 = 1 \text{ с}$	Тіло під час вільного падіння рухається рівноприскорено з прискоренням $\vec{g}$, при цьому його початкова швидкість дорівнює нулю. Цю задачу можна розв'язати двома способами.
$t_2 = 2 \text{ с}$	
$h = ?$	

1) Можна скористатися рівняннями для рівноприскореного руху і знайти шлях, який тіло пройде за першу секунду руху

$$h_1 = \frac{gt_1^2}{2} = \frac{9,8 \cdot 1^2}{2} = 4,9 \text{ м},$$

і за перші 2 секунди

$$h_2 = \frac{gt_2^2}{2} = \frac{9,8 \cdot 2^2}{2} = 19,6 \text{ м}.$$

Різниця між цими шляхами є відповіддю на питання задачі

$$h = h_2 - h_1 = 19,6 - 4,9 = 14,7 \text{ м}.$$

2) Рівняння для швидкості руху тіла матиме вигляд $v = gt$. Шлях, який воно проходить за цей час, можна визначити за рівнянням $\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$.

Використовуючи це рівняння, можна одразу знайти відповідь без проміжних розрахунків. Для цього треба порахувати визначений інтеграл в межах t_1 і t_2 .

$$h = \int_{t_1}^{t_2} gtdt = \frac{gt_2^2}{2} - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{g}{2}(t_2^2 - t_1^2).$$

Підставляючи числові значення, отримаємо

$$h = \frac{g}{2}(4 - 1) = 1,5g = 1,5 \cdot 9,8 = 14,7 \text{ м}.$$

Як бачимо, ми отримали однакову відповідь обома способами.

Відповідь: $h = 14,7 \text{ м}$.

Задача 1.2.9

Тіло падає з висоти 20 м без початкової швидкості. Визначити: шлях, що проходить тіло за першу та останню секунди падіння; середню швидкість падіння; середню швидкість на другій половині шляху.

Дано:

$$h = 20 \text{ м}$$

$$h_1 = ? \quad h_3 = ?$$

$$\langle v \rangle = ? \quad \langle v_2 \rangle = ?$$

Розв'язання

1) Рух на шляху AD – вільне падіння. Тому залежність

шляху від часу має вигляд $h = \frac{gt^2}{2}$. За першу секунду руху

(ділянка AB) тіло проходить шлях

$$h_1 = \frac{gt_1^2}{2} = \frac{9,8 \cdot 1^2}{2} = 4,9 \text{ м.}$$

Для того, щоб визначити шлях h_3 , що тіло проходить за останню секунду руху, спочатку знайдемо, за який проміжок часу тіло пройде весь шлях AD до землі. Із залежності шляху від часу для вільного падіння $h = \frac{gt^2}{2}$, визначимо

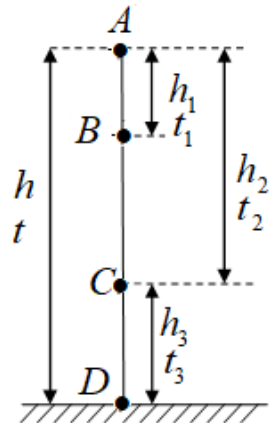
$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{9,8}} = 2,02 \text{ с.}$$

З умов задачі, час проходження ділянки CD дорівнює $t_3 = 1$ секунді. Тоді ділянку AC тіло пройде за $t_2 = t - t_3 = 2,02 - 1 = 1,02$ с. Враховуючи це, можна визначити шлях проходження ділянки AC :

$$h_2 = \frac{gt_2^2}{2} = \frac{9,8 \cdot 1,02^2}{2} = 5,1 \text{ м.}$$

Шуканий шлях CD дорівнюватиме

$$h_3 = h - h_2 = 20 - 5,1 = 14,9 \text{ м.}$$



2) Для визначення середньої швидкості на усьому шляху згадаємо, що середня швидкість за визначенням є відношення усього шляху h до часу його долаття t , тому

$$\langle v \rangle_I = \frac{h}{t} = \frac{20}{2,02} = 9,9 \text{ м/с.}$$

3) Для визначення середньої швидкості на другій половині шляху необхідно визначити час, за який буде подолана ця частина шляху. Першу половину шляху завдовжки 10 м тіло подолає за

$$t_I = \sqrt{\frac{2 \cdot (h/2)}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{9,8}} = 1,43 \text{ с.}$$

Тоді час проходження другої половини шляху складе

$$t_{II} = t - t_I = 2,02 - 1,43 = 0,59 \text{ с.}$$

Отже, середня швидкість на другій половині шляху становить

$$\langle v \rangle_{II} = \frac{(h/2)}{t_{II}} = \frac{10}{0,59} = 16,95 \text{ м/с.}$$

Відповідь: $h_1 = 4,9 \text{ м}$; $h_2 = 5,1 \text{ м}$; $h_3 = 14,9 \text{ м}$; $\langle v \rangle_I = 9,9 \text{ м/с}$; $\langle v \rangle_{II} = 16,95 \text{ м/с}$.

Задача 1.2.10

З вежі заввишки 25 м горизонтально зі швидкістю $v_x = 10 \text{ м/с}$ кинули тіло.

Знайти: час t падіння тіла; відстань l від підстави вежі до точки, де воно впаде на землю; швидкість v наприкінці падіння; кут φ , який складе траєкторія тіла із горизонтом в точці його приземлення.

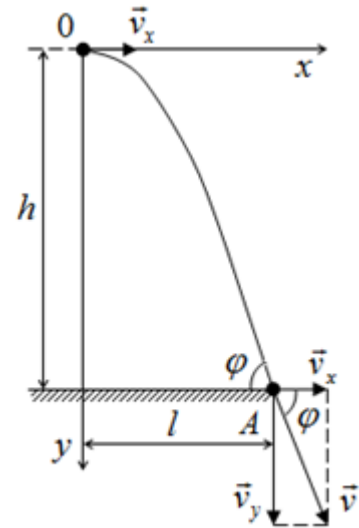
Дано:	Розв'язання
$h = 25 \text{ м}$	Рух тіла, що було кинуте з горизонтальною швидкістю $\vec{v}_x$, є складним, бо тіло бере участь у двох простих рухах: рівномірному – вздовж горизонтального напрямку та рівноприскореному з прискоренням g – вздовж вертикалі.
$v_x = 10 \text{ м/с}$	
$t = ? \quad l = ?$	
$v = ? \quad \varphi = ?$	

Тому рух на ділянці OA описується рівняннями:

$$\begin{cases} x = v_x t, \\ v_x = \text{const}, \\ y = \frac{gt^2}{2}, \\ v_y = gt. \end{cases}$$

Для точки A ці рівняння мають вид:

$$\begin{cases} l = v_x t, \\ h = \frac{gt^2}{2}, \\ v_y = gt. \end{cases}$$



З другого рівняння системи знайдемо час руху

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25}{9,8}} = 2,26 \text{ с.}$$

Протягом цього часу тіло віддалялося від вежі зі швидкістю v_x , тому відстань від підстави вежі до точки приземлення з першого рівняння системи визначається як

$$l = v_x t = 10 \cdot 2,26 = 22,6 \text{ м.}$$

Вертикальна складова швидкості в точці A з останнього рівняння системи є

$$v_y = gt = 9,8 \cdot 2,26 = 22,15 \text{ м/с.}$$

Швидкість в точці A є векторна сума її горизонтальної та вертикальної складових

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y,$$

а модуль швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{100 + 490,5} = 24,3 \text{ м/с.}$$

Як видно з рисунка, кут φ , що утворює траєкторія тіла з землею, можна вважати рівним куту φ в трикутнику швидкостей в точці A , тому

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{22,15}{10} = 2,215,$$

звідки $\varphi = \arctg 2,215 = 68,7^\circ$.

Відповідь: $t = 2,26$ с; $l = 22,6$ м; $v = 24,3$ м/с; $\varphi = 68,7^\circ$.

Задача 1.2.11

Для тіла, що було кинуте з горизонтальною швидкістю $v_x = 10$ м/с, через час $t = 2$ с після початку руху знайти: нормальне та тангенціальне прискорення; а також радіус кривини траєкторії руху.

Дано:	Розв'язання
$t = 2$ с	Детальний аналіз руху тіла, що було кинуте з горизонтальною швидкістю v_x , наведений у попередній задачі 1.2.10.
$v_x = 10$ м/с	
$a_n = ?$ $a_\tau = ?$	Використовуючи цей розгляд, можна знайти вертикальну складову швидкості через $t = 2$ с після початку руху з рівняння
$R = ?$	

$$v_y = gt = 9,8 \cdot 2 = 19,6 \text{ м/с.}$$

Швидкість тіла в точці A на рисунку є векторна сума її горизонтальної та вертикальної складових

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y,$$

а модуль швидкості становить

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{10^2 + 19,6^2} = 22 \text{ м/с.}$$

Повне прискорення в точці A – прискорення вільного падіння $\vec{g}$ – спрямоване вертикально донизу. Розкладемо його на дві складових:

тангенціальну $\vec{a}_\tau$, що описує зміну швидкості за модулем та збігається за напрямком з нею, та нормальну $\vec{a}_n$, що описує зміну швидкості за напрямком і спрямована перпендикулярно швидкості, вздовж радіусу кривизни R . Вектори $\vec{v}_x$, $\vec{v}_y$ та $\vec{v}$ утворюють прямокутний трикутник швидкостей, а вектори $\vec{a}_n$, $\vec{a}_\tau$, $\vec{a} = \vec{g}$ – прямокутний трикутник прискорень. Як видно з рисунка, ці трикутники є подібними, бо мають загальний кут α , а отже, їх сторони пропорційні:

$$\frac{a}{v} = \frac{a_\tau}{v_y} = \frac{a_n}{v_x}.$$

Звідси тангенціальне прискорення

$$a_\tau = a \frac{v_y}{v} = g \frac{v_y}{v} = 9,8 \cdot \frac{19,6}{22} = 8,73 \text{ м/с}^2,$$

нормальне прискорення

$$a_n = a \frac{v_x}{v} = g \frac{v_x}{v} = 9,8 \cdot \frac{10}{22} = 4,45 \text{ м/с}^2.$$

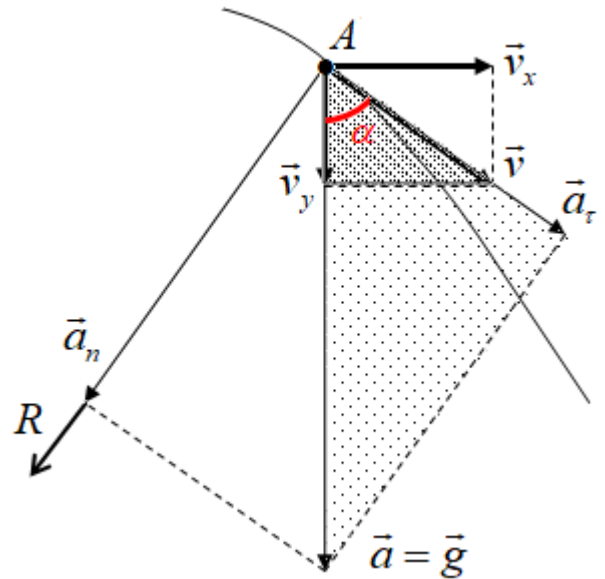
З огляду на те, що нормальне прискорення залежить від швидкості та радіусу кривини траєкторії руху і дорівнює

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

радіус кривини траєкторії становить

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{22^2}{4,45} = 108,8 \text{ м.}$$

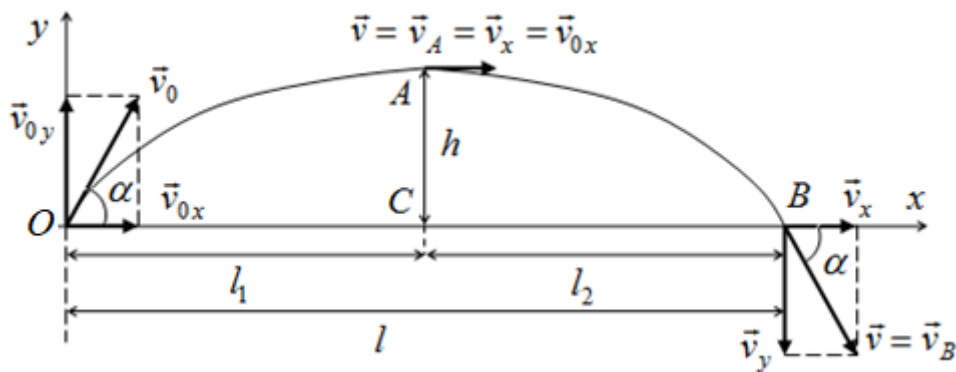
Відповідь: $a_n = 4,45 \text{ м/с}^2$; $a_\tau = 8,73 \text{ м/с}^2$; $R = 108,8 \text{ м.}$



Задача 1.2.12

Тіло було випущено під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0 . Визначити час польоту тіла t , дальність польоту l , швидкість в момент падіння на землю v , максимальну висоту підйому h та рівняння траєкторії польоту $y(x)$.

Дано:	Розв'язання
v_0	Виберемо систему координат таким чином, щоб початок координат збігався із місцем випускання тіла
α	(точка O), вісь y була направлена вертикально вгору, вісь x – горизонтально. Причому площину xy виберемо так, щоб вектори $\vec{v}$ та $\vec{g}$ лежали в цій площині. Початок відліку часу сумістимо з моментом старту.
$t = ? \quad l = ? \quad h = ?$	
$y(x) = ? \quad v_B = ?$	



Рух тіла є двовимірним. Можна припустити, що він складається з двох рухів – горизонтального руху вздовж осі x і вертикального руху вздовж осі y . Горизонтальний рух є рівномірним, вертикальний рух є прискореним оскільки на тіло діє сила тяжіння. Тіло збільшує свою висоту до максимуму, де його вертикальна складова швидкості стає нульовою. Після цього тіло змінює свій вертикальний напрямок і повертається на землю, вдаряючись об землю зі швидкістю $\vec{v}_B$. Початкову швидкість тіла $\vec{v}_0$ можна розкласти на дві

перпендикулярні складові $\vec{v}_{0x}$ та $\vec{v}_{0y}$ вздовж осі x і осі y , відповідно, величини яких становлять

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha. \end{cases}$$

Розглянемо уповільнений рух від початкової точки O до максимальної висоти (точка A) вздовж траєкторії OA за час t_1 . Він описується наступною системою кінематичних рівнянь:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \\ v_x = v_{0x} + a_x t, \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}, \\ v_y = v_{0y} + a_y t. \end{cases}$$

При нашому виборі системи координат $x_0 = 0$, $a_x = 0$, $y_0 = 0$, $a_y = -g$, рівняння для координат та складових швидкості під час руху вздовж OA запишуться як

$$\begin{cases} x = v_{0x}t_1, \\ v_x = v_{0x}, \\ y = v_{0y}t - \frac{gt_1^2}{2}, \\ v_y = v_{0y} - gt_1. \end{cases}$$

В точці A , де вертикальна складова швидкості дорівнюватиме нулю,

$$\begin{cases} l_1 = v_{0x}t_1, \\ h = v_{0y}t - \frac{gt_1^2}{2}, \\ 0 = v_{0y} - gt_1. \end{cases}$$

Час руху до найвищої точки дорівнює

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Максимальна висота h та подоланий шлях l_1 становитимуть, відповідно,

$$h_{\max} = \frac{gt_1^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$

$$l_1 = \frac{v_{0x}v_y}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{2g}.$$

Як було показано раніше (див. задачу 1.2.6), час підйому під час вертикального руху дорівнює часу спуску. Вважаючи на те, що тіло бере участь незалежно як у вертикальному, так і у горизонтальному рухах, час руху вздовж траєкторії AB дорівнює часу руху вздовж OA $t_2 = t_1$, отже загальний час руху від початкової до кінцевої точки становитиме

$$t = 2t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

За рівні проміжки часу $t_1 = t_2$ тіло долає рівні відстані, тому горизонтальна дальність польоту (загальна горизонтальна відстань від точки старту до точки, де тіло повертається на землю)

$$l = 2l_1 = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}.$$

Під час руху від точки O до точки B горизонтальна складова швидкості залишається незмінною, а вертикальна – дорівнює за модулем і протилежно спрямована вертикальній складовій v_{0y} (див. результат задачі 1.2.6).

Тому швидкість в точці приземлення дорівнює швидкості, з якою тіло почало рухатися

$$v_B = v_0.$$

Напрямок швидкості складає такий же кут з горизонталлю α , але він симетричний відносно осі x .

Рівняння траєкторії руху можна отримати з рівнянь для координат. Для цього визначимо час t з рівняння для координати $x(t)$ та підставимо його у рівняння для координати $y(t)$:

$$t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{x}{v_0 \cos \alpha},$$

$$y(x) = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 = Ax - Bx^2,$$

де $A = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha, \quad B = \frac{g}{2v_{0x}^2} = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$

Отримане рівняння $y(x) = Ax - Bx^2$ це є рівнянням параболи, гілки якої симетричні відносно найвищої точки траєкторії A .

Відповідь: час руху $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$; дальність польоту $l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$; швидкість

в момент падіння $v_B = v_0$; максимальна висота підйому $h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$; рівняння

траєкторії польоту $y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2.$

Задача 1.2.13

Під кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонту кинули тіло з початковою швидкістю $v_0 = 20$ м/с. Через який час t воно рухатиметься під кутом $\beta = 45^\circ$ до горизонту?

Дано:

$v_0 = 20$ м/с

$\alpha = 60^\circ$

$\beta = 45^\circ$

Розв'язання.

Рух тіла, кинутого під кутом α до горизонту, було розглянуто в задач 1.2.12. Траєкторія руху буде парабою. Вектор швидкості безперервно буде змінюватися за напрямком.

$t_{OA} = ? \quad t_{OB} = ?$

Під час руху існує два моменти часу, коли вектор швидкості складає кут β з горизонталлю, а саме, коли тіло знаходиться у точках A і B , спершу на підйомі, а потім на спуску.

З трикутника, що утворюють швидкість тіла, її горизонтальна та вертикальна складові в точці A : $\operatorname{tg}\beta = v_y/v_x$, звідки $v_y = v_x \operatorname{tg}\beta$.

З огляду на те, що горизонтальна та вертикальна складові швидкості в цій точці становлять

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt,$$

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha,$$

отримуємо рівняння

$$v_0 \sin \alpha - gt = v_0 \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}\beta,$$

звідки час подолання шляху OA дорівнює

$$t_{OA} = \frac{v_0}{g} (\sin \alpha - \operatorname{tg}\beta \cdot \cos \alpha) = \frac{20}{9,8} (\sin 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \cos 60^\circ) = 0,75 \text{ с.}$$

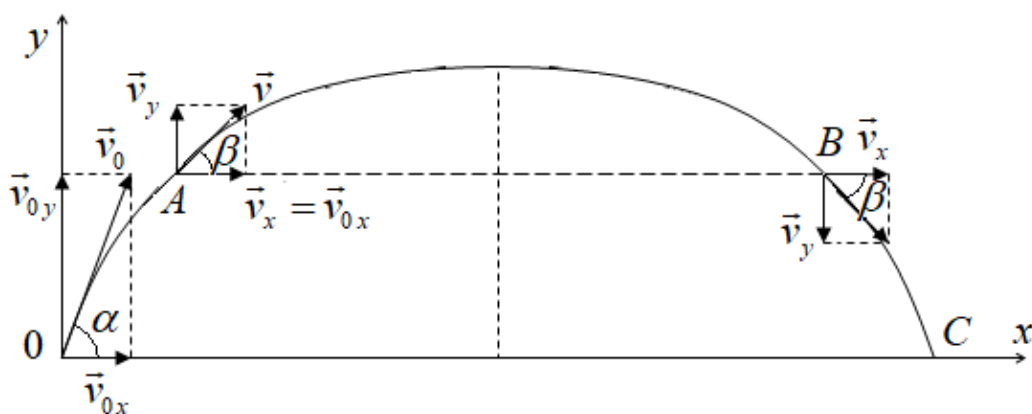
Як видно з рисунка, точка B розташована симетрично точці A , тому

$$t_{OA} = t_{BC},$$

$$t_{OB} = t_{OC} - t_{BC} = t_{OC} - t_{OA}.$$

Використавши результат задачі 1.2.12, знайдемо час польоту тіла, кинутого під кутом α до горизонту,

$$t_{OC} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2 \cdot 20 \sin 60^\circ}{9,8} = 3,53 \text{ с.}$$



Тоді

$$t_{OB} = t_{OC} - t_{OA} = 3,53 - 0,75 = 2,78 \text{ с.}$$

Відповідь: $t_{OA} = 0,75 \text{ с}$; $t_{OB} = 2,78 \text{ с}$.

Задача 1.2.14

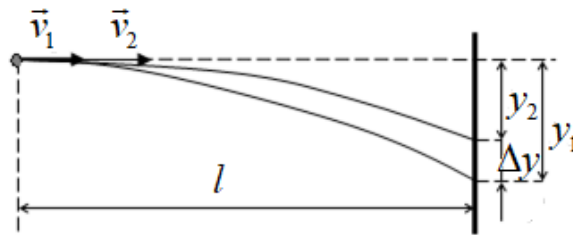
В мішень з відстані $l = 50$ метрів зроблено два постріли в горизонтальному напрямку при однаковому наведенні рушниці. Швидкість першої кулі 320 м/с, другої – 350 м/с. Знайти відстань між пробоїнами.

Дано:	Розв'язання
$l = 50$ м	Куля бере участь у двох рухах: у рівномірному русі вздовж горизонталі з постійною швидкістю v_x та в рівноприскореному русі донизу з прискоренням $\vec{g}$.
$v_1 = 320$ м/с	
$v_2 = 350$ м/с	
$\Delta y = ?$	Час руху до мішені за формулою для рівномірного

горизонтального руху $t = l/v_x$ для першої та для другої кулі, відповідно, є

$$t_1 = \frac{l}{v_{x1}} = \frac{50}{320} = 0,156 \text{ с}, \quad t_2 = \frac{l}{v_{x2}} = \frac{50}{350} = 0,143 \text{ с}.$$

За цей час кожна куля зміститься по вертикалі на відстань $y = \frac{gt^2}{2}$, при цьому відповідні зміщення становлять для першої та другої кулі



$$y_1 = \frac{gt_1^2}{2} = \frac{g}{2} \left(\frac{l}{v_{x1}} \right)^2, \quad y_2 = \frac{gt_2^2}{2} = \frac{g}{2} \left(\frac{l}{v_{x2}} \right)^2.$$

Тоді відстань між пробоїнами складе

$$\Delta y = \frac{g}{2} (t_1^2 - t_2^2) = \frac{9,8}{2} (0,156^2 - 0,143^2) = 1,89 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Відповідь: $\Delta y = 1,89 \cdot 10^{-2}$ м.

Задача 1.2.15

Два літаки, що рухаються зі швидкостями $v_1 = v_2 = v = 135$ м/с на висоті $h = 2$ км, скидають пусті паливні баки, при цьому перший літак летить під кутом $\alpha = 15^\circ$ вище горизонталі, а другий – під кутом $\alpha = 15^\circ$ нижче горизонталі. Знайти величину і напрямок швидкості, з якою паливні баки вдаряється об землю, а також кути, які траєкторії баків утворюють з горизонталлю в момент приземлення.

Дано:

$$v_{01} = v_{02} = v_0 = 135 \text{ м/с}$$

$$h = 2 \text{ км}$$

$$\alpha = 15^\circ$$

$$v_1 = ? \quad v_2 = ?$$

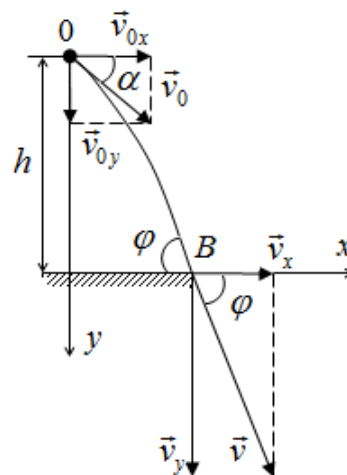
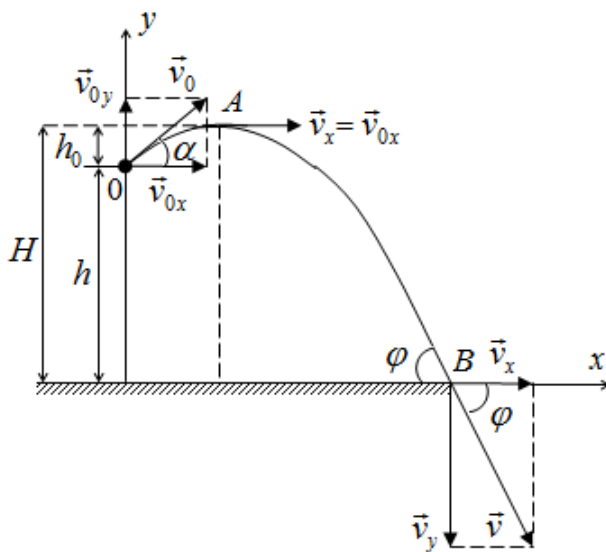
$$\varphi_1 = ? \quad \varphi_2 = ?$$

Розв'язання

Швидкості паливних баків у момент їх випуску такі ж, як і швидкості літаків, з яких вони випускаються, але спрямовані по-різному, тому шляхи, що подолані баками, будуть різними.

1) Складові швидкості для бака з першого літака в початковий момент його руху

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha = 135 \cdot \cos 15^\circ = 130,4 \text{ м/с,} \\ v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha = 135 \cdot \sin 15^\circ = 34,9 \text{ м/с.} \end{cases}$$



Вертикальна складова швидкості v_{0y} спрямована догори, прискорення вільного руху – донизу, тому

$$v_y = v_{0y} - gt.$$

Цей рух триває, доки вертикальна складова швидкості не дорівнюватиме нулю

$$0 = v_{0y} - gt.$$

Час цього руху вгору

$$t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{34,9}{9,8} = 3,56 \text{ с.}$$

За цей час бак підіймається на висоту

$$h_0 = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = 34,9 \cdot 3,56 - \frac{9,8 \cdot 3,56^2}{2} \approx 62 \text{ м.}$$

Висота найвищої точки траєкторії A складає

$$H = h + h_0 = 2000 + 62 = 2062 \text{ м.}$$

Час руху до землі з точки A становить

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2062}{9,8}} = 20,5 \text{ с.}$$

Тоді вертикальна складова швидкості в момент приземлення

$$v_y = gt = 9,8 \cdot 20,5 = 201 \text{ м/с.}$$

Враховуючи, що горизонтальна складова швидкості не змінюється через відсутність опору повітря і дорівнює $v_x = v_{0x} = 130,4 \text{ м/с}$, швидкість першого бака під час приземлення становить $\vec{v}_1 = \vec{v}_x + \vec{v}_y$. Тоді величина швидкості

$$v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{130,4^2 + 201^2} = 239,6 \text{ м/с.}$$

Кут, який траєкторія утворює з горизонталлю

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{v_y}{v_x} = \frac{201}{130,4} = 1,54,$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} 1,54 = 57^\circ.$$

2) Рух другого бака є прискореним рухом з початковою вертикальною швидкістю, спрямованою вниз

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha = 135 \cdot \sin 15^\circ = 34,9 \text{ м/с.}$$

Горизонтальна складова швидкості постійна через відсутність опору повітря

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha = 135 \cdot \cos 15^\circ = 130,4 \text{ м/с.}$$

Рух, що бак починає на висоті $h = 2000 \text{ м}$, триває

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000}{9,8}} = 20,2 \text{ с.}$$

Вертикальна складова швидкості становить

$$v_y = v_{0y} + gt = 34,9 + 9,8 \cdot 20,2 = 232,9 \text{ м/с.}$$

Отже, швидкість бака, кинутого з другого літака, дорівнює

$$v_2 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{130,4^2 + 232,9^2} = 266,9 \text{ м/с,}$$

а складає з горизонталлю кут:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{v_y}{v_x} = \frac{232,9}{130,4} = 1,785,$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} 1,785 = 60^\circ.$$

Відповідь: $v_1 = 239,6 \text{ м/с}$; $v_2 = 266,9 \text{ м/с}$; $\varphi_1 = 57^\circ$; $\varphi_2 = 60^\circ$.

1.3. Задачі для самостійної роботи

1.3.1. Пароплав рухається по річці від пункту A до пункту B зі швидкістю 16 км/год, а в зворотному напрямку – 10 км/год. Знайти середні швидкості пароплава і течії річки.

Відповідь: $\langle v_{\text{п}} \rangle = 13$ км/год, $\langle v_{\text{р}} \rangle = 3$ км/год.

1.3.2. Три чверті свого шляху автомобіль пройшов зі швидкістю 60 км/год, останню частину шляху – зі швидкістю 80 км/год. Яка середня швидкість руху автомобіля?

Відповідь: $\langle v \rangle = 64$ км/год.

1.3.3. Автомобіль, рухаючись рівноприскорено, через час 10 с після початку руху досягнув швидкості 36 км/год. Визначити прискорення, з яким рухався автомобіль. Який шлях він при цьому пройшов? Який шлях автомобіль пройшов за останню секунду?

Відповідь: $a = 1$ м/с², $S = 50$ м, $l = 9,5$ м.

1.3.4. Рівняння руху матеріальної точки вздовж осі Ox має вигляд $x = A + Bt + Ct^3$, де $A = 2$ м, $B = 1$ м/с, $C = 0,5$ м/с³. Знайти координату x , швидкість v та прискорення a точки в момент часу 2 с.

Відповідь: $x = 8$ м, $v = 7$ м/с, $a = 6$ м/с².

1.3.5. Залежність пройденого тілом шляху S від часу t описується рівнянням $S = At - Bt^2 + Ct^3$, де $A = 2$ м/с, $B = 3$ м/с² та $C = 4$ м/с³. Знайти залежність швидкості та прискорення від часу; відстань, пройдену тілом; швидкість та прискорення тіла через 2 с після початку руху.

Відповідь: $v(t) = A - 2Bt + 3Ct^2$, $a(t) = -2B + 6Ct$, $S = 24$ м, $v = 38$ м/с, $a = 42$ м/с².

1.3.6. Тіло, що було кинуто вертикально вгору, знаходилося на одній висоті 8,6 м двічі з інтервалом 3 с. Нехтуючи опором повітря, знайдіть початкову швидкість кинутого тіла.

Відповідь: $v_0 = 19,6$ м/с.

1.3.7. Тіло, що вільно падає зі стану спокою, у кінці першої половини шляху досягає швидкості $v_1 = 20$ м/с. Яка швидкість v_2 тіла у момент падіння? Який час t воно падає і з якої висоти h ?

Відповідь: $v_2 = 28,3$ м/с, $t = 2,89$ с, $h = 40,8$ м.

1.3.8. З однієї точки падають два тіла. Друге тіло розпочало падати на 3с пізніше першого. Визначити відстань між тілами через 10 с після падіння першого тіла і знайти, в скільки разів швидкість першого тіла більше швидкості другого в цей же момент часу.

Відповідь: $S = 250$ м, $v_1/v_2 = 1,4$.

1.3.9. З балкону кинули м'яч вертикально вгору з початковою швидкістю 5 м/с. Через 2 с м'яч упав на землю. Визначити висоту балкону над землею та швидкість м'яча в момент удару о землю.

Відповідь: $h = 9,6$ м, $v = 14,6$ м/с.

1.3.10. Тіло кинуто з поверхні землі під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с. Не враховуючи опір повітря, знайти:

- а) швидкість тіла в момент часу $t_1 = 0,8$ с; б) час підйому та час спуску;
в) дальність польоту; д) радіус кривини траєкторії в момент часу t_1 .

Відповідь: $v = 2,16$ м/с, $t_{\text{п}} = 0,51$ с, $t_{\text{с}} = 0,51$ с, $L = 8,84$ м, $R = 0,12$ м.

1.3.11. Камінь кидають горизонтально з вершини гори, яка має кут нахилу 30° . З якою початковою швидкістю треба кинути камінь, щоб він упав на відстані 10 м від вершини?

Відповідь: $v_0 = 8,5$ м/с.

1.3.12. Тіло починає вільно падати з висоти 45 м. В ту саму мить з точки на висоті 24 м кидають вгору друге тіло. Тіла падають на землю одночасно. Знайти початкову швидкість другого тіла.

Відповідь: $v_{02} = 6,7$ м/с.

1.3.13. Знайти нормальну і тангенціальну складові прискорення тіла, яке кинуто з початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту, через $t_1 = 0,7$ с.

Відповідь: $a_\tau = 2$ м/с², $a_n = 9,6$ м/с².

1.3.14. Вздовж дуги кола радіуса 10 м рухається точка. В певний момент часу нормальне прискорення точки дорівнює 4,9 м/с²; вектор повного прискорення утворює у цей момент з вектором нормального прискорення кут 60° . Знайти швидкість та тангенціальне прискорення точки.

Відповідь: $v = 7$ м/с, $a_\tau = 8,49$ м/с².

1.3.15. Точка рухається по колу радіусом $R = 4$ м згідно з рівнянням $S = 10 - 2t + t^2$ (м), де S – координата, яка відраховується вздовж траєкторії руху. Знайти тангенціальне a_τ , нормальне a_n та повне прискорення a точки наприкінці другої секунди.

Відповідь: $a_\tau = 2$ м/с²; $a_n = 1$ м/с²; $a = 2,24$ м/с².

2. КІНЕМАТИКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

2.1. Теоретичні відомості

2.1.1. Основні величини кінематики обертального руху

Кінематика обертального руху – це розділ механіки, який описує рух матеріальної точки по колу та обертання абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі. **Абсолютно тверде тіло** (далі, тіло або тверде тіло) – об’єкт, що є сукупністю матеріальних точок, відстані між якими зберігаються в процесі будь-яких рухів, що здійснюються цим тілом.

Обертальним рухом тіла навколо нерухомої осі називають такий його рух, при якому точки тіла здійснюють рух по колах, центри яких знаходяться на нерухомій у даній системі відліку прямій, яка розташована перпендикулярно площинам цих кіл. Пряма, на якій розташовані центри кіл, має назву **осі обертання**.

Якщо вісь обертання має з тілом спільні точки, тобто проходить через тіло, тоді ці точки є нерухомими. Якщо вісь обертання не має з тілом спільних точок, тобто знаходиться поза тілом, тоді всі точки тіла здійснюють рух по колах, центри яких розташовані на осі обертання.

Обертальний рух (так само як і поступальний) належить до простого руху тіла в тому сенсі, що його не можна подати як сукупність яких-небудь інших рухів.

Для опису руху матеріальної точки по колу цілком достатньо розглянути рух довільної точки твердого тіла, яка не належить осі обертання.

Насамперед треба визначити положення тіла, тобто ввести у розгляд параметри, за допомогою яких можна однозначно визначити положення тіла відносно осі обертання (у такому випадку природно визначати положення тіла саме відносно осі обертання). Для визначення положення тіла при його

обертальному русі навколо нерухомої осі цілком достатньо ввести в розгляд всього один параметр – кут φ , який утворює нерухома площина P_1 , що проходить через вісь обертання, з площиною P_2 , яка незмінно пов'язана з тілом, що обертається, і також проходить через вісь обертання. Кут φ вважають величиною алгебраїчною. Для того, щоб визначити позитивний напрямок відліку кута φ , поєднаємо координатну вісь z з віссю обертання, тоді позитивний напрямок відліку кута φ визначиться правилом правого гвинта (рис. 2.1, а): кут φ вважається позитивним, якщо він відкладений від нерухомої площини P_1 в напрямку за годинниковою стрілкою, якщо дивитися уздовж осі z ; і від'ємним, якщо проти годинникової стрілки. Введений у розгляд кут φ визначає

положення рухомої площини P_2 : оскільки площина P_2 незмінно пов'язана з тілом, що обертається, то значення кута φ також визначає положення і самого тіла (рис. 2.1, б).

При обертанні тіла навколо осі z кут повороту φ змінюється з часом згідно з функцією

$$\varphi = \varphi(t), \quad (2.1)$$

що є *законом обертального руху тіла*. Якщо відома залежність кута повороту від часу, завжди можна для кожного конкретного моменту часу t однозначно визначити відповідне йому значення кута φ і, тим самим, однозначно визначити

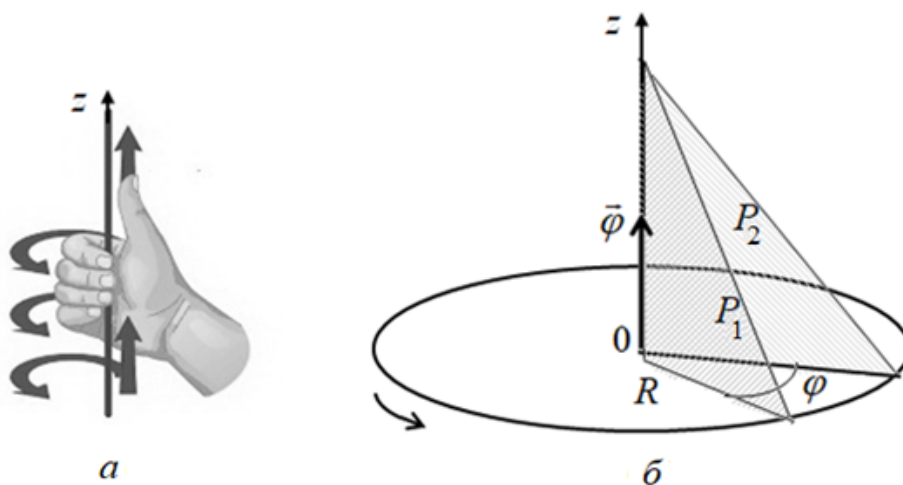


Рисунок 2.1

положення тіла у цей момент часу. Формулу (1) також називають **кінематичним рівнянням обертального руху**.

Кут повороту φ вимірюється в радіанах:

$$[\varphi] = \text{рад.}$$

Радіан – це одиниця вимірювання площинних кутів. Один радіан – це площинний кут, утворений двома радіусами, довжина дуги між якими дорівнює радіусу кола.

Іноді кут повороту також може бути заданий в градусах. Для того, щоб перевести градуси у радіани, можна скористатися співвідношенням

$$\varphi = \frac{\varphi^\circ}{180^\circ} \pi ,$$

де φ – кут в радіанах, φ° – в градусах.

В момент часу t положення тіла визначається кутом повороту $\varphi(t)$, а в момент $t + \Delta t$, відповідно, кутом повороту $\varphi(t + \Delta t) = \varphi(t) + \Delta\varphi$, де $\Delta\varphi$ – приріст кута повороту, який відповідає проміжку часу Δt . Тоді величина φ визначає положення тіла у кожний момент часу, тобто є аналогом декартової координати при розгляданні прямолінійного руху точки, а кут $\Delta\varphi$, що визначає зміну положення тіла відносно осі обертання за проміжок часу, Δt є аналогом проєкції вектора переміщення матеріальної точки.

Відношення приросту $\Delta\varphi$ кута повороту за проміжок часу Δt до величини цього проміжку часу має назву **середньої кутової швидкості** за проміжок часу Δt :

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} . \quad (2.2)$$

Зазначимо, що середня кутова швидкість залежить від проміжку часу Δt , тому, коли говорять про середню кутову швидкість, обов'язково вказують проміжок часу, за який вона визначається.

Середня кутова швидкість не дає уявлення про швидкість обертання тіла в цей момент. Але, чим менше ми братимемо проміжок часу Δt , що починається в

момент часу t , тим точніше буде величина середньої кутової швидкості характеризувати швидкість обертання цієї миті. У міру безперервного зменшення проміжку часу Δt безперервно зменшується і величина приросту кута повороту $\Delta\varphi$, але відношення $\Delta\varphi/\Delta t$ прямує до деякої границі, яку називають *миттєвою кутовою швидкістю* або кутовою швидкістю у цей момент часу.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \omega \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.3)$$

Оскільки кут повороту φ є функцією часу (час t виконує роль аргументу цієї функції), тоді права частина формули (3) є похідною функції $\varphi(t)$.

Кутова швидкість ω є величиною алгебраїчною, знак якої залежить від напрямку обертання тіла.

Слід зауважити, що середнє значення $\langle f \rangle$ деякої скалярної функції часу $f(t)$ на інтервалі $[t_1, t_2]$ за визначенням дорівнює

$$\langle f \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt. \quad (2.4)$$

Оскільки кутова швидкість ω є функцією часу, то середнє значення кутової швидкості за проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$ дорівнюватиме

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \omega(t) dt = \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

тобто середня кутова швидкість, яка визначається формулою (2.2), є середнім значенням кутової швидкості за відповідний проміжок часу.

Наприклад, тіло протягом проміжку часу Δt здійснює обертання у напрямку зростання кута φ (за годинниковою стрілкою, якщо дивитися уздовж осі z): $\varphi(t + \Delta t) > \varphi(t)$. Для приросту та похідної також маємо: $\Delta\varphi > 0$, $d\varphi/dt > 0$, відповідно, кутова швидкість ω буде величиною позитивною. Якщо обертання здійснюється проти годинникової стрілки: $\varphi(t + \Delta t) < \varphi(t)$, $\Delta\varphi < 0$, $d\varphi/dt < 0$ – кутова швидкість буде величиною від’ємною. Отже, величина ω , яка

визначається формулою (2.3), дає не тільки абсолютну величину кутової швидкості, а ще й напрямок обертання тіла.

Розмірність кутової швидкості ω та $\langle \omega \rangle$

$$[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

У загальному випадку обертання тіла його кутова швидкість ω змінюється згідно з $\omega = \omega(t)$.

Кутова швидкість тіла в момент часу t дорівнює $\omega(t)$, а в момент часу $t + \Delta t$, відповідно, $\omega(t + \Delta t) = \omega(t) + \Delta\omega$, де $\Delta\omega$ – приріст кутової швидкості за проміжок часу Δt . Відношення приросту $\Delta\omega$ кутової швидкості тіла за проміжок часу Δt до величини цього проміжку часу має назву **середнього кутового прискорення** $\langle \varepsilon \rangle$ за проміжок часу Δt

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (2.5)$$

Зауважимо, що середнє кутове прискорення, так само як і середня кутова швидкість, залежить від проміжку часу Δt .

При $\Delta t \rightarrow 0$ середнє кутове прискорення $\langle \varepsilon \rangle$ наближається до певної границі, яку називають **миттєвим кутовим прискоренням** або кутовим прискоренням в цей момент часу:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \varepsilon \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (2.6)$$

Отже, миттєве кутове прискорення тіла дорівнює першій похідній від кутової швидкості за часом або другій похідній від кута повороту за часом

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (2.7)$$

Кутове прискорення ε , так само як ω , $\Delta\omega$ та φ , є величиною алгебраїчною, що безпосередньо виходить з формул (2.6) та (2.7).

Припустимо, що $\omega > 0$ і тіло обертається у напрямку зростання кута φ . Якщо $\varepsilon > 0$, кутова швидкість зростає з часом, а приріст кутової швидкості

$\Delta\omega > 0$, то тіло здійснює **прискорене** обертання. Якщо $\varepsilon < 0$, кутова швидкість зменшується з часом, в приріст кутової швидкості $\Delta\omega < 0$, то тіло здійснює **сповільнене** обертання.

Нехай тепер $\omega < 0$ і тіло обертається у напрямку зменшення кута φ . Якщо $\varepsilon > 0$, модуль кутової швидкості зменшується з часом, а приріст кутової швидкості $\Delta\omega > 0$, тоді тіло здійснює сповільнене обертання. Якщо $\varepsilon < 0$, модуль кутової швидкості збільшується з часом, а приріст $\Delta\omega < 0$, тоді тіло здійснює прискорене обертання.

Отже, якщо величини ω та ε мають однакові знаки, обертання буде прискореним; якщо ω та ε мають різні знаки, тоді тіло буде здійснювати сповільнене обертання.

Кутове прискорення вимірюється в радіанах за секунду у квадраті:

$$[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2},$$

Цю ж саму розмірність має і величина $\langle \varepsilon \rangle$.

2.1.2. Окремі випадки обертального руху

1. Рівномірне обертання – обертальний рух з постійною кутовою швидкістю $\omega = \text{const}$.

З формули (2.2):

$$d\varphi = \omega dt.$$

Інтегрування лівої частини цього виразу в межах від φ_0 до φ , а правої частини – від 0 до t дає

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt.$$

При $\omega = \text{const}$ отримаємо кінематичне рівняння рівномірного обертання тіла:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad (2.8)$$

де φ_0 – початкове значення кута φ : $\varphi_0 = \varphi(t=0)$.

Для приросту кута повороту $\Delta\varphi$ за проміжок часу Δt :

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \omega\Delta t.$$

Звідки

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (2.9)$$

Тоді рівномірне обертання тіла можна визначити як обертальний рух, при якому за рівні, довільно узяті проміжки часу Δt тіло здійснює поворот на один і той самий кут $\Delta\varphi$.

2. **Рівнозмінне обертання** – обертальний рух з постійним кутовим прискоренням.

З формули (2.6)

$$d\omega = \varepsilon dt.$$

Інтегрування лівої частини цього виразу в межах від ω_0 до ω , правої – від 0 до t дає

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt,$$

При $\varepsilon = \text{const}$ кутова швидкість ω становить

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (2.10)$$

де ω_0 – початкова кутова швидкість: $\omega_0 = \omega(t=0)$.

Виходячи з формули (2.10), рівнозмінне обертання можна визначити як обертальний рух, при якому за рівні, довільно узяті проміжки часу кутова швидкість тіла змінюється на одну й ту ж саму величину.

У формулі (2.10) величини ω , ω_0 та ε є величинами алгебраїчними, тому характер рівнозмінного руху буде залежати від знаку величин ω_0 та ε ; якщо ω_0 та ε мають однакові знаки, тіло здійснює рівноприскорене обертання; якщо ω_0 та ε мають протилежні знаки, то обертання буде спочатку рівносповільненим. Тіло буде здійснювати рівносповільнене обертання до моменту часу:

$$t' = \left| \frac{\omega_0}{\varepsilon} \right|,$$

коли кутова швидкість у формулі (2.10) дорівнюватиме нулю. Після чого напрямок обертання зміниться на протилежний, і тіло почне рівноприскорене обертання.

Враховуючи формулу (2.3), вираз (2.10) перетворюється на:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t,$$

$$d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon t) dt,$$

інтегрування якого з врахуванням того, що ω_0 та ε не залежать від часу, у відповідних межах дає

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (2.11)$$

де φ_0 – початкове значення кута φ : $\varphi_0 = \varphi(t=0)$.

Вираз (2.11) є **кінематичне рівняння обертального руху**, з якого випливає, що при рівнозмінному обертанні кут повороту $\varphi(t)$ є квадратичною функцією часу.

У загальному випадку нерівномірного обертання для кута повороту $\varphi(t)$ та кутової швидкості $\omega(t)$, маємо

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega(t) dt, \quad \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon(t) dt. \quad (2.12)$$

Кут повороту $\Delta\varphi$ можна також вимірювати в **кількості обертів** N , яке тіло здійснює за час t свого руху. Зважаючи на те, що один оберт відповідає приросту $\Delta\varphi = 2\pi$ рад, зв'язок між величинами $\Delta\varphi$ та N набуває вигляду

$$\Delta\varphi = 2\pi N. \quad (2.13)$$

Ця формула є правильною тільки, якщо тіло не змінює напрямку свого обертання.

В цьому випадку природно обрати вісь z так, щоб тіло здійснювало обертання у позитивному напрямку відліку кута φ (так само роблять при розгляданні прямолінійного руху матеріальної точки: якщо точка не змінює напрямку свого руху, координатну вісь обирають у напрямку руху точки).

Величини ω та $\Delta\varphi$ будуть завжди позитивними, крім того, кут $\Delta\varphi$ буде з часом тільки зростати. В цьому випадку $\Delta\varphi$ відіграє роль не тільки проєкції вектора переміщення та ще й пройденого шляху, який розглядається у кінематиці матеріальної точки.

Перш за все, це стосується випадку рівномірного обертання. При рівномірному обертанні $\omega = \text{const}$, тому тіло не змінює напрямку свого обертання.

Введемо в розгляд величину T – проміжок часу, за який тіло здійснює один оберт навколо осі обертання, яка має назву **період обертання** і дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2.14)$$

Для величини кількості обертів N , яке тіло здійснює за деякий час свого обертання, маємо:

$$N = \frac{t}{T}. \quad (2.15)$$

Крім кутової швидкості ω , що вимірюється в рад/с², використовують кутову швидкість n – число обертів, яке тіло здійснює в одиницю часу, і яку частіше називають **частотою обертання**.

$$n = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}, \quad (2.16)$$

$$n = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (2.17)$$

$$[n] = \text{с}^{-1} = \text{Герц} = \text{Гц}.$$

Якщо тіло бере участь у рівнозмінному обертанні (як рівноприскореному, так і рівносповільненому), визначимо кількість обертів, яке тіло здійснює за

проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$. Кутові швидкості на початку та наприкінці цього проміжку часу становлять $\omega_1 = \omega(t_1)$ і $\omega_2 = \omega(t_2)$, відповідно. Тоді приріст $\Delta\omega$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \varepsilon\Delta t.$$

За той самий проміжок часу Δt кут повороту φ отримує приріст $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \omega_1\Delta t + \frac{\varepsilon\Delta t^2}{2}.$$

Враховуючи, що

$$\varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t},$$

отримуємо такий вираз

$$\Delta\varphi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\Delta t.$$

У випадку нерівномірного обертання під величиною n розуміють миттєву частоту обертання:

$$n(t) = \frac{\omega(t)}{2\pi}. \quad (2.18)$$

Зі співвідношень (2.13) та (2.18) витікає, що кількість обертів за проміжок часу Δt становить:

$$N = \frac{n_1 + n_2}{2}\Delta t. \quad (2.19)$$

Зважаючи на (2.10) і (2.11), вирази для проміжку часу Δt та кута $\Delta\varphi$ є такими:

$$\Delta t = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\varepsilon}, \quad (2.20)$$

$$\Delta\varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\varepsilon}. \quad (2.21)$$

У випадку, коли тіло здійснює нерівномірне обертання (за умови, що напрямок обертання не змінюється), кількість обертів N може бути виражена формулою

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \omega(t) dt. \quad (2.22)$$

Для визначення кінематичних характеристик точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, розглянемо рух довільної точки M тіла. Точка рухається вздовж кола радіуса R , який утворює кут φ з нерухомою площиною P_1 (рис. 2.2). Площину P_2 вибираємо таким чином, щоб вона проходила через точку M . Кутова швидкість та кутове прискорення тіла не залежать від вибору рухомої площини P_2 . Цей вибір може вплинути тільки на константу φ_0 в рівнянні (2.12).

Введемо в розгляд величину s – довжину дуги OM , яка відлічується від точки O перетину нерухомої площини P_1 з колом, вздовж якого рухається точка M . За позитивний напрямок відліку s візьмемо позитивний напрямок відліку φ . Величина s , яку називають **дуговою координатою точки M** , пов'язана з кутом повороту φ

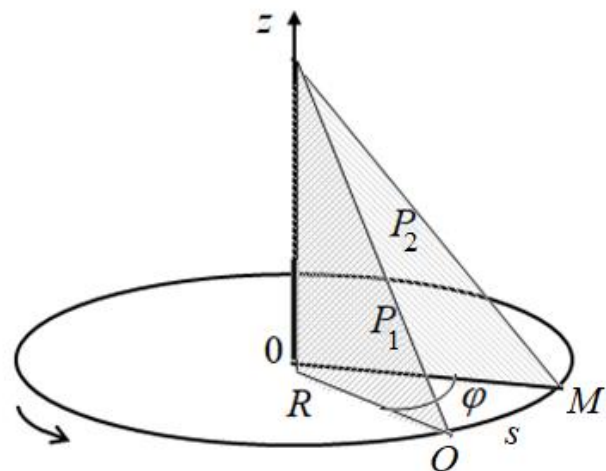


Рисунок 2.2

$$s = R\varphi. \quad (2.23)$$

Дугова координата s є алгебраїчною величиною, знак якої визначається знаком φ . Залежність $s(t)$, так само як і $\varphi(t)$, дає закон руху матеріальної точки вздовж кола.

При розгляданні руху матеріальної точки по колу вектор швидкості називають **вектором лінійної швидкості** $\vec{v}$. Для визначення модуля вектора лінійної швидкості v продиференціюємо обидві частини формули (2.23) за часом, беручи до уваги, що R не залежить від часу,

$$\frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt},$$

враховуючи формулу (2.3), маємо:

$$\frac{ds}{dt} = R\omega. \quad (2.24)$$

Величина в лівій частині (2.24) визначає швидкість зміни положення матеріальної точки, оскільки ω і $\frac{ds}{dt}$ є величинами алгебраїчними, то для модуля вектора лінійної швидкості можемо написати:

$$v = \left| \frac{ds}{dt} \right| = R|\omega|. \quad (2.25)$$

Таким чином, модуль лінійної швидкості точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює добутку модуля кутової швидкості тіла на відстань від цієї точки до осі обертання.

В наступному розділі визначимо проєкції вектора прискорення $\vec{a}$ матеріальної точки на дотичну та нормаль до траєкторії.

2.1.3. Тангенціальна складова прискорення

Позитивний напрямок дотичної характеризується одиничним вектором $\vec{\tau}$, який у кожній точці траєкторії спрямований в бік зростання кута φ (координати s), і зв'язаний з напрямком осі z правилом правого гвинта (рис. 2.3). Позитивний напрямок нормалі визначається одиничним вектором $\vec{n}$, що спрямований у бік центра кривизни траєкторії, вздовж якої рухається точка.

Оскільки вектор лінійної швидкості $\vec{v}$ спрямований уздовж дотичної до траєкторії у кожній її точці, то величина ds/dt дає проєкцію вектора лінійної швидкості на напрямок дотичної до траєкторії – на напрямок вектора $\vec{\tau}$. Величина ds/dt характеризує не тільки швидкість зміни положення матеріальної точки, а ще й напрямок її руху, що безпосередньо виходить з формули (2.24): якщо $\omega > 0$ точка M рухається у напрямку зростання координати s (за

годинниковою стрілкою), якщо $\omega < 0$ – у протилежному напрямку. Отже, **вектор лінійної швидкості** $\vec{v}$ визначається як

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}, \quad (2.26)$$

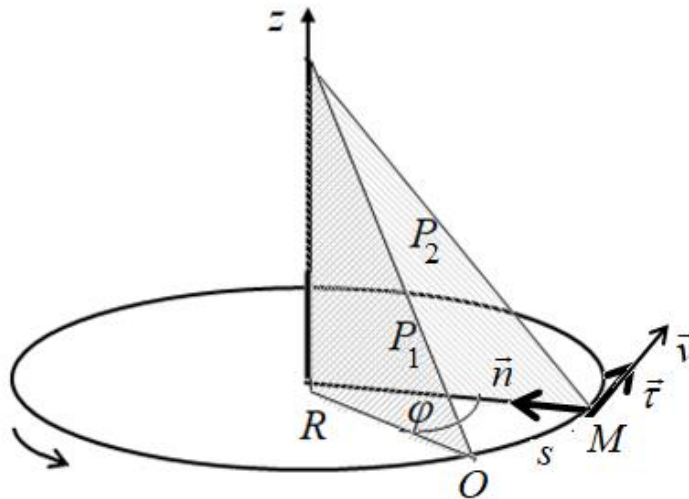


Рисунок 2.3

Якщо $\frac{ds}{dt} > 0$, то напрямки векторів $\vec{v}$ та $\vec{\tau}$ збігаються, і точка рухається за

годинниковою стрілкою; якщо $\frac{ds}{dt} < 0$, то вектори $\vec{v}$ та $\vec{\tau}$ протилежно спрямовані, і точка рухається проти годинникової стрілки.

Проекція вектора прискорення на напрямок швидкості визначається як

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad (2.27)$$

де v – модуль вектора лінійної швидкості.

При цьому, якщо вектор швидкості зростає по модулю, то напрямки векторів $\vec{v}$ і $\vec{a}_\tau$ збігаються; якщо величина модуля вектора швидкості зменшується з часом, то, відповідно, ці вектори мають протилежні напрямки.

1. Точка рухається у бік зростання координати s (за годинниковою стрілкою), тоді $ds/dt > 0$ – напрямки векторів $\vec{v}$ і $\vec{\tau}$ **збігаються**, а модуль вектора швидкості $v = ds/dt$.

При цьому, якщо швидкість зростає за модулем, $dv/dt = d^2s/dt^2 > 0$; якщо ж величина модуля швидкості зменшується з часом, тоді $dv/dt = d^2s/dt^2 < 0$.

2. Точка рухається у бік зменшення координати s (проти годинникової стрілки), тоді $ds/dt < 0$ – напрямки векторів $\vec{v}$ і $\vec{\tau}$ **протилежні**, а модуль вектора швидкості $v = -(ds/dt)$.

Отже, якщо модуль швидкості зростає з часом, $dv/dt = -d^2s/dt^2 > 0$, звідки виходить, що $d^2s/dt^2 < 0$; якщо вектор лінійної швидкості зменшується за модулем: $dv/dt = -d^2s/dt^2 < 0$, відповідно, $d^2s/dt^2 > 0$.

Таким чином, якщо похідні ds/dt та d^2s/dt^2 мають однакові знаки, напрямки векторів $\vec{v}$ і $\vec{a}_\tau$ збігаються, точка здійснює прискорений рух; якщо похідні мають протилежні знаки, то напрямки відповідних векторів будуть протилежними, точка здійснює сповільнений рух.

Друга похідна від дугової координати за часом дає проєкцію вектора прискорення $\vec{a}$ на напрямок дотичної до траєкторії (напрямок вектора $\vec{\tau}$)

$$a_\tau = \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (2.28)$$

А сам вектор $\vec{a}_\tau$ визначається як

$$\vec{a}_\tau = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{\tau}. \quad (2.29)$$

Диференціювання (2.24) за часом дає

$$\frac{d^2s}{dt^2} = R \frac{d\omega}{dt},$$

яке з урахуванням (2.7) та (2.28) можна записати у такому вигляді

$$a_\tau = R\varepsilon. \quad (2.30)$$

З цієї формули виходить, що знак a_τ збігається зі знаком кутового прискорення тіла ε .

З формул (2.24) та (2.30) бачимо, якщо величини ω та ε мають однакові знаки, тоді й проєкції вектора лінійної швидкості та вектора прискорення на

напрямок дотичної до траєкторії також мають однакові знаки. При цьому, модуль вектора швидкості зростає з часом, тому тіло здійснює прискорене обертання, а, відповідно, точка – прискорений рух по колу. Якщо ω та ε мають протилежні знаки, проєкції вектора лінійної швидкості та вектора прискорення точки на напрямок дотичної матимуть протилежні знаки, модуль вектора швидкості зменшується з часом. В цьому випадку тіло здійснює сповільнене обертання, а, відповідно, точка – сповільнений рух по колу.

2.1.4. Нормальна складова прискорення

Для нормальної складової $\vec{a}_n$ вектора прискорення маємо:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}, \quad (2.31)$$

де v – модуль вектора швидкості, R – радіус кривизни траєкторії точки (радіус кола).

Проекція вектора $\vec{a}$ на напрямок нормалі $\vec{n}$:

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (2.32)$$

Оскільки вектор $\vec{a}_n$ завжди спрямований до центру кривизни траєкторії (до центру кола), вздовж якої рухається матеріальна точка, то цю складову часто називають **доцентровим прискоренням**. Крім того, незалежно від напрямку і характеру руху точки проєкція a_n буде величиною позитивною. Враховуючи формулу (2.23), нормальна складова прискорення a_n є

$$a_n = R\omega^2. \quad (2.33)$$

Вектор прискорення $\vec{a}$ матеріальної точки може бути записаний як сума його взаємно перпендикулярних складових $\vec{a}_\tau$ та $\vec{a}_n$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad (2.34)$$

а його модуль дорівнює

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} . \quad (2.35)$$

Враховуючи формули (2.30) і (2.32), останній вираз набуває вигляду:

$$a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} . \quad (2.36)$$

Підбиваючи підсумки, підкреслимо такі важливі моменти

1. Усі точки твердого тіла, які не розташовані на осі обертання, мають у кожний момент часу однакову кутову швидкість та однакове кутове прискорення.

2. Вектор лінійної швидкості $\vec{v}$, вектор прискорення $\vec{a}$ та його складові $\vec{a}_{\tau}$ та $\vec{a}_n$ характеризують рух кожної окремої точки тіла, а не усіх точок в цілому.

3. Усі точки, які розташовані на однаковій відстані від осі обертання, мають однакову по модулю швидкість $\vec{v}$ та однакове по модулю прискорення $\vec{a}$. Теж саме стосується складових вектора прискорення.

2.1.5. Шлях, що пройдений при обертальному русі точки

Розглянемо випадок, коли тіло і, відповідно, будь-яка його точка, не змінює напрямку свого обертання по колу.

Тоді, обираючи вісь z так, щоб тіло здійснювало обертання у напрямку зростання кута φ , можемо написати для вектора лінійної швидкості точки

$$\vec{v} = v\vec{\tau} , \quad (2.37)$$

де v – модуль вектора швидкості (напрямки векторів $\vec{v}$ та $\vec{\tau}$ збігаються при будь-якому характері руху).

В цьому випадку величини s та ds/dt будуть завжди позитивними, крім того, величина v дорівнює

$$v = \frac{ds}{dt} = R\omega . \quad (2.38)$$

Величини a_{τ} та a_n визначаються згідно з формулами (2.30) та (2.33). Оскільки кутова швидкість буде завжди величиною позитивною, характер руху

матеріальної точки визначається знаком кутового прискорення ε , тобто знаком похідної $d\omega/dt$. При $\varepsilon > 0$ – кутове прискорення є позитивно визначеною функцією часу, а точка здійснює прискорений рух по колу; при $\varepsilon < 0$ – сповільнений рух, при $\varepsilon = 0$ – рівномірний рух, при $\varepsilon = \text{const}$ – рівнозмінний рух.

Величина пройденого точкою шляху S за проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$ дорівнюватиме довжині дуги:

$$S = s(t_2) - s(t_1) = R[\varphi(t_2) - \varphi(t_1)],$$

$$S = R\Delta\varphi, \quad (2.39)$$

де $\Delta\varphi$ визначається згідно з формулою (20), тобто

$$S = R \int_{t_1}^{t_2} \omega dt. \quad (2.40)$$

Рівність (2.39) виконується тільки у випадку, якщо напрямок обертання точки по колу є незмінним.

Якщо точка змінює напрямок свого руху, тоді пройдений точкою шлях визначається як

$$S = R \int_{t_1}^{t_2} |\omega| dt, \quad (2.41)$$

а повна кількість обертів N за проміжок часу Δt

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} |\omega| dt. \quad (2.42)$$

2.1.6. Вектор кутової швидкості

Кутова швидкість $\vec{\omega}$ – це вектор, абсолютна величина якого дорівнює модулю похідної від кута повороту тіла за часом, а напрямок збігається з напрямком осі z та пов'язаний з напрямком обертання тіла правилом правого гвинта.

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_z, \quad (2.43)$$

де $\vec{e}_z$ – орт (одичний вектор) осі z .

Якщо $d\varphi/dt > 0$, тіло здійснює обертання у позитивному напрямку відліку кута повороту φ (за годинниковою стрілкою, якщо дивитися уздовж позитивного напрямку осі z), вектор $\vec{\omega}$ збігається із напрямком осі z ; якщо $d\varphi/dt < 0$, тіло обертається проти годинникової стрілки, а вектор $\vec{\omega}$ спрямований протилежно осі z .

Величина ω , що визначається за (2.4), є проєкцією вектора $\vec{\omega}$ на вісь z

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (2.44)$$

для модуля вектора $\vec{\omega}$ також маємо

$$|\vec{\omega}| = |\omega_z| = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|. \quad (2.45)$$

Зазначимо, що вектор $\vec{\omega}$ не має фіксованої точки прикладання, тобто є **ковзним** вектором. За точку прикладання ковзного вектора $\vec{\omega}$ можна узяти будь-яку точку, яка належить осі z .

Якщо ввести в розгляд вектор нескінченно малого повороту $d\vec{\varphi} = \vec{e}_z d\varphi$, формулу (2.43) можна переписати у наступному вигляді:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad (2.46)$$

де вектор $d\vec{\varphi}$ розташований на осі z , а його напрямок пов'язаний з напрямком обертання тіла правилом правого гвинта. Так само, як і вектор $\vec{\omega}$, $d\vec{\varphi}$ є ковзним вектором.

2.1.7. Вектор кутового прискорення

Вектор $\vec{\varepsilon}$, який дорівнює похідній від вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ за часом, має назву вектора **кутового прискорення**:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (2.47)$$

Оскільки вісь обертання є нерухомою в обраній системі відліку, напрямок вектора $\vec{e}_z$ не змінюється з часом. Диференціюючи вираз (2.46) за часом, отримаємо:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{e}_z. \quad (2.48)$$

Вектор $\vec{\varepsilon}$, так само як і вектор $\vec{\omega}$, розташований на осі z (рис. 2.4). Напрямок вектора $\vec{\varepsilon}$ збігається з напрямком вектора кутової швидкості, якщо величини $d\varphi/dt$ та $d^2\varphi/dt^2$ мають однаковий знак, а тіло здійснює прискорене обертання (модуль вектора $\vec{\omega}$ зростає з часом). Якщо похідні $d\varphi/dt$ та $d^2\varphi/dt^2$ мають протилежні знаки, то тіло здійснює сповільнене обертання, а вектори $\vec{\varepsilon}$ та $\vec{\omega}$ мають протилежні напрямки. Абсолютна величина вектора $\vec{\varepsilon}$ дорівнює модулю другої похідної від кута повороту тіла за часом або модулю першої похідної від кутової швидкості за часом.

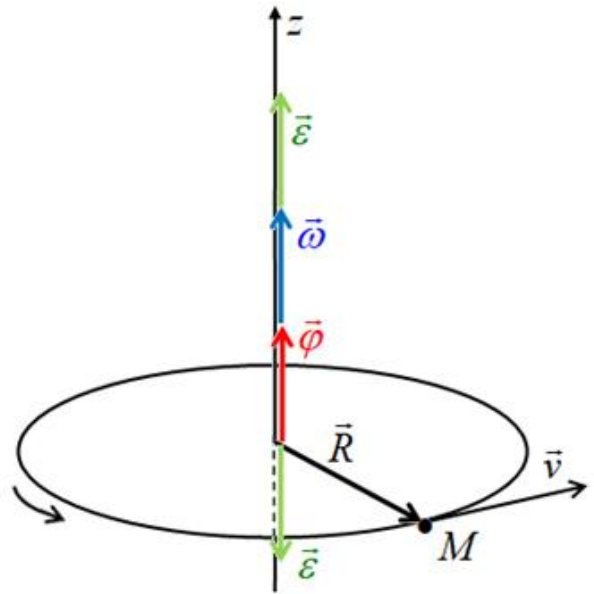


Рисунок 2.4

Зазначимо, що вектор $\vec{\varepsilon}$ є так званим ковзним вектором, тобто за точку його прикладання можна узяти будь-яку точку, яка належить осі z .

Враховуючи вирази (2.44) та (2.48), величина, яка визначається формулою (2.7), є проекцією вектора кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ на вісь z

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (2.49)$$

а модуль вектора $\vec{\varepsilon}$ дорівнює

$$|\vec{\varepsilon}| = \left| \frac{d\omega_z}{dt} \right| = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|. \quad (2.50)$$

З виразу (2.49) видно, якщо проєкції ε_z та ω_z одного знаку (напрямки відповідних векторів збігаються), то тіло здійснює прискорене обертання; якщо проєкції ε_z та ω_z мають протилежні знаки (відповідні вектори мають протилежні напрямки), то тіло здійснює сповільнене обертання.

Згідно з формулою (2.47) вектор $\vec{\varepsilon}$ завжди має напрямок вектора $d\vec{\omega}$. При обертанні тіла навколо нерухомої осі вектори $d\vec{\omega}$ та $\vec{\varepsilon}$ завжди колінеарні вектору $\vec{\omega}$, тобто всі три вектори незалежно від напрямку та характеру обертання завжди лежать на осі z .

2.1.8. Співвідношення між величинами, що характеризують поступальний та обертальний рух

Якщо матеріальна точка здійснює рух по колу, радіус якого дорівнює R , модуль вектора лінійної швидкості (2.37) дорівнює:

$$v = R|\omega|. \quad (2.51)$$

Замість радіуса-вектора $\vec{R}$ (рис. 2.1) положення матеріальної точки M можна також визначити за допомогою радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного від довільної точки осі z (рис. 2.5). Тоді (2.51) набуває вигляду

$$v = |\vec{r}| \cdot |\vec{\omega}| \cdot \sin \vartheta, \quad (2.52)$$

де ϑ – кут між векторами вектора $\vec{r}$ та $\vec{\omega}$, $|\vec{r}| \cdot \sin \vartheta = R$.

Вектор $\vec{\omega}$ знаходиться на осі z . Це означає, що він перпендикулярний площині, в якій рухається точка (рис. 2.5). Вектор лінійної швидкості $\vec{v}$ спрямований вздовж дотичній до кола, по якому рухається точка, тому вектор $\vec{v}$ завжди перпендикулярний до площини, у якій знаходяться вектори $\vec{r}$ та $\vec{\omega}$. Крім того, вектор $\vec{v}$ має такий напрямок щодо векторів $\vec{r}$ та $\vec{\omega}$, при якому найкоротший поворот від вектора $\vec{\omega}$ до вектора $\vec{r}$ відбувається за годинниковою стрілкою, якщо дивитися уздовж вектора $\vec{v}$. Незалежно від напрямку обертання

тіла, вектори $\vec{\omega}$, $\vec{r}$ та $\vec{v}$ утворюють праву трійку векторів. А тому, вектор лінійної швидкості визначається як векторний добуток векторів $\vec{r}$ та $\vec{\omega}$

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]. \quad (2.53)$$

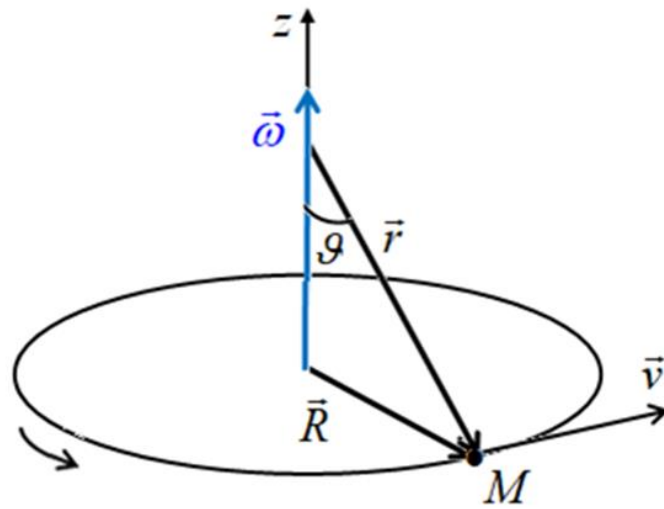


Рисунок 2.5

Вектор прискорення $\vec{a}$ згідно з визначенням становить

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Враховуючи формулу (2.33), отримуємо

$$\vec{a} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right]. \quad (2.54)$$

Іншими словами, похідна від векторного добутку визначається подібно похідній від добутку двох скалярних функцій.

Беручи до уваги формулу (2.33), а також, що $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, рівність (2.54) набуває вигляду

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{v}]. \quad (2.55)$$

Якщо точка рухається прискорено, вектори $\vec{\omega}$ та $\vec{\varepsilon}$ мають однакові напрямки, кут між векторами $\vec{\omega}$ та $\vec{r}$ збігається з кутом між $\vec{\varepsilon}$ та $\vec{r}$. Модуль першого доданку дорівнює $|\vec{r}| \cdot |\vec{\varepsilon}| \sin \vartheta = R \cdot |\vec{\varepsilon}|$, тобто модулю вектора тангенціального прискорення. Напрямок вектора $[\vec{\varepsilon}, \vec{r}]$ однаковий з вектором лінійної швидкості $\vec{v}$.

Якщо точка рухається сповільнено, вектори $\vec{\omega}$ та $\vec{\varepsilon}$ спрямовані протилежно. Кут між векторами $\vec{\varepsilon}$ та $\vec{r}$ дорівнює $\pi - \theta$, синус якого $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$, тому знову для модуля вектора $[\vec{\varepsilon}, \vec{r}]$ отримаємо $|\vec{r}||\vec{\varepsilon}|\sin \theta = R|\vec{\varepsilon}|$. В цьому випадку вектор $[\vec{\varepsilon}, \vec{r}]$ спрямований протилежно вектору $\vec{v}$.

Отже, векторний добуток векторів $\vec{\varepsilon}$ та $\vec{r}$ є **тангенціальною складовою вектора прискорення** $\vec{a}_\tau$

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}]. \quad (2.56)$$

Вектори $\vec{\omega}$ та $\vec{v}$ завжди взаємно перпендикулярні, отже модуль їх векторного добутку з урахуванням виразу (2.16), дорівнює: $v|\vec{\omega}| = v^2/R$. Вектор $[\vec{\omega}, \vec{v}]$, спрямований від точки M до центра кола, вдовж якого вона рухається, збігається із напрямком вектора нормалі до траєкторії. Виходячи з цього, цей векторний добуток є **нормальною складовою вектора прискорення**:

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega}, \vec{v}]. \quad (2.57)$$

Зазначимо, якщо у формулах (2.53) і (2.56) замість вектора $\vec{r}$ взяти вектор $\vec{R}$, на векторний добуток це не вплине

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}], \quad \vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{R}], \quad (2.58)$$

Тоді кутова швидкість та кутове прискорення набувають вигляду

$$\vec{\omega} = \frac{1}{R^2} [\vec{R}, \vec{v}], \quad \vec{\varepsilon} = \frac{1}{R^2} [\vec{R}, \vec{a}_\tau], \quad (2.59)$$

а для вектора $d\vec{\varphi}$ маємо, відповідно,

$$d\vec{\varphi} = \frac{1}{R^2} [\vec{R}, d\vec{r}], \quad (2.60)$$

де $d\vec{r}$ – вектор елементарного переміщення, який є дотичним до траєкторії руху точки.

Зазначимо, якщо ми пов'яжемо позитивний відлік кута φ з напрямком осі z правилом лівого гвинта, тоді вектори $d\vec{\varphi}, \vec{\omega}$ та $\vec{\varepsilon}$ змінять свій напрямок на протилежний. Подібні вектори мають назву **аксіальних** векторів або

псевдовекторів. Іншими словами, якщо деякий вектор при переході від правоґвинтової до лівоґвинтової системи координат змінює свій напрямок на протилежний, то цей вектор є аксіальним. Вектори, які не змінюють свого напрямку при вище зазначеному переході (наприклад, як $\vec{r}$, $\vec{v}$ та $\vec{a}$), мають назву ***полярних*** або ***істинних*** векторів.

2.2. Приклади розв'язання задач

Задача 2.2.1

На горизонтальній осі обертаються з частотою $n = 25$ об/с два тонких диски, закріплених на відстані $l = 30$ см один від одного. Куля, що летіла паралельно осі на відстані $r = 12$ см від неї, пробиває обидва диски, причому друга пробоїна виявилася зміщеною відносно першої на відстань $\Delta s = 5$ см, яка відраховується вздовж дуги кола. Знайти швидкість кулі v під час руху її між дисками, вважаючи її постійною. Оцінити зміщення h другої пробоїни відносно першої у вертикальному напрямку, яке створює сила тяжіння.

Дано:

$$n = 25 \text{ об/с}$$

$$l = 30 \text{ см} = 0,3 \text{ м}$$

$$r = 12 \text{ см} = 1,2 \cdot 10^{-1} \text{ м}$$

$$\Delta s = 5 \text{ см} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$v = ?$$

Розв'язання

Згідно з умовами задачі, куля в проміжку між двома дисками здійснює рух з постійною за величиною і напрямком швидкістю, іншими словами, здійснює прямолінійний рівномірний рух. Відповідно, модуль вектора швидкості кулі можна визначити з наступного

виразу:

$$v = \frac{l}{t}, \quad (1)$$

де t – час руху від одного диска до іншого.

Для того, щоб знайти проміжок часу t , розглянемо рух дисків. Згідно з умовою задачі диски здійснюють рівномірне обертання, тобто обертання з постійною кутовою швидкістю. За час t руху кулі від одного диска до іншого, самі диски здійснюють поворот на деякий кут $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = \omega t,$$

звідки час t становить

$$t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} . \quad (2)$$

Пробоїна у другому диску зміщена відносно першого на відстань Δs , яка відраховується вздовж дуги кола радіуса r . Кут, виміряний у радіанах дорівнює

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}, \quad (3)$$

де Δs – довжина дуги, яка проходить між радіусами як сторонами кута, а $\Delta\varphi$ – кут, на який здійснює поворот радіус кожного з дисків за час руху кулі між ними.

Об'єднуючи формули (2) і (3), отримаємо:

$$t = \frac{\Delta s}{\omega r} . \quad (4)$$

Якщо ω – кутова швидкість обертання диска, то величина $\omega/2\pi$ дає кількість обертів, що диск здійснив за одиницю часу, тобто частоту обертання n . Таким чином, величини ω і n пов'язані наступним співвідношенням:

$$\omega = 2\pi n . \quad (5)$$

Тоді час, за який куля долає відстань між дисками, становить

$$t = \frac{\Delta s}{2\pi n r}, \quad (6)$$

а швидкість кулі, яка визначається формулою (1), дорівнює

$$v = \frac{2\pi r l}{\Delta s} n . \quad (7)$$

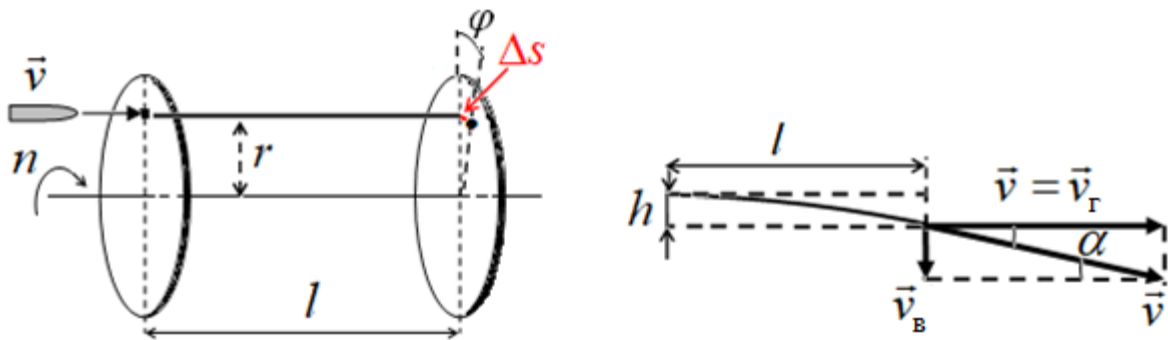
Перевіримо одиниці виміру правої частини формули (1.7), зважаючи на (3):

$$[v] = \frac{\text{рад} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}} .$$

Для оцінки величини зміщення h у вертикальному напрямку вважатимемо, що при потраплянні в перший диск кулі рухалася горизонтально зі швидкістю $v_z = v$. Траєкторією руху кулі, як і будь-якого іншого тіла, якому надали початкову швидкість в горизонтальному напрямку, буде (за відсутності опору повітря) парабола. При потраплянні в другий диск, швидкість кулі буде спрямована не перпендикулярно диску, а під деяким кутом. Крім того, отвір в

другому диску буде зміщений у вертикальному напрямку відносно отвору в першому диску на величину h .

Вважатимемо рух кулі між дисками, як суперпозицію двох простих рухів: рівномірного прямолінійного – в горизонтальному напрямку і рівноприскореного прямолінійного – у вертикальному напрямку. Розкладемо вектор швидкості $\vec{v}$ на дві взаємно перпендикулярні складові: горизонтальну – $\vec{v}_r$ та вертикальну – $\vec{v}_b$. При цьому: $v_r = v$, $v_b = gt$ і $v = \sqrt{v_r^2 + v_b^2}$.



За час руху між дисками куля проходить: у горизонтальному напрямку – відстань l , у вертикальному – відстань h :

$$\begin{cases} l = v_r t, \\ h = \frac{gt^2}{2} \end{cases}.$$

Виражаючи рух з першого рівняння $t = l / v_r$ і підставляючи його в друге, отримаємо:

$$h = \frac{gl^2}{2v_r^2}.$$

Підставляючи в (7) значення з умови задачі, отримаємо:

$$v = \frac{2\pi r l}{\Delta s} n = \frac{2\pi \cdot 1,2 \cdot 10^{-1} \cdot 3 \cdot 10^{-1} \cdot 25}{5 \cdot 10^{-2}} = 2\pi \cdot 12 \cdot 15 \cdot 10^{-1} = 113,1 \text{ м/с}.$$

$$h = \frac{gl^2}{2v_r^2} = \frac{gl^2}{2v^2} = \frac{9,8 \cdot 9}{2 \cdot (113,1)^2} \cdot 10^{-2} = \frac{9,8 \cdot 9}{2 \cdot (1,13)^2} \cdot 10^{-4} = 3,45 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Для вертикальної складової вектору швидкості в момент попадання у другий диск отримаємо:

$$v_B = gt = \frac{gl}{v_r} = \frac{9,8 \cdot 3 \cdot 10^{-1}}{113,1} = \frac{9,8 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{11,3} = 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ м/с.}$$

Таким чином, згідно з виконаними розрахунками маємо:

$$\frac{h}{l} \sim 10^{-4}, \frac{v_B}{v_r} \sim 10^{-4}.$$

Кут α , який утворює вектор швидкості з горизонтом (або траєкторія з горизонтом) при потраплянні в другий диск, дорівнює

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_B}{v_r} = 2,3 \cdot 10^{-4},$$

$$\alpha = \arctg 2,3 \cdot 10^{-4} = 0,0132^\circ = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

Цей же результат можна отримати виходячи з того, що $\operatorname{tg} \alpha \ll 1$, тому тангенс можливо замінити значенням його аргументу в радіанах: $\alpha = 2,3 \cdot 10^{-4}$ рад.

Крім того, розуміючи, що відхилення кулі від горизонталі дуже незначне, можна вважати, що рух кулі між дисками є прямолінійним рівномірним рухом зі швидкістю $v = v_r$.

Відповідь: $v = 113,1 \text{ м/с}$, $h = 3,45 \cdot 10^{-5} \text{ м}$.

Задача 2.2.2

Матеріальна точка рухається по колу радіусом $R = 4 \text{ м}$. Початкова швидкість дорівнює $v_0 = 3 \text{ м/с}$, тангенціальне прискорення $a_\tau = 1 \text{ м/с}^2$. Для моменту часу $t = 2 \text{ с}$ визначити: пройдений шлях, модуль вектора переміщення, середню шляхову швидкість руху точки, модуль вектора середньої швидкості та середню кутову швидкість.

Дано:

$$R = 4 \text{ м}$$

$$v_0 = 3 \text{ м/с}$$

$$a_\tau = 1 \text{ м/с}^2$$

$$S = ? \quad |\vec{r}| = ?$$

$$\langle v \rangle = ? \quad \left| \langle \vec{v} \rangle \right| = ?$$

$$\langle \omega \rangle = ?$$

Розв'язання

У випадку, що розглядається, тангенціальне прискорення (проекція вектора $\vec{a}$ на напрямок, що є дотичним до траєкторії) є величиною сталою, Крім того, оскільки $a_\tau > 0$,

точка здійснює рівноприскорений рух. Шлях S , що проходить точка за довільний проміжок часу Δt , визначатиметься з

$$S = v_0 \Delta t + \frac{a_\tau \Delta t^2}{2}, \quad (1)$$

де v_0 – модуль вектора швидкості точки на початку зазначеного проміжку часу.

Розмірність шляху, розрахованого за формулою (1) становитиме

$$[S] = \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \text{с} + \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с}^2 = \text{м}.$$

Оскільки матеріальна точка здійснює рух по колу (при цьому напрямок її руху не змінюється), то кут $\Delta\varphi$ – кут повороту радіуса-вектора матеріальної точки, проведеного з центру кола, за деякий проміжок часу становитиме

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R}, \quad (2)$$

де Δs – довжина дуги, яка дорівнює шляху S (1) за проміжок часу t .

З врахуванням (1) та (2) кут $\Delta\varphi$ становить

$$\Delta\varphi = \frac{1}{R} \left(v_0 \Delta t + \frac{a_\tau \Delta t^2}{2} \right).$$

Модуль вектора переміщення $|\Delta\vec{r}|$ дорівнює довжині хорди, проведеної з початкового положення (точка 1) в кінцеве положення (точка 2). З рівнобедреного трикутника знаходимо:

$$|\Delta\vec{r}| = 2R \sin \frac{\Delta\varphi}{2}. \quad (3)$$

Розмірність величини, що визначається за формулою (3), є

$$[\Delta \vec{r}] = m \cdot \sin \frac{M}{m} = m.$$

За визначенням середня шляхова швидкість становить

$$\langle v \rangle = \frac{S}{\Delta t}, \quad (4)$$

де S – шлях, подоланий точкою за проміжок часу Δt .

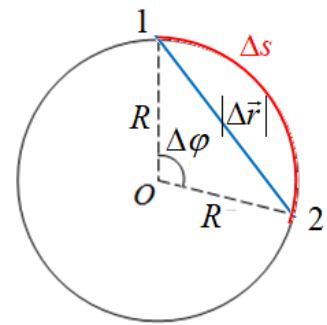
Враховуючи формули (1) та (4) для величини $\langle v \rangle$, отримуємо

$$\langle v \rangle = \frac{S}{\Delta t} = \frac{v_0 \Delta t}{\Delta t} + \frac{a_t \Delta t^2}{2 \Delta t} = v_0 + \frac{a_t \Delta t}{2}. \quad (5)$$

Розмірність середньої швидкості становитиме

$$[\langle v \rangle] = \frac{m}{c} + \frac{m}{c^2} \cdot c = \frac{m}{c}.$$

Модуль вектора середньої швидкості з урахуванням (3),



$$|\langle \vec{v} \rangle| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{2}{\Delta t} R \sin \frac{\Delta \varphi}{2}. \quad (6)$$

Для модуля вектора середньої швидкості, що розраховується за цією формулою, розмірність буде

$$[|\langle \vec{v} \rangle|] = \frac{m}{c}.$$

Середня кутова швидкість за деякий проміжок часу Δt за визначенням дорівнює

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}, \quad (7)$$

де $\Delta \varphi$ – кут повороту радіуса-вектора точки за проміжок часу Δt . Враховуючи (2), середня кутова швидкість

$$\langle \omega \rangle = \frac{2v_0 + a_t \Delta t}{2R}, \quad (8)$$

або, беручи до уваги (5),

$$\langle \omega \rangle = \frac{\langle v \rangle}{R}. \quad (9)$$

Розмірність кутової швидкості

$$[\langle \omega \rangle] = \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{м}} = \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Підставлення числових даних в отримані формули дає наступні результати.

Пройдений шлях згідно з (1) є

$$S = v_0 \Delta t + \frac{a_t \Delta t^2}{2} = 3 \cdot 2 + \frac{1 \cdot 2^2}{2} = 8 \text{ м};$$

кут повороту

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta s}{R} = \frac{8}{4} = 2 \text{ рад};$$

модуль переміщення, враховуючи (3),

$$|\Delta \vec{r}| = 2R \sin \frac{\Delta \varphi}{2} = 2 \cdot 4 \cdot \sin \frac{2}{2} = 6,7 \text{ м};$$

середня шляхова швидкість (5)

$$\langle v \rangle = 3 + \frac{1 \cdot 2}{2} = 4 \text{ м};$$

модуль вектора середньої швидкості (7)

$$|\langle \vec{v} \rangle| = \frac{6,7}{2} = 3,35 \text{ м/с};$$

середня кутова швидкість (8)

$$\langle \omega \rangle = \frac{3,35}{4} = 0,84 \text{ рад/с}.$$

Відповідь: $S = 8 \text{ м}$, $|\Delta \vec{r}| = 6,7$, $\langle v \rangle = 4 \text{ м/с}$, $|\langle \vec{v} \rangle| = 3,35 \text{ м/с}$, $\langle \omega \rangle = 0,84 \text{ рад/с}$.

Задача 2.2.3

Визначити радіус R маховика, якщо при обертанні швидкість точок на його ободі дорівнює $v_1 = 6 \text{ м/с}$, а швидкість точок, що знаходяться на $l = 15 \text{ см}$

ближче до осі, $v_2 = 5,5 \text{ м/с}$. З деякого моменту часу маховик починає рухатися рівносповільнено і через $t = 69 \text{ с}$ зупиняється. Скільки обертів N зробить маховик до зупинки?

Дано:

$$v_1 = 6 \text{ м/с}$$

$$v_2 = 5,5 \text{ м/с}$$

$$l = 15 \text{ см} = 0,15 \text{ м}$$

$$t = 69 \text{ с}$$

$$R = ? \quad N = ?$$

Розв'язання

Лінійна v та кутова ω швидкості точки, що обертаються, зв'язані співвідношенням

$$v = \omega r, \quad (1)$$

де r – відстань точки до осі обертання.

Спочатку маховик обертається рівномірно, тобто з постійною кутовою швидкістю ω , коли лінійні швидкості його точок залежать від відстані до осі обертання згідно з формулою (1)

$$\begin{cases} v_1 = \omega R, \\ v_2 = \omega(R - l). \end{cases}$$

З цих рівнянь кутова швидкість

$$\begin{cases} \omega = \frac{v_1}{R}, \\ \omega = \frac{v_2}{R - l}. \end{cases}$$

Ліві частини обох рівнянь системи однакові, тому прирівнюємо праві частини та отримаємо

$$\frac{v_1}{R} = \frac{v_2}{R - l},$$

з яких виразимо радіус маховика R

$$R = \frac{v_1}{v_1 - v_2} l. \quad (2)$$

Розмірність отриманої величини

$$[R] = \frac{\text{м/с}}{\text{м/с}} \cdot \text{м} = \text{м}.$$

Розглянемо рівносповільнене обертання маховика, коли його кутова швидкість зменшується з початкової величини ω до кінцевої величини ω_k .

Величини ω і ω_k зв'язані між собою співвідношенням

$$\omega_k = \omega + \varepsilon t, \quad (3)$$

де ε – кутове прискорення маховика, яке є величиною алгебраїчною.

Зважаючи на те, що кінцева кутова швидкість дорівнює нулю (маховик зупинився), та використовуючи формулу (3), для кутового прискорення ε можемо записати:

$$\varepsilon = -\frac{\omega}{t}, \quad (4)$$

знак «мінус» означає, що обертання є рівносповільненням.

У випадку рівнозмінного обертання кут $\Delta\varphi$, на який повертається радіус маховика за відповідний проміжок часу, є

$$\Delta\varphi = \omega t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (5)$$

Підставляючи (5) кутове прискорення із (4), отримаємо

$$\Delta\varphi = \omega t - \frac{\omega t^2}{2} = \omega t - \frac{\omega t}{2} = \frac{\omega t}{2}. \quad (6)$$

Кількість обертів N , яку робить маховик за час t , пов'язана з кутом $\Delta\varphi$, на який здійснює поворот радіус маховика за той самий час, співвідношенням

$$\Delta\varphi = 2\pi N. \quad (7)$$

Тоді, підставляючи (7) в (6), отримаємо

$$2\pi N = \frac{\omega t}{2},$$

звідки шукана кількість обертів N дорівнює

$$N = \frac{\omega}{4\pi} t. \quad (8)$$

Розмірність кількості обертів

$$[N] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{рад}} = 1.$$

Виразимо кількість обертів через величини, що задані в умовах задачі. Для цього підставимо радіус маховика (2) в вираз (8)

$$N = \frac{\omega t}{4\pi} = \frac{v_1 t}{R \cdot 4\pi} = \frac{v_1 t (v_1 - v_2)}{v_1 l \cdot 4\pi} = \frac{(v_1 - v_2) t}{4\pi l}. \quad (9)$$

Розрахуємо радіус маховика за формулою (2)

$$R = \frac{v_1}{v_1 - v_2} l = \frac{6}{6 - 5,5} \cdot 0,15 = 1,8 \text{ м}$$

і кількість обертів до зупинки маховика за формулою (9)

$$N = \frac{(v_1 - v_2) t}{4\pi l} = \frac{0,5}{4 \cdot \pi \cdot 0,15} \cdot 69 = 18,3.$$

Відповідь: $R = 1,8 \text{ м}$, $N = 18,3$.

Задача 2.2.4

Колесо, що обертається рівносповільнено, за час $t = 1 \text{ хв}$ зменшує свою частоту з $n_1 = 300 \text{ об/хв}$ до $n_2 = 180 \text{ об/хв}$. Знайти кутове прискорення ε колеса та кількість обертів N колеса за цей час.

Дано:	Розв'язання
$t = 1 \text{ хв} = 60 \text{ с}$	Колесо обертається впродовж проміжку часу t рівносповільнено. Його початкова ω_1 та кінцева ω_2 кутові швидкості пов'язані співвідношенням
$n_1 = 300 \text{ об/хв} = 5 \text{ об/с}$	
$n_2 = 180 \text{ об/хв} = 3 \text{ об/с}$	
$\varepsilon = ? \quad N = ?$	$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon t, \quad (1)$

де ε – кутове прискорення колеса, а t – час його руху.

З (1), шукане кутове прискорення ε становить

$$\varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t}. \quad (2)$$

Величина кутової швидкості ω та частота n пов'язані між собою співвідношенням:

$$\omega = 2\pi n, \quad (3)$$

Тоді для початкової та кінцевої кутових швидкостей можна написати

$$\omega_1 = 2\pi n_1, \quad \omega_2 = 2\pi n_2. \quad (4)$$

Підставляючи (2) в (4), отримаємо вираз для кутового прискорення

$$\varepsilon = 2\pi \frac{n_2 - n_1}{t}. \quad (5)$$

Його розмірність

$$[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с} \cdot \text{с}} = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

Для знаходження кількості обертів N , яке здійснює колесо за час t , спочатку знайдемо відповідний кут $\Delta\varphi$ повороту радіуса. З огляду на те, що колесо здійснює рівнозмінне обертання, цей кут дорівнює:

$$\Delta\varphi = \omega_1 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (6)$$

Підставивши (2) в (4), отримаємо:

$$\Delta\varphi = \omega_1 t + \frac{(\omega_2 - \omega_1)t^2}{2t} = \frac{2\omega_1 t - \omega_1 t + \omega_2 t}{2} = \frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2}.$$

Таким чином, кут $\Delta\varphi$ повороту

$$\Delta\varphi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \quad (7)$$

З іншого боку, кут повороту можна виразити в кількості обертів N , здійснених колесом за час обертання t ,

$$\Delta\varphi = 2\pi N, \quad (8)$$

оскільки одному оберту відповідає кут 2π .

Прирівнюючи праві частини формул (7) та (8), отримаємо

$$2\pi N = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t.$$

Враховуючи співвідношення (3), остаточно можемо написати:

$$N = \frac{n_1 + n_2}{2} t. \quad (9)$$

Розмірність кількості обертів

$$[N] = \frac{1/\text{с}}{1/\text{с}} = 1.$$

Підставляємо дані задачі та знаходимо шукані величини.

Кутове прискорення з (5) становить

$$\varepsilon = 2\pi \frac{n_2 - n_1}{t} = \frac{2\pi(3-5)}{60} = -0,21 \text{ рад/с}^2.$$

Знак «мінус» вказує на те, що обертання є рівносповільненим (величини ω та ε мають протилежні знаки).

Кількість обертів N з формули (9) :

$$N = \frac{n_1 + n_2}{2} t = \frac{5+3}{2} 60 = 240 \text{ об.}$$

Відповідь: $\varepsilon = -0,21 \text{ рад/с}^2$, $N = 240 \text{ об.}$

Задача 2.2.5

Матеріальна точка рухається по колу радіусом $R = 0,2 \text{ м}$ з постійним тангенціальним прискоренням $a_\tau = 0,04 \text{ м/с}^2$. Визначити, через який час t після початку руху нормальне прискорення точки a_n буде в три рази більше за тангенціальне. Чому при цьому буде дорівнювати повне прискорення точки?

Дано:	Розв'язання
$R = 0,2 \text{ м}$	Тангенціальне прискорення a_τ (проекція вектора
$a_\tau = 0,04 \text{ м/с}^2$	прискорення $\vec{a}$ на напрямок дотичної до траєкторії)
$a_n = 3a_\tau$	визначається як
$t = ? \quad a = ?$	$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad (1)$

де v – модуль вектора швидкості.

З умов задачі a_τ є постійною позитивною величиною, тому точка здійснює рівноприскорений рух, під час якого модуль вектора швидкості лінійно зростатиме з часом

$$v = v_0 + a_\tau t,$$

де v_0 – модуль початкової швидкості, яка за умов задачі $v_0 = 0$. Тому,

$$v = a_\tau t. \quad (2)$$

Зробимо тут наступне очевидне зауваження. Якщо матеріальна точка здійснює рівнозмінний рух за умови, що її початкова швидкість дорівнює нулю, то цей рівнозмінний рух може бути тільки рівноприскореним.

Нормальне прискорення a_n (проекція вектора прискорення на напрямок нормалі до траєкторії) становить

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (3)$$

Підставляючи (2) в (3), отримаємо:

$$a_n = \frac{a_\tau^2 t^2}{R}. \quad (4)$$

У вираз (2) у явному вигляді входить час t . тому треба його виразити, використовуючи умову задачі, що

$$a_n = 3a_\tau. \quad (5)$$

Підставлення (5) в (4), дає

$$\frac{a_\tau^2 t^2}{R} = 3a_\tau.$$

Виражаємо шуканий час t :

$$t = \sqrt{\frac{3R}{a_\tau}}. \quad (6)$$

Розмірність часу з формули (6) становить

$$[t] = \sqrt{\frac{M \cdot c^2}{M}} = c.$$

Модуль вектора прискорення a можна визначити, використовуючи рівність:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (7)$$

З огляду на те, що тангенціальна складова прискорення $a_\tau \neq 0$, вектор прискорення $\vec{a}$ безперервно змінюватиметься не лише за напрямком, але і за абсолютною величиною.

Враховуючи, що $a_n = 3a_\tau$,

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{a_\tau^2 + (3a_\tau)^2} = \sqrt{a_\tau^2 + 9a_\tau^2} = a_\tau \sqrt{10}. \quad (8)$$

Використовуючи формулу (6), знаходимо час

$$t = \sqrt{\frac{3R}{a_\tau}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 0,2}{0,04}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{-1}}{4 \cdot 10^{-2}}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 10} = \sqrt{15} = 3,87 \text{ с.}$$

Модуль прискорення a за формулою (8) дорівнює.

$$a = 0,04\sqrt{10} = 0,13 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $t = 3,87 \text{ с}$, $a = 0,13 \text{ м/с}^2$.

Задача 2.2.6

Матеріальна точка рухається по колу з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 0,02 \text{ рад/с}^2$. Через який проміжок часу t після початку руху кут між вектором прискорення $\vec{a}$ та вектором швидкості $\vec{v}$ дорівнюватиме 45° ? Вважати, що початкова швидкість точки дорівнює нулю.

Дано:	Розв'язання
$\varepsilon = 0,02 \text{ рад/с}^2$	Точка рухається по колу з постійним кутовим прискоренням.
$\alpha = 45^\circ$	Оскільки початкова швидкість точки дорівнює
$t = ?$	нулю, то модуль вектора швидкості v для рівноприскореного руху залежить від часу як

$$v = a_\tau t, \quad (1)$$

де a_τ – тангенціальна складова прискорення точки.

Зважаючи на те, що тангенціальне прискорення точки пов'язано з його кутовим прискоренням співвідношенням

$$a_\tau = \varepsilon R,$$

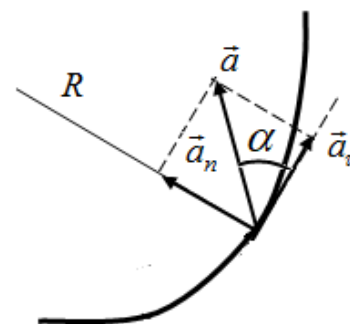
де R – радіус кола, формула (1) набуває вигляду

$$v = \varepsilon R t. \quad (2)$$

Використовуючи (2), нормальну складову прискорення запишемо як

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\varepsilon t R)^2}{R} = \varepsilon^2 t^2 R, \quad (3)$$

З огляду на те, що матеріальна точка здійснює рівноприскорений рух, виходить, що напрямок вектора швидкості $\vec{v}$ точки збігається з напрямком вектора тангенціального прискорення $\vec{a}_\tau$. Отже, кут α , який утворює вектор прискорення $\vec{a}$ з вектором швидкості $\vec{v}$ збігається з кутом між векторами $\vec{a}$ і a_τ .



З прямокутного трикутника знаходимо

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = \varepsilon t^2. \quad (4)$$

З формули (4) час руху t дорівнює

$$t = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\varepsilon}}. \quad (5)$$

Перевіряємо одиниці виміру правої частини формули (5):

$$[t] = \sqrt{\frac{1}{\text{с}^{-2}}} = \sqrt{\text{с}^2} = \text{с}.$$

Підставляючи у формулу (5) числові значення з умови задачі, отримаємо

$$t = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{0,02}} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 10^{-2}}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7,1 \text{ с}.$$

Відповідь: $t = 7,1 \text{ с}.$

Задача 2.2.7

Матеріальна точка, яка почала рівноприскорений рух по колу радіусом $R=1$ м, пройшла за $t_1=10$ с шлях $S=50$ м. З яким доцентровим прискоренням a_n вона буде рухатися через $t_2=5$ с після початку руху? Яким при цьому буде її повне прискорення та кут між вектором повного прискорення і радіусом кола?

Дано:	Розв'язання
$R=1$ м	За умовою задачі матеріальна точка здійснює рівноприскорений рух. Отже, якою б не була траєкторія руху точки, модуль вектора швидкості з часом безперервно зростатиме за лінійним законом
$t_1=10$ с	
$S=50$ м	
$t_2=5$ с	
$a_n=?$ $a=?$	$v=v_0+a_\tau t, \quad (1)$
$\alpha=?$	де v_0 – модуль вектора початкової швидкості.

При рівноприскореному русі вздовж будь-якої траєкторії шлях, пройдений точкою за деякий проміжок часу t , можна визначити, використовуючи формулу

$$S=v_0 t+\frac{a_\tau t^2}{2}, \quad (2)$$

Треба зазначити, якщо необхідно визначити шлях не від початку руху точки, а за довільний проміжок часу Δt , початок якого не збігається з моментом відліку часу, тоді у якості v_0 треба брати не швидкість в момент $t=0$, а швидкість на початку вказаного проміжку часу. Це ж стосується і модуля швидкості. Враховуючи, що $v_0=0$, пройдений шлях за час t_1 становить

$$S=\frac{a_\tau t_1^2}{2}.$$

Тоді можна виразити тангенціальну складову прискорення

$$a_\tau=\frac{2S}{t_1^2}. \quad (3)$$

Підставимо (3) в праву частину (1) і отримаємо вираз для модуля швидкості у будь-який момент часу t

$$v = \frac{2S}{t_1^2} t, \quad (4)$$

в якому враховано те, що $v_0 = 0$.

Оскільки траєкторією руху точки є коло радіуса R , то нормальне прискорення в кожний момент часу t складає

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (5)$$

Підставляючи в (5) праву частину (4), отримаємо

$$a_n = \frac{4S^2}{Rt_1^4} t^2. \quad (6)$$

З врахуванням (3) і (6), модуль вектора прискорення $\mathbf{a}$ становить

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\frac{4S^2}{t_1^4} + \frac{16S^4 t^4}{R^2 t_1^8}} = \frac{2S}{t_1^2} \sqrt{1 + \frac{4S^2 t^4}{R^2 t_1^4}}. \quad (7)$$

Вектор тангенціального прискорення $\vec{a}_\tau$ спрямований уздовж дотичної до кола у бік руху матеріальної точки, а вектор нормального прискорення $\vec{a}_n$ – уздовж радіусу, проведеного до центру кола, тоді тангенс кута α , якій утворює вектор прискорення $\vec{a}$ з радіусом кола R , дорівнює

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_\tau}{a_n}. \quad (8)$$

Використовуючи вирази (3) і (6), формулу (8) можна записати у такому вигляді

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Rt_1^2}{4St^2}. \quad (9)$$

Перевірка розмірностей отриманих формул дає

$$[a_n] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{м} \cdot \text{с}^4} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \quad [\operatorname{tg} \alpha] = \frac{Rt_1^2}{4St^2} = \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{м} \cdot \text{с}^2} = 1$$

Підставлення значень з умови задачі дає

$$a_n = \frac{4S^2}{Rt_1^4} t^2 = \frac{4 \cdot 50^2}{1 \cdot 10^4} \cdot 5^2 = \frac{4 \cdot 5^2 \cdot 10^2}{10^4} \cdot 5^2 = \frac{4 \cdot 25^2}{10^2} = \frac{25^2}{25} = 25 \text{ м/с}^2,$$

$$a = \frac{2S}{t_1^2} \sqrt{1 + \frac{4S^2 t^4}{R^2 t_1^4}} = \frac{2 \cdot 50}{10^2} \sqrt{1 + \frac{4 \cdot 50^2 \cdot 5^4}{1^2 \cdot 10^4}} = \sqrt{1 + \frac{4 \cdot 5^2 \cdot 10^2 \cdot 5^4}{10^4}} = 25,02 \text{ м/с}^2.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Rt_1^2}{4St^2} = \frac{1 \cdot 10^2}{4 \cdot 50 \cdot 5^2} = \frac{1}{50} = 0,02.$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 0,02 = 0,02 \text{ рад} = 1,15^\circ.$$

Такий же результат може бути отриманий, якщо зважаючи на те, що $\operatorname{tg} \alpha \ll 1$, значення тангенса замінити значенням його аргументу (в радіанах).

Відповідь: $a_n = 25 \text{ м/с}^2$, $a = 25,02$, $\alpha = 0,02 \text{ рад}$.

Задача 2.2.8

Точка рухається по колу так, що залежність її дугової координати від часу задається рівнянням $s(t) = A - Bt + Ct^2$, де $B = 2 \text{ м/с}$, $C = 1 \text{ м/с}^2$. Знайти модуль лінійної швидкості v точки, її тангенціальне a_τ , нормальне a_n та повне прискорення a через $t_2 = 3 \text{ с}$ після початку руху, якщо відомо, що при $t_1 = 2 \text{ с}$ нормальне прискорення точки дорівнює $a'_n = 0,5 \text{ м/с}^2$.

Дано:

$$s(t) = A - Bt + Ct^2$$

$$B = 2 \text{ м/с}, C = 1 \text{ м/с}^2$$

$$t_1 = 2 \text{ с}, a'_n = 0,5 \text{ м/с}^2$$

$$t_2 = 3 \text{ с}$$

$$v = ? \quad a_\tau = ? \quad a_n = ? \quad a = ?$$

Розв'язання

Закон руху матеріальної точки по колу має вигляд:

$$s(t) = A - Bt + Ct^2. \quad (1)$$

Точка буде здійснювати рівнозмінний рух, оскільки

$s(t)$ є квадратична функція часу. Характер цього

рівнозмінного руху складний. Спочатку точка здійснює

рівносповільнений рух у бік зменшення координати s : вектори $\vec{v}$ та $\vec{a}_\tau$ спрямовані протилежно; у деякий момент часу, позначимо його t_0 , швидкість

точки дорівнюватиме нулю. В цей момент часу вектор швидкості змінює свій напрямок на протилежний, а точка після чого починає рівноприскорений рух у протилежному напрямку, а саме, у бік зростання координати s , при цьому напрямки векторів $\vec{v}$ та $\vec{a}_\tau$ однакові. У загальному випадку руху матеріальної точки по колу (точка може здійснювати нерівномірний рух у будь-якому напрямку, а також неодноразово його змінювати) величина ds/dt дає не модуль вектора лінійної швидкості, а його проєкцію на позитивний напрямок дотичної до траєкторії (позитивний напрямок дотичної до траєкторії обирають таким чином, щоб він збігався з позитивним напрямком відліку s). Знайдемо цю проєкцію

$$v = \frac{ds}{dt} = -B + 2Ct. \quad (2)$$

З (2) знаходимо t_0 , оскільки в цей момент часу $ds/dt = 0$

$$t_0 = \frac{B}{2C}.$$

Таким чином, в інтервалі часу $\Delta t = t_0 - t'_0$, де $t'_0 = 0$ – початок відліку часу, величина ds/dt буде від'ємною. Якщо треба визначити модуль вектора лінійної швидкості у момент часу, який належить цьому інтервалу, то треба брати не похідну від функції $s(t)$ за часом, а модуль цієї похідної.

При $t > t_0$, $ds/dt > 0$, а модуль вектора швидкості дорівнює проєкції вектора швидкості на напрямок дотичної до траєкторії, який є другою похідною від дугової координати за часом

$$a_\tau = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

Диференціюючи вираз (2) за часом, отримаємо:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-B + 2Ct) = 2C. \quad (3)$$

Проекція вектора прискорення на напрямок нормалі до траєкторії, кривизна якої R (ця проєкція завжди позитивна), дорівнює

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (4)$$

Модуль вектора швидкості у будь-який момент часу визначається модулем правої частини рівності (2).

Формула (4) з урахуванням даних задачі має вигляд

$$a'_n = \frac{(-B + 2Ct_1)^2}{R},$$

звідки радіус R становить

$$R = \frac{(-B + 2Ct_1)^2}{a'_n}.$$

Для величини a_n

$$a_n = \frac{(-B + 2Ct_2)^2}{R}$$

в момент часу t_2 можемо написати

$$a_n = \left(\frac{-B + 2Ct_2}{-B + 2Ct_1} \right)^2 \cdot a'_n. \quad (5)$$

Вектор прискорення $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, тому модуль його дорівнює

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (6)$$

Перевірка розмірностей отриманих результатів дає:

для модуля швидкості в момент часу t_2 (2)

$$[v] = \left[\frac{ds}{dt} \right] = [-B + 2Ct] = \frac{M}{c} + \frac{M}{c^2} \cdot c = \frac{M}{c};$$

для величини a_τ і a_n з формул (3) і (4)

$$[a_\tau] = \frac{M}{c^2}, \quad [a_n] = \frac{M}{c^2}.$$

Підставлення даних дає такі результати.

Модуль лінійної швидкості точки (2)

$$v = \frac{ds}{dt} = -B + 2Ct = -2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 = 4 \text{ м/с};$$

тангенціальне прискорення (3)

$$a_\tau = 2C = 2 \cdot 1 = 2 \text{ м/с}^2;$$

нормальне прискорення (5)

$$a_n = \left(\frac{-B + 2Ct_2}{-B + 2Ct_1} \right)^2 \cdot a'_n = \left(\frac{-2 + 2 \cdot 1 \cdot 3}{-2 + 2 \cdot 1 \cdot 2} \right)^2 \cdot 0,5 = \left(\frac{4}{2} \right)^2 \cdot 0,5 = 2 \text{ м/с}^2;$$

модуль вектора прискорення (8.6)

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2,83 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $v = 4 \text{ м/с}$, $a_\tau = 2 \text{ м/с}^2$, $a_n = 2 \text{ м/с}^2$, $a = 2,83 \text{ м/с}^2$.

Задача 2.2.9

Нормальне прискорення точки, яка рухається по колу радіусом $R = 0,2 \text{ м}$, задається рівнянням $a_n = 1 + 6t + 9t^2 \text{ м/с}^2$. Визначити нормальне a_n , тангенціальне a_τ та повне прискорення a точки в момент часу $t = 0,5 \text{ с}$.

Дано:	Розв'язання
$R = 0,2 \text{ м}$	Згідно з умовою задачі нормальне прискорення точки під час її руху вздовж кола змінюється як
$a_n = 1 + 6t + 9t^2 \text{ м/с}^2$	
$t = 0,5 \text{ с}$	$a_n(t) = 1 + 6t + 9t^2 \quad (1)$
$a_n = ? \quad a_\tau = ? \quad a = ?$	Зауважимо, що константи, які входять в праву частину формули (1) мають наступні одиниці виміру: 1 м/с^2 , 6 м/с^3 та 9 м/с^4 , оскільки a_n вимірюється в м/с^2 .

З (1) випливає, що точка здійснює рівноприскорений рух по колу, під час якого модуль вектора швидкості точки зростає з часом за лінійним законом

$$v = v_0 + a_\tau t, \quad (2)$$

де v_0 – модуль початкової швидкості, a_τ – проєкція вектора прискорення $\vec{a}$ на напрямок дотичної до траєкторії руху точки.

При русі по колу радіуса R нормальне прискорення у кожній точці траєкторії задається формулою

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (3)$$

Враховуючи (2), формулу (3) можна подати у такому вигляді

$$a_n = \frac{(v_0 + a_\tau t)^2}{R} = \frac{1}{R} (v_0^2 + 2v_0 a_\tau t + a_\tau^2 t^2). \quad (4)$$

З формули (4) виходить, що при рівноприскореному (як і при рівносповільненому) русі точки по колу, її нормальне прискорення буде квадратичною функцією часу. Порівнюючи праві частини рівності (1) і (4), можемо написати:

$$\begin{aligned} \frac{v_0^2}{R} &= 1 \left(\frac{M}{C^2} \right), \\ \frac{2v_0 a_\tau}{R} &= 6 \left(\frac{M}{C^3} \right), \\ \frac{a_\tau^2}{R} &= 9 \left(\frac{M}{C^4} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

або, враховуючи умову задачі,

$$v_0^2 = 0,2 \left(\frac{M^2}{C^2} \right), \quad a_\tau = 3 \cdot \sqrt{0,2} \left(\frac{M}{C^2} \right), \quad a_\tau^2 = 1,8 \left(\frac{M^2}{C^4} \right). \quad (6)$$

Вектор прискорення $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, тому з врахуванням того, що складові прискорення $\vec{a}_\tau$ та $\vec{a}_n$ перпендикулярні одна одній, модуль прискорення дорівнює

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (7)$$

Використовуючи формулу (1) та дані з умови задачі, можна знайти нормальне прискорення

$$a_n = 1 + 6t + 9t^2 = 1 + 6 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,25 = 4,75 \text{ м/с}^2.$$

Тангенціальне прискорення, враховуючи співвідношення (6), становить

$$a_\tau = \sqrt{1,8} = 1,34 \text{ м/с}^2.$$

Модуль прискорення (7) дорівнює

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{1,34^2 + 4,75^2} = 4,94 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $a_n = 4,75 \text{ м/с}^2$, $a_\tau = 1,34 \text{ м/с}^2$, $a = 4,94 \text{ м/с}^2$.

Задача 2.2.10

Точка рухається по колу радіуса $R = 10 \text{ см}$ з постійним тангенціальним прискоренням a_τ . Знайти нормальне прискорення a_n точки через $t = 20 \text{ с}$ після початку руху, якщо відомо, що наприкінці n 'ятого оберту після початку руху лінійна швидкість точки $v' = 10 \text{ см/с}$.

Дано:

$$R = 10 \text{ см} = 10^{-1} \text{ м}$$

$$a_\tau = \text{const}$$

$$t_2 = 20 \text{ с}$$

$$N = 5$$

$$v_1 = 10 \text{ см/с} = 10^{-1} \text{ м/с}$$

$$a_n = ?$$

Розв'язання

Нормальне прискорення a_n точки, що рухається по колу радіуса R з миттєвою швидкістю v у будь-який момент часу визначається за формулою

$$a_n = \omega^2 R. \quad (1)$$

У випадку, що розглядається, точка рухається з постійною тангенціальною складовою прискорення

(рівноприскорений рух по колу), тому кутове прискорення $\varepsilon = \frac{a_\tau}{R}$ також є постійним.

Використаємо рівняння, що описують рівноприскорений обертальний рух, за умови, що початкова кутова швидкість $\omega_0 = 0$, для випадку, який відповідає тому моменту часу t_1 , коли точка здійснила $N = 5$ обертів.

$$\begin{cases} 2\pi N = \frac{\varepsilon t_1^2}{2}, \\ \omega_1 = \varepsilon t_1. \end{cases} \quad (2)$$

Виразимо час t_1 із другого рівняння системи (2),

$$t_1 = \frac{\omega_1}{\varepsilon},$$

та підставимо його в перше рівняння, щоб знайти кутове прискорення ε , враховуючи те, що кутова та лінійна швидкості зв'язані співвідношенням $\omega_1 = \frac{v_1}{R}$.

$$\begin{aligned} 2\pi N &= \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\omega_1}{\varepsilon} \right)^2, \\ \varepsilon &= \frac{\omega_1^2}{4\pi N} = \left(\frac{v_1}{R} \right)^2 \frac{1}{4\pi N}, \\ \varepsilon &= \frac{v_1^2}{4\pi N \cdot R^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Нормальне прискорення, яке нам треба визначити в задачі, відповідає моменту часу t_2 , коли кутова швидкість, що розраховується по формулі (1) набуває величини $\omega_2 = \varepsilon t_2$.

Підставимо отриману величину кутового прискорення ε із (3) і отримаємо

$$\omega_2 = \frac{v_1^2 \cdot t_2}{4\pi N \cdot R^2}. \quad (4)$$

Нормальне прискорення a_n точки в момент часу t_2 можна визначити шляхом підставляння (4) в (1)

$$a_n = \omega_2^2 R = \left(\frac{v_1^2 \cdot t_2}{4\pi N \cdot R^2} \right)^2 \cdot R = \left(\frac{v_1^2 \cdot t_2}{4\pi N} \right)^2 \cdot \frac{1}{R^3} = \frac{v_1^4 \cdot t_2^2}{16\pi^2 N^2 R^3}. \quad (5)$$

Перевіримо розмірність отриманого результату

$$[a_n] = \left[\frac{\text{м}^4 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^4 \cdot \text{м}^3} \right] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Підставляємо у формулу (5) числові дані і знаходимо нормальну складову прискорення

$$a_n = \frac{v_1^4 \cdot t_2^2}{16\pi^2 N^2 R^3} = \frac{10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^2}{16 \cdot (3,14)^2 \cdot 25 \cdot 10^{-3}} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}.$$

Відповідь: $a_n = 0,01 \text{ м/с}.$

Задача 2.2.11

Диск радіуса $R = 0,4 \text{ м}$ обертається так, що залежність кутової швидкості від часу задається рівнянням $\omega = 3 + 4t + 3t^2 \text{ рад/с}$. Знайти нормальне a_n , тангенціальне a_τ та повне прискорення a точок, що лежать на ободі диска для моменту часу $t = 2 \text{ с}$. Який кут α в цей момент часу між вектором повного прискорення та радіусом диска? Скільки обертів зробить диск за цей час?

Дано:	Розв'язання
$R = 0,4 \text{ м}$	Кутова швидкість обертання описується квадратичною функцією часу
$\omega = 3 + 4t + 3t^2 \text{ рад/с}$	
$t = 2 \text{ с}$	$\omega = 3 + 4t + 3t^2, \quad (1)$
$a_n = ? \quad a_\tau = ? \quad a = ?$	тому обертання диска не є рівнозмінним рухом. Крім того, з виду функції (1) витікає, що у будь-який момент часу t кутова швидкість $\omega(t) > 0$.
$N = ? \quad \alpha = ?$	

Отже, тіло під час свого руху не змінює напрямку обертання, а рухається у напрямку зростання кута φ . Крім того, з формули (1) також випливає, що абсолютна величина кутової швидкості обертання диска безперервно зростатиме з часом, тобто обертання буде прискореним. Зауважимо, що константи, які входять в праву частину рівності (1) мають наступні одиниці виміру: 3 рад/с , 4 рад/с^2 , 3 рад/с^3 , оскільки одиниця виміру ω є рад/с .

Усі точки, що розташовані на ободі диска, здійснюють рух по колу радіуса R , тому їх тангенціальне прискорення a_τ дорівнює

$$a_\tau = \varepsilon R. \quad (2)$$

Кутове прискорення ε визначається як

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Диференціюючи рівняння (1) за часом, отримаємо

$$\varepsilon = \frac{d}{dt}(3 + 4t + 3t^2) = 4 + 6t. \quad (3)$$

Враховуючи (3), формулу (2) набуває вигляду

$$a_\tau = (4 + 6t)R. \quad (4)$$

Для нормального прискорення a_n , яке дорівнює

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R,$$

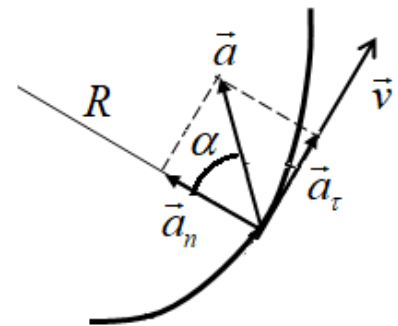
з урахуванням формули (1) і того, що $v = \omega R$, маємо

$$a_n = (3 + 4t + 3t^2)^2 \cdot R. \quad (5)$$

Для кожної точки, що знаходиться на ободі диска, тангенціальне прискорення $\vec{a}_\tau$ спрямоване уздовж дотичної до кола радіуса R у бік обертання диска (диск здійснює прискорене обертання, це означає, що напрямки векторів $\vec{v}$ і $\vec{a}_\tau$ збігаються); нормальне прискорення $\vec{a}_n$ спрямовано уздовж радіуса до центру диска. Для кута α , який утворює вектор прискорення $\vec{a}$ з радіусом диска, можемо написати:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_\tau}{a_n}. \quad (6)$$

Для того, щоб знайти кількість обертів N , яку здійснює диск за вказаний в умові задачі проміжок часу, знайдемо спочатку кут $\Delta\varphi$ повороту диска за



відповідний часовий інтервал. Враховуючи, що кутова швидкість ω визначається як

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

де φ – кут, який утворює радіус диска з нерухомою площиною, яка проходить через вісь обертання. Для змінної величини φ можемо написати:

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^t \omega dt, \quad (7)$$

де φ_0 – стала інтегрування, що відповідає значенню кута φ в момент часу $t = 0$.

Підставляючи в (7) праву частину формули (1), отримаємо:

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^t (3 + 4t + 3t^2) dt.$$

Результатом інтегрування є залежність кутової змінної φ від часу,

$$\varphi(t) = 3t + 2t^2 + t^3 + \varphi_0.$$

Кут повороту $\Delta\varphi$, здійснений диском за час t , з урахуванням того, що $\varphi_0 = 0$, становить

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = 3t + 2t^2 + t^3. \quad (8)$$

Кут повороту $\Delta\varphi$ диска за проміжок часу t пов'язаний з кількістю обертів N , яку диск здійснює за той же проміжок часу, співвідношенням

$$\Delta\varphi = 2\pi N. \quad (9)$$

Шукана кількість обертів N з урахуванням (8) і (9) дорівнює

$$N = \frac{1}{2\pi} (3t + 2t^2 + t^3). \quad (10)$$

Тангенс кута α між вектором прискорення і радіусом становить

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_\tau}{a_n}. \quad (11)$$

Прискорення точки $\vec{a}$ є векторною сумою його тангенціальної $\vec{a}_\tau$ та нормальної $\vec{a}_n$ складових $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, тому величина прискорення знаходиться як

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad (12)$$

Перевіримо одиниці виміру знайдених величин:

- тангенціальне прискорення (4)

$$[a_\tau] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

- нормальне прискорення (11.5)

$$[a_n] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

- повне прискорення (11.12)

$$[a] = \sqrt{\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)^2 + \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

- кількість обертів N з формули (11.10)

$$[N] = \frac{1}{\text{рад}} \left(\frac{\text{рад} \cdot \text{с}}{\text{с}} + \frac{\text{рад} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2} + \frac{\text{рад} \cdot \text{с}^3}{\text{с}^3} \right) = 1,$$

Розрахунки, застосовуючи отримані формули, дають наступні результати:

- тангенціальне прискорення (4)

$$a_\tau = (4 + 6t)R = (4 + 6 \cdot 2) \cdot 0,4 = 6,4 \text{ м/с}^2,$$

- нормальне прискорення (5)

$$a_n = (3 + 4t + 3t^2)^2 \cdot R = (3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4)^2 \cdot 0,4 = 211,6 \text{ м/с}^2,$$

- повне прискорення (12)

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 211,7 \text{ м/с}^2,$$

- кількість обертів N (10)

$$N = \frac{1}{2\pi} (3t + 2t^2 + t^3) = \frac{1}{2 \cdot 3,14} (3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 8) = 3,5,$$

- кут α , який утворює вектор прискорення $\vec{a}$ з радіусом диска (11)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{\tau}}{a_n} = \frac{6,4}{211,6} = 0,03, \quad \alpha = \operatorname{arctg} 0,03 = 0,03 \text{ рад} = 1,72^{\circ} \text{ рад}.$$

Відповідь: $a_{\tau} = 6,4 \text{ м/с}^2$, $a_n = 211,6 \text{ м/с}^2$, $a = 211,7 \text{ м/с}^2$, $\alpha = 3 \cdot 10^{-2} \text{ рад}$,
 $N = 3,5$ обертів.

Задача 2.2.12

Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi(t) = At - Bt^3$, де $A = 6 \text{ рад/с}$, $B = 2 \text{ рад/с}^3$. Визначити середню кутову швидкість за проміжок часу від $t_0 = 0$ до моменту зупинки та кутове прискорення в момент зупинки.

Дано:	Розв'язання
$\varphi(t) = At - Bt^3$	За умовами задачі залежність кута повороту φ від часу задається функцією:
$A = 6 \text{ рад/с}$	
$B = 2 \text{ рад/с}^3$	
	$\varphi(t) = At - Bt^3. \quad (1)$
$\langle \omega \rangle = ? \quad \varepsilon = ?$	Дослідження цієї функції дозволяє констатувати, що тіло спочатку здійснює сповільнене обертання у напрямку зростання кута φ , у деякий момент часу, позначимо його t_1 , кутова швидкість тіла буде дорівнюватиме нулю (точка повороту), після чого тіло почне прискорене обертання у протилежний бік.

Для того щоб знайти момент часу, в який тіло змінює напрямок свого обертання, знайдемо спочатку залежність кутової швидкості тіла від часу. Для цього продиференціюємо за часом обидві частини рівності (1)

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = A - 3Bt^2. \quad (2)$$

З умови $\omega(t_1) = 0$ отримаємо значення t_1

$$0 = A - 3Bt_1^2,$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{A}{3B}}. \quad (3)$$

Для середньої кутової швидкості отримуємо

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}, \quad (4)$$

де $\Delta \varphi$ – приріст кута повороту, який відповідає проміжку часу Δt .

Використовуючи умову задачі та формули (1), (3) та (4), для середньої кутової швидкості за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t_0$ можемо написати:

$$\langle \omega \rangle = \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{A\sqrt{\frac{A}{3B}} - B\left(\frac{A}{3B}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{A}{3B}}} = A - \frac{A}{3} = \frac{2A}{3}. \quad (5)$$

Для того, щоб знайти значення кутового прискорення в момент зупинки тіла, знайдемо саму функцію $\varepsilon(t)$. Для цього продиференціюємо кутову швидкість (2) за часом:

$$\varepsilon(t) = \frac{d\omega}{dt} = -6Bt. \quad (6)$$

З формул (2) і (6) бачимо, що протягом часу $\Delta t = t_1 - t_0$, величини ω та ε мають протилежні знаки: $\omega > 0$, $\varepsilon < 0$ – тіло здійснює сповільнене обертання, вектори кутового прискорення та кутової швидкості спрямовані у протилежні боки. Після зупинки, тіло змінює напрямок свого обертання, величини ω та ε матимуть однакові знаки: $\omega < 0$, $\varepsilon < 0$ – тіло здійснює прискорене обертання, напрямки відповідних векторів збігаються.

Підставляючи в (6) вираз (2), отримаємо:

$$\varepsilon(t_1) = -2\sqrt{3AB}. \quad (7)$$

Розмірності величин, що розраховувалися, становлять:

– середня кутова швидкість

$$[\langle \omega \rangle] = \text{рад/с},$$

– кутове прискорення

$$[\varepsilon] = \text{рад/с}^2.$$

Підставлення даних задачі дає середню кутову швидкість згідно з (5)

$$\langle \omega \rangle = \frac{2A}{3} = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4 \text{ рад/с},$$

та кутове прискорення (7) в момент зупинки

$$\varepsilon(t_1) = -2\sqrt{3AB} = -2\sqrt{3 \cdot 6 \cdot 2} = -12 \text{ рад/с}^2.$$

Відповідь: $\langle \omega \rangle = 4 \text{ рад/с}$, $\varepsilon = -12 \text{ рад/с}^2$.

Задача 2.2.13

На диск радіуса $r = 4 \text{ см}$, який може обертатися навколо горизонтальної осі, намотана нитка, до кінця якої прив'язаний вантаж. Вантаж починає рухатися рівноприскорено, і за час $t_1 = 5 \text{ с}$ спускається на $h = 3 \text{ м}$. Визначити кутове прискорення диска ε , а також нормальне a_n та повне прискорення a точок, що лежать на ободі диска, наприкінці n 'ятої секунди від початку руху.

Дано:	Розв'язання
$r = 4 \text{ см}$	Для розв'язання задачі зробимо наступні припущення. Вважатимемо, що нитка є нерозтяжною. Це означає, що усі точки нитки здійснюють рух з однаковою по модулю швидкістю, яка дорівнює за модулем швидкості вантажу. Крім цього, вважатимемо, що нитка не прослизає відносно диска. Це означає,
$t_1 = 5 \text{ с}$	
$h = 3 \text{ м}$	
$\varepsilon = ?$ $a_n = ?$ $a = ?$	

що швидкість точок на ободі диска, в яких він стикається з ниткою, дорівнює по модулю швидкості руху точок нитки, а значить, і швидкості руху вантажу. Отже, вектор швидкості кожної точки, що знаходиться на ободі диска, дорівнює за модулем вектору швидкості вантажу.

Розглянемо рух вантажу. За умовою задачі вантаж, прив'язаний до нитки, рухається зі стану спокою прямолінійно і рівноприскорено. Тоді модуль вектора швидкості в довільний момент часу t визначається згідно з

$$v = a_b t, \quad (1)$$

де a_b – абсолютна величина вектора прискорення вантажу.

Очевидно, що у такому випадку диск не буде змінювати напрямок свого обертання, крім того, у міру зростання v буде зростати й абсолютна величина кутової швидкості обертання диска, тобто диск буде здійснювати прискорене обертання. Обираючи відповідним чином напрямок осі обертання (осі z), можемо написати: $|\vec{\omega}| = \omega$ і $|\vec{\varepsilon}| = \varepsilon$.

Зважаючи на сказане вище, можна записати вираз для модуля вектора лінійної швидкості точок, що лежать на ободі диска

$$v = \omega r, \quad (2)$$

де ω – кутова швидкість (однакова для усіх точок диска), r – радіус диска. Враховуючи (1), формула (2) набуває вигляду

$$a_b t = \omega r,$$

звідки кутова швидкість ω дорівнює

$$\omega = \frac{a_b}{r} t. \quad (3)$$

З (3) видно, що кутова швидкість обертання диска зростає лінійно з часом, отже, диск здійснює рівноприскорене обертання.

Диференціювання (3) за часом дає

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{a_b}{r} = \text{const}.$$

Враховуючи, що $d\omega/dt = \varepsilon$ – кутове прискорення диска, маємо:

$$\varepsilon = \frac{a_b}{r}. \quad (4)$$

Знайдемо модуль тангенціальної складової прискорення a_τ для точок, що лежать на ободі диска (у випадку, що розглядається, $a_\tau = |\vec{a}_\tau|$, тобто проекція

вектора прискорення на напрямок дотичної дорівнює модулю тангенціальної складової вектора прискорення). Виходячи зі співвідношення тангенціального та кутового прискорення

$$a_{\tau} = \varepsilon r ,$$

і формули (4), доходимо висновку, що

$$a_{\tau} = \varepsilon r = \frac{a_{\text{в}}}{r} r = a_{\text{в}} . \quad (5)$$

Отже, тангенціальне прискорення точок, що лежать на ободі диска, дорівнює по модулю прискоренню вантажу.

Для абсолютної величини нормальної складової прискорення a_n (проекція вектора прискорення на напрямок нормалі є величиною позитивною, тому $a_n = |\vec{a}_n|$), враховуючи формулу (2), отримуємо

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r ,$$

і беручи до уваги співвідношення (3), отримуємо:

$$a_n = \frac{a_{\text{в}}^2}{r} t^2 . \quad (6)$$

Прискорення вантажу $a_{\text{в}}$, знайдемо з умови задачі: шлях h , який проходить вантаж за час t_1 , визначається як

$$h = \frac{a_{\text{в}} t_1^2}{2} ,$$

звідки знаходимо величину $a_{\text{в}}$

$$a_{\text{в}} = \frac{2h}{t_1^2} . \quad (7)$$

Для кутового прискорення ε , враховуючи (4) і (7), отримаємо

$$\varepsilon = \frac{2h}{r t_1^2} . \quad (8)$$

Нормальне прискорення a_n в кожний момент часу з врахуванням (6) і (7) дорівнює

$$a_n = \frac{4h^2}{rt_1^4} t^2. \quad (9)$$

Модуль вектора прискорення $\mathbf{a}$, зважаючи на співвідношення (5), (7) і (9), становить

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_n^2} = \sqrt{\frac{4h^2}{t_1^4} + \frac{16h^4 t^4}{r^2 t_1^8}},$$

або, якщо винести загальний множник за знак кореня, остаточно отримаємо

$$a = \frac{2h}{t_1^2} \sqrt{1 + \frac{4h^2 t^4}{r^2 t_1^4}}. \quad (10)$$

Перевіряємо одиниці виміру правої частини формули (8): шлях h і радіус кола r мають одиницю виміру метр; час t і t_1 – одиницю виміру секунда. Підставляючи перелічені одиниці виміру, приходимо до

$$[\varepsilon] = \frac{\text{м}}{\text{м} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2},$$

Застосовуючи формулу (8), знаходимо кутове прискорення ε .

$$\varepsilon = \frac{2h}{rt_1^2} = \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 10^{-2} \cdot 5^2} = 6 \text{ рад/с}^2.$$

Повне прискорення $\mathbf{a}$ згідно з формулою (10) дорівнює

$$a = \frac{2h}{t_1^2} \sqrt{1 + \frac{4h^2 t^4}{r^2 t_1^4}} = \frac{2 \cdot 3}{5^2} \sqrt{1 + \frac{4 \cdot 3^2 \cdot 5^4}{4^2 \cdot 10^{-4} \cdot 5^4}} = \frac{6}{25} \sqrt{1 + \frac{9}{4} \cdot 10^4} = 36 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $\varepsilon = 6 \text{ рад/с}^2$, $a = 36 \text{ м/с}^2$.

Задача 2.2.14

Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі так, що залежність його кутової швидкості від кута повороту φ має вигляд $\omega = \omega_0 - A\varphi$, де ω_0 і A – позитивні константи, $\omega_0 = \omega(t=0)$. В момент часу $t=0$ кут $\varphi_0=0$. Знайти залежності від часу кута повороту $\varphi(t)$ і кутової швидкості $\omega(t)$.

Дано:

$$\omega = \omega_0 - A\varphi$$

$$\omega_0 > 0$$

$$A > 0$$

$$\varphi_0 = 0$$

$$\varphi(t) = ? \quad \omega(t) = ?$$

Розв'язання

Залежність кутової швидкості від кута повороту має вигляд:

$$\omega = \omega_0 - A\varphi. \quad (1)$$

Оскільки кут φ є функцією часу, то формула (1) визначає залежність кутової швидкості від часу, що задана у неявному вигляді.

Для того, щоб отримати залежність кутової змінної φ від часу, скористаємося тим, що кутова швидкість є похідною від кута повороту $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, тому (1) набуває вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - A\varphi. \quad (2)$$

Якщо в (2) розділити змінні, то отримаємо

$$\frac{d\varphi}{\omega_0 - A\varphi} = dt. \quad (3)$$

Враховуючи те, що ω_0 та A є постійними величинами, ліву частину (3) можна записати як:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{\omega_0 - A\varphi} &= -\frac{1}{A} \cdot \frac{d(\omega_0 - A\varphi)}{\omega_0 - A\varphi}, \\ \frac{d(\omega_0 - A\varphi)}{\omega_0 - A\varphi} &= -A dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Інтегрування лівої частини у межах від 0 до φ , а правої – від 0 до t дає

$$\int_0^{\varphi} \frac{d(\omega_0 - A\varphi)}{\omega_0 - A\varphi} = -A \int_0^t dt. \quad (5)$$

Кожний з інтегралів в (5) є табличним

$$\int_0^{\varphi} \frac{d(\omega_0 - A\varphi)}{\omega_0 - A\varphi} = \ln|\omega_0 - A\varphi| \Big|_0^{\varphi}, \quad (6)$$

$$-A \int_0^t dt = -At. \quad (7)$$

Враховуючи властивості натурального логарифма

$$\ln|\omega_0 - A\varphi| \Big|_0^\varphi = \ln|\omega_0 - A\varphi| - \ln|\omega_0| = \ln \left| \frac{\omega_0 - A\varphi}{\omega_0} \right|,$$

отримаємо:

$$\ln \left| \frac{\omega_0 - A\varphi}{\omega_0} \right| = -At. \quad (8)$$

Потенціювання лівої та правої частин (8) цієї рівності приводить до

$$\left| \frac{\omega_0 - A\varphi}{\omega_0} \right| = e^{-At}. \quad (9)$$

Звідки отримаємо:

$$1) \frac{\omega_0 - A\varphi}{\omega_0} = e^{-At}, \quad (10)$$

$$2) \frac{\omega_0 - A\varphi}{\omega_0} = -e^{-At}. \quad (11)$$

Для величини φ маємо

$$1) \varphi(t) = \frac{\omega_0}{A} (1 - e^{-At}), \quad (12)$$

$$2) \varphi(t) = \frac{\omega_0}{A} (1 + e^{-At}), \quad (13)$$

але (13) не задовольняє умові $\varphi(t=0) = 0$.

Отже, остаточно маємо:

$$\varphi(t) = \frac{\omega_0}{A} (1 - e^{-At}). \quad (14)$$

Застосовуючи формулу (1) або диференціюючи (14) за часом, отримуємо формулу для кутової швидкості

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-At}. \quad (15)$$

З формул (13) та (15) бачимо, що тіло здійснює сповільнене обертання у бік зростання кута φ (за годинниковою стрілкою), а кутова швидкість ω експоненціально зменшується з часом. Величина φ при необмеженому зростанні часу t асимптотично наближається до значення ω_0/A , тобто величина φ при обертанні тіла набуває усіх значень від 0 до ω_0/A , але ні за який кінцевий проміжок часу змінна φ не досягне значення ω_0/A . Кутова швидкість, своєю чергою, при необмеженому зростанні t асимптотично наближується до нуля. Таким чином, маємо:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \frac{\omega_0}{A}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 0.$$

Відповідь: $\varphi(t) = \frac{\omega_0}{A}(1 - e^{-At})$, $\omega(t) = \omega_0 e^{-At}$.

Задача 2.2.15

Тверде тіло здійснює сповільнене обертання навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням $\varepsilon = -A\sqrt{\omega}$, де ω – кутова швидкість тіла, $A > 0$ – постійна величина. Знайти середню кутову швидкість тіла за час, протягом якого тіло буде здійснювати обертання. Кутова швидкість у початковий момент часу дорівнює ω_0 .

Дано:	Розв’язання
$\varepsilon = -A\sqrt{\omega}$	Середня кутова швидкість обертання тіла за деякий проміжок часу визначається згідно з
$A > 0$	
$\omega_0 = 0$	$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}. \quad (1)$
$\langle \omega \rangle = ?$	
	Для того, щоб знайти середню кутову швидкість, треба

спочатку визначити проміжок часу Δt , протягом якого тіло буде здійснювати обертання, крім того, визначити приріст $\Delta\varphi$, який відповідає цьому проміжку часу.

У випадку, що розглядається, кутове прискорення задано у вигляді неявної функції часу

$$\varepsilon = -A\sqrt{\omega}, \quad (2)$$

де $\omega = \omega(t)$.

Зважаючи на те, що кутове прискорення є першою похідною від кутової швидкості за часом, формулу (2) можна записати у вигляді:

$$\frac{d\omega}{dt} = -A\sqrt{\omega}. \quad (3)$$

Розділяючи в (3) змінні, отримаємо:

$$\frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = -A dt. \quad (4)$$

Проінтегруємо ліву частину (4) у межах від ω_0 до ω , а праву – від 0 до t

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = -A \int_0^t dt. \quad (5)$$

Кожен з інтегралів в (5) є табличним:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = \int_{\omega_0}^{\omega} \omega^{-\frac{1}{2}} d\omega = 2\omega^{\frac{1}{2}} \Big|_{\omega_0}^{\omega} = 2\sqrt{\omega} - 2\sqrt{\omega_0}, \quad (6)$$

$$-A \int_0^t dt = -At. \quad (7)$$

Зрештою отримаємо:

$$\sqrt{\omega} = \sqrt{\omega_0} - \frac{At}{2}. \quad (8)$$

З виразу (8) можна знайти момент часу t_1 , коли тіло зупиниться.

Кутова швидкість ω в цей момент часу дорівнює нулю

$$t_1 = \frac{2\sqrt{\omega_0}}{A}. \quad (9)$$

Піднесемо обидві частини (9) до квадрата та отримаємо для кутової швидкості

$$\omega(t) = \omega_0 - A\sqrt{\omega_0}t + \frac{A^2}{4}t^2. \quad (10)$$

Диференціюючи (10) за часом, для кутового прискорення маємо

$$\varepsilon(t) = -A\sqrt{\omega_0} + \frac{A^2}{2}t. \quad (11)$$

Враховуючи (9) та (11), для кутового прискорення в момент t_1 отримаємо $\varepsilon(t_1) = 0$. Тобто в момент часу $t = t_1$ кутова швидкість та кутове прискорення тіла дорівнюватимуть нулю. Отже, час обертання тіла – це проміжок часу від $t = 0$ до $t = t_1$, а при $t > t_1$ тіло буде знаходитись у стані спокою.

Оскільки тіло буде здійснювати обертання в інтервалі часу від $t = 0$ до $t = t_1$, для середньої кутової швидкості за час обертання тіла можемо написати:

$$\langle \omega \rangle = \frac{\varphi(t_1) - \varphi(0)}{t_1}. \quad (12)$$

Враховуючи, що $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, перепишемо формулу (10) у вигляді

$$d\varphi = \left(\omega_0 - A\sqrt{\omega_0}t + \frac{A^2}{4}t^2 \right) dt. \quad (13)$$

Проінтегруємо праву частину (13) від $\varphi(0) = \varphi_0$ до $\varphi(t_1) = \varphi_1$, а праву – від $t = 0$ до $t = t_1$,

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi = \int_0^{t_1} \left(\omega_0 - A\sqrt{\omega_0}t + \frac{A^2}{4}t^2 \right) dt \quad (14)$$

і отримаємо

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \left(\omega_0 t - \frac{A\sqrt{\omega_0}}{2}t^2 + \frac{A^2}{12}t^3 \right) \Big|_0^{t_1} = \omega_0 t_1 - \frac{A\sqrt{\omega_0}}{2}t_1^2 + \frac{A^2}{12}t_1^3. \quad (15)$$

Для самої функції $\varphi(t)$, також можемо написати:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{A\sqrt{\omega_0}}{2} t^2 + \frac{A^2}{12} t^3.$$

Враховуючи (9), (12) та (15), остаточно отримаємо

$$\langle \omega \rangle = \frac{\omega_0 t_1 - \frac{A\sqrt{\omega_0}}{2} t_1^2 + \frac{A^2}{12} t_1^3}{t_1} = \omega_0 - \frac{A\sqrt{\omega_0}}{2} t_1 + \frac{A^2}{12} t_1^2 = \omega_0 - \omega_0 + \frac{\omega_0}{3} = \frac{\omega_0}{3}.$$

Відповідь: $\langle \omega \rangle = \frac{\omega_0}{3}.$

2.3. Задачі для самостійної роботи

2.3.1. Штучний супутник Землі за один оберт пролітає $s = 45600$ км. Обчислити середню шляхову $\langle v \rangle$ та кутову $\langle \omega \rangle$ швидкості супутника, якщо період обертання T становить 106 хв.

Відповідь: $\langle v \rangle = 7,17 \cdot 10^3$ м/с, $\langle \omega \rangle = 9,9 \cdot 10^{-4}$ рад/с.

2.3.2. Визначити радіус колеса R , якщо при обертанні лінійна швидкість v_1 точок на його ободі в 2,5 рази більше за лінійну швидкість v_2 точок, що знаходяться на $l = 5$ см ближче до осі колеса.

Відповідь: $R = 8,33 \cdot 10^{-2}$ м.

2.3.3. На горизонтальній осі обертаються з частотою $n = 3000$ об/хв два тонких диски, закріплених на відстані $l = 100$ см один від одного. Куля, що летіла паралельно осі, пробиває обидва диски, причому друга пробоїна виявилася зміщеною відносно першої на кут $\alpha = 45^\circ$. Знайти швидкість кулі v під час руху її між дисками, вважаючи її постійною.

Відповідь: $v = 400$ м/с.

2.3.4. Матеріальна точка обертається з частотою $n = 20$ об/с. З деякого моменту часу вона починає рухатися рівносповільнено і до зупинки робить $N = 2100$ обертів. Знайти кутове прискорення ε і час t , за який вона зупиниться.

Відповідь: $\varepsilon = 0,5$ рад/с², $t = 210$ с.

2.3.5. Колесо, обертаючись рівноприскорено, за час $t = 1$ хв після початку обертання набула частоти $n = 720$ об/хв. Знайти кутове прискорення ε та кількість обертів N колеса за цей час.

Відповідь: $\varepsilon = 0,5$ рад/с², $N = 360$.

2.3.6. Диск радіусом $R = 0,2$ м обертається так, що залежність кутового прискорення від часу задається рівнянням $\varepsilon = 6 + 5t^2$ рад/с². Визначити повне прискорення a точок, що лежать на ободі диска, для моменту часу $t = 5$ с після

початку руху та кількість обертів N , що зробить диск за цей час. Початкова швидкість диска дорівнює нулю.

Відповідь: $a = 54,7 \text{ м/с}^2$, $N = 53,4$.

2.3.7. Матеріальна точка рухається по колу радіусом $R = 0,3 \text{ м}$ з постійним тангенціальним прискоренням $a_t = 0,02 \text{ м/с}^2$. Визначити через який час t після початку руху кут між вектором повного прискорення і вектором швидкості буде дорівнювати 60° . Вважати, що початкова швидкість точки дорівнює нулю.

Відповідь: $t = 5,12 \text{ с}$.

2.3.8. Диск радіуса $R = 0,5 \text{ м}$ обертається так, що залежність кутового прискорення від часу задається рівнянням $\varepsilon = 2 + 4t \text{ рад/с}^2$. Визначити тангенціальне a_t , нормальне a_n та повне прискорення a точок, що лежать на ободі диска, для моменту часу $t = 3 \text{ с}$ після початку руху та кількість обертів N , що зробить диск за цей час. Початкова швидкість диска дорівнює нулю.

Відповідь: $a_n = 288 \text{ м/с}^2$, $a_t = 7 \text{ м/с}^2$, $a = 288,1 \text{ м/с}^2$, $N = 4,3$.

2.3.9. Шків радіуса $r = 0,2 \text{ м}$ приводиться до обертального руху вантажем, який підвішений на нитці, що скручується з шківа. У початковий момент часу вантаж був нерухомим, а потім почав спускатися з прискоренням $a = 0,1 \text{ м/с}^2$. Визначити кутову швидкість шківа ω у той момент, коли вантаж опуститься на відстань $h = 1 \text{ м}$, а також повне прискорення точок шківа у цей момент. Який кут α між вектором повного прискорення і радіусом шківа в цей момент часу?

Відповідь: $\omega = 2,23 \text{ рад/с}$, $a = 1 \text{ м/с}^2$, $\alpha = 5,7^\circ$.

2.3.10. Колесо радіуса $R = 0,2 \text{ м}$ обертається так, що залежність кута повороту радіуса задається рівнянням $\varphi = 1 + 4t + t^2 + 2t^3 \text{ рад}$. Для точок, що знаходяться на ободі колеса, знайти для моменту часу $t = 2 \text{ с}$ після початку руху повне прискорення a та кут α між вектором повного прискорення та радіусом колеса.

Відповідь: $a = 206 \text{ м/с}^2$, $\alpha = 1^\circ$.

2.3.11. Колесо радіуса $R = 0,1$ м обертається так, що залежність кута повороту радіуса задається рівнянням $\varphi = A + Bt + Ct^3$ рад, де $B = 2$ рад/с $C = 1$ рад/с³. Для точок, що знаходяться на ободі колеса, знайти для моменту часу $t = 2$ с після початку руху: кутову швидкість ω , кутове прискорення ε , лінійну швидкість v , нормальну a_n та тангенціальну a_τ складові прискорення.

Відповідь: $\omega = 14$ рад/с, $\varepsilon = 12$ рад/с², $v = 1,4$ м/с, $a_\tau = 1,2$ м/с², $a_n = 19,6$ м/с².

2.3.12. Колесо радіуса $R = 10$ см обертається з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 3,14$ рад/с². Знайти для точок на ободі колеса наприкінці першої секунди від початку руху кутову швидкість ω , лінійну швидкість v , тангенціальне a_τ , нормальне a_n та повне прискорення a . Який кут α складає вектор повного прискорення з радіусом колеса?

Відповідь: $\omega = 3,14$ рад/с, $v = 0,314$ м/с, $a_\tau = 0,314$ м/с², $a_n = 0,986$ м/с², $a = 1,03$ м/с², $\alpha = 17^\circ 46'$.

2.3.13. Точка рухається по колу радіусом $R = 20$ см з постійним тангенціальним прискоренням $a_\tau = 5$ см/с². Через який проміжок часу t після початку руху нормальне прискорення a_n точки буде: 1) дорівнюватиме тангенціальному; 2) вдвічі більше тангенціального?

Відповідь: 1) $t = 2$ с; 2) $t = 2,8$ с.

2.3.14. Точка рухається по колу радіуса $R = 10$ см з постійним тангенціальним прискоренням a_τ . Знайти тангенціальне прискорення a_τ , якщо відомо, що наприкінці п'ятого оберту після початку руху лінійна швидкість точки $v' = 79,2$ см/с.

Відповідь: $a_\tau = 0,1$ м/с².

2.3.15. Колесо радіусом $R = 0,1$ м обертається так, що залежність кута повороту радіусу колеса від часу задається рівнянням $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ рад, де $B = 2$ рад/с, $C = 1$ рад/с², $D = 1$ рад/с³. Знайти радіус R колеса, якщо відомо,

що наприкінці другої секунди руху для точок, що лежать на ободі колеса, нормальне прискорення дорівнює $a_n = 3,46 \cdot 10^2 \text{ м/с}^2$.

Відповідь: $R = 1,2 \text{ м}$.

3. ДИНАМІКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ. СИЛИ В ДИНАМІЦІ

3.1. Теоретичні відомості

3.1.1. Основні величини динаміки. Принцип відносності Галілея

Динаміка – розділ механіки, який вивчає закони руху тіл і причини, якими викликається рух та його зміни.

Основними величинами динаміки матеріальної точки є: маса, імпульс, сила.

Маса m – це кількісна міра інертності механічних об'єктів. У межах класичної механіки маса є скалярною адитивною величиною. Це означає, що маса тіла дорівнює сумі мас його складових частин.

Інертністю називається універсальна властивість всіх тіл, завдяки якій є неможливою миттєва зміна їхньої швидкості. Для зміни швидкості тіла на будь-яку малу задану величину, завжди потрібен скінченний проміжок часу. Загалом, інерція – це опір змінам швидкості або опір прискоренню. Інертність є внутрішньою властивістю тіла, тому маса тіла не залежить від його руху, отже, й від системи відліку, в якій розглядається рух.

Одиницею маси є

$$[m] = \text{кілограм} = \text{кг}.$$

Сила – це фізична векторна величина, що є мірою дії на тіло інших тіл (або полів), під час якої тіла набувають прискорення або деформуються. Як будь-який вектор сила визначається: числовим значенням (модулем), напрямком та точкою прикладання.

Сила вимірюється в

$$[F] = \text{Ньютон} = \text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Якщо сила $\vec{F}$ створюється дією на дане тіло з боку декількох інших тіл, то

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i, \quad (3.1)$$

де $\vec{F}_i$ – кожна з сил, що діють з боку кожного з тіл. Їх називають **складовими**, а силу $\vec{F}$ – **рівнодійною** (або **вислідною**).

Формула (3.1) виражає **принцип суперпозиції сил** (принцип незалежності дії сил). Зауважимо, що при знаходженні суми сил треба користуватися правилами векторного додавання.

Якщо рівнодійна декількох сил дорівнює нулю

$$\sum \vec{F}_i = 0, \quad (3.2)$$

то такі сили мають назву **компенсовані**.

Імпульс $\vec{p}$ – векторна величина, що дорівнює добутку маси тіла на його швидкість, і є мірою стану руху тіла

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (3.3)$$

Імпульс вимірюється в

$$[p] = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Механічною системою називається сукупність матеріальних точок або тіл, рухи яких взаємопов'язані. Сили, прикладені до точок системи, можна розділити на зовнішні та внутрішні. **Зовнішніми** називаються сили, що діють на систему ззовні, з боку тіл, що не належать даній системі. **Внутрішні** – це сили взаємодії між тілами системи.

Система називається **замкнутою** (ізолюваною), якщо її тіла рухаються лише під впливом внутрішніх сил. При цьому зовнішні сили відсутні або їх впливом на систему можна знехтувати в порівнянні з внутрішніми силами.

Рух відбувається у просторі та у часі. Для його описання вводиться система відліку. **Система відліку** – це сукупність нерухомих один щодо одного тіл (**тіл відліку**), стосовно яких розглядається рух, зв'язана з ними система координат та системи відліку часу.

Серед безлічі систем відліку існують такі, відносно яких тіла, на які не діють зовнішні тіла, рухаються без прискорення, тобто прямолінійно та рівномірно. Ці особливі системи відліку називаються **інерціальними**. Існування інерціальних

систем відліку (ICB) встановлено дослідним шляхом і є законом природи. Інерціальних систем відліку існує безліч. Будь-яка система відліку, що рухається щодо будь-якої ICB поступово з постійною швидкістю, також є інерціальною. Усі інерціальні системи відліку еквівалентні для вимірювання фізичних явищ.

Системи відліку, які рухаються відносно інерціальних систем із прискоренням, називаються *неінерціальними*.

Принцип відносності Галілея: за однакових умов у всіх інерціальних системах відліку всі механічні явища проходять однаково. Ніякими механічними дослідами, що проводяться всередині інерціальної системи, неможливо встановити, перебуває ця система у спокої чи рухається рівномірно і прямолінійно.

3.1.2. Закони Ньютона

Перший закон Ньютона: в інерціальній системі відліку тіло, за відсутності взаємодії з іншими тілами, зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, доки зовнішні впливи не змусять змінити цей стан.

Тіло, що не взаємодіє з іншими тілами, називається *вільним*, а його рух – *вільним рухом*, або *рухом за інерцією*. Саме тому перший закон Ньютона також називають *законом інерції*.

Другий закон Ньютона: швидкість зміни імпульсу тіла дорівнює рівнодійній усіх сил, що діють на нього

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (3.4)$$

де $d\vec{p}$ – зміна імпульсу за нескінченно малий проміжок часу dt , $\vec{F}$ – рівнодійна сила, що прикладена до тіла.

В разі класичної фізики, коли маса тіла під час руху не змінюється, $m = \text{const}$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a},$$

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (3.5)$$

Важливим дослідним фактом є те, що дія одного тіла на інше завжди має взаємний характер, тобто сили є проявом взаємодії між тілами.

Третій закон Ньютона: сили, з якими два тіла діють одне на одне, завжди є рівними за модулем і спрямованими у протилежні боки вздовж прямої, що з'єднує тіла

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (3.6)$$

Слід зазначити, що ці сили не врівноважують одна одну, оскільки вони діють на різні об'єкти.

Зверніть увагу, що всі закони Ньютона справедливі тільки в інерціальних системах відліку.

3.1.3. Сили в динаміці. Типи сил

Усі сили можна пояснити на основі чотирьох фундаментальних взаємодій.

1. **Сильна** взаємодія відповідає за утримання ядер атомів разом; вона є дуже сильною і діє в масштабах порядку розміру атомного ядра і менше.

2. **Електромагнітна** взаємодія викликає електричні та магнітні ефекти і діє між зарядженими частинками. Вона далекодійна, але набагато слабше сильної сили.

3. **Слабка** сила відповідає за радіоактивний розпад і взаємодію нейтрино. Воно слабше двох попередніх і має дуже короткий радіус дії.

4. **Гравітаційна** взаємодія слабка, вона виникає між частинками, що мають масу. Ця взаємодія є далекодійною і характеризується нескінченним радіусом дії.

Сили також можна поділити на контактні та безконтактні.

Контактна сила – це сила між двома об'єктами, яка може існувати лише тоді, коли ці об'єкти вступають у безпосередній контакт один з одним. Вони

відповідають за більшість взаємодій, які ми бачимо в повсякденному житті. Приклади контактних сил: сила тертя, натягу, нормальна сила, сила пружини, опір повітря, прикладена сила тощо.

Безконтактні сили – це сили між двома об’єктами, для яких не потрібен прямий контакт між ними. Безконтактні сили є набагато складнішими за своєю природою і можуть існувати між двома об’єктами, розділеними великими відстанями. Гравітаційні, електричні та магнітні сили є силами дії на відстані, для яких не потрібний фізичний контакт. Ці сили тісно пов’язані з поняттям силового **поля** і тому мають іншу назву «сили поля». У фізиці поле – це область, у якій може діяти сила. Прикладами є гравітаційне, електричне та магнітне поля, які оточують відповідно маси, електричні заряди та магніти.

3.1.4. Гравітаційна взаємодія, сила тяжіння, реакції, вага

Гравітація є універсальною взаємодією, що полягає в існуванні притягання між будь-яким матеріальними об’єктами.

Закон всесвітнього тяжіння: між будь-якими двома тілами діють сили гравітаційного притягання, які прямо пропорційні добутку мас цих тіл і обернено пропорційні квадрату відстані між ними (рис. 3.1)

$$\vec{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r, \quad (3.7)$$

де $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{М}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$ – гравітаційна стала, m_1 і m_2 – маси тіл, що взаємодіють,

r – відстань між їх центрами, $\vec{e}_r$ – одиничний вектор, спрямований вздовж радіуса-вектора, що вказує положення однієї маси відносно іншої.

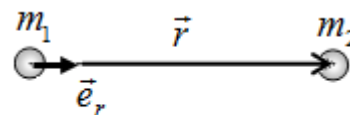


Рисунок 3.1

Закон справджується для: 1) матеріальних точок; 2) кулястих тіл зі сферично симетричним розподілом речовини; 3) кулястого тіла зі сферичним розподілом речовини та матеріальної точки, що розташована поблизу поверхні кулястого тіла.

Якщо тіло маси m знаходиться поблизу поверхні Землі, то на нього діє сила гравітаційного притягання. Тоді згідно з 2-м законом Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F} = \gamma \frac{mM}{(R+h)^2} \vec{e}_R = \gamma \frac{mM}{R^2} \vec{e}_R = m\vec{g} \quad (3.8)$$

де M і R – маса і радіус Землі, а h – висота тіла над поверхнею Землі, якою звичайно нехтують тому, що $h \ll R$; $m\vec{g}$ – це **сила тяжіння** – сила, з якою Земля діє на будь-яке тіло, що знаходиться поблизу її поверхні.

З формули (3.8) видно, що незалежно від маси усі тіла падають з однаковим прискоренням $\vec{a} = \vec{g}$, яке називається **прискоренням вільного падіння**.

Зважаючи на те, що Земля не є сферою, а має форму геоїда – кулі, сплюснутої на полюсах, в різних точках Землі відрізняється радіус, отже, й величина $\vec{g}$. Крім того, величина $\vec{g}$ залежить від висоти над поверхнею Землі та низки інших факторів. Але для розрахунків заведено вважати, що величина прискорення вільного падіння становить

$$g = \gamma \frac{M}{R^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(6,378 \cdot 10^6)^2} = 9,788 \approx 9,8 \text{ м/с}^2, \quad (3.9)$$

де $M = 5,97 \cdot 10^{24}$ кг і $R = 6,378 \cdot 10^6$ м, відповідно, маса і середній радіус Землі.

Якщо в формулу (3.9) підставити масу і радіус іншої планети або супутника планети, можна отримати відповідне прискорення вільного падіння для цього об'єкта.

Наприклад, для Марса, маса і радіус якого $M = 6,4 \cdot 10^{23}$ кг і $R = 3,4 \cdot 10^6$ м, прискорення вільного падіння становить

$$g = \gamma \frac{M}{R^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,4 \cdot 10^{23}}{(3,4 \cdot 10^6)^2} \approx 3,7 \text{ м/с}^2.$$

Якщо тіло підвішене або покладено на основу, сила тяжіння врівноважується силою реакції, яка буває двох типів: натяг і сила нормальної реакції.

Натяг $\vec{T}$ (рис. 3.2, а). Сила натягу нитки є реакцією підвісу (нитки) на дію на нього з боку тіла. Сила натягу нитки завжди має напрямок уздовж нитки. Дуже часто при розв'язанні задач вказують, що нитка є невагомою (масою нитки у порівнянні з масою вантажу можна знехтувати). Силу натягу визначають як рівнодійну сил, що прикладені до нитки, яка дорівнює їй за модулем, але спрямована у протилежний бік.

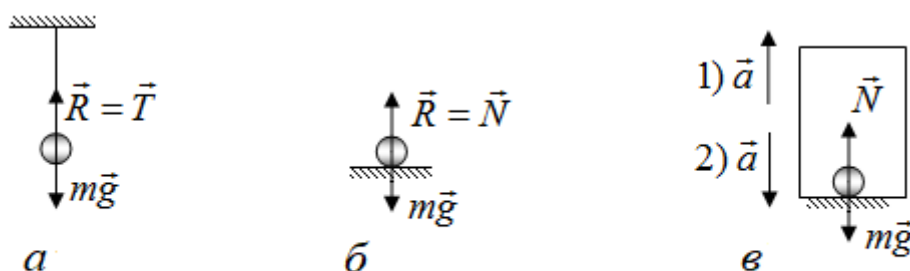


Рисунок 3.2

Сила нормальної реакції (нормальна реакція опори) $\vec{N}$ (рис. 3.2, б) – сила, що діє на тіло з боку опори та спрямована перпендикулярно («по нормалі», «нормально») до поверхні дотику.

Вага $\vec{G}$ – сила, з якою тіло внаслідок гравітації діє на опору або підвіс (рис. 3.2, в). Вагу предмета можна виміряти, прикріпивши його до пружинних терезів або поклавши на терези. У стані спокою $\vec{G} = -\vec{N}$ і $\vec{N} = -m\vec{g}$; в результаті вага дорівнює силі тяжіння $\vec{G} = m\vec{g}$. Величини ваги $\vec{G}$, сили тяжіння $m\vec{g}$ та нормальної сили $\vec{N}$ рівні за значенням, якщо об'єкт перебуває в стані спокою або рухається рівномірно вгору або вниз.

$$[G] = \text{Ньютон} = \text{Н}.$$

Справа ускладнюється, коли підвіс або ваги відчують прискорення. Рівняння руху об'єкта в цьому випадку має вигляд

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}. \quad \vec{N} = m(\vec{a} - \vec{g}). \quad (3.10)$$

1) якщо об'єкт рухається з прискоренням $\vec{a}$ вгору, вектори $\vec{g}$ та $\vec{a}$ мають протилежні напрямки. Коли вага перевищує силу тяжіння, спостерігається **перевантаження**,

$$G = N = m(g - (-a)) = m(g + a). \quad (3.11)$$

2) якщо об'єкт рухається з прискоренням $\vec{a}$ вниз, то вектори $\vec{g}$ та $\vec{a}$ мають один і той же напрямок. Коли вага менше сили тяжіння, спостерігається **часткова невагомість**,

$$G = N = m(g - a). \quad (3.12)$$

Коли прискорення об'єкта донизу дорівнює прискоренню сили тяжіння $\vec{a} = \vec{g}$, вага $G = 0$, що відповідає повній невагомості.

3.1.5. Сила пружності. Закон Гука

Під дією сил тіло **деформується** – змінює свою форму і розміри. Деформація буває пружною та пластичною.

Пружна деформація повністю зникає після припинення дії зовнішньої сили і тіло повертається до своїх попередніх розмірів і форми. Сили, які виникають при пружних деформаціях, називаються **пружними силами**.

Якщо ж після зняття навантаження тіло залишається деформованим, то така деформація називається **пластичною**.

Деформації поділяються на деформації розтягнення, стиснення, згинання, закручування, зсуву.

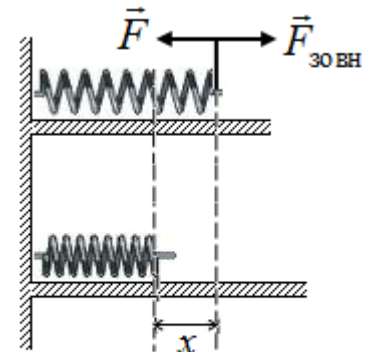


Рисунок 3.3

Закон Гука: у разі малих пружних деформацій розтягнення або стиснення сила пружності прямо пропорційна видовженню тіла і завжди намагається повернути тіло в недеформований стан (рис. 3.3):

$$F_{\text{пруж}} = -kx, \quad (3.13)$$

де x – **видовження** – величина, яка характеризує розтягнення або стиснення і

дорівнює зміні довжини тіла в результаті деформації; k – коефіцієнт пропорційності, який називають **жорсткістю**.

Одиниця жорсткості

$$[k] = \frac{\text{Ньютон}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Знак «мінус» в рівнянні закону Гука вказує на те, що сила пружності має напрямок протилежний до сили, що вчинила зміщення, і самому напрямку зміщення.

3.1.6. Тертя. Типи тертя. Закон Амонтона – Кулона

Сила тертя – це сила, що виникає при русі одного тіла по поверхні іншого тіла або при спробі викликати цей рух, яка спрямована протилежно напрямку руху вздовж поверхні дотичних тіл протилежно швидкості їхнього відносного переміщення.

Тертя між поверхнею твердого тіла та навколишнім рідким або газоподібним середовищем, у якому це тіло рухається, називають **опором середовища** або **рідким (в'язким)** тертям.

Тертя між поверхнями двох дотичних твердих тіл називають **сухим тертям**. Розрізняють три види сухого тертя: тертя спокою, тертя ковзання і тертя кочення.

Сила **тертя спокою** – це сила, яка з'являється між дотичними поверхнями тіл і перешкоджає виникненню руху одного тіла по поверхні іншого; завжди дорівнює за модулем і протилежна за напрямком зовнішній силі, яка діє вздовж поверхні зіткнення тіл і намагається зрушити тіло з місця.

Сила **тертя ковзання** $F_{\text{тер}}$ – це сила, яка виникає під час відносного руху (ковзання) одного тіла по поверхні іншого.

Закон Амонтона – Кулона: сила тертя ковзання залежить від властивостей дотичних поверхонь тіл і прямо пропорційна силі нормальної реакції опори

$$F_{\text{тер}} = \mu N, \quad (3.14)$$

де μ – коефіцієнт тертя ковзання, який залежить, зокрема, від матеріалів, з яких виготовлені дотичні тіла, і якості обробки їхніх поверхонь.

Експериментально встановлено, що коефіцієнт тертя спокою більше коефіцієнта тертя ковзання, а той, своєю чергою, більше коефіцієнта тертя кочення. В механіці твердих тіл коефіцієнт тертя змінюється від 0 до 1, тобто від ідеального ковзання до ситуації, коли рух взагалі неможливий.

3.1.7. Центр мас механічної системи та теорема про його рух

Центр мас механічної системи – точка C (рис. 3.4), положення якої визначає радіус-вектор $\vec{r}_C$, що дорівнює:

$$\vec{r}_C = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (3.15)$$

де m_i – маса i -ї частинки, m – маса системи, $\vec{r}_i$ – радіус-вектор i -ї частинки, що завдає її положення.

Тверде тіло можна розглядати як безперервний розподіл матерії, що складається з елементів маси dm . Радіус-вектор, що визначає позицію центра мас визначається як

$$\vec{r}_C = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right) = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm. \quad (3.16)$$

Диференціювання (3.16) за часом дає швидкість руху центру мас

$$\frac{d\vec{r}_C}{dt} = \vec{v}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \frac{\vec{p}}{m}. \quad (3.17)$$

Тоді імпульс системи можна представити як добуток маси системи на швидкість руху її центру мас

$$\vec{p} = m \vec{v}_C. \quad (3.18)$$

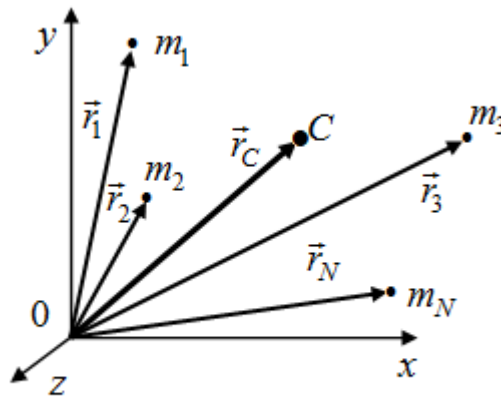


Рисунок 3.4

Диференціювання (3.18) за часом дає

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v}_C)}{dt} = m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = m\vec{a}_C = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (3.19)$$

Теорема про рух центра мас: центр мас системи рухається так, як рухалась би матеріальна точка з масою, що дорівнює масі системи, під дією рівнодійної усіх зовнішніх сил, що прикладені до системи:

$$m\vec{a}_C = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (3.20)$$

Для замкнутої системи, коли немає зовнішніх сил, $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$, маємо

$$m\vec{a}_C = 0 \quad (3.21)$$

З цього виходить, що центр мас замкнутої системи рухається рівномірно та прямолінійно або знаходиться у стані спокою.

Якщо пов'язати з центром мас замкнутої системи матеріальних точок (частинок) систему відліку (її називають **системою центру мас** або **С-системою**), то повний імпульс всіх частинок у такій системі виявиться рівним нулю. Таким чином, у системі центру мас замкнута система частинок як ціле знаходиться у стані спокою, і існує тільки рух частинок відносно центру мас.

Теорема про рух центра мас спрощує розрахунки при розв'язанні практичних задач, в яких описується системи, що складаються з багатьох тіл.

Замість того щоб аналізувати рух кожного тіла окремо, можна розглядати всю систему як одне тіло в центрі мас. Наприклад, під час вибуху ракети або розпаду снаряда центр мас продовжує рух по тій самій траєкторії, що й до вибуху — це допомагає моделювати й аналізувати подальший рух уламків.

Теорема про рух центра мас застосовується в астрономії при аналізі обертання планет навколо спільного центру мас (наприклад, Земля і Місяць) та для визначення руху подвійних зірок. В космонавтиці за її допомогою вивчають рух багатоступеневих ракет, супутників, модулів, що стикуються або відстикуються, а також моделюють рух космічного корабля після викиду вантажу. В балістиці за допомогою теореми можна спрогнозувати траєкторію уламків, оскільки після вибуху снаряда його уламки розлітаються, але центр мас рухається за тією ж траєкторією, що й до вибуху. Під час руху автомобіля чи потяга аналіз руху центра мас важливий для стійкості та керованості.

3.2. Приклади розв'язання задач

Задача 3.2.1

Три сили $\vec{F}_1 = (1\vec{i} - 1,5\vec{j})$, $\vec{F}_2 = (-4,5\vec{i} + 2\vec{j})$ і $\vec{F}_3 = (2,5\vec{i} + 4,5\vec{j})$ діють на тіло масою $m = 2 \text{ кг}$. Знайти прискорення, з яким рухається тіло, якщо сили задані у Ньютонках.

Дано:	Розв'язання
$m = 2 \text{ кг}$	Для визначення прискорення треба застосувати 2 закон
$\vec{F}_1 = (1\vec{i} - 1,5\vec{j})$	Ньютона, згідно з яким тіло рухається з прискоренням під
$\vec{F}_2 = (-4,5\vec{i} + 2\vec{j})$	дією рівнодійною всіх сил, що до нього прикладені. Сили в
$\vec{F}_3 = (2,5\vec{i} + 4,5\vec{j})$	задачі задані у вигляді їх компонентів, тому для того, щоб
$\vec{a} = ?$	знайти рівнодійну можна скористатися двома методами – аналітичним та графічним.

Кожна координата суми двох або більше векторів дорівнює сумі відповідних координат цих векторів. Тому

$$\begin{array}{r} 1\vec{i} - 1,5\vec{j} \\ -4,5\vec{i} + 2\vec{j} \\ \hline 2,5\vec{i} + 4,5\vec{j} \\ -1\vec{i} + 5\vec{j} \end{array}$$

Отже, рівнодійна (векторна сума) трьох сил

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_{123} = \vec{F} = (-1\vec{i} + 5\vec{j}).$$

Величина цього вектора $F = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26} = 5,1 \text{ Н}$.

Прискорення

$$a = \frac{F}{m} = \frac{5,1}{2} = 2,55 \text{ м/с}^2.$$

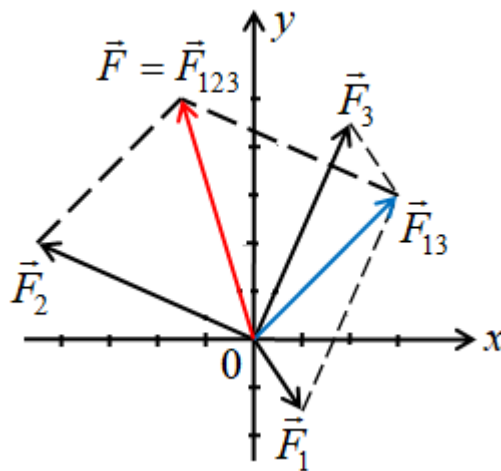
Можна знайти напрямлення прискорення, якщо скористатися таким методом:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{(1\vec{i} - 1,5\vec{j}) + (-4,5\vec{i} + 2\vec{j}) + (2,5\vec{i} + 4,5\vec{j})}{2} =$$

$$= \left(\frac{1 - 4,5 + 2,5}{2} \right) \vec{i} + \left(\frac{-1,5 + 2 + 4,5}{2} \right) \vec{j} = (-0,5\vec{i} + 2,5\vec{j}) \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Цей результат можна також використовувати для знаходження модуля вектора прискорення

$$a = \sqrt{(-0,5)^2 + (2,5)^2} = 2,55 \text{ м/с}^2.$$



Той же результат можна отримати графічно. В координатах x та y будуються задані вектори, а потім за допомогою правила паралелограма знаходиться сума будь-яких двох векторів і результат складається з третім вектором. На рисунку спочатку було знайдено суму $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_{13}$, а потім суму $\vec{F}_2 + \vec{F}_{13} = \vec{F}_{123} = \vec{F}$, що є сумою трьох векторів або рівнодією трьох сил. За допомогою лінійки можна поміряти довжину вектора $\vec{F}$ з урахуванням вибраного масштабу по осях, і далі результат використати для розрахунків за формулою $a = F/m$.

Перевірка розмірності результату

$$[a] = \frac{\text{Н}}{\text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь: $a = 2,55 \text{ м/с}^2$.

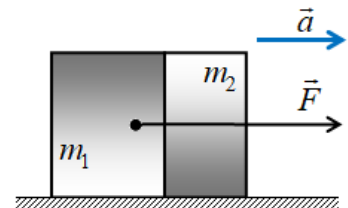
Задача 3.2.2

Два тіла масами $m_1 = 5 \text{ кг}$ і $m_2 = 3 \text{ кг}$ стикаються один з одним на горизонтальній поверхні без тертя. До тіла m_1 в горизонтальному напрямку прикладена постійна сила $F = 20 \text{ Н}$. Знайдіть а) величину прискорення системи та б) величину контактної сили між двома тілами.

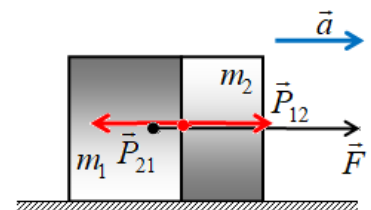
Дано:	Розв'язання
$m_1 = 5 \text{ кг}$	а) Сила $\vec{F}$ прикладена до системи з двох тіл m_1 і m_2 , що знаходяться у контакті і рухаються як єдине ціле, тому згідно з 2-м законом Ньютона
$m_2 = 3 \text{ кг}$	
$F = 20 \text{ Н}$	
$a = ? \quad P = ?$	$F = M \cdot a = (m_1 + m_2) \cdot a,$

звідки прискорення дорівнює

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{20}{5 + 3} = 2,5 \text{ м/с}^2.$$



б) Контактна сила є внутрішньою для системи з двох тіл. Тому ми не можемо знайти цю силу, якщо розглядати ці тіла як одне ціле. Тепер ми повинні розглядати кожне з двох тіл, вважаючи їх окремими об'єктами, на які діє рівнодійна сила. Горизонтальна сила $\vec{P}_{12}$ – контактна сила, з якою m_1 діє на m_2 , спрямована вправо. Застосування 2-го закону Ньютона до $P_{12} = m_2 \cdot a$ дає



$$P_{12} = m_2 \cdot a.$$

Підставимо отримане в попередній частині значення прискорення у вираз для P_{12}

$$P_{12} = m_2 a = m_2 \left(\frac{F}{m_1 + m_2} \right) = 3 \left(\frac{20}{5 + 3} \right) = 7,5 \text{ Н}.$$

Цей результат вказує на те, що контактна сила менша за прикладену силу. Це узгоджується з тим фактом, що сила, необхідна для прискорення лише другого тіла, повинна бути меншою за силу, необхідну для створення такого ж прискорення для системи з двох тіл.

Горизонтальні сили, що діють на m_1 , це сила $\vec{F}$, спрямована праворуч, і контактна сила P_{21} , що спрямована ліворуч (сила, з якою m_2 діє на m_1).

Застосування 2-го закону Ньютона до m_1 дає

$$m_1 a = F - P_{21}.$$

Підставивши значення для прискорення, отримуємо

$$P_{21} = F - m_1 a = F - m_1 \left(\frac{F}{m_1 + m_2} \right) = 20 - 5 \left(\frac{20}{5 + 3} \right) = 7.5 \text{ Н.}$$

Таким чином, величини контактних сил дорівнюють одна одній. Цей результат цілком очевидний із 3-го закону Ньютона: сили дії і протидії рівні за величиною та спрямовані в протилежні боки: $P_{12} = -P_{21}$.

Відповідь: $a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{20}{5 + 3} = 2,5 \text{ м/с}^2$. $P_{12} = P_{21} = 7,5 \text{ Н.}$

Задача 3.2.3

Через який час тіло, кинуте вертикально вгору зі швидкістю $v_0 = 44,8 \text{ м/с}$, впаде на землю, якщо сила опору повітря не залежить від швидкості та становить $1/7$ сили тяжіння?

Дано:	Розв'язання
$v_0 = 44,8 \text{ м/с}$	Тіло, що кинули вертикально вгору, протягом t_1 рухається вгору, а протягом t_2 падає вниз, тому шуканий час
$F_{\text{оп}} = \frac{mg}{7}$	$t = t_1 + t_2.$
$t = ?$	а) Вгору тіло рухається рівносповільнено під дією сили

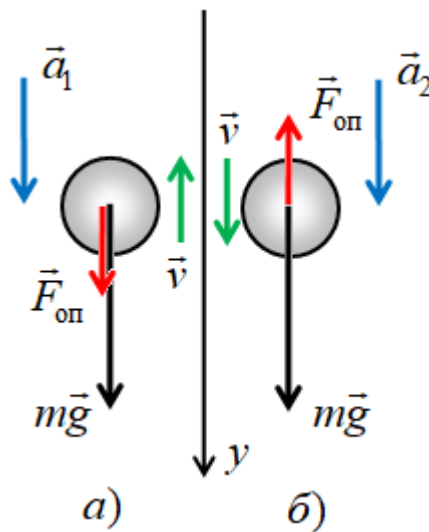
тяжіння і сили опору повітря, тому рівняння 2 закону Ньютона має вигляд

$$m\vec{a}_1 = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{оп}}.$$

Виберемо вісь y спрямовану вниз та спроектуємо на неї рівняння руху.

Сила опору протилежна напрямку руху, тобто спрямована донизу. Оскільки рух сповільнений, то прискорення $\vec{a}_1$ також спрямоване в протилежний бік відносно швидкості тіла.

$$ma_1 = mg + F_{\text{оп}} = mg + \frac{mg}{7} = \frac{8mg}{7}.$$



Прискорення дорівнює

$$a_1 = \frac{8g}{7} = \frac{8 \cdot 9,8}{7} = 11,2 \text{ м/с}^2.$$

Тепер, використовуючи кінематичні рівняння, визначимо висоту підйому тіла та час, витрачений на рух вгору:

$$\begin{cases} h = v_0 t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2}, \\ v = v_0 - a_1 t_1. \end{cases}$$

В найвищій точці траєкторії швидкість дорівнює нулю ($v=0$), тому час руху вгору

$$t_1 = \frac{v_0}{a_1} = \frac{44,8}{11,2} = 4 \text{ с},$$

а висота підйому становить

$$h = v_0 t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2} = 44,8 \cdot 4 - \frac{11,2 \cdot (4)^2}{2} = 89,6 \text{ м.}$$

Коли тіло падає, сила опору, що завжди протилежна швидкості, спрямована догори, тому проєкція на вісь y рівняння руху має вигляд

$$ma_2 = mg - F_{\text{оп}} = mg - \frac{mg}{7} = \frac{6mg}{7}.$$

В цьому випадку прискорення становить

$$a_2 = \frac{6g}{7} = \frac{6 \cdot 9,8}{7} = 8,4 \text{ м/с}^2.$$

З кінематичного рівняння $h = \frac{a_2 t_2^2}{2}$ знайдемо час руху донизу

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{a_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 89,6}{8,4}} = 4,6 \text{ с.}$$

Отже, час руху вгору і вниз складає

$$t = t_1 + t_2 = 4 + 4,6 = 8,6 \text{ с.}$$

Відповідь: $t = 8,6 \text{ с.}$

Задача 2.2.4

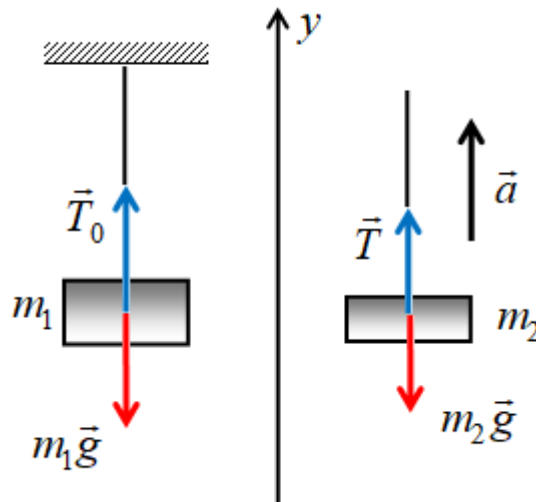
Канат витримує нерухомий вантаж масою $m_1 = 250 \text{ кг}$. З яким прискоренням за допомогою цього каната можна підіймати вантаж масою $m_2 = 180 \text{ кг}$?

Дано:	Розв'язання
$m_1 = 250 \text{ кг}$	Коли до кінця каната прикріплений вантаж, то сила натягу каната $\vec{T}_0$ дорівнює за величиною силі тяжіння $m_1 \vec{g}$ і спрямована у протилежний бік $T_0 = m_1 g$.
$m_2 = 180 \text{ кг}$	
$a = ?$	

Коли вантаж рухається з прискоренням $\vec{a}$ згідно з 2-м законом Ньютона рівняння його руху має вид

$$m_2 \vec{a} = m_2 \vec{g} + \vec{T}.$$

Якщо спроектувати це рівняння на обрану вісь y , що направлена вгору, то сила натягу T і прискорення a , які направлені вгору, будуть додатні, а сила тяжіння – від’ємна. При цьому, сила натягу T повинна бути менше або дорівнювати силі T_0 , яка є межею міцності каната.



Прискорення, з яким можна рухати вантаж вгору, не побоюючись того, що канат порветься, з рівняння руху тіла за умови $T = T_0$, становить

$$a = \frac{-m_2 g + T}{m_2} = \frac{T_0 - m_2 g}{m_2} = \frac{m_1 g - m_2 g}{m_2} = \frac{(m_1 - m_2) g}{m_2} = \frac{(250 - 180)}{180} \cdot 9,8 = 3,81 \text{ м/с}^2.$$

Розмірність результату

$$[a] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь: $a = 3,81 \text{ м/с}^2$.

Задача 3.2.5

До вертикально розташованої пружини прикріплені два тягарці. Маса верхнього тягарця $m_1 = 2$ кг, нижнього – $m_2 = 3$ кг. Коли система підвішена за верхній тягарець, довжина пружини дорівнює $x_1 = 10$ см. Якщо систему поставити вертикально на підставку, довжина пружини дорівнює $x_2 = 4$ см. Визначте довжину ненапруженої пружини і її жорсткість.

Дано:

$$m_1 = 2 \text{ кг}$$

$$m_2 = 3 \text{ кг}$$

$$x_1 = 10 \text{ см}$$

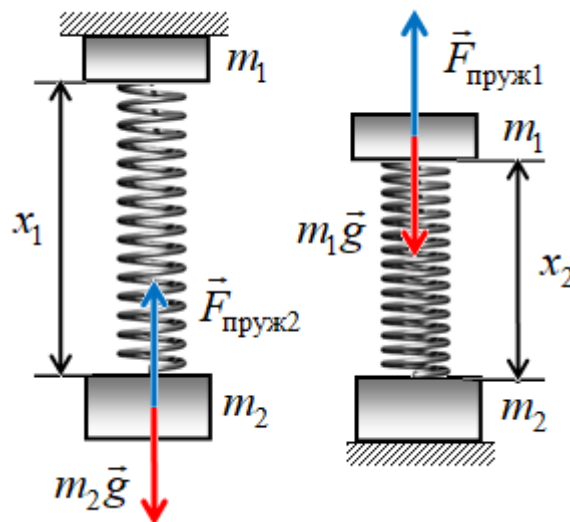
$$x_2 = 4 \text{ см}$$

$$x_0 = ? \quad k = ?$$

Розв'язання

Коли система з двох тягарців підвішена, то пружина розтягується дією спрямованої вниз сили тяжіння $m_2 \vec{g}$, яку створює нижній тягарець. Сила пружності, що виникає в пружині, дорівнює їй за величиною і протилежна за напрямком.

$$F_{\text{пруж2}} = m_2 g. \quad (1)$$



Коли пружина знаходиться в вертикальному положенні, а тягарець m_2 внизу, то пружина стискається дією сили тяжіння $m_1 \vec{g}$. Сила пружності в цьому випадку

$$F_{\text{пруж1}} = m_1 g. \quad (2)$$

Сили пружності згідно із законом Гука дорівнюють добутку жорсткості пружини на її видовження (стискання)

$$F_{\text{пруж2}} = k(x_1 - x_0), \quad (3)$$

$$F_{\text{пруж1}} = k(x_0 - x_2). \quad (4)$$

Тоді, об'єднуючи рівняння (2) - (4), отримуємо

$$\begin{cases} m_2 g = k(x_1 - x_0), \\ m_1 g = k(x_0 - x_2). \end{cases} \quad (5)$$

Поділивши перше рівняння системи (5) на друге, знайдемо довжину нерозтягнутої пружини.

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{x_1 - x_0}{x_0 - x_2},$$

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,04}{2 + 3} = 0,064 \text{ м.}$$

Жорсткість пружини знайдемо з будь-якого рівняння системи (5)

$$m_2 g = k(x_1 - x_0),$$

$$k = \frac{m_2 g}{x_1 - x_0} = \frac{3 \cdot 9,8}{0,1 - 0,064} = 817 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Розмірність отриманих результатів

$$[x] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{кг}} = \text{м}; \quad [k] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Відповідь: $x_0 = 0,064 \text{ м}; k = 817 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$

Задача 3.2.6

Ящик тягнуть із силою $F = 20 \text{ Н}$, що утворює кут $\alpha = 60^\circ$ із горизонталлю. Маса ящика $m = 2 \text{ кг}$. Знайдіть прискорення ящика, якщо а) поверхня не має тертя, б) коефіцієнт тертя дорівнює $\mu = 0,1$.

Дано:

$$F = 20 \text{ Н}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$m = 2 \text{ кг}$$

$$a_1 = ? \quad a_2 = ?$$

Розв'язання

а) Тіло рухається під дією сил: сили тяжіння $m\vec{g}$, сили нормальної реакції опори $\vec{N}$ та сили $\vec{F}$, яка обумовлює рух ящика.

Рівняння руху за 2-м законом Ньютона

$$m\vec{a}_1 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}. \quad (1)$$

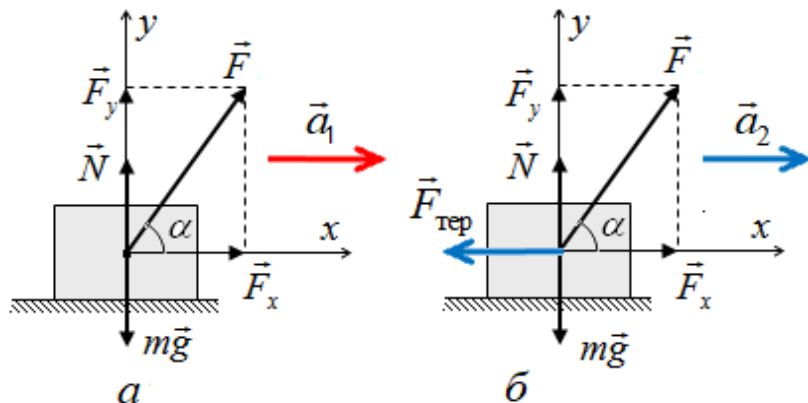
Знайдемо проєкції цих сил на обрані осі x та y :

$$\begin{cases} ma_1 = F_x, \\ 0 = -mg + N + F_y, \end{cases} \quad (2)$$

$$ma_1 = F_x = F \cos \alpha. \quad (3)$$

Звідки прискорення при русі без тертя складає

$$a_1 = \frac{F \cdot \cos \alpha}{m} = \frac{20 \cdot 0,5}{2} = 5 \text{ м/с}^2. \quad (4)$$



б) Якщо врахувати тертя, то рівняння руху за 2-м законом Ньютона має вигляд

$$m\vec{a}_2 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{\text{тер}}. \quad (5)$$

Проекції цього рівняння на осі x та y будуть

$$\begin{cases} ma_2 = F_x - F_{\text{тер}}, \\ 0 = -mg + N + F_y. \end{cases} \quad (6)$$

За законом Амонтона – Кулона сила тертя $F_{\text{тер}} = \mu N$, а нормальна реакція з другого рівняння системи (6) становить $N = mg - F_y = mg - F \cdot \sin \alpha$.

Отже, прискорення у разі руху по поверхні з тертям дорівнює

$$a_2 = \frac{F_x - F_{\text{тер}}}{m} = \frac{F \cos \alpha - \mu N}{m} = \frac{F \cos \alpha - \mu (mg - F \cdot \sin \alpha)}{m} =$$

$$= \frac{F (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}{m} - \mu g = \frac{20 \cdot (\cos 60^\circ + 0,1 \cdot \sin 60^\circ)}{2} - 0,1 \cdot 9,8 = 4,87 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Розмірність результату:

$$[a] = \frac{\text{Н}}{\text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Відповідь: $a_1 = 5 \text{ м/с}^2$; $a_2 = 4,87 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 3.2.7

Тіло під дією прикладеної сили $F = 10 \text{ Н}$ рухається за залежністю $s = A - Bt + Ct^2$ (м), де $C = 1 \text{ м/с}^2$. Знайдіть масу тіла.

Дано:	Розв'язання
$F = 10 \text{ Н}$	Прискорення є перша похідна від швидкості та друга
$s = A - Bt + Ct^2$ (м)	похідна від шляху, що був пройдений тілом. Тому
$C = 1 \text{ м/с}^2$	продиференціюємо задану залежність $s = A - Bt + Ct^2$
$m = ?$	$v = \frac{ds}{dt} = -B + 3Ct^2,$ $a = \frac{dv}{dt} = 2C = 2 \cdot 1 = 2 \text{ м.}$

Використовуючи 2-й закон Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, можна знайти масу тіла

$$m = \frac{F}{a} = \frac{10}{2} = 5 \text{ кг.}$$

Відповідь: $m = 5 \text{ кг.}$

Задача 3.2.8

Тіло масою $m = 5$ кг притискається до стіни з силою $\vec{F}$, яка утворює кут $\alpha = 40^\circ$ із горизонталлю. Коефіцієнт тертя між тілом і стіною дорівнює $\mu = 0,3$. З яким прискоренням буде рухатися тіло, якщо величина сили $F = 100$ Н? Якою повинна бути прикладена сила, щоб тіло рухалося рівномірно?

Дано:

$$m = 5 \text{ кг}$$

$$\alpha = 40^\circ$$

$$\mu = 0,3$$

$$F = 100 \text{ Н}$$

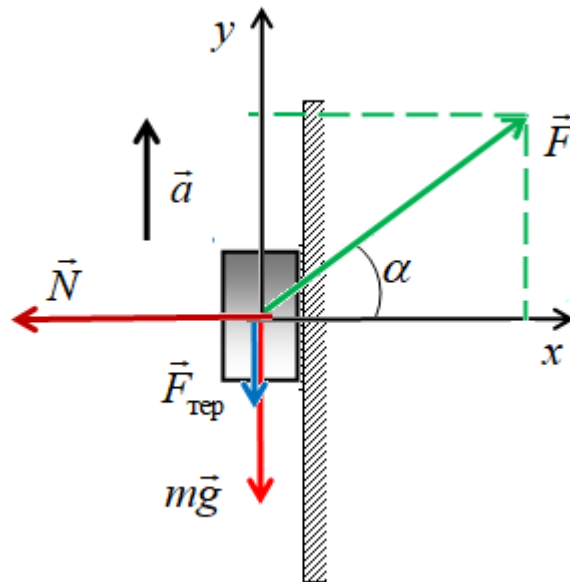
$$a = ? \quad \vec{F}_0 = ?$$

Розв'язання

На тіло, що рухається вгору по стіні, діють сила тяжіння $m\vec{g}$, сила тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$, нормальна реакція опори $\vec{N}$ та прикладена сила $\vec{F}$, під спільною дією яких тіло набуває прискорення. Тому 2 закон Ньютона має вигляд

$$ma = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}} + \vec{F}. \quad (1)$$

Виберемо осі x та y , як показано на рисунку: горизонтальну спрямуємо



вправо, а вертикальну – вгору. Спроєктуємо рівняння руху (1) на обрані осі та отримуємо систему

$$\begin{cases} x: & 0 = -N + mg \cdot \cos \alpha, \\ y: & ma = -mg + F \cdot \sin \alpha - F_{\text{тер}}. \end{cases} \quad (2)$$

Нормальна реакція опори з першого рівняння системи (2) дорівнює $N = mg \cdot \cos \alpha$. Тому сила тертя відповідно до закону Амонтона-Кулона $F_{\text{тер}} = \mu N = \mu \cdot mg \cdot \cos \alpha$.

Прискорення, з яким рухається тіло вгору, з другого рівняння системи (2) є

$$a = \frac{-mg + F \cdot \sin \alpha - F_{\text{тер}}}{m} = \frac{-mg + F \cdot \sin \alpha - \mu \cdot mg \cdot \cos \alpha}{m} = \frac{F \cdot \sin \alpha}{m} - g(1 + \mu \cdot \cos \alpha). \quad (3)$$

Підстановка даних задачі в (3) дає

$$a = \frac{100}{5} \sin 40^\circ - 9,8(1 + 0,3 \cdot \cos 40^\circ) = 0,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Рівномірний рух – це рух без прискорення. Тоді прирівнявши прискорення нулю в рівнянні (3), отримуємо

$$a = \frac{F_0 \cdot \sin \alpha}{m} - g(1 + \mu \cdot \cos \alpha) = 0,$$

звідки

$$F_0 = \frac{mg}{\sin \alpha} (1 + \mu \cos \alpha) = \frac{5 \cdot 9,8}{\sin 40^\circ} (1 + 0,3 \cos 40^\circ) = 93,7 \text{ Н}.$$

Розмірності отриманих результатів

$$[a] = \frac{\text{Н}}{\text{кг}} + \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{кгм}}{\text{с}^2 \text{кг}} + \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$[F] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

Відповідь: $a = 0,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $F_0 = 93,7 \text{ Н}$.

Задача 3.2.9

Два тягарці масами $m_1 = 2 \text{ кг}$ та $m_2 = 1 \text{ кг}$ з'єднані нерозтяжною ниткою, яка проходить через невеликий нерухомий блок без тертя. Знайти прискорення тягарців і натяг нитки, вважаючи, що нитка і блок невагомі.

Дано:

$$m_1 = 2 \text{ кг}$$

$$m_2 = 1 \text{ кг}$$

$$a = ? \quad T = ?$$

Розв'язання

На кожен з тягарців діють дві сили: сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила натягу нитки $\vec{T}$. Оскільки нитка нерозтяжна і невагома, то сили натягу, що діють на тягарці з її боку, однакові.

Прискорення з двох боків від блока через нерозтяжність нитки є також однаковими за величиною, але мають протилежні напрямки.

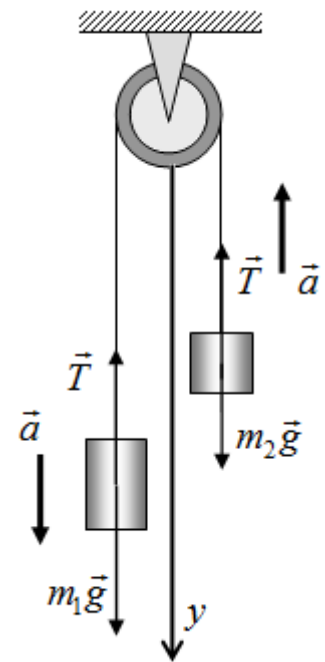
На тягарці діють постійні сили, що не врівноважують одна одну, рівнодійна яких не дорівнює нулю. Тому тягарці будуть рухатися рівноприскорено, при цьому, важчий вантаж буде переміщатися вниз, а більш легкий, по інший бік блоку, вгору. Система складається з двох тіл, що рухаються, тому треба для кожного з них записати рівняння 2-го закону Ньютона

$$\begin{cases} m_1 \vec{a} = m_1 \vec{g} + \vec{T}, \\ m_2 \vec{a} = m_2 \vec{g} + \vec{T}. \end{cases}$$

Виберемо вісь y спрямовану донизу і спроектуємо на неї векторні рівняння руху. В результаті отримуємо два скалярні рівняння

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T, \\ -m_2 a = m_2 g - T. \end{cases}$$

Віднімемо з першого рівняння системи друге рівняння та виразимо прискорення



$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = \frac{9,8(2 - 1)}{2 + 1} = 3,27 \text{ м/с}^2.$$

З першого рівняння виразимо і підрахуємо силу натягу нитки

$$T = m_1(g - a) = m_1 g \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9,8}{2 + 1} = 13,07 \text{ Н.}$$

Розмірність результатів:

$$[a] = \frac{\text{м} \cdot \text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad [T] = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

Відповідь: $a = 3,27 \text{ м/с}^2$; $T = 13,07$.

Задача 3.2.10

Тіло лежить на похилій площині, що утворює з горизонтом кут $\alpha = 5^\circ$. При якому граничному коефіцієнті тертя $\mu_{\text{гр}}$ тіло почне зісковзувати з похилої площині? З яким прискоренням рухатиметься тіло, якщо коефіцієнт тертя $\mu = 0,02$? За який час t за цих умов буде пройдений шлях $s = 10 \text{ м}$. Яку швидкість тіло матиме наприкінці похилої площини?

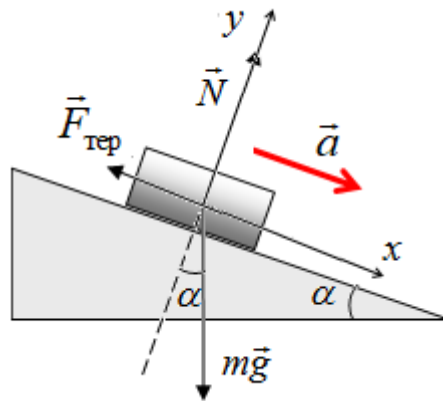
Дано:	Розв'язання
$\alpha = 5^\circ$	На тіло, що знаходиться на похилій площині, діють сили:
$\mu = 0,02$	тяжіння $m\vec{g}$, спрямована вертикально вниз, сила нормальної
$s = 10 \text{ м}$	реакції опори $\vec{N}$, що перпендикулярно площині схилу, і сила
$\mu_{\text{гр}} = ? \quad a = ?$	тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$, що протилежна напрямку руху (або можливого руху)
$t = ? \quad v = ?$	тіла.

Напишемо 2-й закон Ньютона для тіла, що рухається рівноприскорено

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}}, \quad (1)$$

або в проєкціях на обрані осі x та y :

$$\begin{cases} ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тер}}, \\ 0 = -mg \cos \alpha + N. \end{cases} \quad (2)$$



1) У першому випадку, коли $\mu = \mu_{\text{тр}}$ та $a = 0$, виразимо нормальну реакцію з другого рівняння системи (2)

$$N = mg \cos \alpha.$$

та підставимо його в вираз для сили тертя згідно з законом Амонтона-Кулона

$$F_{\text{тер}} = \mu_{\text{тр}} N = \mu_{\text{тр}} mg \cos \alpha.$$

Тоді перше рівняння системи (2) набуває вигляду

$$0 = mg \sin \alpha - \mu_{\text{тр}} mg \cos \alpha,$$

звідки

$$\mu_{\text{тр}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \tan 5^\circ = 0,08.$$

2) У другому випадку $\mu < \mu_{\text{тр}}$, тому тіло зісковзуватиме з прискоренням вздовж похилої площини. З першого рівняння системи (2)

$$ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тер}}$$

знаходимо величину прискорення

$$\begin{aligned} a &= g \sin \alpha - \frac{F_{\text{тер}}}{m} = g \sin \alpha - \frac{\mu N}{m} = g \sin \alpha - \frac{\mu mg \cos \alpha}{m} = \\ &= g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 9,8(0,087 - 0,02 \cdot 0,996) = 0,66 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Оскільки тіло рухається рівноприскорено зі стану спокою, то час проходження ним відстані $s = 10$ м та швидкість наприкінці цього шляху можна знайти із рівнянь кінематики:

$$\begin{cases} s = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \\ v = v_0 + at. \end{cases}$$

Враховуючи, що $v_0 = 0$, одержуємо:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{0,66}} = 5,5 \text{ с}$$

$$v = at = 0,66 \cdot 5,5 = 3,6 \text{ м/с}.$$

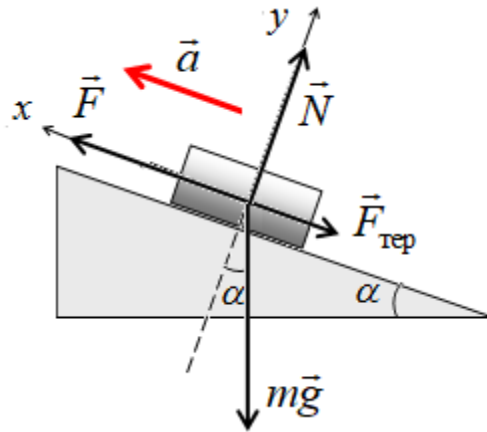
Відповіді: $\mu_{\text{тр}} = 0,08$ $a = 0,66 \text{ м/с}^2$; $t = 5,5 \text{ с}$; $v = 3,6 \text{ м/с}$.

Задача 3.2.11

Тіло масою $m = 5 \text{ кг}$ тягнуть вздовж похилої площини з кутом нахилу $\alpha = 30^\circ$ за допомогою мотузки, прикладаючи силу $F = 50 \text{ Н}$. Знайти прискорення тіла, якщо коефіцієнт тертя між тілом і поверхнею $\mu = 0,1$.

Дано:	Розв'язання
$m = 5 \text{ кг}$	Рух тіла відбувається внаслідок дії рівнодійної тих сил, які прикладені до нього. Це сили: тяжіння $m\vec{g}$, сила нормальної реакції опори $\vec{N}$, сила, яка тягне тіло вздовж похилої площини $\vec{F}$, та сила тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$, що протидіє руху тіла.
$F = 50 \text{ Н}$	
$\alpha = 30^\circ$	
$\mu = 0,1$	
$a = ?$	За 2-м законом Ньютона рівняння руху тіла буде

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{\text{тер}} \quad (1)$$



Виберемо осі x та y , на які спроекуємо наявні сили та прискорення.

$$\begin{cases} x: & ma = F - mg \sin \alpha - F_{\text{тер}}, \\ y: & 0 = -mg \cos \alpha + N. \end{cases} \quad (2)$$

Виражаючи силу нормальної реакції з другого рівняння системи (2) та застосовуючи закон Амонтона – Кулона для сили тертя, отримуємо $F_{\text{тер}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$. Підставляючи цей вираз в перше рівняння системи

$$ma = F - mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha,$$

знаходимо прискорення тіла

$$a = \frac{F}{m} - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = \frac{50}{5} - 9,8(0,5 + 0,1 \cdot 0,866) = 4,25 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $a = 4,25 \text{ м/с}^2$.

Задача 3.2.12

До стелі кабіни ліфта, що підіймається із прискоренням $a_{\text{л}} = 2 \text{ м/с}^2$, прикріплений динамометр. До динамометра підвішений невагомий блок, що вільно обертається навколо горизонтальної осі. Через блок перекинута нитка, до кінця якої прикріплені вантажі масами $m_1 = 1 \text{ кг}$ та $m_2 = 3 \text{ кг}$. Визначте показання динамометра. Прийняти $g \approx 10 \text{ м/с}^2$.

Дано:

$$a_{\text{л}} = 2 \text{ м/с}^2$$

$$m_1 = 1 \text{ кг}$$

$$m_2 = 3 \text{ кг}$$

$$P = ?$$

Розв'язання

З умови невагомості блоку і 3 закону Ньютона випливає, що сили натягу нитки T справа і зліва від блоку дорівнюють одна одній.

Сила, що діє на вісь блоку з боку динамометра дорівнює подвоєній

силі натягу $P = 2T$. Якщо ліфт рухається з прискоренням $\vec{a}_{\text{л}}$, а

вантажі – з прискореннями $\vec{a}$ однаковим за величиною, але спрямованими у різні боки по вертикалі, напишемо рівняння 2 закону Ньютона для вантажів

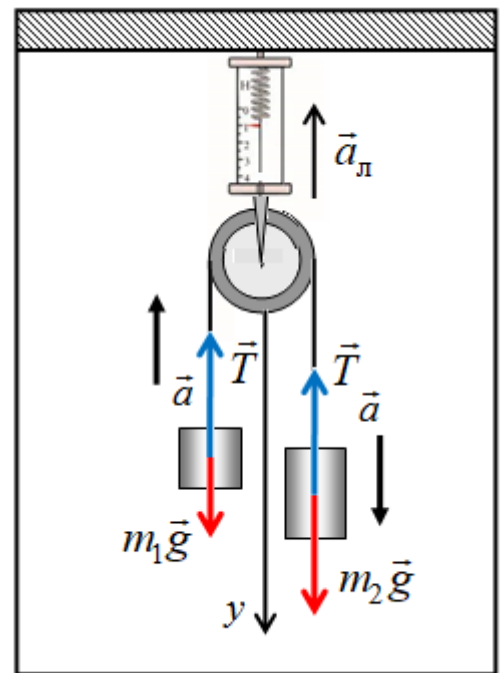
$$\begin{cases} m_1(\vec{a} + \vec{a}_{\text{л}}) = \vec{T} + m_1\vec{g}, \\ m_2(\vec{a} + \vec{a}_{\text{л}}) = \vec{T} + m_2\vec{g}. \end{cases}$$

Виберемо вісь y спрямованою вгору і спроектуємо на неї сили та прискорення

$$\begin{cases} m_1(a + a_{\text{л}}) = T - m_1g, \\ m_2(-a + a_{\text{л}}) = T - m_2g. \end{cases}$$

Додамо перше рівняння системи до другого і виразимо силу натягу нитки

$$\begin{aligned} 2a_{\text{л}} &= \frac{T - m_1g}{m_1} + \frac{T - m_2g}{m_2} = \\ &= \frac{Tm_2 - m_1m_2g + Tm_1 - m_1m_2g}{m_1m_2} = \\ &= \frac{T(m_1 + m_2) - 2m_1m_2g}{m_1m_2}, \\ T &= \frac{2m_1m_2(a + g)}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$



Динамометр показує подвійну силу натягу нитки

$$P = 2T = \frac{4m_1m_2(a + g)}{m_1 + m_2} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (2 + 10)}{1 + 3} = 36 \text{ Н.}$$

Відповідь: $P = 36 \text{ Н.}$

Задача 3.2.13

На тіло масою $m=5$ кг, що знаходиться у стані спокою, діє у горизонтальному напрямку постійна сила $F_1 = 2$ Н. У протилежному напрямку починає діяти сила, що зростає пропорційно часу за законом $F_2 = kt$, де $k = 0,1$ Н/с. Коефіцієнт тертя між тілом і горизонтальною поверхнею $\mu = 0,1$. Записати закон зміни з часом прискорення тіла і побудувати графік залежності сили тертя від часу.

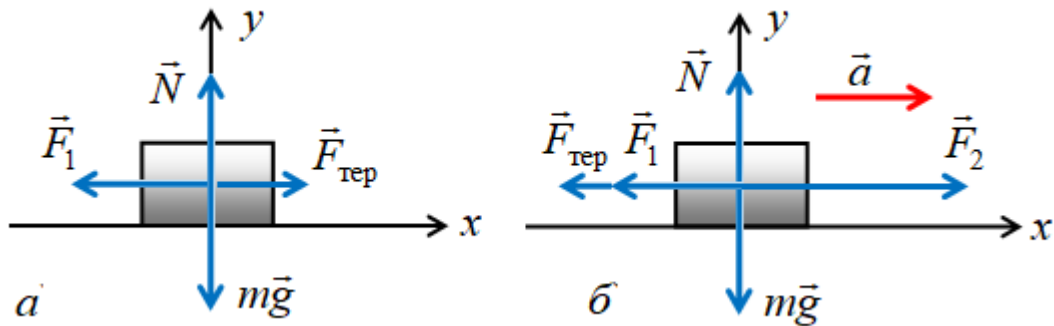
Дано:	Розв'язання
$m = 5$ кг	Під час руху на тіло діють сили: $m\vec{g}$ – сила тяжіння, $\vec{N}$ – нормальна реакція опори, сила тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$ і дві прикладені сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Рівняння руху тіла згідно з 2-м законом Ньютона є
$F_1 = 2$ Н	
$F_2 = kt$	
$k = 0,1$ Н/с	
$\mu = 0,1$	
$a(t) = ?$ $F(t) = ?$	Слід зазначити, що рух тіла складається з кількох етапів.
набуває вигляду	1) Спочатку тіло знаходиться у стані спокою, тому при $t = 0$, проєкція рівняння руху (1) на горизонтальну вісь x

$$0 = -F_1 + F_{\text{тер}}.$$

Це означає, що в початковий момент сила тертя дорівнює силі F_1 і спрямована у протилежний бік:

$$F_{\text{тер}} = F_1 = 2 \text{ Н.}$$

Прискорення на цьому етапі дорівнює 0.



2) Коли починає діяти сила F_2 , рівняння руху в проєкції на горизонтальну вісь x набуває вигляду

$$-F_1 + F_{\text{тер}} + F_2 = 0. \quad (2)$$

З урахуванням умови задачі рівняння (2) можна записати як

$$-F_1 + F_{\text{тер}} + kt = 0. \quad (3)$$

Слід зазначити, що в міру зростання величини сили F_2 , рівнодійна двох протилежно спрямованих сил F_1 і F_2 зменшується за модулем. Відповідним чином зменшується і сила тертя спокою, доки в момент часу t_1 $|F_1| = |F_2|$ і сила тертя обертається на нуль. З рівняння (3) при $F_{\text{тер}} = 0$

$$F_1 = kt_1,$$

$$t_1 = \frac{F_1}{k} = \frac{2}{0,1} = 20 \text{ с.}$$

На цьому етапі прискорення також дорівнює 0.

3) Внаслідок подальшого зростання сили F_2 , коли вона стає більшою за F_1 , змінюється напрямок руху тіла, а отже і напрямок сили тертя, яка завжди спрямована протилежно напрямку руху. Модуль сили тертя зростає і в момент t_2 сягає свого максимального значення, яке за законом Амонтона – Кулона є

$$F_{\text{тер}} = \mu N = \mu mg = 0,1 \cdot 5 \cdot 9,8 = 4,9 \text{ Н.} \quad (4)$$

Ця сила тертя залишається незмінною впродовж подальшого руху тіла.

Момент часу t_2 можна визначити з (3), врахувавши зміну напрямку сили тертя і замінивши знак перед нею на протилежний, а також узявши до уваги (4).

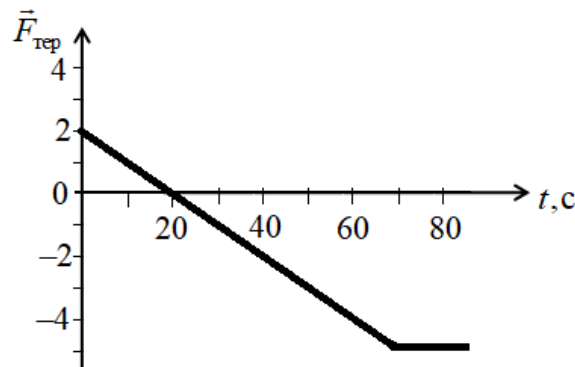
$$-F_1 - \mu mg + kt_2 = 0, \quad (5)$$

$$t_2 = \frac{\mu mg + F_1}{k} = \frac{0,1 \cdot 5 \cdot 9,8 + 2}{0,1} = 69 \text{ с.} \quad (6)$$

В результаті ми отримали три значення сили тертя для трьох моментів часу, що дозволяє побудувати графік залежності $F_{\text{тер}}(t)$.

4) На четвертому етапі руху сила F_2 продовжує зростати, а сили F_1 та $F_{\text{тер}}$ залишаються незмінними, тому для $t > t_2$ прискорення тіла буде зростати. Для встановлення виду залежності $a(t)$ запишемо силу

$$F_2 = kt = kt + kt_2 - kt_2 = kt_2 + k(t - t_2). \quad (7)$$



З рівняння (5)

$$kt_2 = F_1 + \mu mg. \quad (8)$$

З врахуванням (8) і (7) проєкцію рівняння (1) на горизонтальну вісь для $t > t_2$ можна записати як

$$ma = -F_1 - \mu mg + kt = (-F_1 - \mu mg) + kt = -kt_2 + kt_2 + k(t - t_2) = k(t - t_2),$$

звідки $a = 0$ при $0 < t < t_2$; $a = \frac{k}{m}(t - t_2)$ при $t > t_2$.

Відповідь: $a = 0$ при $0 < t < t_2$; $a = \frac{k}{m}(t - t_2)$ при $t > t_2$.

Задача 3.2.14

Знайти рівняння руху тіла маси m , на яке діє пропорційна часу сила $F = kt$, якщо при $t = 0$ тіло знаходилося у стані спокою, а сила діє у напрямку початкового руху тіла.

Дано:	Розв'язання
$F = kt$	Рівняння руху тіла маси m згідно з 2-м законом Ньютона
$t = 0$	$m\vec{a} = \vec{F}$.
$v_0 = 0$	Горизонтальна проєкція цього рівняння з врахуванням умови
$x(t) = ?$	задачі є
	$ma = kt$. (1)

За визначенням прискорення є перша похідна від швидкості $a = \frac{dv}{dt}$, тому

рівняння (1) має вигляд

$$m \frac{dv}{dt} = kt, \quad (2)$$

звідки

$$dv = \frac{kt}{m} dt. \quad (3)$$

Проінтегруємо рівняння (3) в межах: ліву частину – (v_0, v) , а праву – $(0, t)$:

$$\int_{v_0}^v dv = \frac{k}{m} \int_0^t t dt. \quad (4)$$

Інтегрування дає

$$v - v_0 = \frac{kt^2}{2m},$$
$$v = v_0 + \frac{kt^2}{2m}. \quad (5)$$

Скориставшись визначенням швидкості як першої похідної від переміщення

$v = \frac{dx}{dt}$ і врахувавши (5), отримуємо рівняння

$$dx = vdt = \left(v_0 + \frac{kt^2}{2m} \right) dt,$$

інтегрування якого дає

$$x = \int_{t_0}^t vdt = \int_0^t \left(v_0 + \frac{kt^2}{2m} \right) dt = v_0 t + \frac{kt^3}{6m}.$$

Відповідь: $x = v_0 t + \frac{kt^3}{6m}.$

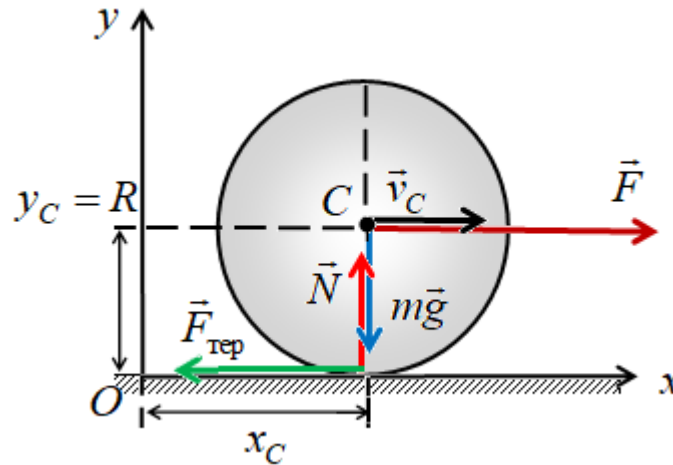
Задача 2.2.15

До осі важкого колеса радіуса R прикладена рушійна горизонтальна сила $F = 3\mu mg$, де m – маса колеса, μ – коефіцієнт тертя ковзання, g – прискорення вільного падіння. Визначити рівняння руху центру мас колеса, якщо рух починається зі стану спокою.

Дано:	Розв'язання
R	Будемо описувати колесо, що здійснює плоский рух, в рамках інерційної, умовно нерухомої системи відліку. На колесо діють зовнішня прикладена сила $\vec{F}$, сила тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$, сила тяжіння $m\vec{g}$ і нормальна реакція опори $\vec{N}$.
$F = 3\mu mg$	
$x_C(t) = ?$	

Застосовуючи теорему про рух центру мас системи, складемо диференціальні рівняння руху точки тіла в проєкції на осі x та y :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = F - F_{\text{тер}}, \\ m\ddot{y}_C = N - mg. \end{cases} \quad (1)$$



Центр мас колеса рухається вздовж лінії, паралельної осі x . Оскільки колесо котиться площиною дороги, не відриваючись від неї, $y_C = R$, отже $\dot{y}_C = 0$ і $\ddot{y}_C = 0$. В результаті, друге рівняння системи (1) перетворюється на рівняння рівноваги:

$$N - mg = 0,$$

звідки $N = mg$.

Із закону Амонтона – Кулона сила тертя $F_{\text{тер}} = \mu N = \mu mg$. Тоді перше рівняння системи (1) можна записати як

$$m\ddot{x}_C = F - F_{\text{тер}} = 3\mu mg - \mu mg = 2\mu mg.$$

Оскільки $\ddot{x}_C = \frac{d\dot{x}_C}{dt}$, то отримане рівняння можна переписати у вигляді

$$\frac{d\dot{x}_C}{dt} = 2\mu mg \quad \text{і, перегрупуючи змінні} \quad d\dot{x}_C = 2\mu mg dt, \quad \text{проінтегрувати}$$

$$\int d\dot{x}_C = \int 2\mu mg dt. \quad \text{В результаті маємо}$$

$$\dot{x}_C = 2\mu gt + C_1.$$

Аналогічно, перетворивши отримане рівняння в $\dot{x}_C = \frac{d\dot{x}_C}{dt} = 2\mu gt + C_1$, потім в $d\dot{x}_C = (2\mu gt + C_1)dt$, і проінтегрувавши його $\int d\dot{x}_C = \int (2\mu gt + C_1)dt$, можна отримати

$$x_C = \mu gt^2 + C_1 t + C_2.$$

Застосовуючи початкові умови, що при $t = 0$, $\dot{x}_C(0) = 0$ і $\ddot{x}_C(0) = 0$, знаходимо, що константи інтегрування $C_1 = 0$ і $C_2 = 0$.

Тоді, остаточно, окреме рішення рівняння матиме вигляд

$$x_C(t) = \mu gt^2.$$

Відповідь: $x_C(t) = \mu gt^2$.

3.3. Задачі для самостійної роботи

3.3.1. Під дією постійної сили, що дорівнює 10 Н, тіло рухається прямолінійно так, що залежність координати тіла від часу описується рівнянням $x = 3 - 2t + t^2$. Визначте масу тіла.

Відповідь: $m = 5$ кг.

3.3.2. На початку підйому та спуску ліфт має однакову величину прискорення. Знайти його величину, якщо вага людини при цьому відрізняється у 3 рази?

Відповідь: $a = 4,9 \text{ м/с}^2$.

3.3.3. М'яч масою $m = 150 \text{ г}$ пружно (без втрати швидкості) ударяє в гладку вертикальну стіну зі швидкістю $v = 10 \text{ м/с}$ під кутом $\alpha = 30^\circ$ до неї. Якою є сила удару, якщо його тривалість складає $t = 0,1 \text{ с}$?

Відповідь: $F = 15 \text{ Н}$.

3.3.4. Два тіла масами $m_1 = 1 \text{ кг}$ і $m_2 = 2 \text{ кг}$, що знаходяться на гладкій горизонтальній поверхні зв'язані нерозтяжною ниткою. На друге тіло в горизонтальному напрямку діє сила $F = 10 \text{ Н}$. Знайти прискорення a , з яким рухаються обидва тіла, і силу T натягу нитки.

Відповідь: $a = 3,3 \text{ м/с}^2$, $T = 3,3 \text{ Н}$.

3.3.5. Через блок перекинута нитка з двома тягарцями масою $m = 0,5 \text{ кг}$ кожний. Визначити силу натягу нитки T .

Відповідь: $T = 5 \text{ Н}$.

3.3.6. Тіло вільно ковзає з прискоренням $a = 25 \text{ см/с}^2$ по гладкій похилій площині. Знайти кут нахилу площини відносно горизонталі.

Відповідь: $\alpha = 14,5^\circ$.

3.3.7. Через блок перекинули нитку з двома тягарцями масою по $m = 200 \text{ г}$ на кінцях. Яку вертикальну силу треба прикласти до одного з тягарців, аби вони почала рухатись з прискоренням $a = 0,5 \text{ м/с}^2$?

Відповідь: $F = 0,2 \text{ Н}$.

3.3.8. Два тягарці масою $m_1 = m_2 = 120 \text{ г}$ висять на одному рівні на нитці, що перекинута через блок. Знайти відстань, на яку вони розійдуться по вертикалі та якої швидкості набудуть протягом $t = 2 \text{ с}$, якщо за один потягти вниз із сталою силою $F = 48 \text{ мН}$.

Відповідь: 80 см ; $v = 40 \text{ см/с}$.

3.3.9. Тіло масою $m = 2 \text{ кг}$ рухається з прискоренням $a = 15 \text{ см/с}^2$ по горизонтальній поверхні з коефіцієнтом тертя $\mu = 0,05$. Знайти прикладену до тіла силу F , коли вона діє: а) горизонтально; б) вгору під кутом 30° до горизонту?

Відповідь: $F = 1,3 \text{ Н}$, $F = 1,6 \text{ Н}$.

3.3.10. Вантаж масою $m = 1 \text{ кг}$ лежить на похилій площині. Яка сила тертя діє на нього, якщо сила нормальної реакції площини складає $N = 6 \text{ Н}$.

Відповідь: $F_{\text{тер}} = 8 \text{ Н}$.

3.3.11. Камінь, що ковзав горизонтальною поверхнею льоду, зупинився, пройшовши відстань $S = 48 \text{ м}$. Знайдіть початкову швидкість каменю, якщо сила тертя ковзання каменю об лід становить $0,06$ сили нормального тиску каменю на лід.

Відповідь: $v_0 = 7,6 \text{ м/с}$.

3.3.12. Тіло ковзає по похилій площині, яка утворює кут $\alpha = 45^\circ$ з горизонтом. Пройшовши шлях $s = 20 \text{ м}$, тіло набуває швидкість $v = 3 \text{ м/с}$. Знайти коефіцієнт тертя тіла на площині.

Відповідь: $\mu = 0,96$

3.3.13. На похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30^\circ$ ковзає тіло. Знайдіть швидкість тіла в кінці другої секунди після початку руху, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює $\mu = 0,15$.

Відповідь: $v = 7,3 \text{ м/с}$.

3.3.14. Тіло маси m без початкової швидкості зісковзує з похилої площини з кутом з висоти h . Коефіцієнт тертя тіла поверхню дорівнює μ . За який час тіло досягне підніжжя?

Відповідь: $t = \sqrt{\frac{2h}{g \sin \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}.$

3.3.15. Тіло маси 5 кг рухається по горизонтальній площині. Сила тертя становить 10 Н. Визначити величину сили тертя ковзання за умови, що маса зменшиться на 2 кг, а коефіцієнт залишиться без змін.

Відповідь: $F_{\text{тер1}}/F_{\text{тер2}} = 5/3.$

4. ДИНАМІКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ

4.1. Теоретичні відомості

4.1.1. Механічна система в динаміці

У попередніх розділах рух тіл розглядався у межах трьох законів динаміки Ньютона, а для кількісного опису руху використовували поняття сили. У цьому розділі буде наведено інший опис руху тіл за допомогою імпульсу та енергії. Використання цих понять особливо корисне при розгляданні систем, що складаються із багатьох тіл, між якими складно враховувати усі діючі сили.

Механічна система – це сукупність матеріальних точок (тіл), що розглядаються як єдине ціле в умовах даної задачі. Сили взаємодії між тілами системи називаються **внутрішніми**. Сили, з якими зовнішні тіла, що не входять до системи, діють на тіла механічної системи, називаються **зовнішніми**.

На **замкнуту (ізольовану) механічну систему** не діють зовнішні сили або взаємодією тіл системи із зовнішніми тілами в умовах даного розгляду можна знехтувати.

У механічній системі кінематичні характеристики руху тіла (координата, швидкість та прискорення) постійно змінюються. Але існують три фізичні величини, які в замкненій системі залишаються незмінними. Це – енергія, імпульс та момент імпульсу. Закони збереження цих величин обумовлені властивостями простору та часу.

4.1.2. Закон збереження імпульсу

Інерціальна система відліку (ICB) – система відліку, в якій всі вільні тіла рухаються прямолінійно і рівномірно або знаходяться у стані спокою. Рух тіла в інерціальній системі відліку характеризується його швидкістю $\vec{v}$ та здатністю

зберігати цю швидкість – інертністю, мірою якої є маса m . Кількісно характеризувати рух зручніше однією величиною, а саме, імпульсом.

Імпульс матеріальної точки $\vec{p}$ – векторна фізична величина, яка визначається як добуток маси матеріальної точки m на її швидкість $\vec{v}$

$$\vec{p} = m\vec{v} . \quad (4.1)$$

Напрямок вектора імпульсу збігається з напрямком вектора швидкості.

Одиницею виміру імпульсу є

$$[p] = \text{кг} \cdot \text{м/с}.$$

Імпульс системи $\vec{p}$ дорівнює геометричній сумі імпульсів усіх матеріальних точок, що входять до системи:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i, \quad (4.2)$$

де m_i , $\vec{v}_i$, $\vec{p}_i$ – маса, швидкість і імпульс i -ї матеріальної точки, відповідно;
 n – число матеріальних точок.

Якщо система складається з N частинок, на кожную з яких діють внутрішні сили $\vec{F}_{ik}$, тобто сили взаємодії між i -тою і k -тою частинками системи. Також на кожную частинку діє сила $\vec{F}_i$, що є рівнодійною усіх зовнішніх сил.

Запишемо рівняння руху для кожної частинки системи і знайдемо суму лівих і правих частин рівнянь системи

[illegible]

Сума лівих частин є $\frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N)}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, де $\vec{p}$ – є імпульс системи.

Сума правих частин запишемо, поєднуючи сили зі зворотними наборами індексів. Оскільки пари $\vec{F}_{ik}$ і $\vec{F}_{ki}$ згідно із 3 законом Ньютона є рівними за величиною і протилежно спрямованими силами, їх суми дорівнюють нулю. Тому

$$(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}) + \dots + (\vec{F}_{1N} + \vec{F}_{N1}) + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i.$$

Отже, отримуємо, що

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i.$$

Це означає, що імпульс системи змінюється під дією сумарного моменту зовнішніх сил.

Якщо система замкнута, то зовнішніх сил немає (або ними можна знехтувати в порівнянні з внутрішніми силами) $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$. Тоді $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, з чого випливає, що $\vec{p} = \text{const}$.

Закон збереження імпульсу: імпульс замкнутої системи матеріальних точок не змінюється з часом:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \text{const},$$

$$\vec{p} = \vec{p}', \quad (4.4)$$

де $\vec{p}$, $\vec{p}'$ – імпульси системи матеріальних точок у початковий і кінцевий моменти часу, відповідно.

Слід зазначити, що імпульс залишається незмінним і для незамкнутої системи у випадку, коли рівнодійна зовнішніх сил дорівнює нулю $\vec{F}_{\text{зовн}} = 0$. У випадку, коли $\vec{F}_{\text{зовн}} \neq 0$, але її проєкція на деякий напрямок дорівнює нулю, то проєкція імпульсу на цей напрямок залишається незмінною з часом.

Закон збереження імпульсу є наслідком однорідності простору, однаковості властивостей простору у всіх його точках. Таким чином, фізичні властивості замкнутої системи та закони її руху не залежать від вибору положення початку координат системи відліку.

4.1.3. Механічна робота. Потужність

Елементарна робота δA , що здійснюється постійною (як за величиною, так і за напрямком) силою $\vec{F}$ при поступальному переміщенні матеріальної точки визначається як скалярний добуток векторів сили та переміщення:

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{r}) = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot \cos \alpha \cdot dr = F_r \cdot dr, \quad (4.5)$$

де F_r – проекція вектора сили на напрямок елементарного переміщення $d\vec{r}$; dr – модуль вектора $d\vec{r}$; α – кут між векторами сили та переміщення (рис. 4.1).

Елементарна робота δA – це робота сили на нескінченно малому шляху, і вона не є повним диференціалом будь-якої функції, оскільки визначається саме переходом з однієї точки до іншої. Інакше кажучи, $\delta A \neq d(A)$ і

$\int_1^2 \delta A = A_{12} \neq A_2 - A_1$. Проте, надалі ми часто будемо писати dA замість δA ,

підкреслюючи нескінченно малу роботу і, як і раніше, розуміючи, що для роботи інтеграл вздовж пройденого шляху дорівнює роботі на цьому шляху

$$\int_1^2 \delta A = A_{12}.$$

Одиниця виміру роботи

$$[A] = \text{Ньютон} \cdot \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Джоуль} = \text{Дж}.$$

Робота – це скалярна величина, знак якої залежить від кута між векторами $\vec{F}$ та $d\vec{r}$.

Робота A_{12} , що виконує змінна сила $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$, яка у загальному випадку може залежати не тільки від координат, але й від швидкості, дорівнює

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_L F_s ds. \quad (4.6)$$

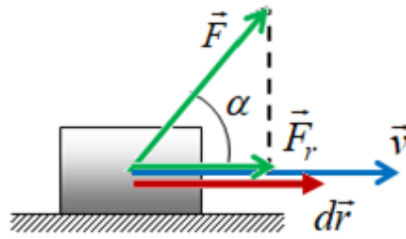


Рисунок 4.1

Інтеграл береться вздовж криволінійної траєкторії руху матеріальної точки L від точки 1 до точки 2, а величина F_s є функцією положення матеріальної точки на траєкторії, тобто в кожній точці траєкторії сила F_s має своє певне значення.

Якщо зобразити графічно величину F_s як функцію положення матеріальної точки на траєкторії, то елементарна робота δA чисельно дорівнює площі смужки завширшки ds (нескінченно малий елемент кривої). Робота на шляху від точки 1 до точки 2 дорівнює площі фігури, що обмежена кривою, ординатами 1 та 2 та віссю s (рис. 4.2). При цьому площа фігури над віссю s береться зі знаком плюс (додатна робота), а площа під віссю s – зі знаком мінус (від’ємна робота).

У координатній формі запису:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_x(x, y, z)\vec{i} + F_y(x, y, z)\vec{j} + F_z(x, y, z)\vec{k}, \\ d\vec{r} &= dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}, \\ A_{12} &= \int_L (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (4.7)\end{aligned}$$

Зважаючи на те, що функція може залежати як від координат, так і від швидкості, слід зазначити, що обчислення інтеграла (4.7) може бути досить складним та громіздким математичним завданням.

Якщо на об’єкт діє більше однієї сили, то загальна виконана робота є роботою результуючої сили, що є векторною сумою усіх сил, що діють на тіло, чи системи сил, або, іншими словами, алгебраїчною сумою робіт кожною з прикладених сил.

$$A = (\vec{F}, d\vec{s}) = \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i, d\vec{s} \right) = (\vec{F}_1, d\vec{s}) + \dots + (\vec{F}_N, d\vec{s}) = A_1 + A_2 + \dots + A_N.$$

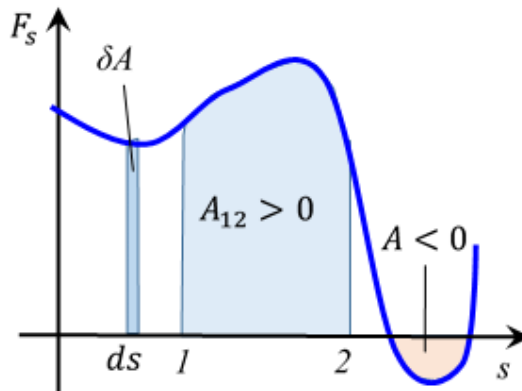


Рисунок 4.2

Потужність P – скалярна фізична величина, що характеризує швидкість виконання роботи. Потужність дорівнює відношенню виконаної роботи A до проміжку часу t , протягом якого вона виконувалась:

$$P = \frac{A}{t}. \quad (4.8)$$

Одиниця потужності

$$[P] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Ват} = \text{Вт}.$$

Потужність при дії постійної сили

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{(\vec{F}, d\vec{r})}{dt} = \left(\vec{F}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = (\vec{F}, \vec{v}) \quad (4.9)$$

дорівнює скалярному добутку сили $\vec{F}$ та швидкості $\vec{v}$.

Позасистемною одиницею потужності є **кінська сила** 1 к.с. = 735 Вт.

Жоден реальний механізм неспроможний повністю перетворювати свою енергію, витрачаючи її лише на корисну роботу. Частина енергії, що витрачається, завжди витрачається на подолання сил тяжіння, нагрівання складових частин механізму, розсіювання тепла в навколишнє середовище тощо. Отже, для того, щоб оцінити ефективність того чи іншого механізму, потрібно розуміти, яка частка від енергії, що витрачається, використовується для

здійснення корисної роботи. Ця частка визначається за допомогою **коефіцієнта корисної дії (ККД)**:

$$\eta = \frac{A_{\text{корисна}}}{A_{\text{витрачена}}} \cdot 100\% = \frac{P_{\text{корисна}}}{P_{\text{витрачена}}} \cdot 100\%. \quad (4.10)$$

Як видно з (4.10), ККД можна визначати, й використовуючи відповідні потужності. Коефіцієнт корисної дії не може бути більше одиниці (або 100%), тому що це суперечить закону збереження енергії.

4.1.4. Енергія. Кінетична енергія

Енергія – скалярна фізична величина, яка є кількісною характеристикою різних форм руху матерії та відповідних їй взаємодій. З різними формами руху матерії пов’язані різні види енергії – механічна, теплова, енергія електричного поля, ядерна тощо.

Механічна енергія – кількісна міра механічного руху системи, а також механічної взаємодії тіл між собою та з зовнішніми тілами. Механічна енергія складається з кінетичної та потенціальної енергій.

У результаті дії сили на матеріальну точку вона набуває прискорення $\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$. Елементарна робота сили на переміщенні $d\vec{r}$ дорівнює

$$dA = (\vec{F}, d\vec{r}) = (m\vec{a}, d\vec{r}) = m \left(\frac{d\vec{v}}{dt}, d\vec{r} \right) = m \left(\vec{v}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = m(\vec{v}, d\vec{v}).$$

Якщо сила, що діє на тіло, викликала зміну його швидкості з V_1 до V_2 , то робота цієї сили становить

$$A = \int_1^2 dA = \int_{v_1}^{v_2} m \cdot v \cdot dv = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{mv^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = KE_2 - KE_1 = \Delta KE. \quad (4.11)$$

Ми отримали вираз для енергії, що пов’язана з рухом, а саме, **кінетичної енергії**.

$$KE = \frac{mv^2}{2}. \quad (4.12)$$

З формули (4.12) видно, що кінетична енергія має розмірність роботи. Зв'язок між кінетичною енергією і роботою встановлює **теорема про зміну кінетичної енергії**: зміна кінетичної енергії матеріальної точки на будь-якому відрізку шляху дорівнює роботі сили, що прикладена до точки на тому ж самому відрізку шляху, а робота визначається як **приріст** кінетичної енергії

$$A = KE_2 - KE_1 = \Delta KE. \quad (4.13)$$

Зверніть увагу на те, що величина кінетичної енергії залежить від вибору системи відліку, оскільки залежить від швидкості, яка своєю чергою визначається відносно обраної системи відліку.

Кінетична енергія системи матеріальних точок (тіл), що рухаються поступально, дорівнює

$$KE = \sum_{i=1}^n KE_i, \quad (4.14)$$

де KE_i – кінетична енергія i -ї матеріальної точки; n – кількість матеріальних точок.

4.1.5. Потенціальна енергія

1. Визначимо роботу сили тяжіння, коли матеріальна точка маси m рухається вздовж криволінійної траєкторії BC в гравітаційному полі Землі (рис. 4.3). Якщо вважати, що висота від поверхні Землі незначна і значно менше відстані між центром Землі і тілом, та прискорення вільного руху майже не змінюється, тоді робота на елементарному переміщенні є

$$\Delta A = mg \cdot \Delta s_k \cos \alpha = mg \Delta h_k. \quad (4.15)$$

Повна робота на шляху BC становить

$$\begin{aligned} A &= \sum_k \Delta A_k = mg \sum_k \Delta h_k = mgh = mg(h_1 - h_2) = \\ &= mgh_1 - mgh_2 = PE_1 - PE_2 = -\Delta PE. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Як видно з (4.16), робота дорівнює різниці енергій, які залежать від положення тіла відносно іншого тіла.

Енергія, що залежить від положення тіла відносно іншого тіла або взаємного положення частин одного тіла, називається **потенціальною енергією**.

З (4.16) **потенціальна енергія тіла поблизу поверхні Землі**

$$PE = mgH \quad (4.17)$$

Слід звернути увагу, що робота дорівнює приросту потенційної енергії зі знаком мінус, або **спаду** потенціальної енергії

$$A = -\Delta PE = -(PE_2 - PE_1) = PE_1 - PE_2. \quad (4.18)$$

Потенціальна енергія, як і кінетична, вимірюється у Джоулях

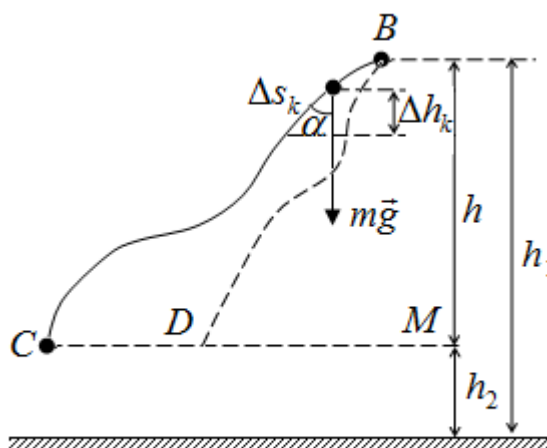


Рисунок 4.3

$$[PE] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Джоуль} = \text{Дж}.$$

З отриманого результату випливає також висновок, що робота сили тяжіння не залежить від форми траєкторії, а визначається тільки початковим та кінцевим положеннями тіла: $A_{BC} = A_{BD} = A_{BM}$.

Сили, робота яких не залежить від шляху, по якому тіло переходить з одного положення в інше, називаються **консервативними**. Система тіл називається **консервативною**, якщо між тілами системи діють сили, що залежать лише від відстані між тілами, що взаємодіють.

Робота консервативної сили на замкнутій траєкторії дорівнює нулю (рис. 4.4) $A_{MN} + A_{NM} = 0$. Прикладом консервативних сил є гравітаційні сила, сили пружності та електростатична сила, а неконсервативних – сили опору і тертя.

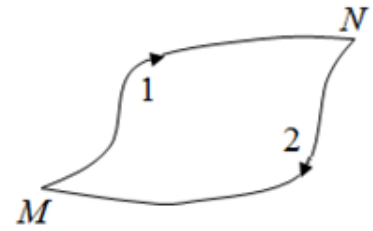


Рисунок 4.4

2. Розглянемо випадок, коли сили, що діють між двома тілами (матеріальними точками), спрямовані вздовж прямих, що проходять через одну й ту саму нерухому точку – **центр сил**, і залежать лише від відстані r до центра сил.

Сила може бути спрямована або до центру сили, або від нього. Прикладами є гравітаційне поле Землі та електричне поле точкового заряду.

Знайдемо роботу сили $\vec{F}(r)$, що залежить від відстані від центру r в центрально-силовому стаціонарному (незалежному від часу) полі.

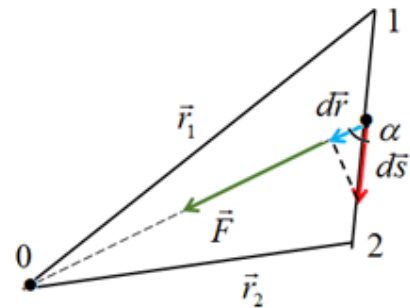


Рисунок 4.5

Для гравітаційної сили $F(r) = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ елементарна робота дорівнює

$$dA = \vec{F}(r) d\vec{s} = F(r) ds \cdot \cos \alpha = F(r) dr = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr. \quad (4.19)$$

Інтегрування (4.19) вздовж траєкторії 1-2 дає величину роботи цієї сили

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 dA = \int_1^2 \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_1} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_2} = \\ &= PE_1 - PE_2 = -\Delta PE. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ми отримали вираз для **потенціальної енергії взаємодії** (взаємної потенціальної енергії)

$$PE = \gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (4.21)$$

Як і в попередньому випадку (4.18), робота дорівнює спаду потенціальної енергії.

Слід зазначити, що подібні математичні розрахунки можуть бути зроблені для сили електричної взаємодії, величина якої визначається за законом Кулона.

$$F(r) = \gamma \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

В такому випадку величина потенціальної енергії електричної взаємодії має вигляд

$$PE = \gamma \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (4.22)$$

3. Розглянемо пружину, один кінець якої закріплений, а інший може переміщатися горизонтально під дією зовнішньої сили (рис. 4.6).

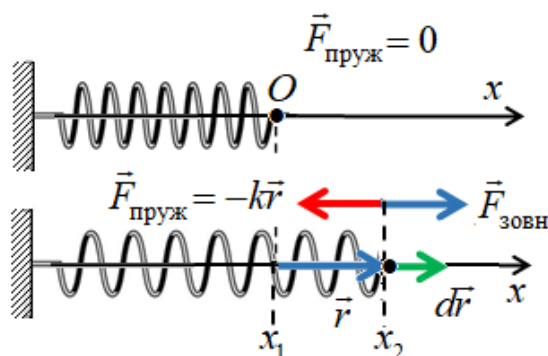


Рисунок 4.6

Направимо координатну вісь x паралельно осі пружини та виберемо початок відліку координати x ($x=0$) у положенні незакріпленого кінця недеформованої пружини (точка O). При розтягуванні або стисканні пружини виникає пружна сила $\vec{F}_{\text{пруж}} = -k\vec{r}$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений з точки O до незакріпленого кінця деформованої пружини, а k – коефіцієнт пропорційності, який називають **жорсткістю пружини**. Під дією зовнішньої сили $\vec{F}_{\text{зовн}}$, роботу якої ми не розглядатимемо, незакріплений кінець пружини, до якого прикладена також $\vec{F}_{\text{пруж}}$, переміститься на $d\vec{r}$. Якщо незакріплений кінець пружини перемістився вздовж осі x з точки з координатою x_1 в точку з координатою x_2 , то робота пружної сили $\vec{F}_{\text{пруж}}$ дорівнює

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 (\vec{F}_{\text{пруж}}, d\vec{r}) = \int_1^2 (-k\vec{r}, d\vec{r}), \quad (4.23)$$

або в проєкціях на вісь x

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 (-k\vec{r}, d\vec{r}) = - \int_{x_1}^{x_2} kx \cdot dx = - \frac{kx^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = - \left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} \right) = \\ &= -(PE_2 - PE_1) = -\Delta PE. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Потенціальна енергія пружно деформованого тіла становить

$$PE = \frac{kx^2}{2}. \quad (4.25)$$

Для усіх розглянутих вище випадків виконується **теорема про потенціальну енергію**: робота усіх консервативних сил, які діють на тіло, дорівнює приросту потенціальної енергії тіла, взятому із протилежним знаком.

$$A_{12} = -(PE_2 - PE_1) = -\Delta PE, \quad (4.26)$$

де ΔPE – приріст потенціальної енергії.

Потенціальна енергія визначається з точністю до деякої постійної величини, оскільки є результатом інтегрування. Фізичний сенс має лише зміна потенціальної енергії (робота). Тому нульовий рівень потенціальної енергії можна вибирати довільно. Зазвичай це визначається міркуваннями зручності під час розв'язання конкретної задачі. Наприклад, потенціальна енергія тіла дорівнює нулю на поверхні Землі, на нескінченності у разі гравітаційної взаємодії двох тіл та у положенні нерозтягнутої пружини у випадку пружної деформації.

Зауважимо, що потенціальна енергія однакова у будь-якій інерціальній системі відліку.

Таблиця 4.1 – Потенціальна енергія та робота при переміщенні матеріальної точки у полях консервативних сил

Сила	Потенціальна енергія	Робота
Тяжіння $F = mg$	$PE = mgh$ де h – висота над рівнем, який прийнято за нульовий	$A = mg(h_1 - h_2)$
Пружності $F = -kx$	$PE = \frac{kx^2}{2}$ де k – коефіцієнт жорсткості пружини; x – розтягнення пружини	$A = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2)$
Гравітаційна $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$	$PE = \gamma \frac{m_1 m_2}{r}$ де γ – гравітаційна стала; m_1 і m_2 – маси матеріальних точок; r – відстань між матеріальними точками	$A = \gamma m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$

4.1.6. Закон збереження повної механічної енергії

Повна механічна енергія $E_{\text{повн}}$ матеріальної точки – це сума її кінетичної та потенціальної енергій

$$E_{\text{повн}} = KE + PE. \quad (4.27)$$

Закон збереження повної механічної енергії: якщо на матеріальну точку (тіло) діють лише консервативні сили, її повна механічна енергія з часом не змінюється

$$E_{\text{повн}} = KE + PE = \text{const}. \quad (4.28)$$

Іншими словами, повна механічна енергія замкнутої системи тіл, яка перебуває в полі консервативних сил, залишається сталою.

Оскільки величина кінетичної енергії залежить від вибору системи відліку, то і повна енергія також має різні значення в різних системах відліку. Але закон

збереження механічної енергії виконується в будь-якій інерціальній системі відліку.

Консервативні сили не можуть змінити повну механічну енергію матеріальної точки у процесі руху. Якщо на матеріальну точку, розташовану в консервативному силовому полі крім консервативних сил діють будь-які інші сили (неконсервативні), то повна механічна енергія матеріальної точки змінюється з часом. Прикладом неконсервативних сил у механіці є сили тертя і сили опору. Ці сили називають *дисипативними*, оскільки вони призводять до дисипації (розсіювання) енергії – перетворення механічної енергії на теплоту.

Закон зміни повної механічної енергії матеріальної точки: робота дисипативних сил $A_{\text{дис}}$ при переміщенні матеріальної точки з довільного початкового положення до довільного кінцевого положення дорівнює приросту повної механічної енергії матеріальної точки:

$$A_{\text{дис}} = E_{\text{повн2}} - E_{\text{повн1}} = \Delta E_{\text{повн}}. \quad (4.29)$$

Оскільки робота неконсервативних сил (сил опору) завжди від’ємна, то механічна енергія системи зменшується внаслідок перетворення механічної енергії в інші форми.

Закон збереження енергії пов’язаний з однорідністю часу – рівноправністю усіх моментів часу. Тобто всі механічні процеси відбуваються однаково незалежно від моменту початку процесу.

4.1.7. Пружне і непружне зіткнення

Яскравим прикладом застосування законів збереження є процес зіткнення двох тіл. **Зіткнення** (удар) – це подія, під час якої два об’єкти наближаються один до одного і взаємодіють за допомогою сил. Кажуть, що зіткнення між двома частинками відбувається, якщо вони фізично стикаються одна з одною або якщо на траєкторію руху однієї впливає інша. У фізиці термін зіткнення не обов’язково означає, що частинки реально стикаються. Насправді дві частинки можуть навіть

не торкатися одна одної, але все рівно кажуть, що вони стикаються, якщо одна частинка впливає на рух іншої. Прикладом цього може бути взаємодія заряджених частинок.

Зіткнення поділяються на два види: пружне зіткнення та непружне зіткнення.

Пружне зіткнення двох об'єктів — це зіткнення, при якому повна кінетична енергія та загальний імпульс системи однакові до та після зіткнення.

Непружне зіткнення — це зіткнення, при якому повна кінетична енергія системи до та після зіткнення неоднакова, але імпульс системи зберігається. Зіткнення двох тіл називається **центральним** (прямим), якщо швидкості тіл до і після зіткнення спрямовані уздовж лінії, яка проходить через їхні центри.

Коли об'єкти злипаються після зіткнення, зіткнення називається **абсолютно непружним**. У цьому випадку два об'єкти (рис. 4.7) масами m_1 та m_2 рухаються зі швидкостями $\vec{v}_1$ та $\vec{v}_2$, відповідно, в процесі зіткнення вони стикаються, злипаються і після зіткнення рухаються зі спільною швидкістю $\vec{u}$.

Рівняння згідно із законом збереження імпульсу для цієї системи двох об'єктів має вигляд

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}, \quad (4.30)$$

а кінцева швидкість об'єднаного тіла масою $m_1 + m_2$ становить

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.31)$$

Слід пам'ятати, що під час розв'язання задач для знаходження величин швидкостей необхідно проєктувати векторні величини, що входять до рівняння (4.30), на обрані осі та враховувати напрямки відповідним знаками швидкостей в (4.31).

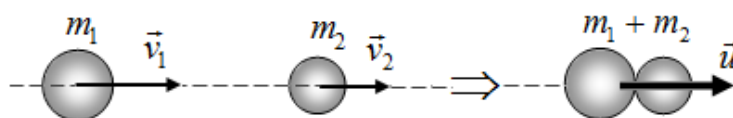


Рисунок 4.7

Розглянемо механічну систему з двох тіл масами m_1 та m_2 , що рухаються поступально зі швидкостями $\vec{v}_1$ та $\vec{v}_2$. До удару тіла можуть рухатись як в один бік, так і назустріч одне одному (рис. 4.8). Після удару швидкості тіл змінюються і дорівнюють $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$.

Абсолютно пружне зіткнення – удар, при якому механічна енергія системи тіл, що стикаються, зберігається. Після такого удару тіла розлітаються у різні боки.

Оскільки тіла рухаються по горизонтальній площині, то їх потенціальна енергія до і після удару не змінюється. Отже, закон збереження повної механічної енергії (4.28) і закон збереження імпульсу (4.2) можна об'єднати в систему

$$\begin{cases} \frac{m_1 \vec{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{v}_2^2}{2} = \frac{m_1 \vec{u}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{u}_2^2}{2}, \\ m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2. \end{cases} \quad (4.32)$$

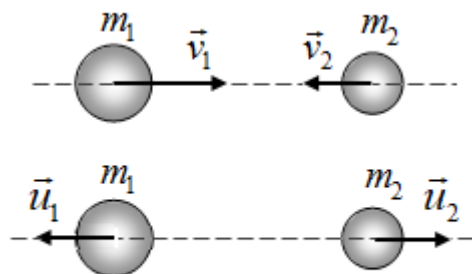


Рисунок 4.8

Розв'язуючи цю систему рівнянь відносно кінцевих швидкостей отримуємо в векторній формі

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \frac{2m_2 \vec{v}_2 + (m_1 - m_2) \vec{v}_1}{m_1 + m_2}, \\ \vec{u}_2 = \frac{2m_1 \vec{v}_1 + (m_2 - m_1) \vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \end{cases} \quad (4.33)$$

або в проєкціях на $\vec{v}_1$ -напрямок

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\mp 2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}, \\ u_2 = \frac{2m_1 v_1 \mp (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}, \end{cases} \quad (4.34)$$

де v_1 і v_2 – величини початкових, а u_1 і u_2 – кінцевих швидкостей.

Законом збереження імпульсу можна користуватися в інерціальних системах відліку в наступних випадках:

- 1) коли система замкнута;
- 2) коли є зовнішні сили, але їх рівнодійна дорівнює нулю;
- 3) коли розглядаються малі проміжки часу (постріл, розрив снаряду тощо), тобто імпульс зовнішніх сил $F_{\text{зовн}} \Delta t$ мала величина, а внутрішні сили при цьому великі;

4) коли зовнішні сили присутні (система тіл не є замкнутою), але їх проєкції на певний напрямок дорівнюють нулю. Наприклад, якщо вісь x спрямована вздовж поверхні Землі, то проєкції сил тяжіння на цю вісь будуть дорівнювати нулю. Тоді закон збереження імпульсу буде виконуватися.

Слід також пам'ятати, що під час розв'язання задач для розрахунків треба використовувати скалярну форму запису закону, тобто треба спроектувати вектори імпульсів (швидкостей) на обрану вісь з врахуванням знаків. Коли напрямок імпульсу (швидкості) невідомий, він обирається довільно. Якщо результат виявилася від'ємним, то це означає, що її напрямок є протилежним обраному.

4.2 Приклади розв'язання задач

Задача 4.2.1

Хлопчик масою $m_1 = 30$ кг, що плив у байдарці масою $m_2 = 20$ кг зі швидкістю $v = 4$ м/с, викинув у річку весло масою $m_3 = 2$ кг зі швидкістю $u_3 = 10$ м/с. З якою швидкістю далі рухатиметься хлопчик на байдарці, якщо він кинув весло: а) у бік, протилежний напрямку руху байдарки; б) у напрямку руху байдарки.

Дано:

$$m_1 = 30 \text{ кг}$$

$$m_2 = 20 \text{ кг}$$

$$u_3 = 10 \text{ кг}$$

$$u_3 = 10 \text{ м/с}$$

$$u = ?$$

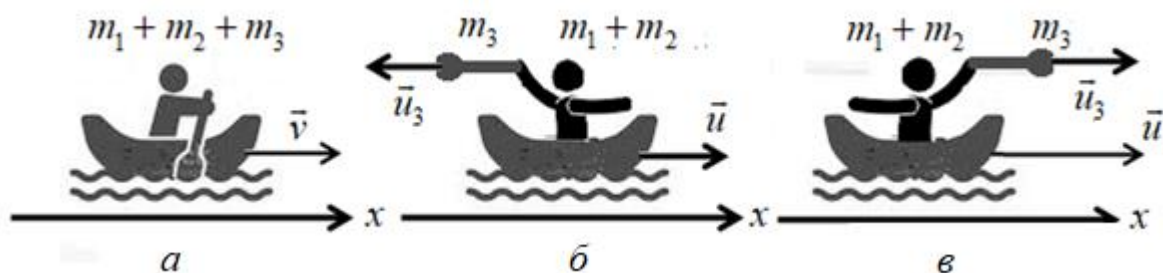
Розв'язання

Оскільки хлопчик на байдарці рухався з постійною швидкістю, то за першим законом Ньютона систему «хлопчик - байдарка» можемо розглядати як замкнену систему, на яку не діють зовнішні сили. У такому разі для розв'язання задачі скористаємось законом збереження імпульсу.

Позначимо $\vec{p}$ і $\vec{p}'$ – імпульси системи до і після викидання весла, відповідно.

Імпульс системи до викидання весла (рис. а) з урахуванням того, що хлопчик з веслом і байдарка рухалися зі швидкістю $\vec{v}$, становить

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = m_1\vec{v} + m_2\vec{v} + m_3\vec{v} = (m_1 + m_2 + m_3)\vec{v}.$$



Імпульс системи після викидання весла:

$$\vec{p}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \vec{p}'_3 = (m_1 + m_2)\vec{u} + m_3\vec{u}_3.$$

За законом збереження імпульсу $\vec{p} = \vec{p}'$:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\vec{v} = (m_1 + m_2)\vec{u} + m_3\vec{u}_3. \quad (1)$$

Спрямуємо вісь x праворуч та спроектуємо отримане рівняння (1) на неї. Оскільки немає розуміння, в який бік буде рухатися хлопчик з байдаркою після викидання весла, вважаємо, що ця швидкість спрямована вздовж додатного напрямку осі x . У цьому випадку додатне значення отриманого результату розрахунків підтвердить наше припущення, а від'ємне – вкаже на те, що рух відбувається у напрямку, протилежному обраному.

У випадку, коли весло кинуте у бік, протилежний руху байдарки (рис. б), проєкції рівняння (1) мають вигляд

$$(m_1 + m_2 + m_3)v = +(m_1 + m_2)u - m_3u_3,$$

а шукана швидкість дорівнює

$$u = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)v + m_3u_3}{(m_1 + m_2)}. \quad (2)$$

Коли весло кинуте у бік руху байдарки (рис. в), проєкції імпульсів рівняння (1) становлять

$$(m_1 + m_2 + m_3)v = +(m_1 + m_2)u + m_3u_3,$$

звідки швидкість байдарки з хлопчиком є

$$u = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)v - m_3u_3}{(m_1 + m_2)}. \quad (3)$$

Підставлення даних задачі дає:

– у разі кидання весла у бік, протилежний руху байдарки:

$$u = \frac{(30 + 20 + 2) \cdot 4 + 2 \cdot 10}{(30 + 20)} = 4,6 \text{ м/с.}$$

– у разі кидання весла у бік руху байдарки

$$u = \frac{(30 + 20 + 2) \cdot 4 - 2 \cdot 10}{(30 + 20)} = 3,8 \text{ м/с.}$$

Розмірність результату:

$$[v] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м/с} \pm \text{кг} \cdot \text{м/с}}{\text{кг}} = \text{м/с}.$$

Відповідь: 4,6 м/с і 3,8 м/с.

Задача 4.2.2

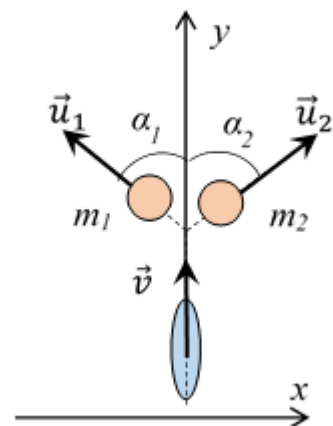
Снаряд феєрверка, що рухався вертикально вгору з постійною швидкістю $v = 26 \text{ м/с}$, розірвався на дві частини, які полетіли у різні боки під кутами 45° відносно початкового напрямку руху. Знайти швидкості уламків, якщо їх маси дорівнюють $m_1 = 300 \text{ г}$ і $m_2 = 200 \text{ г}$.

Дано:	Розв'язання
$v = 26 \text{ м/с}$	Оскільки феєрверк рухався з постійною швидкістю, то згідно з 1 законом Ньютона на цю систему не діяли зовнішні сили або їх векторна сума (рівнодійна) дорівнювала нулю, тобто загальним впливом зовнішніх сил (гравітація, опір повітря) можна знехтувати. У цьому разі розрив снаряду
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 45^\circ$	
$m_1 = 300 \text{ г} = 0,3 \text{ кг}$	
$m_2 = 200 \text{ г} = 0,2 \text{ кг}$	
$u_1 - ? \quad u_2 - ?$	феєрверка та утворення уламків можна розглядати такими, що мають місце в замкнутій системі. Застосуємо закон збереження імпульсу з урахуванням того, що маса феєрверку до вибуху – це сума мас його уламків.

Імпульс системи до вибуху:

$$\vec{p} = (m_1 + m_2) \vec{v}.$$

Імпульс системи після утворення двох уламків:



$$\vec{p}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2.$$

За законом збереження імпульс системи до і після вибуху дорівнюють один одному $\vec{p} = \vec{p}'$, тоді

$$(m_1 + m_2) \vec{v} = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2. \quad (1)$$

Зважаючи на те, що уламки рухаються у двох вимірах, введемо дві осі: горизонтальну x та вертикальну y . Проекції рівняння закону збереження імпульсу (1) на обрані осі є такими

$$\begin{aligned} x: & \quad (m_1 + m_2) v_x = -m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}, \\ y: & \quad (m_1 + m_2) v_y = m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Складові швидкостей снаряда фєєрверка і його обох уламків становлять:

- до вибуху, коли снаряд рухався вертикально вгору, $v_x = 0, v_y = v$;

- після вибуху:

для першого уламку $u_{x1} = u_1 \sin \alpha_1$, $u_{y1} = u_1 \cos \alpha_1$,

для другого уламку $u_{x2} = u_2 \sin \alpha_2$, $u_{y2} = u_2 \cos \alpha_2$

А самі величини швидкостей уламків є

$$u_1 = \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2}, \quad u_2 = \sqrt{u_{2x}^2 + u_{2y}^2}.$$

З урахуванням того, що обидва уламки розлетілися під однаковими кутами $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 45^\circ$, закон збереження імпульсу у проекціях на осі (2) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} x: & \quad 0 = -m_1 u_1 \sin \alpha + m_2 u_2 \sin \alpha, \\ y: & \quad (m_1 + m_2) v = m_1 u_1 \cos \alpha + m_2 u_2 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Виразимо величину швидкості першого уламку з проекції на вісь x – першого рівняння системи (3)

$$m_1 u_1 \sin \alpha = m_2 u_2 \sin \alpha,$$

$$u_1 = \frac{m_2}{m_1} u_2, \quad (4)$$

і підставимо у рівняння для проекції на вісь y – друге рівняння системи (3):

$$\begin{aligned}
 (m_1 + m_2)v &= m_1 \frac{m_2}{m_1} u_2 \cos \alpha + m_2 u_2 \cos \alpha, \\
 (m_1 + m_2)v &= 2m_2 u_2 \cos \alpha, \\
 u_2 &= \frac{(m_1 + m_2)v}{2m_2 \cos \alpha}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Підставлення даних задачі в отримані формули (4) і (5) дає

$$\begin{aligned}
 u_2 &= \frac{(0,3 + 0,2) \cdot 26}{2 \cdot 0,2 \cdot \sqrt{2} / 2} = 46 \text{ м/с}, \\
 u_1 &= \frac{0,2}{0,3} \cdot 46 = 31 \text{ м/с}.
 \end{aligned}$$

Розмірність отриманих результатів: $[u] = \text{м/с} = \frac{\text{кг}}{\text{кг} \cdot 1} \cdot \text{м/с}.$

Відповідь: $u_1 = 31 \text{ м/с}; u_2 = 46 \text{ м/с}.$

Задача 4.2.3

На рейках стоїть платформа масою $m_1 = 10$ тон. На платформі закріплена гармата масою $m_2 = 5$ тонн, з якої робиться постріл вздовж рейок. Маса снаряда $m_3 = 100$ кг, його початкова швидкість відносно гармати $v_0 = 500$ м/с. Знайти швидкість $\vec{u}$ платформи у перший момент після пострілу, якщо:

1) платформа стояла нерухомо ($v = 0$); 2) платформа рухалась зі швидкістю $v = 18$ км/год, а постріл був зроблений у напрямку її руху; 3) платформа рухалась зі швидкістю $v = 18$ км/год, а постріл був зроблений у напрямку, протилежному напрямку її руху.

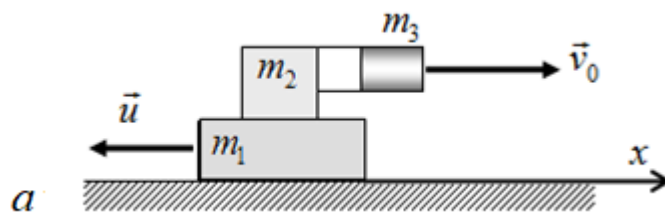
Дано:	Розв'язання
$m_2 = 5$ тонн	Будемо вважати, що система, що складається з платформи, гармати та снаряду, є замкнутою, тому для розв'язання задачі скористаємося законом збереження імпульсу, який стверджує, що імпульс замкнутої системи залишається незмінним, тобто імпульс системи до $\vec{p}$ і після $\vec{p}'$ пострілу дорівнюють один одному.
$m_3 = 100$ кг	
$v_0 = 500$ м/с	
1) $v = 0$	
2) $v = 18$ км/год	
$u = ?$	

Нагадаємо, що сумарний імпульс системи є векторною сумою імпульсів тіл, що складають систему.

а) Імпульс системи до пострілу становить

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = m_1\vec{v} + m_2\vec{v} + m_3\vec{v} = (m_1 + m_2 + m_3)\vec{v} = 0, \quad (1)$$

оскільки спочатку платформа, гармата та снаряд знаходилися у стані спокою ($v = 0$).



Після пострілу імпульс системи змінюється і дорівнює

$$\vec{p}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \vec{p}'_3 = m_1\vec{u} + m_2\vec{u} + m_3\vec{v}_0 = (m_1 + m_2)\vec{u} + m_3\vec{v}_0. \quad (2)$$

За законом збереження імпульсу $\vec{p} = \vec{p}'$, отже,

$$0 = (m_1 + m_2)\vec{u} + m_3\vec{v}_0. \quad (3)$$

Спроекуємо рівняння (3) на обрану вісь x (рис. а). Звернемо увагу на наступний факт: з життєвого досвіду ми знаємо, що в результаті пострілу платформа відкотиться у бік, протилежний напрямку пострілу (так званий «відкат гармати»). З огляду на це при проєктуванні ми одразу можемо записати знак «мінус» перед швидкістю u платформи. Тоді отримаємо

$$0 = -(m_1 + m_2)u + m_3v_0$$

$$(m_1 + m_2)u = m_3 v_0,$$

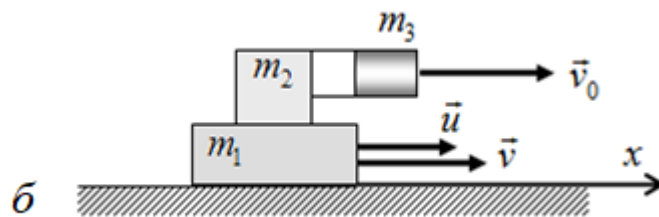
звідки

$$u = \frac{m_3 v_0}{m_1 + m_2} = \frac{100 \cdot 500}{10000 + 5000} = 3,33 \text{ м/с.} \quad (4)$$

У ряді випадків, коли насамперед немає розуміння, в який бік рухатиметься об'єкт після взаємодії, вважаємо, що швидкість спрямована вздовж додатного напрямку осі x . У цьому випадку додатне значення отриманого результату розрахунків підтвердить наше припущення, а від'ємне – вкаже на те, що рух відбувається у напрямку, протилежному обраному.

б) У випадку, коли платформа рухається зі швидкістю $v = 18 \text{ км/год} = 5 \text{ м/с}$, а постріл робиться у напрямку її руху (рис. б), закон збереження імпульсу має вигляд

$$(m_1 + m_2 + m_3)\vec{v} = (m_1 + m_2)\vec{u} + m_3(\vec{v}_0 + \vec{v}). \quad (5)$$



Спроектуємо рівняння (5) на вісь x , вважаючи при цьому, що платформа після пострілу рухатиметься у додатному напрямку осі x :

$$(m_1 + m_2 + m_3)v = (m_1 + m_2)u + m_3(v_0 + v). \quad (6)$$

Швидкість платформи з гарматою з рівняння (6) є

$$\begin{aligned} u &= \frac{(m_1 + m_2 + m_3)v - m_3(v_0 + v)}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{(10000 + 5000 + 100) \cdot 5 - 100 \cdot (500 + 5)}{10000 + 5000} = 1,67 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

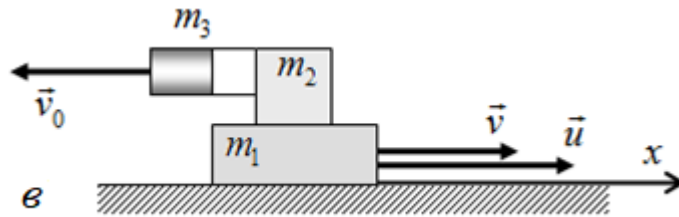
Отже, напрямок руху платформи залишився незмінним, але швидкість її зменшилася.

в) Закон збереження імпульсу в третьому випадку має вигляд, аналогічний тому, що був записаний для другого випадку, тобто

$$(m_1 + m_2 + m_3)\vec{v} = (m_1 + m_2)\vec{u} + m_3(\vec{v}_0 + \vec{v}), \quad (7)$$

з тією лише різницею, що при проєктуванні на вісь x (рис. в) інший знак матиме швидкість снаряда v_0 відносно гармати та платформи:

$$(m_1 + m_2 + m_3)v = (m_1 + m_2)u + m_3(-v_0 + v). \quad (8)$$



Отже, швидкість платформи з гарматою після пострілу буде

$$\begin{aligned} u &= \frac{(m_1 + m_2 + m_3)v - m_3(-v_0 + v)}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{(10000 + 5000 + 100) \cdot 5 - 100 \cdot (-500 + 5)}{10000 + 5000} = 8,33 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Таким чином, платформа рухатиметься в тому ж напрямку, але зі швидкістю, більшою, ніж була до пострілу.

Відповідь: а) $u = 3,33$ м/с; б) $u = 1,67$ м/с; в) $u = 8,33$ м/с.

Задача 4.2.4

Людина масою $m_1 = 60$ кг, що біжить зі швидкістю $v_1 = 2$ м/с, стрибає на візок масою $m_2 = 80$ кг, що рухається зі швидкістю $v_2 = 1$ м/с. Знайдіть швидкість візка з людиною, якщо а) людина наздоганяє візок; б) людина рухається у напрямку візка.

Дано:

$$m_1 = 60 \text{ кг}$$

$$v_1 = 2 \text{ м/с}$$

$$m_2 = 80 \text{ кг}$$

$$v_2 = 1 \text{ м/с}$$

$$u = ?$$

Розв'язання

Вважаючи систему «людина-візок» замкнутою, напишемо закон збереження імпульсу

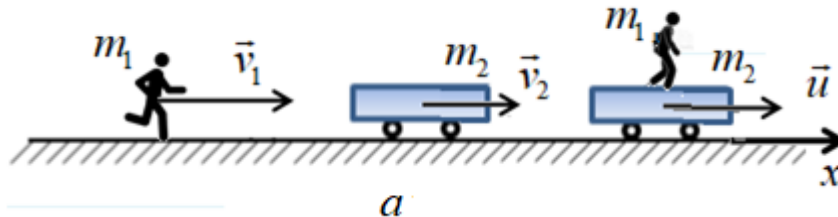
$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}. \quad (1)$$

а) Якщо людина наздоганяє візок (рис. а), то початкові швидкості обох об'єктів мають однакові напрямки, отже, проєкція рівняння (1) на вісь x буде

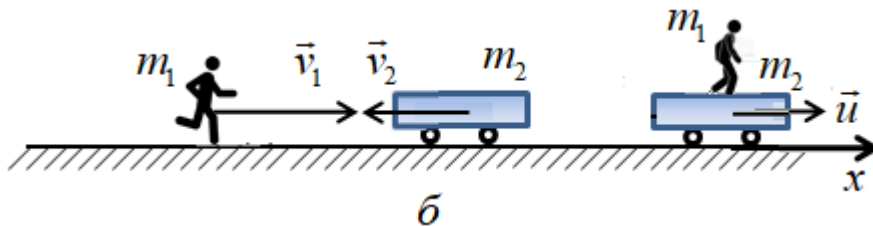
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u. \quad (2)$$

Швидкість візка з людиною з (2) дорівнює

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{60 \cdot 2 + 80 \cdot 1}{60 + 80} = 1,43 \text{ м/с.}$$



б) Якщо людина рухається назустріч візку (рис. б), то швидкості об'єктів мають протилежні знаки.



Проекція рівняння (1) закону збереження імпульсу на вісь x

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u, \quad (3)$$

тоді швидкість візка з людиною дорівнює

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{60 \cdot 2 - 80 \cdot 1}{60 + 80} = 0,29 \text{ м/с.}$$

Позитивний знак відповіді означає, що візок рухається в напрямку попереднього руху людини.

Відповідь: а) $u = 1,43 \text{ м/с}$, б) $u = 0,29 \text{ м/с}$.

Задача 4.2.5

Атом гелію масою $m_1 = 4,00 \text{ а.о.м.}$ (атомна одиниця маси), що рухається зі швидкістю $v_1 = 3,60 \cdot 10^4 \text{ м/с}$, наздоганяє нейтрон $m_2 = 1,00 \text{ а.о.м.}$, що рухається

зі швидкістю $v_2 = 2,6 \cdot 10^4 \text{ м/с}$. Після пружного центрального удару обидві частинки продовжують рух у тому самому напрямку. Які швидкості атома гелію u_1 і нейтрона u_2 після зіткнення? Зіткнення відбувається у вакуумі.

Дано:	Розв'язання
$m_1 = 4,00 \text{ а.о.м.}$	Нехтуючи гравітацією та опором повітря вважаємо систему двох частинок замкнутою. Застосуємо закон збереження імпульсу.
$v_1 = 3,60 \cdot 10^4 \text{ м/с}$	
$m_2 = 1,00 \text{ а.о.м.}$	Імпульс системи до зіткнення
$v_2 = 2,6 \cdot 10^4 \text{ м/с}$	
$u_1 = ? \quad u_2 = ?$	Імпульс системи після зіткнення

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2.$$

$$\vec{p}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2.$$

За законом збереження $\vec{p} = \vec{p}'$,

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2. \quad (1)$$

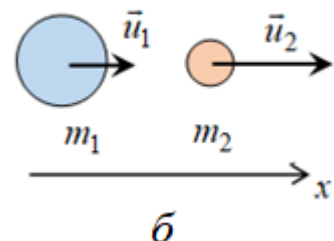
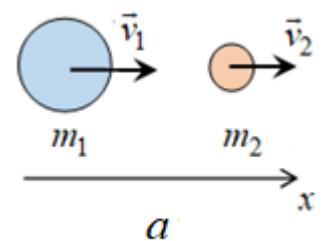
Виберемо вісь x спрямовану праворуч та спроектуємо отримане рівняння (1) на неї

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (2)$$

Маємо одне рівняння і дві невідомі величини, а саме, швидкості u_1 та u_2 . Тому для розв'язання задачі необхідно ще одне рівняння – закон збереження кінетичної енергії при центральному абсолютно пружному ударі:

$$KE_1 + KE_2 = KE'_1 + KE'_2,$$

де KE_1 і KE_2 – кінетичні енергії першого і другого тіла до зіткнення; а KE'_1 і KE'_2 – після зіткнення.



$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (3)$$

Об'єднаємо закони збереження імпульсу (2) і збереження енергії (3) в систему рівнянь і знайдемо швидкості обох частинок після зіткнення:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2. \end{cases}$$

Для спрощення перенесемо ліворуч всі доданки з m_1 , а праворуч – з m_2 :

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2), \\ m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2). \end{cases}$$

Використовуючи алгебраїчне співвідношення $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$, отримуємо

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2), \\ m_1 (v_1 + u_1)(v_1 - u_1) = m_2 (u_2 + v_2)(u_2 - v_2). \end{cases} \quad (4)$$

Якщо розділити друге рівняння системи (4) на перше, то отримаємо такий вираз

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2,$$

або

$$v_1 - v_2 = -(u_1 - u_2). \quad (5)$$

З рівняння (5) випливає важливий результат, що для будь-якого пружного центрального удару відносна швидкість двох об'єктів після зіткнення $(u_1 - u_2)$ незалежно від їх мас має ту саму величину $(v_1 - v_2)$, але з протилежним знаком, тобто спрямована у протилежний бік.

Рівняння (5) було отримано з закону збереження кінетичної енергії для пружних зіткнень і може використовуватися замість нього, що значно спрощує розрахунки. Отже, система (4) набуває вигляду

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ v_1 - v_2 = -(u_1 - u_2). \end{cases} \quad (6)$$

Виражаємо з другого рівняння u_2 і підставляємо у перше. Після ряду простих перетворень отримаємо наступні вирази для швидкостей частинок після зіткнення

$$\begin{cases} u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2, \\ u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2. \end{cases} \quad (7)$$

Підставимо дані задачі в формули (7) і проведемо розрахунки.

$$u_1 = \frac{4,00 - 1,00}{4,00 + 1,00} \cdot 3,6 \cdot 10^4 + \frac{2 \cdot 1,00}{4,00 + 1,00} \cdot 2,6 \cdot 10^4 = 3,2 \cdot 10^4 \text{ м/с},$$

$$u_2 = \frac{2 \cdot 4,00}{4,00 + 1,00} \cdot 3,6 \cdot 10^4 + \frac{4,00 - 1,00}{4,00 + 1,00} \cdot 2,6 \cdot 10^4 = 7,2 \cdot 10^4 \text{ м/с}.$$

Розмірності отриманих результатів

$$[u] = \frac{\frac{\text{а.о.м}}{\text{с}} \cdot \text{м}}{\text{с}} + \frac{\frac{\text{а.о.м}}{\text{с}} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь: $3,2 \cdot 10^4 \text{ м/с}$ і $7,2 \cdot 10^4 \text{ м/с}$.

Задача 4.2.6

М'яч кидають з початковою швидкістю $v_0 = 8 \text{ м/с}$ під кутом α до горизонту у безповітряному просторі. Чому дорівнюється швидкість м'яча v , коли він спускається на висоту $h = 2 \text{ м}$ над землею?

Дано:	Розв'язання
$v_0 = 8 \text{ м/с}$	У безповітряному просторі сили опору руху відсутні, тому можемо вважати, що система замкнута, що дозволяє використовувати закон збереження механічної енергії
$h = 2 \text{ м}$	
$v = ?$	

$$KE + PE = KE' + PE', \quad (1)$$

де KE і PE – початкові кінетична і потенціальна енергії м'яча, KE' і PE' – кінетична і потенціальна енергія м'яча на висоті h .

Якщо вважати, що нульовий рівень потенціальної енергії відповідає рівню землі, потенціальні енергії м'яча $PE = 0$ і $PE' = mgh$. Кінетичні енергії м'яча

становлять $KE = \frac{mv_0^2}{2}$ і $KE' = \frac{mv^2}{2}$.



Підставляємо вирази для енергій в закон збереження (1) і виражаємо швидкість м'яча v на висоті h

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh,$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$$

Розрахунок з підставленням даних задачі дає шукану швидкість м'яча

$$v = \sqrt{8^2 - 2 \cdot 9,8 \cdot 2} = 5 \text{ м/с}.$$

Розмірність отриманого результату

$$[v] = \sqrt{\text{м}^2/\text{с}^2 - \text{м}^2/\text{с}^2} = \text{м/с}.$$

Відповідь: 5 м/с

Задача 4.2.7

Куля, яка летить горизонтально зі швидкістю $v_1 = 600 \text{ м/с}$, влучає в балістичний маятник, що підвішений на невагомому жорсткому стрижні, і застряє у ньому. Маса кулі $m = 10 \text{ г}$, маса маятника $M = 0,9 \text{ кг}$. Визначити

максимальну висоту h від положення рівноваги маятника, на яку він підніметься від удару кулі.

Дано:

$$v_1 = 600 \text{ м/с}$$

$$m = 10 \text{ г}$$

$$M = 0,9 \text{ кг}$$

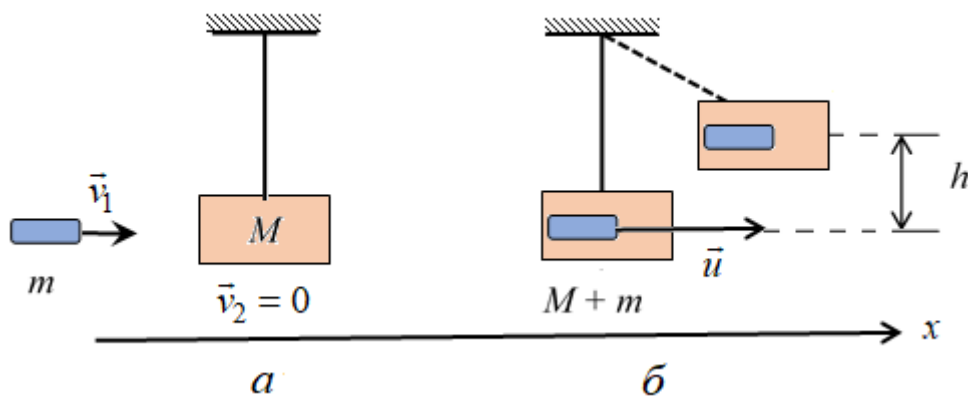
$$h = ?$$

Розв'язання

Балістичний маятник – це прилад, який використовується для вимірювання швидкості снарядів. Звичайно це є масивний циліндр з масою набагато більшої за масу кулі, який може рухатися тільки поступово. При потраплянні кулі маятник з кулею всередині відхиляється на певний кут.

а) Спочатку куля масою m рухалася зі швидкістю $\vec{v}_1$, а маятник масою M знаходився у стані спокою, тобто його швидкість $\vec{v}_2 = 0$ (рис. а). Після потрапляння кулі маятник з кулею всередині починає рух зі швидкістю $\vec{u}$ (рис. б). Припускаючи, що час зіткнення і гальмування кулі у середині маятника дуже короткий і маятник не встигає переміститися зі свого положення спокою, можемо вважати систему «куля-маятник» замкнутою. У момент входження кулі у маятник її швидкість $\vec{v}_1$ горизонтальна, у момент початку руху маятника з кулею його швидкість $\vec{u}$ також горизонтальна. Оскільки траєкторія кулі проходить через центр маятника, то їх зіткнення є центральним непружним ударом. Таким чином, можна застосовувати закон збереження імпульсу.

$$m\vec{v}_1 = (m + M)\vec{u}. \quad (1)$$



Проекція цього рівняння на горизонтальну вісь x має вигляд

$$mv_1 = (m + M)u, \quad (2)$$

Швидкість системи «маятник-куля» одразу після взаємодії з формули (2) дорівнює

$$u = \frac{mv_1}{m + M}. \quad (3)$$

б) Якщо знехтувати силою опору повітря і силою тертя у місці підвісу стрижня, то можна вважати, що на систему «маятник-куля» при її русі до положення максимального відхилення діє тільки одна зовнішня сила – сила тяжіння, яка є консервативною силою. Тому можна скористатися законом збереження механічної енергії в полі консервативних сил:

$$\Delta KE = -\Delta PE, \quad (4)$$

де приріст кінетичної енергії ΔKE становить

$$\Delta KE = KE_2 - KE_1 = 0 - \frac{(m + M)u^2}{2}, \quad (5)$$

а приріст потенціальної енергії ΔPE дорівнює

$$\Delta PE = PE_2 - PE_1 = (m + M)gh - 0, \quad (6)$$

вважаючи, що маятник у стані спокою відповідає нульовому рівню потенційної енергії.

З урахуванням знаків закон збереження енергії (4) можна переписати як

$$\frac{(m + M)u^2}{2} = (m + M)gh. \quad (7)$$

Підставляючи швидкість u , знайдену із закону збереження імпульсу (3), в ліву частину формули (7), отримуємо

$$\frac{(m + M)u^2}{2} = \frac{(m + M)}{2} \left(\frac{mv_1}{m + M} \right)^2 = \frac{m^2 v_1^2}{2(m + M)}. \quad (8)$$

Прирівнюючи вирази для приростів кінетичної та потенціальної енергій, маємо

$$\frac{m^2 v_1^2}{2(m + M)} = (m + M)gh,$$

звідки шукана величина підйому маятника дорівнює

$$h = \frac{m^2 v_1^2}{2(m+M)^2 g}. \quad (9)$$

Розмірність отриманого результату

$$[u] = \frac{\text{кг}^2 \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2}{\text{кг}^2 \cdot \text{м} / \text{с}^2} = \text{м}.$$

Підставлення числових даних дає висоту підйому маятника

$$h = \frac{(0,01)^2 \cdot (600)^2}{2 \cdot (0,01 + 0,9)^2 \cdot 9,81} = 2 \text{ м}.$$

Відповідь: $h = 2 \text{ м}$.

Задача 4.2.8

На матеріальну точку масою m , що рухається вздовж осі x , діють дві постійні сили однакової величини $F = 10 \text{ Н}$. Як показано на схемі, одна із сил перпендикулярна осі x , а друга діє під кутом 45° до напрямку руху. Визначити загальну роботу цих двох сил, якщо точка під їх дією перемістилася на відстань $s = 1,41 \text{ м}$.

Дано:	Розв'язання
$F = 10 \text{ Н}$	Загальна робота усіх сил, що діють на матеріальну точку дорівнюється сумі робіт кожної із сил:
$\alpha = 45^\circ$	
$s = 1,41 \text{ м}$	
$A = ?$	$A = A_1 + A_2. \quad (1)$

За визначенням робота, що виконується постійною силою F при переміщенні на відстань s , розраховується як скалярний добуток векторів сили $\vec{F}$ та переміщення $\vec{s}$

$$A = (\vec{F}, \vec{s}) = F \cdot s \cdot \cos \alpha.$$

Розглянемо окремо роботу кожної сили, що діє на матеріальну точку. Оскільки сила $\vec{F}_1$ перпендикулярна переміщенню, то косинус кута між напрямками сили та переміщення $\cos \alpha_1 = \cos 90^\circ = 0$.

Отже, робота сили $A_1 = 0$.

Робота другої сили:

$$A_2 = F_2 \cdot s \cdot \cos \alpha_2 = F_2 \cdot s \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot F_2 \cdot s.$$

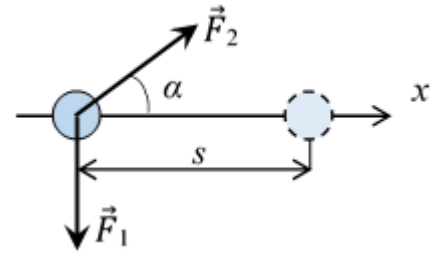
Отже загальна робота (1):

$$A = A_1 + A_2 = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot F_2 \cdot s = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot F_2 \cdot s.$$

Підставлення даних задачі дає

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10 \cdot 1,41 \approx 10 \text{ Дж.}$$

Відповідь: $A = 10$ Дж.



Задача 4.2.9

Європейські стандарти якості потребують, щоб при гальмуванні автомобіля зі швидкості $u = 100$ км/год його гальмівний шлях складав не більше $s = 40$ м (рис. а). Чи встигне повністю зупинитися автомобіль, що рухається зі швидкістю $v = 55$ км/год, якщо перед ним на відстані $l = 10$ м вискочить людина (рис. б)? Якою повинна бути швидкість автомобіля, щоб він зупинився за один метр до людини? Вважаємо, що водій миттєво реагує на ситуацію на дорозі та натискає гальма в момент, коли людина з'явилась на дорозі.

Дано:

$$u = 100 \text{ км/год} = 27,8 \text{ м/с}$$

$$s_1 = 40 \text{ м}$$

$$v = 55 \text{ км/год} = 15,3 \text{ м/с}$$

$$l = 10 \text{ м} \quad d = 1 \text{ м}$$

$$s_2 = ? \quad v_1 = ?$$

Розв'язання

Під час екстреного гальмування на автомобіль діє тільки одна сила, а саме, сила тертя. Вважаємо, що сила $F_{\text{тер}}$, яку створює гальмівна система автомобіля, постійна. Робота, яку виконує постійна сила, залежить від довжини гальмівного шляху

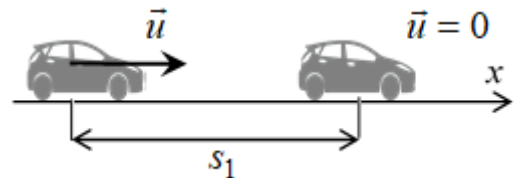
$$A_{\text{тер}} = (\vec{F}_{\text{тер}}, \vec{s}_1) = F_{\text{тер}} \cdot s_1 \cdot \cos \alpha = -F_{\text{тер}} \cdot s_1,$$

де $\cos \alpha = \cos 180^\circ = -1$, оскільки сила гальмування $\vec{F}_{\text{тер}}$ спрямована протилежно напрямку переміщення тіла $\vec{s}_1$. Згідно із законом збереження енергії кінетична енергія автомобіля витрачаються на процес гальмування, тому приріст кінетичної енергії дорівнює роботі сили тертя $\Delta KE = A_{\text{тер}}$.

$$\Delta KE = KE_2 - KE_1 = 0 - \frac{mu^2}{2} = -\frac{mu^2}{2}.$$

Тому, $\frac{mu^2}{2} = F_{\text{тер}} \cdot s_1$, звідки сила тертя дорівнює $F_{\text{тер}} = \frac{mu^2}{2s_1}$.

Вважаючи, що сила тертя не залежить від швидкості автомобіля визначимо довжину гальмівного шляху, коли автомобіль рухається зі швидкістю $\vec{v}$



$$\frac{mv^2}{2} = F_{\text{тер}} \cdot s_2 = \frac{mu^2}{2s_1} \cdot s_2.$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2s_1} \cdot s_2,$$

$$s_2 = \left(\frac{v}{u}\right)^2 \cdot s_1.$$

Підставимо дані задачі

$$s_2 = \left(\frac{15,3}{27,8}\right)^2 \cdot 40 = 12,12 \text{ м.}$$

За умовою задачі автомобіль повинен зупинитися через $l - d = 10 - 1 = 9$ метрів, тому очевидно, що при швидкості $v = 55$ км/год його гальмівний шлях буде більший, ніж потрібно, і він не зможе зупинитися вчасно.

Скориставшись отриманими формулами, знайдемо швидкість, з якою повинен рухатися автомобіль, щоб його гальмівний шлях був не

більше 9 метрів. Для цього виразимо швидкість v_1 із рівняння

$$l - d = \left(\frac{v_1}{u} \right)^2 \cdot s_1.$$

$$v_1 = u \sqrt{\frac{l - d}{s_1}}.$$

Для зручності порівняння підставимо швидкість u в км/год.

$$v_1 = 100 \sqrt{\frac{10 - 1}{40}} = 47,4 \text{ км/год.}$$

Таким чином, для того, щоб автівка зупинилася не ближче ніж 1 м від людини, швидкість не повинна перевищувати 47,4 км/год.

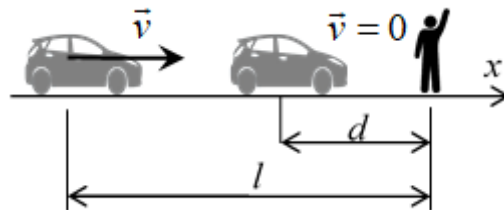
Перевірка розмірності розрахункової формули:

$$[u] = \text{м/с} \cdot \sqrt{\frac{\text{м}}{\text{м}}} = \text{м/с}$$

Відповідь: $s_2 = 12,12$ м, $v_1 = 47,4$ км/год.

Задача 4.2.10

Ковзаняр масою $M = 70$ кг, стоячи на ковзанах на льоду, кидає в горизонтальному напрямку камінь масою $m = 3$ кг зі швидкістю $v = 8$ м/с. На яку відстань відкотиться при цьому ковзаняр, якщо коефіцієнт тертя ковзанів о лід $\mu = 0,02$?



Дано:

$$M = 70 \text{ кг}$$

$$m = 3 \text{ кг}$$

$$v = 8 \text{ м/с}$$

$$\mu = 0,02$$

$$s = ?$$

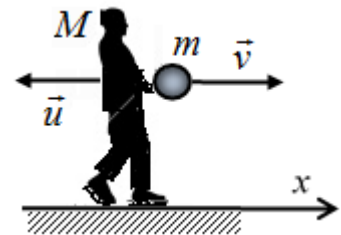
Розв'язання

Ця задача може бути розв'язана двома способами, заснованими на динаміці та кінематиці, а також з використанням законів збереження.

1) Система «ковзаняр – камінь» є замкнутою, тому сумарний імпульс цієї системи зберігається:

$$(M + m)\vec{v}_0 = M\vec{u} + m\vec{v}. \quad (1)$$

Спочатку ковзаняр і камінь перебували в стані спокою ($v_0 = 0$). Отже, імпульс системи «ковзаняр-камінь» дорівнював нулю. Кидаючи камінь, ковзаняр почав рухатися в напрямку, протилежному напрямку руху каменю, тому рівняння в проєкціях на вісь x має вигляд



$$0 = -Mu + mv. \quad (2)$$

Це означає, що швидкість ковзаняра дорівнює

$$u = \frac{mv}{M}. \quad (3)$$

Відповідно до 2-го закону Ньютона рівняння руху ковзаняра має вигляд

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}}, \quad (4)$$

а його проєкції на осі x і y є

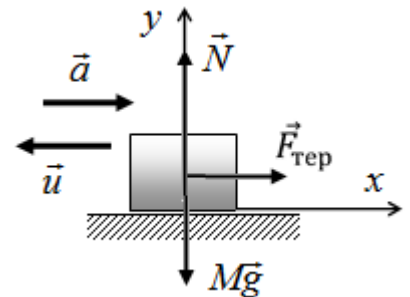
$$\begin{cases} Ma = F_{\text{тер}}, \\ 0 = N - Mg. \end{cases} \quad (5)$$

Враховуючи той факт, що сила тертя $F_{\text{тер}} = \mu N$ і сила нормальної реакції опори $N = Mg$, ми можемо записати, що

$$Ma = \mu N = \mu Mg$$

і величина прискорення фігуриста дорівнює

$$a = \mu g. \quad (6)$$



Уповільнений рух ковзаняра до його зупинки можна описати кінематичними рівняннями

$$\begin{cases} v = u - at, \\ s = ut - \frac{at^2}{2}. \end{cases}$$

Оскільки $v = 0$ і $u = at$, то подолана відстань дорівнює

$$s = \frac{u^2}{2a} = \frac{u^2}{2\mu g} = \frac{m^2 v^2}{2\mu M^2 g} = \frac{9 \cdot 64}{2 \cdot 0,02 \cdot 4900 \cdot 9,8} = 0,3 \text{ м.} \quad (7)$$

2) Цю ж задачу можна розв'язати користуючись законами збереження.

Закон збереження імпульсу (1) ми використали на початку розв'язання та отримали величину швидкості ковзаняра (3) після кидання каменю $u = \frac{mv}{M}$.

Тепер застосуємо закон збереження енергії. Відповідно до нього ковзаняр витрачає кінетичну енергію на роботу проти сили тертя. Тому приріст його кінетичної енергії дорівнює роботі сил тертя

$$\Delta KE = A_{\text{тер}}. \quad (8)$$

Приріст кінетичної енергії

$$\Delta KE = KE_2 - KE_1 = 0 - \frac{Mu^2}{2} = -\frac{Mu^2}{2}. \quad (9)$$

Робота сил тертя

$$A_{\text{тер}} = (\vec{F}_{\text{тер}}, \vec{s}) = F_{\text{тер}} \cdot s \cdot \cos \alpha = -F_{\text{тер}} \cdot s, \quad (10)$$

де $\cos \alpha = \cos 180^\circ = -1$, оскільки сила тертя направлена протилежно зміщенню $\vec{s}$.

Тому, підставлення (9) і (10) в рівняння (8) дає

$$-F_{\text{тер}} \cdot s = -\frac{Mu^2}{2}. \quad (11)$$

Підставляючи величини швидкості ковзаняра (3) одразу після кидання каменю, отримуємо

$$s = \frac{Mu^2}{2F_{\text{fr}}} = \frac{Mu^2}{2\mu \cdot Mg} = \frac{u^2}{2\mu g} = \frac{m^2 v^2}{2\mu \cdot M^2 g} = \frac{9 \cdot 64}{2 \cdot 0,02 \cdot 4900 \cdot 9,8} = 0,3 \text{ м.} \quad (12)$$

Отже, ми отримали таку ж саму відповідь, що й першим способом (7), але застосування законів збереження значно спрощує рішення.

Перевіримо розмірності результату

$$[s] = \frac{\text{кг}^2 \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2}{1 \cdot \text{кг}^2 \cdot \text{м} / \text{с}^2} = \text{м}.$$

Відповідь: $s = 0,3 \text{ м}$.

Задача 4.2.11

Санки після руху вниз з гори висотою $h_1 = 10 \text{ м}$ і кутом схилу $\alpha = 30^\circ$ пройшли горизонтальний шлях завдовжки $s_2 = 3 \text{ м}$ і почали рух вгору по схилу з кутом $\beta = 45^\circ$. Знайти висоту h_2 підйому санок по гірці, вважаючи, що коефіцієнт тертя однаковий на всіх ділянках руху і дорівнює $\mu = 0,1$.

Дано:

$$h_1 = 10 \text{ м}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$s_2 = 3 \text{ м}$$

$$\beta = 45^\circ$$

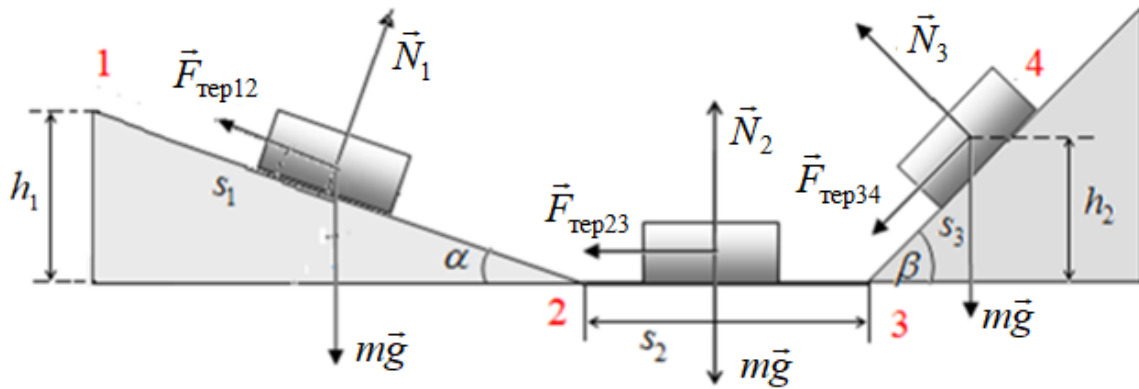
$$\mu = 0,1$$

$$h_2 = ?$$

Розв'язання

Будемо вважати, що в цій системі виконується закон зміни повної механічної енергії матеріальної точки. Відповідно до нього потенціальна енергія санок у початковій точці 1 (PE_1) частково перетворюється на кінетичну енергію (KE_2) і частково витрачається на роботу проти сил тертя на ділянці 12 ($A_{\text{тер}12}$).

Завдяки кінетичній енергії в точці 2 (KE_2) санки продовжують рухатися шляхом 23, витрачаючи частину цієї енергії на роботу проти сил тертя ($A_{\text{тер}23}$). Наприкінці горизонтальної ділянки, в точці 3, санки мають кінетичну енергію (KE_3), яку вони перетворюють на потенціальну енергію (PE_4) при підйомі по схилу і витрачають на роботу проти сил тертя ($A_{\text{тер}34}$).



Ці перетворення можна виразити математично, записавши співвідношення між відповідними величинами енергій і робіт:

$$\begin{cases} PE_1 = KE_2 + A_{\text{тер}12}, \\ KE_2 = A_{\text{тер}23} + KE_3, \\ KE_3 = A_{\text{тер}34} + PE_4. \end{cases} \quad (1)$$

Поеднуючи рівняння системи, отримуємо

$$PE_1 = A_{\text{тер}12} + A_{\text{тер}23} + A_{\text{тер}34} + PE_4. \quad (2)$$

Величини сил тертя на ділянках шляху

$$\begin{cases} F_{\text{тер}12} = \mu N_1 = \mu \cdot mg \cos \alpha, \\ F_{\text{тер}23} = \mu N_2 = \mu \cdot mg, \\ F_{\text{тер}34} = \mu N_3 = \mu \cdot mg \cos \beta, \end{cases} \quad (3)$$

дозволяють записати відповідні роботи сил тертя наступним чином

$$\begin{cases} A_{\text{тер}12} = \mu \cdot mg \cos \alpha \cdot s_1, \\ A_{\text{тер}23} = \mu \cdot mg \cdot s_2, \\ A_{\text{тер}34} = \mu \cdot mg \cos \beta \cdot s_3. \end{cases} \quad (4)$$

З геометричних міркувань знайдемо довжини ділянок шляху

$$s_1 = \frac{h_1}{\sin \alpha}; \quad s_2 = 3\text{ м}; \quad s_3 = \frac{h_2}{\sin \beta}. \quad (5)$$

З урахуванням (4) і (5) рівняння (2) набуває вигляду

$$mgh_1 = \mu \cdot mg \cdot \cos \alpha \cdot s_1 + \mu \cdot mg \cdot s_2 + \mu \cdot mg \cdot \cos \beta \cdot s_3 + mg \cdot h_2,$$

$$h_1 = \mu (\cos \alpha \cdot s_1 + s_2 + \cos \beta \cdot s_3) + h_2,$$

$$\frac{h_1}{\mu} = \cos \alpha \cdot \frac{h_1}{\sin \alpha} + s_2 + \cos \beta \cdot \frac{h_2}{\sin \beta} + \frac{h_2}{\mu} = \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} + s_2 + \frac{h_2}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{h_2}{\mu},$$

$$\frac{h_1}{\mu} - \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - s_2 = \frac{h_2}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{h_2}{\mu}. \quad (6)$$

З рівняння (6) висота h_2 , на яку можуть піднятися санки, рухаючись вздовж другого схилу, становить

$$h_2 = \frac{h_1 (\operatorname{tg} \alpha - \mu) - \mu \cdot s_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta + \mu} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} =$$

$$= \frac{10(0,577 - 0,1) - 0,1 \cdot 3 \cdot 0,577}{0,1 + 1} \cdot \frac{1}{0,577} = 7,24 \text{ м.}$$

Відповідь: $h_2 = 7,24 \text{ м}$

Задача 4.2.12

У незакріпленого кінця пружини жорсткістю $k = 5000 \text{ Н/м}$ знаходиться тіло масою $m = 5 \text{ кг}$. Визначити стиск пружини x , необхідний для того, щоб тіло під дією пружини, рухаючись по похилій площині, досягло висоти $h = 8 \text{ метрів}$. Вважати, що неконсервативні сили відсутні, а прискорення вільного падіння дорівнює 10 м/с^2 .

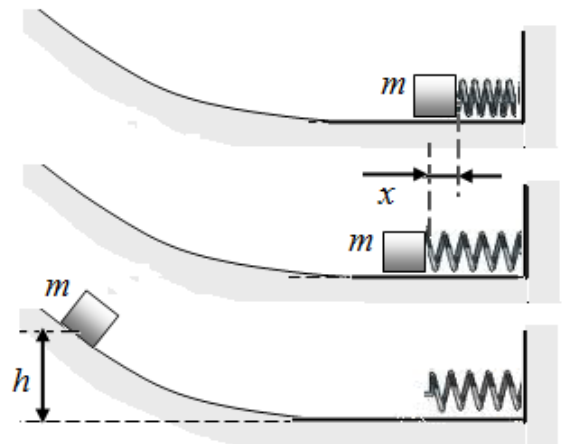
Дано:	Розв'язання
$k = 5000 \text{ Н/м}$	За відсутності неконсервативних сил можемо застосувати закон збереження енергії. Згідно з ним, стиснута пружина, що має потенціальну енергію, передає енергію тілу, яке починає рухатись. Кінетична енергія, пов'язана з цим рухом, дозволяє тілу рухатись вгору вздовж похилої площини, доки уся
$m = 5 \text{ кг}$	
$h = 8 \text{ м}$	
$g \approx 10 \text{ м/с}^2$	
$x = ?$	

кінетична енергія не перетворюється у потенціальну. Таким чином, перетворення енергій відбуваються в такий послідовності

$$PE_{\text{пруж}} = KE = PE.$$

З рівності $PE_{\text{пруж}} = PE$ маємо

$$\frac{kx^2}{2} = mgh.$$



Звідки шукана висота підйому становить

$$x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 8}{5000}} = 0,4 \text{ м.}$$

Розмірність результату.

$$[x] = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}}} = \text{м}.$$

Відповідь: $x = 0,4 \text{ м.}$

Задача 4.2.13

З точки А (див. рис) на висоті $h = 3 \text{ м}$ випущено тіло масою $m = 10 \text{ кг}$. Тіло спускається по похилій площині, проходить горизонтальну доріжку ВС з шорсткою поверхнею завдовжки $s = 6 \text{ метрів}$ і, зіштовхуючись із пружиною жорсткістю $k = 2250 \text{ Н/м}$, стискає її на $x = 0,3 \text{ м}$ перш, ніж зупинитися. Визначити коефіцієнт тертя на шорсткій ділянці ВС.

Дано:	Розв'язання
$h = 3 \text{ м}$	Сили, які діють на тіло, коли воно опускається донизу,
$m = 10 \text{ кг}$	рухається по горизонтальній ділянці і стискає пружину – це,
$s = 6 \text{ м}$	відповідно, сила тяжіння, сила тертя і пружна сила. Сила
$k = 2250 \text{ Н/м}$	тяжіння і пружна сила є консервативними силами, і з ними
$x = 0,3 \text{ м}$	пов'язана потенціальна енергія. Сила тертя не є
$\mu = ?$	консервативною, але в даній задачі ми можемо розрахувати

роботу, яку вона виконує. Виходячи з цього, будемо використовувати теореми про потенційну і кінетичну енергії.

В точці A тіло має потенціальну енергію $PE_A = mgh$, яка при русі донизу перетворюється на кінетичну $PE_A = KE_B$:

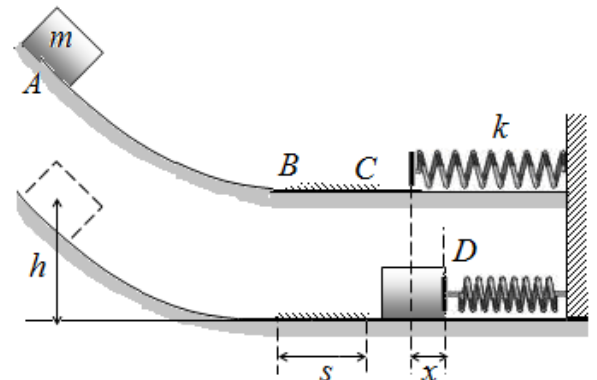
$$mgh = \frac{mv_B^2}{2}.$$

Далі тіло рухається вздовж горизонтальної шорсткої поверхні BC , витрачаючи частину своєї кінетичної енергії на роботу проти сил тертя

$$A_{\text{тер}} = F_{\text{тер}} \cdot s = \mu N \cdot s = \mu mg \cdot s,$$

$$KE_B = A_{\text{тер}} + KE_C.$$

До зіткнення з пружиною тіло рухається за інерцією, причому його швидкість і, відповідно, кінетична енергія, що залишилася після подолання шорсткої ділянки, не змінюється. У момент зіткнення з пружиною тіло, що рухається, передає свою енергію пружині. При цьому його кінетична енергія перетворюється на потенційну енергію пружно деформованої пружини.



$$KE_C = PE_{\text{пруж}}.$$

Отже, перетворення енергії в ході розглянутих рухів можна об'єднати в систему

$$\begin{cases} PE_A = KE_B, \\ KE_B = A_{\text{тер}} + KE_C, \\ KE_C = PE_{\text{пруж}}, \end{cases}$$

Спрощуючи систему та підставляючи дані задачі, отримаємо

$$PE_A = A_{\text{тер}} + PE_{\text{пруж}},$$

$$mgh = A_{\text{тер}} + \frac{kx^2}{2},$$

$$\mu \cdot mg \cdot s = mgh - \frac{kx^2}{2},$$

$$\mu = \frac{2mg \cdot h - kx^2}{2mg \cdot s} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 9,8 \cdot 3 - 2250 \cdot 0,09}{2 \cdot 10 \cdot 9,8 \cdot 6} = \frac{588 - 202,5}{1176} = 0,328.$$

Перевірка розмірності

$$[\mu] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2 \cdot \text{м} - \text{кг}/\text{с}^2 \cdot \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2 \cdot \text{м}} = 1.$$

Відповідь: $\mu = 0,328$.

Задача 4.2.14

Дві кульки масами m_1 та m_2 ($m_1 > m_2$) одночасно починають зісковзувати назустріч одна одній без тертя та обертання з двох гірок, що мають однакові форми та висоти H . При зіткненні кульки злипаються та продовжують рух вздовж однієї з гірок. На яку висоту піднімуться кульки?

Дано:	Розв'язання
m_1	Коли кулька знаходиться на висоті H , вона має потенціальну енергію $PE = mgH$. В міру того, як кулька зісковзує без тертя та обертання її потенціальна енергія переходить в кінетичну
m_2	
H	
$h - ?$	$KE = \frac{mv^2}{2}$. Згідно з законом збереження енергії $PE = KE$ або

$$mgH = \frac{mv^2}{2}, \quad (1)$$

$$v = \sqrt{2gH}. \quad (2)$$

З рівняння (2) видно, що швидкість кожної кульки не залежить від її маси, а визначається тільки висотою H .

В результаті зіткнення кульки злипаються. Це означає, що спостерігається так званий непружний удар, закон збереження імпульсу для якого має вигляд

$$m_1 \vec{v} + m_2 \vec{v} = (m_1 + m_2) \vec{u}. \quad (3)$$

Згідно з умовою задачі кульки рухаються назустріч одна одній, тому проєкції імпульсів мають протилежні знаки

$$m_1 v - m_2 v = (m_1 + m_2) u. \quad (4)$$

Швидкість злиплених кульок із рівняння (4) і з врахуванням (2) становить

$$u = \frac{(m_1 - m_2)v}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gH}. \quad (5)$$

Висоту, на яку підіймуться кульки, знайдемо із закону збереження енергії, вважаючи, що кінетична енергія, яку кульки мають під час руху зі швидкістю u , переходить у потенціальну енергію $KE = PE$, а саме,

$$\frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = (m_1 + m_2)gh. \quad (6)$$

Висота підйому h із (6) з підставленням (5) становить

$$h = \frac{u^2}{2g} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gH} \right)^2 \cdot \frac{1}{2g} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \cdot H.$$

Відповідь: $h = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \cdot H.$

Задача 4.2.15

Куля маси m зі швидкістю v проходить через тягарець маятника маси M і вилітає з нього зі швидкістю $v/2$. Знайти мінімальне значення швидкості кулі, за якої тягарець маятника пройде повне вертикальне коло. Розв'яжіть задачу, якщо тягарець маятника підвішений за допомогою (а) жорсткого стрижня довжиною l і масою, якою можна знехтувати; (б) невагомій нерозтяжної мотузки довжиною l .

Дано:	Розв'язання
m, M	(а) Коли тягарець маятника підвішений за допомогою стрижня, то
$v, v/2$	маємо наступну послідовність подій: куля в результаті швидкої та
l	сильної взаємодії з тягарцем маятника надає йому швидкість, з якою
$v - ?$	він рухається по круговій траєкторії. Якщо отримана швидкість буде
	достатньо велика, то тягарець матиме змогу досягти верхньої точки
	траєкторії. Якщо розглядати систему «куля - тягарець» як замкнуту, то закон
	збереження імпульсу матиме вигляд

$$m\vec{v} = m\frac{\vec{v}}{2} + M\vec{u}. \quad (1)$$

Спроекуємо це векторне рівняння на обрану горизонтальну вісь x і отримуємо

$$mv = m\frac{v}{2} + Mu, \quad (2)$$

звідки швидкість тягарця маятника після взаємодії становить

$$u = \frac{mv}{2M}, \quad (3)$$

а його кінетична енергія дорівнює

$$KE = \frac{Mu^2}{2}. \quad (4)$$

Коли тягарець проходить найвищу точку траєкторії зі швидкістю u_1 , його кінетична енергія $KE = \frac{Mu_1^2}{2}$, до того ж, перебуваючи на висоті l , він має потенціальну енергію $PE = Mg \cdot 2l$.

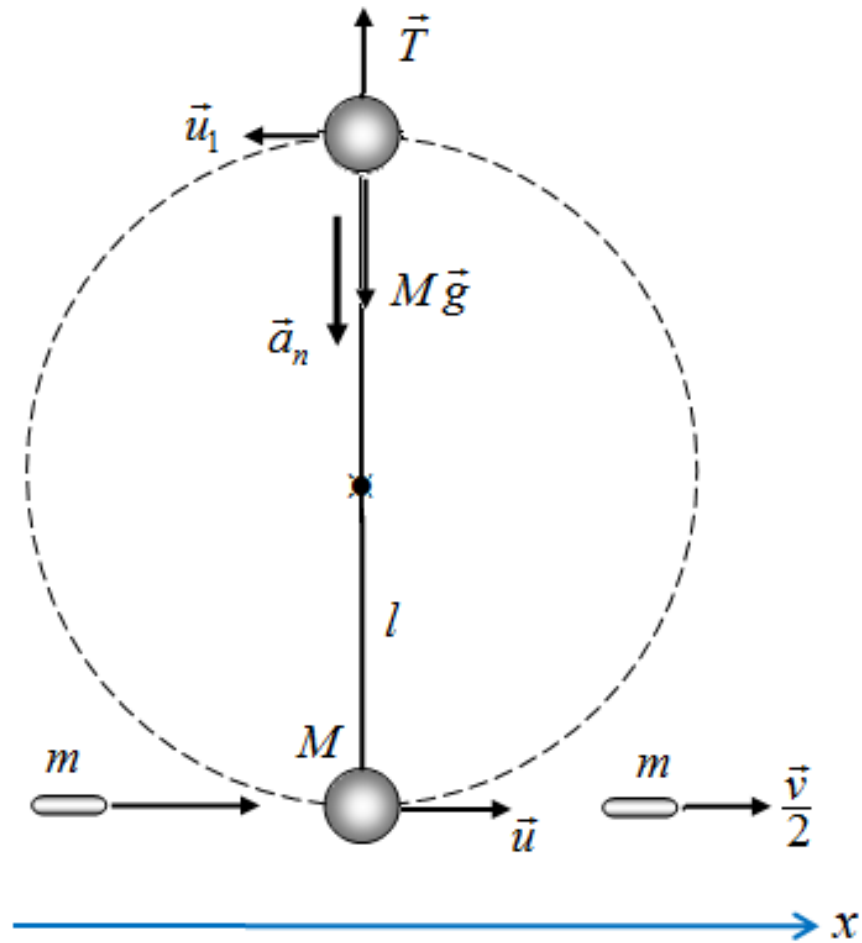
Тому закон збереження енергії має вигляд

$$\frac{Mu^2}{2} = \frac{Mu_1^2}{2} + 2Mgl. \quad (5)$$

В найвищій точці на тягарець діє сила тяжіння $M\vec{g}$ і, якщо тягарець закріплений на жорсткому стрижні, сила $\vec{T}$, яка спрямована вздовж стрижня. Тому рівняння руху згідно з 2-м законом Ньютона

$$M\vec{a}_n = M\vec{g} + \vec{T}, \quad (6)$$

де $\vec{a}_n$ – доцентрове прискорення, модуль якого $a_n = \frac{u_1^2}{l}$.



За модулем сила $\vec{T}$ може бути додатною, від'ємною, навіть нульовою. Зі збільшенням швидкості кулі v , зростає швидкість тягарця u і, відповідно, його швидкість u_1 в найвищій точці, тому змінюється величина T .

$$M \frac{u_1^2}{l} = Mg \pm T. \quad (7)$$

Розглянемо граничний випадок, коли $u_1 = 0$, і рівняння (5) набуває вигляду

$$\frac{Mu^2}{2} = 2Mgl, \quad (8)$$

звідки швидкість тягарця після взаємодії з кулею становить

$$u = \sqrt{4gl}. \quad (9)$$

Підставляючи цей результат в рівняння (3), отримуємо

$$\sqrt{4gl} = \frac{mv}{2M}.$$

Остаточно, швидкість кулі, що дозволяє тягарцю, підвішеному за допомогою жорсткого невагомого стрижня, після взаємодії з нею описати коло в вертикальній площині,

$$v = \frac{2M}{m} \sqrt{4gl} = \frac{4M}{m} \sqrt{gl}. \quad (10)$$

(б) Коли тягарець маятника підвішений за допомогою невагомої нерозтяжної мотузки довжиною l , необхідно забезпечити, щоб мотузка була протягом усього руху в натягнутому стані, за виключенням найвищої точки траєкторії. Тоді рівняння (7) при $T = 0$ має вигляд

$$M \frac{u_1^2}{l} = Mg, \quad (11)$$

звідки

$$u_1 = \sqrt{gl}. \quad (12)$$

Рівняння (5), що є законом збереження енергії, набуває вигляду

$$\frac{Mu^2}{2} = \frac{Mgl}{2} + 2Mgl = \frac{5}{2}Mgl. \quad (13)$$

З нього швидкість тягарця після взаємодії з кулею є

$$u = \sqrt{5gl}. \quad (14)$$

Підставляючи (14) в (3), отримаємо швидкість кулі, за якої тягарець, підвішений на нерозтяжній невагомій мотузці, після взаємодії з нею досягне найвищої точки траєкторії і зробить повний оберт в вертикальній площині

$$v = \frac{2M}{m} \sqrt{5gl}.$$

Відповідь: (а) $v = \frac{4M}{m} \sqrt{gl}$, (б) $v = \frac{2M}{m} \sqrt{5gl}$.

4.3. Задачі для самостійної роботи

4.3.1. Обчисліть швидкість віддачі рушниці масою $m_1 = 4$ кг під час пострілу кулею масою $m_2 = 30$ г, якщо куля після пострілу має швидкість $u_2 = 480$ м/с.

Відповідь: $u_1 = 3,6$ м/с.

4.3.2. Більярдна куля масою $m = 250$ г зі швидкістю $v_1 = 2,8$ м/с вдаряється у таку саму, але нерухому кулю. У результаті зіткнення швидкість першої кулі зменшилась до $u_1 = 2$ м/с, а напрямок її руху відхилився на $\alpha_1 = 30^\circ$ відносно початкового. Чому дорівнює швидкість другої кулі після удару і під яким кутом вона рухається відносно початкового руху першої кулі. Зіткнення куль вважати абсолютно пружним.

Відповідь: $\alpha_2 = 43^\circ$; $u_2 = 1,5$ м/с.

4.3.3. Частинка масою m_1 , що рухається зі швидкістю v , пружно стикається з іншою нерухомою частинкою масою $m_2 = 2m_1$ і розсіюється під кутом $\alpha_1 = 90^\circ$ відносно початкового напрямку руху. Під яким кутом α_2 рухається друга частинка після зіткнення? Зіткнення куль вважати абсолютно пружним.

Відповідь: $\alpha_2 = 30^\circ$.

4.3.4. Куля масою $m_1 = 200$ г, що рухається зі швидкістю $v_1 = 7,0$ м/с, пружно стикається з іншою нерухомою кулею. В результаті зіткнення перша куля відскочила назад зі швидкістю $u_1 = 3,0$ м/с. Чому дорівнюється маса другої кулі і її швидкість після зіткнення?

Відповідь: $u_2 = 4,0$ м/с, $m_2 = 500$ г.

4.3.5. Нейтрон масою $m_n = 1,01$ а.о.м центральньо вдаряється з нерухомим атомом вуглецю масою $m_C = 12,00$ а.о.м. Вважаючи удар абсолютно непружним, визначте, яку частину кінетичної енергії втрачає нейтрон під час зіткнення

$\Delta KE/KE$ (ΔKE – зміна кінетичної енергії, KE – кінетична енергія до удару)

Відповідь: $\Delta KE/KE = 0,286$.

4.3.6. Дрон масою $m = 3$ кг підіймається вгору під дією сили гвинтів, яка задається рівнянням $F = \alpha mgh^2$, де $\alpha = 2,9 \text{ м}^{-2}$. Знайти роботу, що виконала ця сила, при наборі висоти дроном від поверхні землі до $h = 41$ м.

Відповідь: $A = 2 \text{ МДж}$.

4.3.7. Яку роботу виконує сила тяжіння, якщо автомобіль масою $m = 880$ кг штовхають на висоту $h = 200$ м по схилу з кутом нахилу $\alpha = 10^\circ$?

Відповідь: $A = -300 \text{ кДж}$.

4.3.8. Яку роботу треба виконати, щоб зупинити електрон масою $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг, що рухається зі швидкістю $v = 1,45 \cdot 10^6 \text{ м/с}$?

Відповідь: $A = -9,58 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$.

4.3.9. Яку роботу виконують сили пружності при стисканні пружини у пружинно-поршневій пневматичній рушниці, якщо розмір пружини зменшується на $\Delta x = 13$ см, а коефіцієнт жорсткості пружини $k = 360 \text{ Н/м}$. Вважати, що пружина в рушниці розташована горизонтально. Яку швидкість набуде кулька масою $m = 0,5$ г при пострілі з такої рушниці? Вважати, що вся енергія стисненої пружини при її розпрямленні передається кулі.

Відповідь: $A = 3 \text{ Дж}$, $v = 110 \text{ м/с}$.

4.3.10. Маса двох автомобілів співвідносяться як $m_1 = 2m_2$. При цьому їх кінетичні енергії співвідносяться як $KE_1 = 0,5KE_2$. Потім обидва автомобілі збільшили швидкість на однакову величину $\Delta v = 7,0 \text{ м/с}$. Після чого їх кінетичні енергії стали рівними. Якими були початкові швидкості обох автомобілів?

Відповідь: $v_1 = 4,9 \text{ м/с}$, $v_2 = 9,9 \text{ м/с}$.

4.3.11. В експерименті з балістичним маятником снаряд з масою $m = 5,0$ г після влучення у маятник масою $M = 1$ кг піднімається з ним на висоту $h_1 = 2,3$ см. В другому експерименті такий самий снаряд змушує маятник піднятися на тричі більшу висоту. Яка швидкість другого снаряду?

Відповідь: $v_2 = 234$ м/с.

4.3.12. Спорткар вагою $m_1 = 800$ кг врізається в позашляховик вагою $m_2 = 2600$ кг, що зупинився попереду на червоне світло світлофора. Після удару два автомобілі разом пронеслися вперед на $s = 2,7$ м, перш ніж зупинитися. Офіцер поліції, оцінивши коефіцієнт тертя між шинами та дорогою в $\mu = 0,70$, обчислює швидкість спортивного автомобіля під час зіткнення. Якою була ця швидкість?

Відповідь: $v_2 = 26$ м/с = 94 км/год.

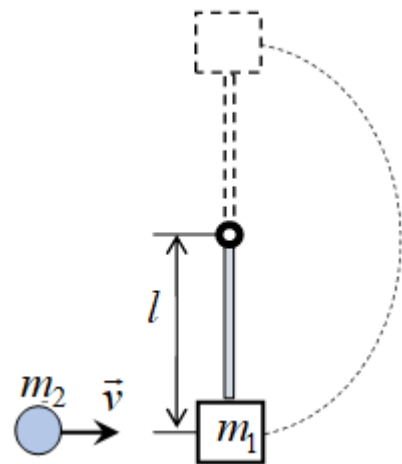
4.3.13. Хлопчик, стріляючи з рогатки, натягнув гумовий шнур так, що його довжина збільшилася на $\Delta l = 8$ см. Вважаючи, що жорсткість шнура $k = 0,8$ кН/м, визначте, з якою швидкістю v полетів камінь масою $m = 26$ г.

Відповідь: $v = 14$ м/с.

4.3.14. Від удару молота масою $m_1 = 25$ кг, що вільно падає з висоти $h = 3$ м, металевий кіл масою $m_2 = 15$ кг занурюється в ґрунт на глибину $s = 20$ см. Вважаючи удар абсолютно непружним, визначити силу опору ґрунту.

Відповідь: $F_{\text{оп}} = 2,5$ кН.

4.3.15. Маятник складається з гирі масою $m_1 = 1,5$ кг, закріпленої на кінці невагомго стрижня довжиною $l = 70$ см, вільний кінець якого закріплений на шарнірі. У гирю влітає снаряд масою $m_2 = 50$ г (див. рис.). Нехтуючи тертям і вважаючи удар абсолютно непружним, знайти найменшу швидкість снаряду v , необхідну для того, щоб маятник повернувся на половину кола?



Відповідь: $v = 45$ м/с.

5. ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

5.1. Теоретичні відомості

5.1.1. Момент сили. Пара сил

Обертальним називається рух, при якому всі частинки твердого тіла переміщуються по концентричних колах, центри яких лежать на одній прямій, що називається **віссю обертання**.

Результат дії сили в обертальному русі тіла залежить не тільки від величини сили, а й від відстані точки її прикладання до осі обертання.

Момент сили (крутний або **обертальний момент**) відносно точки O – векторна фізична величина, яка дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного з точки O в точку, до якої прикладена сила, на силу $\vec{F}$ (рис. 5. 1, а).

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}], \quad (5.1)$$

де $\vec{M}$ – момент сили $\vec{F}$; $\vec{r}$ – радіус-вектор точки прикладання сили відносно точки O .

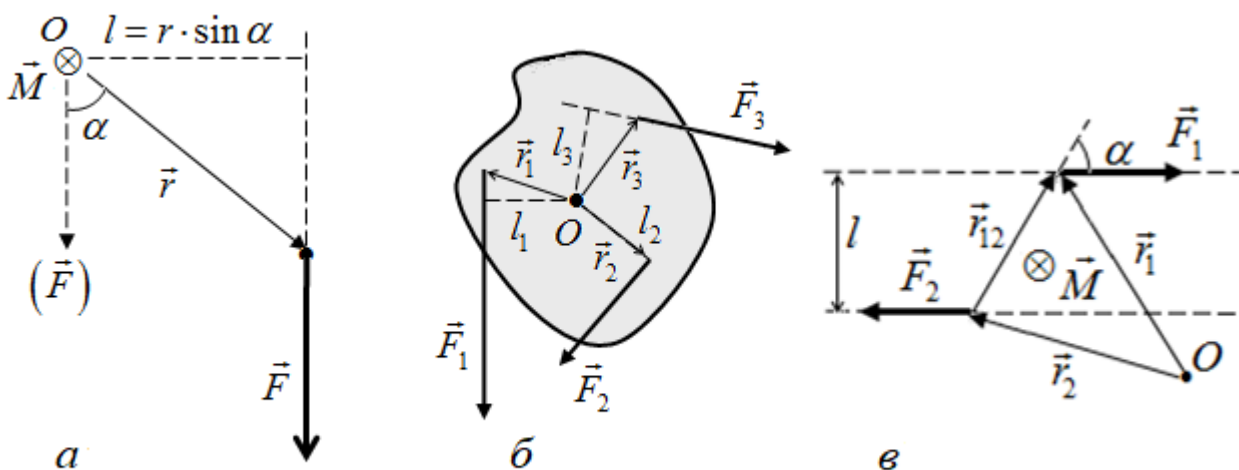


Рисунок 5.1

Вектор моменту сили є спрямованим перпендикулярно площині, в якій лежать вектори, що перемножуються, при цьому, напрямок обертання,

обумовленого силою, і напрямком вектора моменту сили утворюють правогвинтову систему. Або, іншими словами, згідно із визначенням векторного добутку, напрямком вектора моменту сили визначають правилом правого свердлика: якщо обертати ручку свердлика в напрямку руху точки, то напрямком поступального переміщення свердлика вкаже напрямок $\vec{M}$.

Модуль вектора моменту сили визначається співвідношенням:

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot l, \quad (5.2)$$

де $l = r \cdot \sin \alpha$ – **плече сили** – найкоротша відстань від лінії дії сили до осі обертання O ; α – кут між додатними напрямками векторів $\vec{F}$ і $\vec{r}$.

Одиниця виміру моменту сили є

$$[M] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}.$$

Як звідно, добуток $\text{Н} \cdot \text{м}$ є розмірністю одиниці енергії Джоуль. Однак момент сили не є енергією. Тому, щоб уникнути плутанини, ми будемо використовувати одиниці $\text{Н} \cdot \text{м}$, а не Дж. Різниця виникає через те, що енергія є скалярною величиною, тоді як крутний момент є вектором.

Проекція вектора моменту сили на довільну вісь Z , що містить точку O , є **моментом сили відносно осі Z** :

$$\vec{M}_Z = [\vec{r}, \vec{F}]_Z, \quad (5.3)$$

Величина моменту сили відносно нерухомої осі Z – це скалярна величина, яка дорівнює добутку модуля сили на плече сили:

$$M_Z = \pm F_Z \cdot l, \quad (5.4)$$

де F_Z – проекція сили F_Z на площину, перпендикулярну осі Z ; l – плече сили $\vec{F}$ відносно т. O перетину осі Z з площиною.

Момент M_Z вважається додатним, якщо він діє проти стрілки годинника, і від'ємним, якщо обертає тіло за стрілкою годинника.

Якщо на твердий об'єкт діють дві або більше сил (рис. 5.1, б), кожна з яких прагне викликати обертання навколо осі, що проходить через точку O , рівнодійний момент сил дорівнює

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i. \quad (5.5)$$

Наприклад, для тіла з рис. 5.1, б, рівнодійний момент сил є

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2] + [\vec{r}_3, \vec{F}_3]. \quad (5.6)$$

Пара сил – це система двох рівних за модулем паралельних сил ($\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$), спрямованих у протилежні боки по незбіжних лініях дії. Пара сил не утворює зрівноважену систему і не має рівнодійної. Вона не може бути спрощена і тому є особливою мірою механічної дії на тіло з боку інших тіл. Досвід показує, що пара сил, прикладених до твердого тіла, прагне надати йому певне обертання. Цей обертальний ефект пари сил оцінюється **моментом пари сил** (рис. 5.1, в).

$$\vec{M} = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2] = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] - [\vec{r}_2, \vec{F}_1] = [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \vec{F}_1] = [\vec{r}_{12}, \vec{F}_1], \quad (5.7)$$

$$\vec{M} = [\vec{r}_{12}, \vec{F}_1], \quad (5.8)$$

де $\vec{r}_{12}$ – **плече пари сил**.

Величина моменту пари сил становить

$$M = r_{12} \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot l. \quad (5.9)$$

Оскільки момент пари залежить тільки від відстані між силами r_{12} , то він є вільним вектором. Його можна переміщати куди завгодно на тілі та вчиняти той самий зовнішній вплив на тіло.

Зауважимо, що для будь-якої системи частинок сума моментів усіх внутрішніх сил дорівнює нулю, оскільки вони є парами сил з так званими «нульовими» плечима.

$$\sum_i (\vec{M}_{\text{внутр}})_i = 0. \quad (5.10)$$

5.1.2. Рівновага об'єктів

Механічна рівновага – це стан, при якому не відбувається фізичних змін; це стан стійкості. Об'єкт, що перебуває в механічній рівновазі, є стійким, без змін у своєму русі.

Поступальна рівновага: сума всіх сил дорівнює нулю, тобто сумарна сила

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0. \quad (5.11)$$

Об'єкт може обертатися, навіть обертатися зі змінною швидкістю, і при цьому перебувати в поступальній рівновазі, якщо прискорення центру мас об'єкта дорівнює нулю.

Обертальна рівновага: сума моментів сил дорівнює нулю, іншими словами, на об'єкт не діють крутні моменти.

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = 0. \quad (5.12)$$

Об'єкти, що перебувають у стані спокою, знаходяться у стані **статичної рівноваги**. Об'єкти, що рухаються з постійною швидкістю прямолінійно, знаходяться в **динамічній рівновазі**. Для того щоб об'єкт знаходився у стані рівноваги, потрібно, щоб виконувалися умови (5.11) і (5.12). В стані рівноваги параметри системи не змінюються з плином часу.

Рівновага може бути

– **стійкою:** відхилення викликає появу сил, які намагаються повернути систему до рівноважного стану (рис. 5.2, а);

– **нестійкою:** відхилення викликає появу сил, які намагаються вивести систему з положення рівноваги (рис. 5.2, б);

– **байдужою:** відхилення переводить систему в новий рівноважний стан, не викликаючи в ній нових сил (рис. 5.2, в).

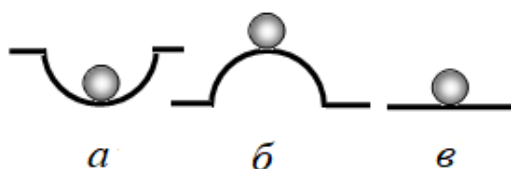


Рисунок 5.2

Усі тіла прагнуть до мінімуму потенційної енергії. У положенні стійкої рівноваги тіло має мінімальну потенційну енергію. При виведенні тіла із цього

становища його потенційна енергія збільшується. Якщо роботу над тілом здійснює лише сила тяжіння, то в положенні стійкої рівноваги центр мас тіла знаходиться на найменшій висоті.

5.1.3. Момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу

Момент імпульсу матеріальної точки відносно точки O – векторна фізична величина, яка дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного з точки O в місце знаходження матеріальної точки, на вектор її імпульсу:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}], \quad (5.13)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений з точки O в місце знаходження матеріальної точки; $\vec{p} = m\vec{v}$ – імпульс матеріальної точки, $\vec{v}$ – лінійна швидкість матеріальної точки; $l = r \cdot \sin \alpha$ – плече вектора $\vec{p}$ – відстань від точки O до лінії вектора $\vec{p}$.

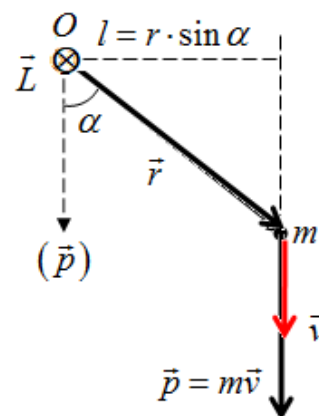


Рисунок 5.3

Одиницею виміру моменту імпульсу є

$$[\vec{L}] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}.$$

Модуль моменту імпульсу матеріальної точки:

$$L = r \cdot p \cdot \sin \alpha = r \cdot m \cdot v \cdot \sin \alpha = mvl, \quad (5.14)$$

Вектор $\vec{L}$ спрямований перпендикулярно площині, в якій лежать вектори, що перемножуються. Якщо дивитися з кінця вектора $\vec{L}$, то найкоротший поворот від $\vec{r}$ до $\vec{p}$ відбувається проти годинникової стрілки. Іншими словами, напрямок вектора $\vec{L}$ визначається правилом правого гвинта, а сам вектор заведено розміщувати в точці O .

Якщо матеріальна точка рухається по колу радіуса r , модуль моменту імпульсу відносно центру кола дорівнює:

$$L = mvr, \quad (5.15)$$

де v – лінійна швидкість матеріальної точки.

Якщо фізична система складається з багатьох матеріальних точок, то результуючий момент імпульсу відносно початку координат є сумою (інтегралом) усіх моментів імпульсу складових системи.

Проекція моменту імпульсу на будь-яку вісь Z , що містить точку O , є моментом імпульсу відносно осі Z . Для багатьох практичних задач, які стосуються об'єкта, що обертається навколо певної осі, достатньо проаналізувати скалярне значення моменту імпульсу, який є додатним, якщо обертання відбувається проти годинникової стрілки, та від'ємним, якщо навпаки.

Сили, які діють на частинку (матеріальну точку), змінюють як її імпульс, так і момент імпульсу. Аби з'ясувати, як саме, знайдемо похідну за часом від вектора моменту імпульсу.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}[\vec{r}, m\vec{v}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, m\vec{v} \right] + \left[\vec{r}, m \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, m\vec{v} \right] + [\vec{r}, \vec{F}] = \\ &= \cancel{[\vec{v}, m\vec{v}]}_0 + [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M},\end{aligned}\quad (5.16)$$

З (5.16) видно, що зміна моменту імпульсу частинки в часі визначається не безпосередньо силою, що діє на неї, а величиною моменту сили $\vec{M}$. Таким чином, швидкість зміни моменту імпульсу частинки дорівнює моменту сили, що діє на неї:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (5.17)$$

Момент імпульсу, як і імпульс, є адитивною величиною і для системи, що складається з k частинок, дорівнює

$$\vec{L} = \sum_k \vec{L}_k = \sum_k [\vec{r}_k, \vec{p}_k]. \quad (5.18)$$

Рух кожної частинки визначається усіма силами, що діють на неї, тому

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_k \frac{d\vec{L}_k}{dt} = \sum_k \vec{M}_k, \quad (5.19)$$

де $\vec{L}_k$ – моменти імпульсів окремих частинок відносно заданої точки, а $\vec{M}$ – моменти всіх сил, які діють на окрему частинку, відносно тієї ж самої точки.

Своєю чергою, повний момент сил можна представити як суму моментів внутрішніх та зовнішніх сил

$$\sum \vec{M}_k = \sum \vec{M}_{k\text{внутр}} + \sum \vec{M}_{k\text{зовн}}. \quad (5.20)$$

Як було зазначено вище (5.10), сума моментів внутрішніх сил дорівнює нулю $\sum \vec{M}_{k\text{внутр}} = 0$. Тому, позначивши $\vec{M}_{\text{зовн}} = \sum \vec{M}_{k\text{зовн}}$, маємо **рівняння моментів для системи матеріальних точок**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{зовн}}. \quad (5.21)$$

Отже, швидкість зміни моменту імпульсу довільної системи відносно даної точки дорівнює **повному (сумарному) моменту зовнішніх сил**, що діють на тіла системи, відносно тієї ж самої точки.

Якщо система замкнута, то в ній $\sum \vec{F}_{k\text{зовн}} = 0$, отже й $\sum \vec{M}_{k\text{зовн}} = 0$. Тоді з рівняння моментів (5.21) маємо **закон збереження моменту імпульсу**: момент імпульсу замкнутої системи зберігається, тобто, не змінюється з часом

$$\vec{L} = \text{const}. \quad (5.22)$$

Зазначимо, що моменти імпульсу окремих частинок можуть змінюватися внаслідок взаємодії з іншими частинками системи. Ці зміни мають характер обміну, в результаті чого повний момент імпульсу системи лишається незмінним.

Крім того, момент імпульсу може зберігатись і в незамкнутій системі, де $\sum \vec{F}_{k\text{зовн}} \neq 0$, за умови, що зовнішні сили або не створюють моментів ($\vec{M}_{k\text{зовн}} = 0$), або сума цих моментів дорівнює нулю ($\sum \vec{M}_{k\text{зовн}} = 0$).

5.1.4. Момент інерції матеріальної точки. Основне рівняння динаміки обертального руху

Якщо матеріальна точка масою m рухається з прискоренням $\vec{a}$ вздовж криволінійної траєкторії під дією сили $\vec{F}$, то застосовуючи 2-й закон Ньютона і

співвідношення між лінійним та кутовим прискореннями $\vec{a} = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}]$, для моменту сили можна написати

$$\begin{aligned}\vec{M} &= [\vec{r}, \vec{F}] = [\vec{r}, m\vec{a}] = [\vec{r}, m[\varepsilon, \vec{r}]] = m[\vec{r}, [\varepsilon, \vec{r}]] = \\ &= m\left\{\vec{\varepsilon}(\vec{r}, \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r}, \vec{\varepsilon})\right\} = mr^2\vec{\varepsilon} = I\vec{\varepsilon},\end{aligned}\quad (5.23)$$

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}. \quad (5.24)$$

Формула (5.24) є *основним рівнянням динаміки обертального руху*, або *2-м законом Ньютона для обертального руху*.

Скалярна величина

$$I = mr^2 \quad (5.25)$$

є *моментом інерції матеріальної точки*.

$$[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Момент інерції матеріальної точки є еквівалентом маси для обертального руху, а саме, є мірою інертності.

Зауважимо, що використовуючи поняття моменту інерції та співвідношення між лінійною і кутовою швидкостями $v = \omega r$, можна записати величину моменту імпульсу як

$$L = mvr = m \cdot \omega r \cdot r = mr^2 \cdot \omega = I\omega,$$

$$L = I\omega. \quad (5.26)$$

5.1.5. Момент інерції твердого тіла

Момент інерції є величина адитивна, тобто має властивість, що значення величини, яка відповідає цілому об'єкту, дорівнює сумі значень величин, що відповідають його частинам, незалежно від того, яким чином поділено об'єкт і незалежно від природи цього об'єкту.

Тому, якщо система складається з i матеріальних точок кожна масою Δm_i , то *момент інерції цієї системи* можна знайти як

$$I = \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2, \quad (5.27)$$

де r_i – відстань кожної маси до осі обертання.

Тверде тіло складається з нескінченно великої кількості матеріальних точок і тому **моментом інерції твердого тіла** відносно осі обертання називають фізичну величину, яка дорівнює сумі добутків маси кожної матеріальної точки твердого тіла на квадрат її відстані до осі обертання (5.27). Якщо маса твердого тіла розподілена неперервно, то знак суми замінюють інтегралом

$$I = \int r^2 dm. \quad (5.28)$$

Зауважимо, що є принципова різниця між інертностями у випадках поступального й обертального рухів. Якщо маса – внутрішня властивість тіла, яка не залежить від його руху, то момент інерції залежить від того, навколо якої осі тіло обертається. Для різних осей обертання моменти інерції одного і того ж тіла будуть різними.

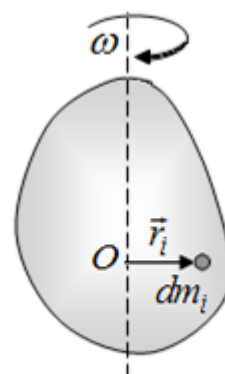


Рисунок 5.4

У випадку тіла довільної форми розрахувати момент інерції за формулою (5.28) досить важко. Але коли маса тіла рівномірно розподілена навколо осі, а вісь симетрії проходить через центр мас тіла (така вісь називається **головною**), математична задача істотно спрощується.

5.1.6. Обчислення моментів інерції тіл. Теорема Штейнера

Розрахуємо моменти інерції тіл правильної геометричної форми відносно осей симетрії, що проходять через їх центри мас.

1. Однорідний циліндр (диск) маси m і радіуса R (рис. 5.5)

Поділимо циліндр на багато циліндричних шарів радіусом r , завтовшки dr і завдовжки h . Розподіл маси по тілу характеризується об'ємною густиною

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \quad (5.29)$$

Якщо густина циліндра становить ρ , тоді об'єм dV кожного шару дорівнює площі поперечного перерізу dS , помноженій на її довжину l

$$dV = h \cdot dS = h \cdot 2\pi r \cdot dr. \quad (5.30)$$

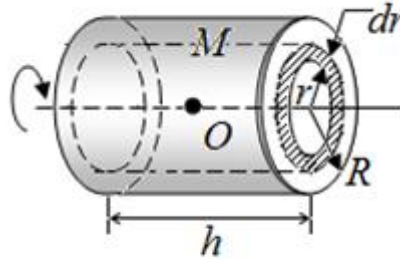


Рисунок 5.5

З урахуванням (5.29) і (5.30) момент інерції циліндра

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r h \cdot dr = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho h \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi \rho h R^4}{2} = \frac{m R^2}{2},$$

$$I = \frac{m R^2}{2}. \quad (5.31)$$

Без математичних розрахунків наведемо моменти інерції деяких тіл правильної геометричної форми відносно головних осей.

2. **Однорідний стрижень** нескінченно малої товщини, маси m і довжини l (рис. 5.6, а)

$$I = \frac{m l^2}{12}. \quad (5.32)$$

3. **Тонкостінний обруч** (тонкостінний циліндр) маси m і радіуса R (рис. 5.6, б)

$$I = m R^2. \quad (5.33)$$

4. **Суцільна куля** маси m і радіуса R (рис. 5.6, в)

$$I = \frac{2}{5} m R^2. \quad (5.34)$$

5. **Порожня куля** маси m і радіуса R (рис. 5.6, г)

$$I = \frac{2}{3}mR^2. \quad (5.35)$$

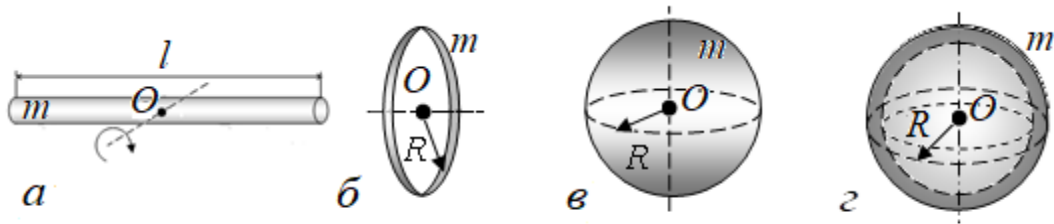


Рисунок 5.6

Якщо вісь обертання не збігається з віссю симетрії, знайти момент інерції можна за допомогою **теорему Штейнера (теорему про паралельні осі)**: момент інерції I_x відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції I_0 відносно осі, паралельній даній, яка проходить через центр маси тіла, і добутку маси тіла m на квадрат відстані x між осями

$$I_x = I_0 + mx^2. \quad (5.36)$$

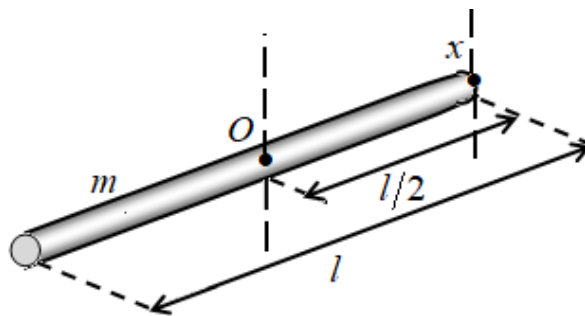


Рисунок 5.7

Застосування теореми Штейнера для стрижня відносно осі, що проходить через його кінець (рис. 5.7), дозволяє знайти відповідний момент інерції I_x

$$I_x = I_0 + mx^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}. \quad (5.37)$$

5.1.7. Кінетична енергія та робота при обертальному русі

Кінетична енергія властива усім тілам, що рухаються. При обертальному русі з кутовою швидкістю ω кожна точка тіла, що має масу Δm_i і знаходиться на відстані r_i від осі обертання (рис. 5.8. а), має кінетичну енергію

$$(\Delta KE)_i = \frac{\Delta m_i \cdot v_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i \cdot \omega^2 r_i^2}{2} \quad (5.38)$$

Оскільки кінетична енергія – це скалярна адитивна величина, то кінетична енергія всього тіла є сумою кінетичних енергій всіх точок тіла

$$KE_{\text{оберт}} = \sum_i (\Delta KE)_i = \sum_i \frac{\Delta m_i \cdot \omega^2 \cdot r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_i I_i = \frac{I \omega^2}{2}.$$

Отже, *кінетична енергія обертального руху* визначається формулою

$$KE_{\text{оберт}} = \frac{I \omega^2}{2}. \quad (5.39)$$

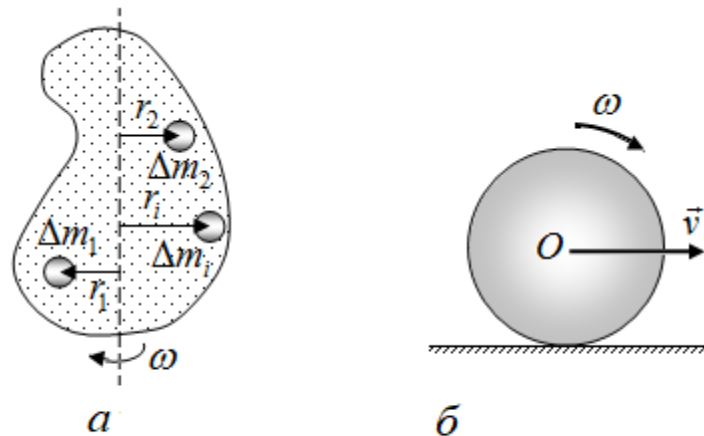


Рисунок 5.8

При плоскому русі (рис. 5.8, б), коли центр мас тіла маси m рухається з лінійною швидкістю $\vec{v}$ і, крім того, обертається в площині руху з кутовою швидкістю ω , кінетична енергія може бути записана як сума кінетичних енергій поступального та обертального рухів

$$KE = KE_{\text{пост}} + KE_{\text{оберт}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2}. \quad (5.40)$$

Якщо постійна зовнішня сила $\vec{F}$, що прикладена до тіла в точці на відстані r від осі обертання, повертає це тіло на кут $d\varphi$, то **елементарна робота** моменту цієї сили становить

$$dA = F_s ds = F_s r \cdot d\varphi = M_\omega d\varphi,$$

$$dA = M_\omega d\varphi. \quad (5.41)$$

Розділивши обидві частини рівності (5.41) на dt – час дії крутного моменту, отримаємо вираз для **потужності**

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{M_\omega d\varphi}{dt} = M_\omega \omega. \quad (5.42)$$

Отже, потужність при обертанні тіла дорівнює добутку проєкції моменту сили M_ω на вісь обертання та кутової швидкості ω .

Таблиця 5.1 – Відповідні параметри і співвідношення для поступального та обертового рухів

<i>Поступальний рух</i>	<i>Обертальний рух</i>
Шлях s	Кутове положення φ
Лінійна швидкість $v = \frac{ds}{dt}$	Кутова швидкість $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Лінійне прискорення $a = \frac{dv}{dt}$	Кутове прискорення $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
Маса m	Момент інерції $I = mr^2$
Імпульс $\vec{p} = m\vec{v}$	Момент імпульсу $\vec{L} = I\vec{\omega}$
Сила $\vec{F}$	Момент сили $\vec{M}$
2 закон Ньютона для поступального руху $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$	2 закон Ньютона для обертового руху $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\varepsilon}$
Кінетична енергія $KE_{\text{пост}} = \frac{mv^2}{2}$	Кінетична енергія $KE_{\text{оберт}} = \frac{I\omega^2}{2}$
Елементарна робота $dA = F_s ds = F_v dv$	Елементарна робота $dA = M_{\omega} d\varphi$
Потужність $P = Fv$	Потужність $P = M\omega$

5.2. Приклади розв'язання задач

Задача 5.2.1

До обода однорідного диска $R = 0,2$ м прикладена дотична сила $F = 100$ Н. При обертанні на диск діє момент сил тертя $M_{\text{тер}} = 5$ Н·м. Знайдіть масу m диска, якщо його прискорення дорівнює $\varepsilon = 100$ рад/с².

Дано:	Розв'язання
$R = 0,2$ м	Рух диска описується 2-м законом Ньютона для обертального руху
$F = 100$ Н.	
$M_{\text{тер}} = 5$ Н·м	
$\varepsilon = 100$ рад/с ² .	
$m = ?$	де I – момент інерції диска, ε – його кутове прискорення, $I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$ M – сумарний крутний момент сил, прикладених до диска.

Момент інерції диска відносно осі, що проходить через його центр мас, дорівнює

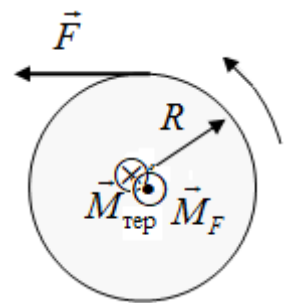
$$I = \frac{mR^2}{2}.$$

Вектор кутового прискорення і крутний момент, що зв'язаний з дією сили F , спрямовані вздовж осі обертання в один бік, перпендикулярно площині диска, а момент сил тертя – у протилежний бік вздовж осі обертання. Тоді результуючий момент сил дорівнює

$$M = M_F - M_{\text{тер}} = F \cdot R - M_{\text{тер}}.$$

Основне рівняння динаміки обертального руху (2 закон Ньютона) має вигляд

$$\frac{mR^2\varepsilon}{2} = F \cdot R - M_{\text{тер}},$$



з якого шукана маса диска дорівнює

$$m = \frac{2(F \cdot R - M_{\text{тер}})}{R^2 \varepsilon} = \frac{2(100 \cdot 0,2 - 5)}{0,04 \cdot 100} = 7,5 \text{ кг.}$$

Перевірка розмірності результату

$$[m] = \frac{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} - \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}}{\text{м}^2 \cdot (1/\text{с}^2)} = \text{м.}$$

Відповідь: $m = 7,5 \text{ кг.}$

Задача 5.2.2

Мотузка обмотана навколо суцільного циліндричного барабана, який має нерухому вісь обертання. Барабан обертається без тертя, а мотузка на ньому не ковзає. Маса барабана $m_1 = 100 \text{ кг}$, а радіус $R = 50 \text{ см}$. Другий кінець мотузки прив'язаний до тягарця масою $m_2 = 10 \text{ кг}$. Чому дорівнює кутове і лінійне прискорення барабана і сила натягу мотузки?

Дано:	Розв'язання
$m_1 = 100 \text{ кг}$	На тягарець діють сила тяжіння $m_2 \vec{g}$ і сила натягу $\vec{T}$, яка створює крутний момент. Зауважимо, що мотузка і сила натягу $\vec{T}$ є дотичними до ободу барабана, а отже, перпендикулярними до радіуса. Сили, що діють на барабан, – нормальна сила $\vec{N}$ від осі та сила тяжіння $m_1 \vec{g}$, проходять через центр мас барабана і тому не створюють крутного моменту. Барабан прискорюється проти годинникової стрілки, коли тягарець рухається донизу.
$R = 50 \text{ см}$	
$m_2 = 10 \text{ кг}$	
$\varepsilon = ? \ a = ? \ T = ?$	

Оскільки мотузка обмотана навколо барабана та рухається разом з ним, лінійне прискорення мотузки пов'язане з кутовим прискоренням барабана (і частиною мотузки, яка лежить на барабані): $a = \varepsilon R$. Тягарець рухається

прямолінійно, а барабан обертається, тому їх рухи описуються 2-м законом Ньютона для поступального та обертального рухів, відповідно:

$$\begin{cases} m_2 \vec{a} = m_2 \vec{g} + \vec{T}, \\ I \vec{\varepsilon} = \vec{M}. \end{cases} \quad (1)$$

Проекція першого рівняння на вертикальну вісь y , що направлена донизу, є

$$m_2 a = m_2 g - T, \quad (2)$$

враховуючи те, що прискорення тягарця $\vec{a}$ спрямоване також донизу.

Друге рівняння системи спроектуємо на горизонтальну вісь x , позитивний напрямок якої вибираємо перпендикулярно площині барабана «до нас».

Тоді, по правилу правого гвинта, момент сили натягу $\vec{M}$ і напрямок вектора кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ будуть додатними. З врахуванням того, що момент інерції барабана як циліндра є $\frac{m_1 R^2}{2}$, кутове прискорення

зв'язане з лінійним $\varepsilon = \frac{a}{R}$, а момент сили запишеться як

$M = TR$, друге рівняння системи є

$$\frac{m_1 R^2}{2} \cdot \frac{a}{R} = T \cdot R. \quad (3)$$

Після спрощення отримуємо

$$T = \frac{m_1 a}{2}. \quad (4)$$

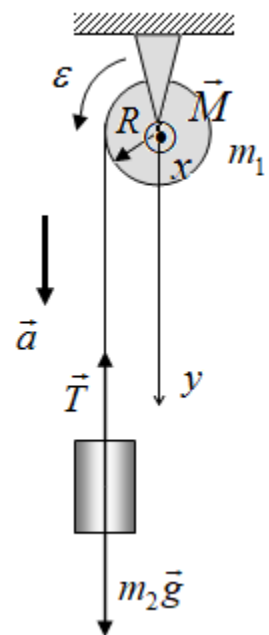
Підставимо силу натягу T (4) в рівняння (2)

$$m_2 a = m_2 g - \frac{m_1 a}{2} \quad (5)$$

і виразимо лінійне прискорення тягарця

$$a = \frac{2m_2 g}{m_1 + 2m_2} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 9,8}{100 + 2 \cdot 10} = 1,63 \text{ м/с}^2.$$

Кутове прискорення барабана дорівнює



$$\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{1,63}{0,5} = 3,27 \text{ рад/с}^2.$$

Сила натягу мотузки становить

$$T = \frac{m_2 a}{2} = \frac{10 \cdot 1,63}{2} = 81,5 \text{ Н.}$$

Розмірність отриманих результатів.

$$[a] = \frac{2m_2 g}{m_1 + 2m_2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad [\varepsilon] = \frac{a}{R} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \frac{1}{\text{с}^2}; \quad [T] = \frac{m_2 a}{2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н.}$$

Відповідь: $\varepsilon = 3,27 \text{ рад/с}^2$; $a = 1,63 \text{ м/с}^2$; $T = 81,5 \text{ Н.}$

Задача 5.2.3

Через блок маси $m = 1 \text{ кг}$ перекинута невагома нерозтяжна нитка, до кінців якої прикріплені тягарці масами $m_1 = 2 \text{ кг}$ і $m_2 = 1 \text{ кг}$. З яким прискоренням будуть рухатися тягарці? Знайти сили натягу нитки T_1 і T_2 . Блок вважати однорідним диском, тертям знехтувати.

Дано:

$$m = 1 \text{ кг}$$

$$m_1 = 2 \text{ кг}$$

$$m_2 = 1 \text{ кг}$$

$$a = ?$$

$$T_1 = ? \quad T_2 = ?$$

Розв'язання

Система, що розглядається у даній задачі, складається з трьох тіл, що рухаються відносно поверхні Землі. Систему відліку, пов'язану з Землею, можна вважати інерціальною, в

якій справедливі закони Ньютона. Тягарці масами m_1 та m_2 рухаються поступально, а блок обертається навколо нерухомої горизонтальної осі, яка проходить через його центр. Тому для розв'язання задачі скористуємося 2-м законом Ньютона для поступального та обертального рухів.

Розглянемо сили, які діють на кожне з тіл системи.

На кожен з тягарців діють сили тяжіння (з боку Землі) $m_1 \vec{g}$ і $m_2 \vec{g}$ та сили натягу нитки, відповідно, $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$. Якщо тягарці рухаються поступально, то рівняння 2 закону Ньютона будуть

$$\begin{cases} m_1 \vec{a} = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1, \\ m_2 \vec{a} = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2. \end{cases} \quad (1)$$

Блок обертається навколо нерухомої горизонтальної осі, що проходить через його центр, отже, момент сили тяжіння та момент сили реакції опори дорівнюватимуть нулю, оскільки вони проходять через центр диска. Якщо вважати, що нитка не ковзає відносно блоку, обертають блок тільки сили натягу нитки з обох боків блоку.

Основне рівняння динаміки обертального руху для блоку

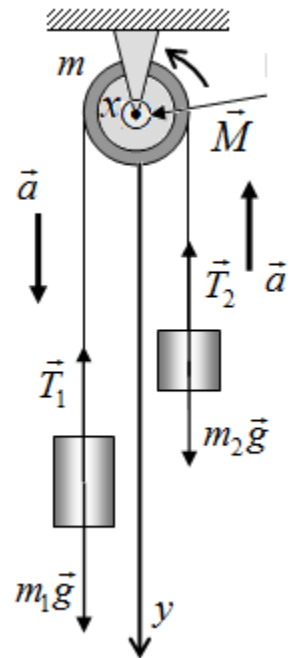
$$I \vec{\varepsilon} = \vec{M}, \quad (2)$$

де $I = \frac{mR^2}{2}$ – момент інерції диска, $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ – момент сил натягу ниток з обох боків блоку.

Отже, рівняння (1) і (2) в векторній формі об'єднаємо в систему, для розв'язання якої треба спроектувати їх на обрані осі. Направимо вісь y донизу, а вісь x – перпендикулярно площині блоку (і площині рисунка) «до нас». Нагадаємо, що вектор моменту сили спрямований перпендикулярно площині, де знаходяться вектори сили, моменти яких розглядаються, і радіуси-вектори, що проведені від осі (центра) обертання до точок, куди ці сили прикладені.

Тоді скалярні рівняння проєкцій мають вигляд

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_1, \\ -m_2 a = m_2 g - T_2, \\ \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{a}{R} = (T_1 - T_2) R. \end{cases} \quad (3)$$



$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_1, \\ -m_2 a = m_2 g - T_2, \\ \frac{ma}{2} = T_1 - T_2. \end{cases} \quad (4)$$

Величина лінійного прискорення тягарців дорівнює

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + m/2} = \frac{(2-1) \cdot 9,8}{2+1+(1/2)} = 2,8 \text{ м/с}^2,$$

а сили натягу

$$T_1 = \frac{m_1 g (2m_2 + m/2)}{m_1 + m_2 + m/2} = \frac{2 \cdot 9,8 (2 \cdot 1 + 1/2)}{2 + 2 + 1/2} = 14 \text{ Н},$$

$$T_2 = \frac{m_2 g (2m_1 + m/2)}{m_1 + m_2 + m/2} = \frac{1 \cdot 9,8 (2 \cdot 2 + 1/2)}{2 + 2 + 1/2} = 12,6 \text{ Н},$$

Розмірності отриманих результатів

$$[a] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}(\text{кг})}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad [T] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}(\text{кг})}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

Відповідь: $a = 2,8 \text{ м/с}^2$; $T_1 = 14 \text{ Н}$; $T = 12,6 \text{ Н}$.

Задача 5.2.4

Кут обертання вала змінюється за законом: $\varphi = 2 + 5t + 2t^2$, рад. Момент інерції валу дорівнює $I = 10 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Визначити момент імпульсу L і обертальний момент M через $t = 3 \text{ с}$ після початку руху.

Дано:

$$\varphi = 2 + 5t + 2t^2, \text{ рад}$$

$$I = 10 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$t = 3 \text{ с}$$

$$L = ? \quad M = ?$$

Розв'язання

В задачі розглядається обертальний рух тіла із заданим моментом інерції навколо довільної нерухомої осі.

Момент імпульсу тіла відносно нерухомої осі

обертання визначається за формулою:

$$L = I\omega, \quad (1)$$

де I – момент інерції тіла відносно осі, навколо якої воно обертається, а ω – шукана кутова швидкість.

Кутова швидкість є похідною за часом від кута повороту

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = 5 + 4t. \quad (2)$$

Тоді шуканий момент інерції, який також є залежним від часу, буде

$$L(t) = I\omega = I(5 + 4t). \quad (3)$$

Підставлення числових даних в (3) дає

$$L(t) = I\omega = 10(5 + 4 \cdot 3) = 170 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}.$$

Для обчислення моменту сили за допомогою основного рівняння динаміки обертального руху

$$M = I\varepsilon, \quad (4)$$

треба знайти кутове прискорення, яке є другою похідною за часом від кута повороту або першою похідною від кутової швидкості (2).

$$\varepsilon(t) = \frac{d\omega}{dt} = 4. \quad (5)$$

Зауважимо, що в цьому випадку кутове прискорення є незалежним від часу, тобто тіло обертається рівноприскорено.

Момент сили з врахуванням знайденого кутового прискорення (5) становитиме

$$M = I\varepsilon = 10 \cdot 4 = 40 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Розмірності отриманих результатів

$$[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \frac{1}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}; \quad [M] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \frac{1}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Відповідь: $L = 170 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}; M = 40 \text{ Н} \cdot \text{м}$

Задача 5.2.5

Диск масою $m=5$ кг і радіусом $R=0,2$ м обертається навколо горизонтальної осі, що проходить через його центр, з частотою $n_0=12$ об/с. Після початку гальмування диск зупиняється через $t=20$ с. Визначити гальмівний момент M , число обертів N , що зробить диск до зупинки, і роботу сил тертя, завдяки яким зупинився диск. Рух диска вважати рівносповільненим.

Дано:	Розв'язання
$m=5$ кг	Оскільки рух колеса є рівносповільненим, він описується формулами кінематики
$R=0,2$ м	
$n_0=12$ об/с	
$t=20$ с	
$M=?$ $N=?$	Наприкінці проміжку часу t диск зупиняється, тому кінцева частота обертання $n=0$.
$A=?$	

$$\begin{cases} 2\pi N = 2\pi n_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}, \\ 2\pi n = 2\pi n_0 - \varepsilon t. \end{cases} \quad (1)$$

Тоді система (1) набуває вигляду

$$\begin{cases} 2\pi N = 2\pi n_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}, \\ 0 = 2\pi n_0 - \varepsilon t, \end{cases} \quad (2)$$

Виразимо з другого рівняння системи (2) модуль кутового прискорення

$$\varepsilon = \frac{2\pi n_0}{t},$$

і підставимо в перше рівняння системи (2).

Кількість обертів, що диск зробив до зупинки

$$N = \frac{2\pi n_0 t}{2\pi} - \frac{\varepsilon t^2}{4\pi} = n_0 t - \frac{2\pi n_0 t^2}{t \cdot 4\pi} = \frac{n_0 t}{2} = \frac{12 \cdot 20}{2} = 120.$$

На диск при його русі діє тільки момент гальмівних сил, який згідно з основним рівнянням динаміки обертального руху дорівнює

$$M = I\varepsilon,$$

де $I = \frac{mR^2}{2}$ – момент інерції диска відносно осі, що проходить через його центр мас.

Отже, момент гальмівних сил, що зупиняють диск, становить

$$M = I\varepsilon = \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{2\pi n_0}{t} = \frac{mR^2\pi n_0}{t} = \frac{5 \cdot 0,2^2 \cdot \pi \cdot 12}{20} = 0,38 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Для знаходження роботи сил гальмування скористаємося теоремою про зв'язок зміни кінетичної енергії та роботи, а саме,

$$A = \Delta KE = KE_2 - KE_1 = \frac{I\omega^2}{2} - \frac{I\omega_0^2}{2}.$$

Оскільки диск наприкінці проміжку часу, що розглядається, зупиняється, то його кінцева кінетична енергія $KE_2 = 0$, а початкова кінетична енергія

$$KE_1 = \frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{I(2\pi n_0)^2}{2} = I \cdot 2\pi^2 n_0^2 = \frac{mR^2}{2} \cdot 2\pi^2 n_0^2 = 5 \cdot 0,04 \cdot \pi^2 \cdot 12^2 = 284 \text{ Дж}.$$

Тоді робота сил тертя, завдяки яким зупинився диск, дорівнює

$$A = -KE_1 = -284 \text{ Дж}.$$

Знак мінус нагадує, що робота сил тертя завжди негативна, тому що ці сили завжди спрямовані проти руху.

Перевірка розмірностей результатів

$$[N] = \frac{n_0 t}{2} = \frac{\text{об} \cdot \text{с}}{\text{с}} = \text{об};$$

$$[M] = \frac{mR^2\pi n_0}{t} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \text{Н} \cdot \text{м};$$

$$[KE] = \frac{mR^2}{2} \cdot 2\pi^2 n_0^2 = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Відповідь: $N = 120 \text{ об}$; $M = 0,38 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $A = -284 \text{ Дж}$

Задача 2.5.6

Знайти момент інерції стрижня масою 2 кг і довжиною 1 м відносно осі, що проходить а) через його центр мас, б) через точку, що відстоїть на 20 см від кінця стрижня.

Дано:

$$m = 2 \text{ кг}$$

$$l = 1 \text{ м}$$

$$d = 20 \text{ см}$$

$$I_0 = ? \quad I_x = ?$$

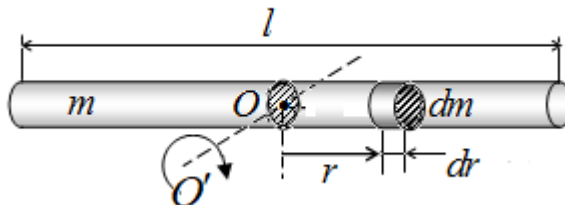
Розв'язання

Момент інерції твердого тіла визначається як

$$I = \int r^2 dm. \quad (1)$$

а) Розглянемо нескінченно малий елемент довжини

стрижня dr на відстані r від його центра мас O , через який проходить вісь обертання OO' . Зважаючи на те, що товщина стрижня нескінченно мала, лінійна густина становитиме $\lambda = \frac{m}{l}$, де m і l , відповідно, маса і довжина стрижня.



Елементарна маса dm може бути представлена як

$$dm = \lambda \cdot dr = \frac{m}{l} dr. \quad (2)$$

Підставимо вираз (2) у формулу моменту інерції (1) і проінтегруємо в межах від $-\frac{l}{2}$ до $\frac{l}{2}$:

$$I_0 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 \frac{m}{l} dr = \frac{m}{l} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{m}{3l} \left(\frac{l^3}{8} - \frac{(-l)^3}{8} \right) = \frac{ml^2}{12}.$$

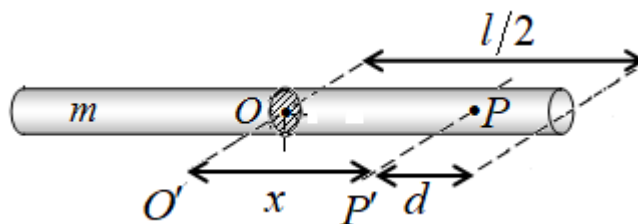
Момент інерції I_0 відносно осі OO' , що проходить через центр мас стрижня, дорівнює

$$I_0 = \frac{ml^2}{12} = \frac{2 \cdot 1^2}{12} = 0,17 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

б) Для того щоб знайти момент інерції I_x відносно осі PP' , що проходить паралельно осі OO' на деякій відстані від неї, можна скористатися теоремою Штейнера (теоремою о паралельних осях). Згідно з нею, момент інерції відносно осі PP'

$$I_x = I_0 + mx^2, \quad (3)$$

де m – маса стрижня, а x – відстань між паралельними осями OO' і PP' , яке за даними задачі становить $x = \frac{l}{2} - d$.



Отже, шуканий момент інерції I_x дорівнює

$$I_x = I_0 + mx^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\left(\frac{l}{2}\right) - d\right)^2 = \frac{2 \cdot 1^2}{12} - 2(0,5 - 0,2)^2 = 0,17 + 0,18 = 0,35 \text{ Н}.$$

Відповідь: $I_0 = 0,17 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $I_x = 0,35 \text{ Н}$.

Задача 2.5.7

Суцільна куля масою $m = 1 \text{ кг}$, що котиться без прослизання зі швидкістю $v_1 = 10 \text{ см/с}$, ударяється об стінку і відкочується від неї зі швидкістю $v_2 = 8 \text{ см/с}$. Знайти кількість теплоти, що виділилася під час удару.

Дано:	Розв'язання
$m = 1 \text{ кг}$	Вважатимемо стінку масивною і нерухомою. Тоді за
$v_1 = 10 \text{ см/с} = 0,1 \text{ м/с}$	законом збереження енергії теплота, що виділилася при
$v_2 = 8 \text{ см/с} = 0,08 \text{ м/с}$	ударі, дорівнює зміні механічної енергії кулі, тобто
$Q = ?$	частина кінетичної енергії, яку тіло мало до зіткнення,
перейде в теплоту	

$$Q = KE_1 - KE_2. \quad (1)$$

Повна кінетична енергія тіла, що котиться, дорівнює сумі кінетичної енергії ($KE_{\text{пост}}$) поступального руху центру мас тіла і кінетичної енергії ($KE_{\text{об}}$) обертального руху тіла навколо центру мас, бо кочення тіла є суперпозицією цих двох рухів:

$$KE = KE_{\text{пост}} + KE_{\text{об}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (2)$$

Оскільки кочення відбувається без прослизання, то кутова швидкість обертання ω і лінійна швидкість v руху центру мас кулі радіуса R пов'язані співвідношенням:

$$\omega = \frac{v}{R}. \quad (3)$$

Якщо прийняти, що момент інерції суцільної кулі дорівнює

$$I = \frac{2mR^2}{5}, \quad (4)$$

то кінетична енергія становить

$$KE = \frac{mv^2}{2} + \frac{2mR^2}{5 \cdot 2} \cdot \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{5} = 0,7mv^2.$$

Тоді шукана кількість теплоти

$$\begin{aligned} Q &= KE_1 - KE_2 = 0,7mv_1^2 - 0,7mv_2^2 = 0,7m(v_1^2 - v_2^2) = \\ &= 0,7 \cdot 1(0,1^2 - 0,08^2) = 2,52 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 2,52 \text{ мДж}. \end{aligned}$$

Розмірність отриманого результату.

$$[Q] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Відповідь: $Q = 2,52 \text{ мДж}$.

Задача 2.5.8

З якої висоти h повинен стартувати велосипедист, щоб по інерції без тертя проїхати доріжку у формі петлі радіусом $R = 3 \text{ м}$. Маса велосипедиста з велосипедом $m = 75 \text{ кг}$, маса кожного з двох коліс, яких вважати обручами, $m_0 = 1,5 \text{ кг}$.

Дано:	Розв'язання
$R = 3 \text{ м}$	Під час руху по криволінійній траєкторії у велосипедиста є доцентрове прискорення (нормальна складова прискорення), яка залежить від швидкості руху і радіуса кривизни кола. У верхній точці свого шляху (точка C) велосипедист ледве контактує з
$m = 75 \text{ кг}$	
$m_0 = 1,5 \text{ кг}$	
$h = ?$	

доріжкою, тому нормальна сила, яку доріжка прикладає до велосипедиста у верхній частині, практично дорівнює нулю. Єдина сила, яка тримає його на круговій доріжці, – це сила тяжіння $m\vec{g}$. Отже, на вершині кругової доріжки швидкість тіла має бути такою, щоб доцентрова сила дорівнювала силі тяжіння

$$ma_n = \frac{mv^2}{R} = mg. \quad (1)$$

З цього рівняння мінімальна швидкість руху велосипедиста в верхній точці кругової траєкторії

$$v = \sqrt{gR}. \quad (2)$$

З точки зору закону збереження енергії під час опису руху в цій задачі слід вважати, що потенціальна енергія, яку велосипедист має в початковій точці A , перетворюється в кінетичну енергію його поступального руху (разом з велосипедом) зі швидкістю v , кінетичну енергію обертального руху кожного з

двох коліс і потенціальну енергію, яка відповідає перебуванню велосипедиста в точці C на висоті $2R$

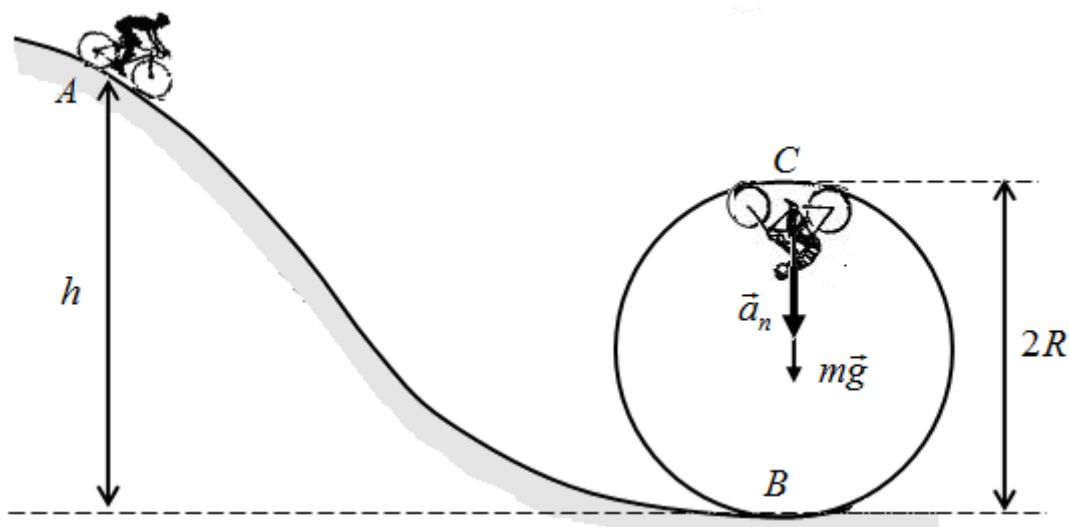
$$PE_A = KE_B + 2KE_{\text{оберт}} + PE_C. \quad (3)$$

Потенціальна енергія на початковій висоті h в точці A

$$PE_A = mgh, \quad (4)$$

а кінетична енергія поступального руху велосипедиста в точці B

$$KE_B = \frac{mv^2}{2}. \quad (5)$$



Кінетична енергія двох коліс, кожне з яких обертається з кутовою швидкістю $\omega = \frac{v}{R}$, якщо вважати його обручем з моментом інерції $I = m_0 r^2$, становить

$$2KE_{\text{оберт}} = 2 \frac{I\omega^2}{2} = m_0 r^2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 = m_0 v^2. \quad (6)$$

Потенціальна енергія велосипедиста в найвищій точці C траєкторії

$$PE_C = mg2R. \quad (7)$$

Підставляючи вирази для енергій (4) - (7) у формулу (3), отримаємо

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + m_0 v^2 + 2mRg, \quad (8)$$

Після підставлення значення швидкості (2), маємо

$$mgh = \frac{mgR}{2} + m_0 gR + 2mgR. \quad (9)$$

Тоді висота, з якої повинен стартувати велосипедист є

$$h = \frac{R}{2} + \frac{m_0}{m} R + 2R = \frac{3}{2} + \frac{1,5 \cdot 3}{75} + 2 \cdot 3 = 7,56 \text{ м.}$$

Відповідь: $h = 7,56 \text{ м.}$

Задача 2.5.9

Знайти лінійні швидкості та лінійні прискорення руху центрів мас кулі, диска та обруча, що скочуються без ковзання з похилої площини висотою $h = 1 \text{ м}$, яка утворює кут $\alpha = 30^\circ$ із горизонталлю. Початкові швидкості тіл $v_0 = 0$. Порівняйте розраховані швидкості та прискорення зі швидкістю та прискоренням тіла, що має форму паралелепіпеда, яке без тертя зісковзує з цього нахилу. Вважати, що усі тіла мають однакові маси.

Дано:

$$h = 1 \text{ м}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$v_0 = 0$$

$$v = ? \quad a = ?$$

Розв'язання

Спочатку кожен об'єкт має тільки гравітаційну потенційну енергію $PE = mgh$, яка згідно із законом збереження енергії переходить в кінетичну. Але виходячи з того, що усі тіла, крім плоского, скочуються без ковзання, їх кінетичні енергії є

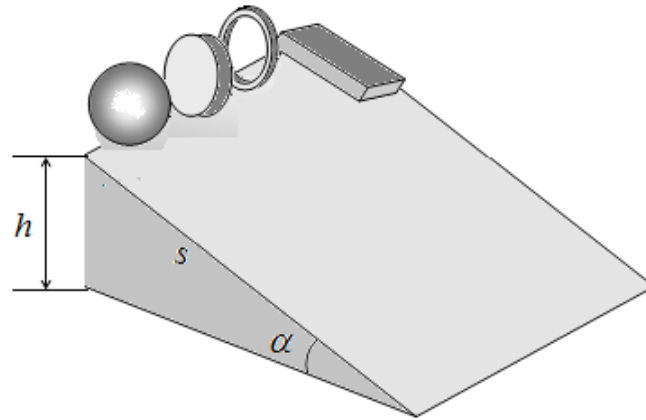
сумами двох складових, а саме, кінетичної енергії поступального ($KE_{\text{пост}}$) і обертального ($KE_{\text{оберт}}$) рухів.

$$KE = KE_{\text{пост}} + KE_{\text{оберт}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (1)$$

Враховуючи, що моменти інерції зазначених вище об'єктів становлять: кулі

$$- I_{\text{к}} = \frac{2}{5} mR^2, \text{ диска } - I_{\text{д}} = \frac{1}{2} mR^2, \text{ обруча } - I_{\text{об}} = mR^2, \text{ а кутова швидкість об'єктів,}$$

що котяться, пов'язана з їх лінійною швидкістю $\omega = \frac{v}{R}$, кінетичні енергії обертального руху будуть відрізнятися. Тоді із закону збереження енергії



$$PE = KE = \begin{cases} KE_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{JmR^2 v^2}{5 \cdot \frac{2}{5} R^2} = 0,7mv^2 \Rightarrow v_k = \sqrt{\frac{gh}{0,7}} = 3,74 \text{ м/с}, \\ KE_d = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2 v^2}{2 \cdot 2 \cdot R^2} = 0,75mv^2 \Rightarrow v_d = \sqrt{\frac{gh}{0,75}} = 3,61 \text{ м/с}, \\ KE_{об} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2 v^2}{2 \cdot R^2} = mv^2 \Rightarrow v_{об} = \sqrt{gh} = 3,13 \text{ м/с}, \\ KE_{тіла} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v_{тіла} = \sqrt{2gh} = 4,43 \text{ м/с}. \end{cases}$$

Прискорений рух кожного з об'єктів описується кінематичними рівняннями

$$\begin{cases} s = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \\ v = v_0 + at. \end{cases} \quad (2)$$

Розв'язуючи систему (2) відносно прискорення, знаходимо

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}. \quad (3)$$

Початкова швидкість усіх об'єктів $v_0 = 0$, а кінцеві, як ми бачимо з наведених вище розрахунків, різні, тоді враховуючи, що подоланий шлях $s = h/\sin \alpha$, отримуємо наступні значення прискорень

$$a = \frac{v^2 \cdot \sin \alpha}{2h} = \begin{cases} a_k = \frac{g \cdot \sin \alpha}{0,7 \cdot 2} = \frac{9,8 \cdot 0,5}{1,4} = 3,5 \text{ м/с}^2, \\ a_d = \frac{g \cdot \sin \alpha}{0,75 \cdot 2} = \frac{9,8 \cdot 0,5}{1,5} = 3,27 \text{ м/с}^2, \\ a_{об} = \frac{g \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{9,8 \cdot 0,5}{2} = 2,45 \text{ м/с}^2, \\ a_{тіло} = \frac{\cancel{Z} \cdot g \cdot \sin \alpha}{\cancel{Z}} = 9,8 \cdot 0,5 = 4,9 \text{ м/с}^2. \end{cases}$$

Аналізуючи отримані результати слід зауважити, що найбільша фінальна швидкість і найбільше значенні прискорення, які ми отримали для плоского тіла, можливі виключно в умовах відсутності тертя. Якщо взяти до уваги присутність тертя, то слід пам'ятати, що при русі кулі, диска і обруча спостерігається тертя кочення, а для тіла, що має форму паралелепіпеда, – тертя ковзання, яке завжди більше, ніж тертя кочення.

Розмірності отриманих результатів

$$[v] = \sqrt{\frac{M}{c^2} \cdot M} = \frac{M}{c}; \quad [a] = \left(\frac{M}{c}\right)^2 \cdot \frac{1}{M} = \frac{M}{c^2}.$$

Відповідь: $v_k = 3,74 \text{ м/с}$; $v_d = 3,61 \text{ м/с}$; $v_{об} = 3,13 \text{ м/с}$; $v_{тіла} = 4,43 \text{ м/с}$;

$$a_k = 3,5 \text{ м/с}^2; \quad a_d = 3,27 \text{ м/с}^2; \quad a_{об} = 2,45 \text{ м/с}^2; \quad a_{тіло} = 4,9 \text{ м/с}^2.$$

Задача 2.5.10

Тягарець масою $m = 0,5$ кг штовхають на горизонтальну пружину незначної маси, стискаючи її на відстань x , як показано на малюнку. Жорсткість пружини $k = 450$ Н/м. Після відпускання тягарець рухається вздовж горизонтальної поверхні без тертя до точки С, нижньої частини вертикальної кругової доріжки радіусом $R = 1$ м, і продовжує рухатися вгору. Швидкість тягарця в нижній частині доріжки становить $v_1 = 12$ м/с. Під час ковзання вгору вздовж доріжки тягарець відчуває середню силу тертя $F_{\text{тер}} = 7$ Н. Прийняти $g = 9,8 \text{ м/с}^2$. а) Чому дорівнює стискання пружини x ? б) Якою буде

швидкість тягарця в найвищій точці траєкторії, якщо він досягне вершини доріжки? в) Чи дійсно тягарець досягає вершини доріжки, чи він падає, не досягнувши її?

Дано:	Розв'язання
$m = 0,5 \text{ кг}$	а) На ділянці BC немає тертя, тому згідно із законом збереження енергії потенціальна енергія стиснутої пружини переходить в кінетичну енергію тягарця
$k = 450 \text{ Н/м}$	
$R = 1 \text{ м}$	
$v_1 = 12 \text{ м/с}$	$PE = KE, \quad (1)$
$F_{\text{тер}} = 7 \text{ Н}$	$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2}, \quad (2)$
$x = ? \quad v_2 = ?$	звідки стискання пружини становить
$v_0 = ?$	$x = v_1 \sqrt{\frac{m}{k}} = 12 \sqrt{\frac{0,5}{450}} = 0,4 \text{ м.}$

б) Для того щоб тіло пройшло найвищу точку траєкторії, кінетичної енергії, що воно має в точці C , повинно вистачити на роботу проти сил тертя, потенціальну енергію, що відповідає точці D , і кінетичну енергію в цій точці.

$$KE_1 = A_{\text{тер}} + PE + KE_2. \quad (3)$$

Робота сили тертя, що діє на тягарець під час руху від точки C до точки D , тобто на шляху, що дорівнює половині довжини круга,

$$s_{CD} = \pi R, \quad (4)$$

становить

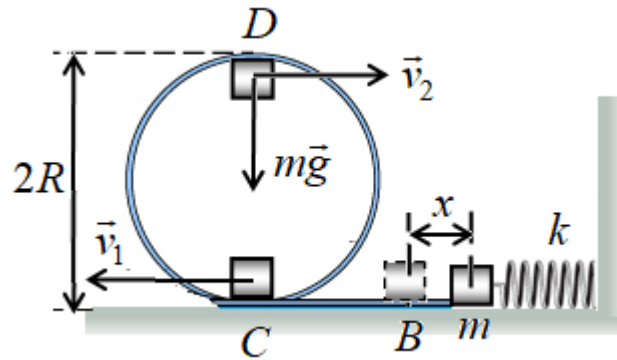
$$A_{\text{тер}} = F_{\text{тер}} \cdot s = F_{\text{тер}} \cdot \pi R. \quad (5)$$

Підставлення (5), а також значень кінетичної та потенціальної енергій в (3) дає

$$\frac{mv_1^2}{2} = F_{\text{тер}} \cdot \pi R + mg2R + \frac{mv_2^2}{2}. \quad (6)$$

З рівняння (6) швидкість v_2 в точці D дорівнює

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2F_{\text{тер}} \cdot \pi R}{m} - 4gR} = \sqrt{12^2 - \frac{2 \cdot 7 \cdot \pi \cdot 1}{0,5} - 4 \cdot 9,8 \cdot 1} = 4,1 \text{ м/с.} \quad (7)$$



с) Найменша швидкість, яка необхідна для того, щоб тіло подолато вертикальну кругову доріжку, може бути знайдена з умови, що сила нормальної реакції опори в точці D дорівнює нулю. В цьому випадку тіло маси m рухається з нормальним (доцентровим) прискоренням $a_n = \frac{v_0^2}{R}$, під дією сили тяжіння mg ,

$$ma_n = \frac{mv_0^2}{R} = mg. \quad (8)$$

Швидкість, за якою тіло досягне найвищої точки і не впаде, не досягнувши її, може бути знайдена з (8)

$$v_0 = \sqrt{gR} = \sqrt{9,8 \cdot 1} = 3,13 \text{ м/с.} \quad (9)$$

Порівнюючи отримані швидкості (7) і (9), можна стверджувати, що в випадку, що розглядається, тіло досягне точки D і продовжить рух по колу, оскільки

$$v_2 > v_0, \text{ а саме, } 4,1 \text{ м/с} > 3,13 \text{ м/с.}$$

Відповідь: $x = 0,4 \text{ м}$; $v_2 = 4,1 \text{ м/с}$; $v_0 = 3,13 \text{ м/с}$.

Задача 2.5.11

Визначити момент інерції відносно осей OO , O_1O_1 , O_2O_2 системи, що складається з жорстко скріплених між собою кулі масою $m_k = 2m$ і радіусом R та двох однакових тонких стрижнів масами m і завдовжки $l = 4R$ кожен.

Точка перетинання всіх трьох осей знаходиться посередині середнього стрижня.

Дано:	Розв'язання
$m_k = 2m$	Момент інерції системи I відносно нерухомої осі – величина адитивна, тобто є сумою моментів інерції тіл, які
$l = 4R$	входять до складу системи.
$I_{OO} = ? \quad I_{O_1O_1} = ?$	
$I_{O_2O_2} = ?$	$I = I_1 + I_2 + I_3, \quad (1)$

де I_1 , I_2 і I_3 – моменти інерції кулі, вертикального і горизонтального стрижнів відносно обраної осі, відповідно.

1) Обчислимо момент інерції системи відносно осі OO .

Момент інерції кулі відносно осі OO знайдемо за теоремою Штейнера:

$$I_1 = I_0 + m_k x^2, \quad (2)$$

де $I_0 = \frac{2}{5} m_k R^2$ – момент інерції кулі відносно осі, яка проходить через центр її мас, а x – відстань між осями, що проходять через центр мас і обрану ось OO , яка дорівнює $x = R + \frac{l}{2} = R + \frac{4R}{2} = 3R$.

Отже, момент інерції кулі відносно осі OO становить

$$I_1 = \frac{4mR^2}{5} + 2m(3R)^2 = \frac{94}{5} mR^2. \quad (3)$$

Момент інерції вертикального стрижня відносно осі OO , яка проходить через центр його мас дорівнює

$$I_2 = \frac{ml^2}{12} = \frac{m(4R)^2}{12} = \frac{4mR^2}{3}. \quad (4)$$

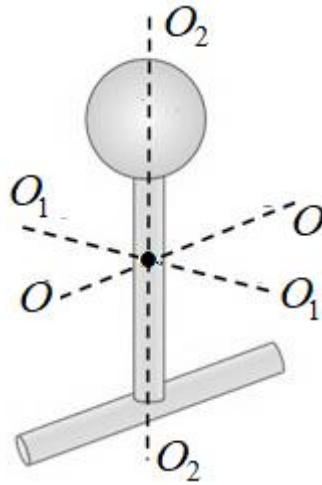
Момент інерції горизонтального стрижня масою m відносно горизонтальної осі OO знайдемо, вважаючи, що стрижень тонкий, і його можна поділити на

елементарні маси dm , кожна з яких відстоїть від осі OO на $r = \frac{l}{2}$. Тоді

$$I_3 = \int_m r^2 dm = r^2 \int_m m = mr^2 = m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = m \left(\frac{4R}{2} \right)^2 = 4mR^2. \quad (5)$$

Отже, момент інерції системи відносно осі OO отримаємо, підставляючи (3), (4), (5) в формулу (1)

$$I_{oo} = \frac{94}{5}mR^2 + \frac{4}{3}mR^2 + 4mR^2 = \frac{362}{15}mR^2. \quad (6)$$



2) Аналогічно обчислимо момент інерції системи відносно осі O_1O_1 .

$$I_1 = \frac{2}{5}m_k R^2 + m_k \left(R + \frac{l}{2} \right)^2 = 2m \left[\frac{2}{5}R^2 + \left(R + \frac{4R}{2} \right)^2 \right] = \frac{94}{5}mR^2, \quad (7)$$

$$I_2 = \frac{ml^2}{12} = \frac{m(4R)^2}{12} = \frac{4}{3}mR^2, \quad (8)$$

$$I_3 = \frac{ml^2}{12} + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ml^2}{3} + \frac{m(4R)^2}{3} = \frac{16}{3}mR^2. \quad (9)$$

Момент інерції системи відносно осі O_1O_1 є сумою результатів (7) – (9), які складаються в (1)

$$I_{O_1O_1} = \frac{94}{5}mR^2 + \frac{4}{3}mR^2 + \frac{16}{3}mR^2 = \frac{382}{15}mR^2.$$

3) Момент інерції системи відносно осі O_2O_2 .

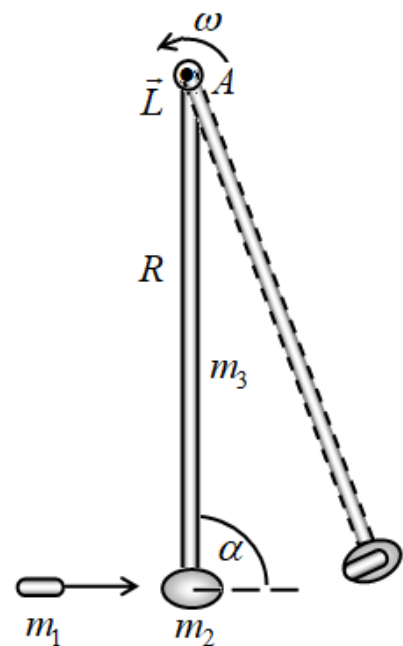
З урахуванням того, що момент інерції вертикального стрижня відносно осі O_2O_2 дорівнює нулю,

$$I_{O_2O_2} = \frac{2}{5} m_{\kappa} R^2 + 0 + \frac{ml^2}{12} = \frac{2}{5} \cdot 2mR^2 + \frac{m(4R)^2}{12} = \frac{32}{15} mR^2.$$

Відповідь: $I_{O_1O_1} = \frac{362}{15} mR^2$; $I_{O_1O_2} = \frac{382}{15} mR^2$; $I_{O_2O_2} = \frac{32}{15} mR^2$.

Задача 5.2.12

Куля масою $m_1 = 5$ г потрапляє в тягарець масою $m_2 = 0,5$ кг, прикріплений до кінця стрижня масою $m_3 = 0,7$ кг і довжиною $R = 1$ м, і застрягає в ньому. В результаті система «куля-тягарець-стрижень» починає обертатися в площині фігури навколо фіксованої осі, що проходить через інший кінець стрижня в точці A , з кутовою швидкістю $\omega = 5$ рад/с. Вважаючи тягарець і кулю матеріальними точками, знайти момент інерції системи відносно точки A і швидкість кулі безпосередньо перед зіткненням з тягарцем.



Дано:	Розв'язання
$m_1 = 5 \text{ г} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$	Момент інерції є адитивною величиною, тому для системи «куля-тягарець-стрижень»
$m_2 = 0,5 \text{ кг}$	$I = I_1 + I_2 + I_3, \quad (1)$
$m_3 = 0,7 \text{ кг}$	де моменти інерції кулі I_1 і тягарця I_2 як матеріальних точок дорівнюють
$R = 1 \text{ м}$	$I_1 = m_1 R^2 \text{ і } I_2 = m_2 R^2.$
$\omega = 5 \text{ рад/с}$	
$I = ? \quad v = ?$	

Стрижень відносно точки A згідно із теоремою Штейнера має момент інерції

$$I_3 = \frac{m_3 R^2}{12} + m_3 \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \frac{m_3 R^2}{3}.$$

Отже, момент інерції системи «куля-тягарець-стрижень» (1) дорівнює

$$\begin{aligned} I &= m_1 R^2 + m_2 R^2 + \frac{m_3 R^2}{3} = R^2 \cdot \left(m_1 + m_2 + \frac{m_3}{3} \right) = \\ &= 1^2 \cdot \left(5 \cdot 10^{-3} + 0,5 + \frac{0,7}{3} \right) = 0,738 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Згідно із визначенням момент імпульсу є векторною величиною

$$\vec{L} = [\vec{R}, \vec{p}] = [\vec{R}, m\vec{v}]. \quad (2)$$

Імпульс кулі m_1 , що летить зі швидкістю v_1 , дорівнює $p = m_1 v_1$, а величина моменту імпульсу

$$L = R \cdot m_1 v_1 \sin \alpha = m_1 v_1 R, \quad (3)$$

де α – кут між напрямками швидкості кулі $\vec{v}$ і напрямком стрижня R , синус якого $\sin \alpha = 1$, оскільки цей кут прямий.

До зіткнення куля рухалася, а стрижень з тягарцем були у стані спокою, а після зіткнення система «куля-тягарець-стрижень» почала рухатися і її момент імпульсу став

$$L' = I\omega. \quad (4)$$

За законом збереження моменту імпульсу,

$$\begin{aligned} L &= L', \\ m_1 v_1 R &= I\omega. \end{aligned} \quad (5)$$

Звідки швидкість кулі безпосередньо перед зіткненням з (5) становить

$$v_1 = \frac{I\omega}{m_1 R} = \frac{0,738 \cdot 5}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 1} = 738 \text{ м/с}.$$

Розмірності отриманих результатів

$$[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2; \quad [v] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь: $I = 0,738 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $v_1 = 738 \text{ м/с}$.

Задача 5.2.13

Махове колесо починає обертатися з кутовим прискоренням $\varepsilon = 0,5 \text{ рад/с}^2$ і через час $t_1 = 15 \text{ с}$ після початку руху набуває моменту імпульсу $L_1 = 70 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$. Знайти кінетичну енергію KE колеса та його момент імпульсу через час $t_2 = 20 \text{ с}$ після початку руху.

Дано:	Розв'язання
$\varepsilon = 0,5 \text{ рад/с}^2$	Кутова швидкість махового колеса через час t_1 після початку обертання $\omega_1 = \varepsilon t_1$. Оскільки момент імпульсу колеса $L_1 = I\omega_1$, то його момент інерції
$t_1 = 15 \text{ с}$	
$L_1 = 70 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$	
$t_2 = 20 \text{ с}$	
$KE = ?$ $L_2 = ?$	$I = \frac{L_1}{\omega_1} = \frac{L_1}{\varepsilon t_1}$

Кутова швидкість через час t_2 після початку обертання $\omega_2 = \varepsilon t_2$, а кінетична енергія

$$KE = \frac{I\omega_2^2}{2} = \frac{L_1(\varepsilon t_2)^2}{2\varepsilon t_1} = \frac{L_1 \varepsilon t_2^2}{2t_1} = \frac{70 \cdot 0,5 \cdot 20^2}{2 \cdot 15} = 467 \text{ Дж}.$$

Момент імпульсу колеса через час t_2 після початку його обертання становить

$$L_2 = I\omega_2 = \frac{L_1 \cancel{\varepsilon} t_2}{\cancel{\varepsilon} t_1} = \frac{L_1 t_2}{t_1} = \frac{70 \cdot 20}{15} = 9,33 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}.$$

Перевірка розмірності

$$[KE] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \cancel{\text{с}}^2}{\text{с} \cdot \text{с} \cdot \cancel{\text{с}}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}; \quad [L] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}.$$

Відповідь: $KE = 467$ Дж; $L_2 = 9,33 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$.

Задача 5.2.14

Горизонтальна платформа масою $m = 100 \text{ кг}$ і радіусом $R = 2 \text{ м}$ обертається навколо горизонтальної осі, що проходить через центр платформи, з частотою $n_1 = 10 \text{ об/хв}$. Людина масою $m_0 = 60 \text{ кг}$ стоїть на краю платформи. а) З якою частотою почне обертатися платформа, якщо людина перейде від краю платформи до її центру? б) Як зміниться кінетична енергія системи? Вважати платформу однорідним диском, а людину – точковою масою.

Дано:

$$m = 100 \text{ кг}$$

$$n_1 = 10 \text{ об/хв}$$

$$= 0,167 \text{ об/с}$$

$$m_0 = 60 \text{ кг}$$

$$R = 2 \text{ м}$$

$$n_2 = ?$$

Розв'язання

а) Вважаючи, що система «людина-платформа» є замкнутою, скористуємося законом збереження моменту імпульсу:

$$\vec{L} = \vec{L}'. \quad (1)$$

Якщо вісь обертання є нерухомою, закон збереження можна записати в скалярному вигляді – в проєкціях на вісь, що проходить через центр мас перпендикулярно площині платформи.

Спочатку момент імпульсу системи складався з моменту імпульсу платформи та моменту імпульсу людини, що стоїть краю платформи.

$$L = L_{\text{пл}} + L_{\text{люд}} = I_{\text{пл}} \omega_1 + I_{\text{люд}} \omega_1 = 2\pi n_1 (I_{\text{пл}} + I_{\text{люд}}). \quad (2)$$

Коли людина перейшла в центр платформи, її момент імпульсу став дорівнювати нулю, бо вісь обертання проходить через неї.

Тому момент імпульсу системи становить

$$L' = 2\pi n_2 I_{\text{пл}}. \quad (3)$$

Прирівнявши моменти імпульсу, що відповідають початку (2) і закінченню (3) спостереження, отримуємо

$$2\pi n_1(I_{\text{пл}} + I_{\text{люд}}) = 2\pi n_2 I_{\text{пл}}. \quad (4)$$

Моменти інерції платформи і людини дорівнюють, відповідно, $I_{\text{пл}} = \frac{mR^2}{2}$ і

$$I_{\text{люд}} = m_0 R^2.$$

Частота обертання платформи після переходу людини стане

$$\begin{aligned} n_2 &= \frac{n_1(I_{\text{пл}} + I_{\text{люд}})}{I_{\text{пл}}} = \frac{n_1\left(\frac{mR^2}{2} + m_0 R^2\right)}{\frac{mR^2}{2}} = \frac{n_1(m + 2m_0)}{m} = \\ &= \frac{10(100 + 120)}{100} = 22 \text{ об/хв.} \end{aligned}$$

Ми підставили частоту обертання n_1 в обертах за хвилину, тому і отримали частоту n_2 у відповіді також в об/хв.

б) Для розрахунку кінетичної енергії, в вираз для якої входить частота, треба виразити $n_1 = 10 \text{ об/хв} = \frac{10}{60} = 0,167 \text{ об/с}$. Початкова кінетична енергія системи

$$\begin{aligned} KE_1 &= \frac{I\omega_1^2}{2} = \frac{(I_{\text{пл}} + I_{\text{люд}})(2\pi n_1)^2}{2} = \frac{\left(\frac{mR^2}{2} + m_0 R^2\right)(2\pi n_1)^2}{2} = \\ &= (\pi \cdot R \cdot n_1)^2 \cdot (m + 2m_0) = (\pi \cdot 2 \cdot 0,167)^2 \cdot (100 + 2 \cdot 60) = 242 \text{ Дж.} \end{aligned} \quad (5)$$

Після переміщення людини до центру платформи, коли вона почала обертатися з частотою $n_2 = 22 \text{ об/хв} = 0,367 \text{ об/с}$, кінетична енергія стала

$$\begin{aligned} KE_2 &= \frac{I\omega_2^2}{2} = \frac{I_{\text{пл}}(2\pi n_2)^2}{2} = \frac{\left(\frac{mR^2}{2}\right)(2\pi n_2)^2}{2} = \\ &= (\pi \cdot R \cdot n_2)^2 \cdot m = (\pi \cdot 2 \cdot 0,367)^2 \cdot 100 = 532 \text{ Дж.} \end{aligned} \quad (6)$$

Як видно з порівняння результатів (5) і (6), кінетична енергія системи зросла на

$$\Delta KE = KE_2 - KE_1 = 532 - 242 = 390 \text{ Дж.}$$

Додаткова енергія у цьому випадку надійшла із накопиченої (хімічної) енергії в м'язах людини, коли людина здійснювала роботу, йдучи до центру платформи.

Відповідь: $n_2 = 16$ об/хв; $\Delta KE = 390$ Дж.

Задача 5.2.15

Хлопчик масою $m_1 = 40$ кг знаходиться на нерухомій платформі радіусом $R = 5$ м і масою $m_2 = 120$ кг, яка може обертатися навколо нерухомої вертикальної осі. З якою кутовою швидкістю буде обертатися платформа, якщо хлопчик почне рухатися вздовж кола радіусом $r = 3$ м з лінійною швидкістю $v = 2$ м/с відносно платформи. Платформу вважати однорідним диском, а хлопчика – точковою масою.

Дано:	Розв'язання
$m_1 = 40$ кг	Якщо вважати, що система «хлопчик-платформа» замкнута, то можна використати закон збереження моменту імпульсу: $L = L'$. Спочатку система «платформа-людина» була у стані спокою, тому $L = 0$. Коли хлопчик почав рухатися вздовж
$m_2 = 120$ кг	
$R_1 = 3$ м	
$R_2 = 5$ м	
$v = 2$ м/с	
$\omega_2 = ?$	кола радіуса r зі швидкістю v , платформа також почала рухатися. Тому з закону збереження моменту імпульсу відносно нерухомої осі обертання маємо

$$0 = I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2, \quad (1)$$

де $I_1 = m_1 r^2$ – момент інерції хлопчика (точкової маси), $I_2 = \frac{m_2 R^2}{2}$ – момент інерції платформи (диска), ω_1 – кутова швидкість хлопчика відносно землі, ω_2 – кутова швидкість платформи.

Із закону додавання швидкостей

$$\omega_1 = \omega_0 + \omega_2, \quad (2)$$

де $\omega_0 = \frac{v}{r}$ – кутова швидкість хлопчика відносно платформи.

З врахуванням (2), закон збереження моменту імпульсу має вигляд

$$I_1(\omega_0 + \omega_2) + I_2\omega_2 = 0.$$

$$\omega_2 = -\frac{I_1\omega_0}{I_1 + I_2} = -\frac{m_1 r^2 \cdot (v/r)}{m_1 r^2 + (m_2 R^2/2)} = -\frac{40 \cdot 3^2 \cdot (2/3)}{40 \cdot 3^2 + (120 \cdot 5^2/2)} = -0,13 \text{ рад/с}.$$

Знак «–» вказує на те, що обертання (рух) хлопчика та платформи відбуваються у протилежних напрямках.

Розмірність результату

$$[\omega] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^2} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{м}} = \frac{1}{\text{с}}.$$

Відповідь: $\omega_2 = -0,13 \text{ рад/с}.$

5.3. Задачі для самостійної роботи

5.3.1. Визначити момент інерції I вала масою $m = 5$ кг і радіусом $R = 2$ см відносно осі, паралельної його осі симетрії та віддаленої від неї на $a = 0,1$ м. Вал вважати однорідним диском.

Відповідь: $I = 0,051 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

5.3.2. Визначити момент інерції тонкого однорідного стрижня довжиною $l = 50$ см і масою $m = 400$ г відносно осі, що перпендикулярна стрижню і проходить на відстані $a = 0,15$ м від одного з його кінців.

Відповідь: $I = 0,012 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

5.3.3. На кінцях однорідного стрижня масою $m = 1$ кг і довжиною $l = 2$ м закріплені кулі масами $m_1 = 500$ г і $m_2 = 800$ г радіусами $R_1 = 80$ см і $R_2 = 120$ см. Центри куль знаходяться на кінцях стрижня. Знайти момент інерції I цієї системи відносно осі, яка проходить через стрижень на відстані $a = 50$ см від першої кулі перпендикулярно стрижню.

Відповідь: $I = 3,097 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

5.3.4. Куля діаметром $d = 40$ см обертається навколо осі, що проходить через центр її мас, згідно з рівнянням: $\omega = 3 + 2t$ рад/с. Обертання відбувається під дією сили $F = 8$ Н, спрямованої вздовж дотичної до поверхні кулі. Знайти масу кулі.

Відповідь: $m = 50$ кг.

5.3.5. Стрижень масою $m = 2$ кг і довжиною $l = 1$ м обертається навколо осі, яка проходить через його середину перпендикулярно до стрижня, згідно з рівнянням $\varphi = 2t + 0,2t^3$, рад. За яким законом змінюється момент сил, що діє на стрижень? Якого значення набуде момент цих сил через $t = 2$ с після початку руху стрижня?

Відповідь: $M = 0,2 t \text{ Н} \cdot \text{м}$, $M = 0,4 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

5.3.6. До обода однорідного диска радіусом $R = 0,1$ м по дотичній прикладена сила $F = 100$ Н. Під час обертання диска на нього діє момент сил

тертя $M_{\text{тер}} = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Визначити масу диска, якщо відомо, що його кутове прискорення є сталим і дорівнює $\varepsilon = 80 \text{ рад/с}^2$.

Відповідь: $m = 20 \text{ кг}$.

5.3.7. Маховик у вигляді диска масою $m = 50 \text{ кг}$ та радіусом $r = 20 \text{ см}$ був розкручений до частоти обертання $n_1 = 480 \text{ хв}^{-1}$. Внаслідок тертя маховик зупинився. Знайти момент M сил тертя, вважаючи його постійним для двох випадків: 1) маховик зупинився через $t = 50 \text{ с}$; 2) маховик до зупинки зробив $N=200$ обертів.

Відповідь: 1) $M = -1,68 \text{ Н} \cdot \text{м}$; 2) $M = -1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

5.3.8. Дискподібний маховик масою $m=50 \text{ кг}$ і радіусом $R=0,2$ обертається з частотою $n=80 \text{ об/с}$. Коли вимкнули привід, під дією тертя маховик зупинився. Знайти момент сили тертя, якщо маховик до повної зупинки зробив $N = 200$ обертів.

Відповідь: $M = 100,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

5.3.9. На однорідний циліндричний вал радіусом $R = 0,1 \text{ м}$ і масою $m = 10 \text{ кг}$ намотано легку нитку, до якої прикріплений вантаж масою $m_1 = 5 \text{ кг}$. Під дією сили тяжіння вантаж спускається зі сталим прискоренням. Визначити: залежність подоланого шляху $S(t)$, згідно з якою рухається вантаж, залежність кута повороту $\varphi(t)$, згідно з якою обертається вал, і силу натягу нитки.

Відповідь: $S(t) = 0,82t^2, \text{ м}$, $\varphi(t) = 8,15t^2, \text{ рад}$, $T = 8,17 \text{ Н}$.

5.3.10. Суцільна куля радіусом $R = 2 \text{ м}$ обертається з частотою $n = 2 \text{ об/с}$. На кулю подіяв обертальний момент і через $t = 10 \text{ с}$ її кутова швидкість дорівнювала $\omega = 26,56 \text{ рад/с}$, а момент імпульсу за цей час змінився на $\Delta L = 7 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$. Знайти масу кулі, величину обертального моменту і кількість обертів, які здійснила куля протягом 10 с .

Відповідь: $m = 0,25 \text{ кг}$, $M = 0,7 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $N = 31 \text{ об}$.

5.3.11. Махове колесо у формі обруча масою $m = 2 \text{ кг}$ і радіусом $R = 40 \text{ см}$ обертається навколо нерухомої осі, яка збігається з його віссю симетрії. Кут

повороту колеса змінюється за законом: $\varphi = t + 0,4t^2$, рад. Знайти момент сили, який діє на колесо і зміну його моменту імпульсу за час від $t_1 = 3$ с до $t_2 = 9$ с.

Відповідь: $M = 0,256 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $\Delta L = 1,54 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$.

5.3.12. Дві кулі масами $m_1 = 1$ кг і $m_2 = 2$ кг, радіусами $R_1 = 15$ см і $R_2 = 40$ см одночасно починають обертатися. На першу кулю діє обертальний момент $M = 15 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}$, а на другий – вдвічі більший. На скільки стануть відрізнятися їх моменти імпульсу через проміжок часу, протягом якого перша куля зробить $N = 300$ обертів?

Відповідь: $\Delta L = 2,25 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$.

5.3.13. Тонкий стрижень масою $m = 300$ г і довжиною $l = 50$ см обертається з частотою $n_1 = 10 \text{ с}^{-1}$ у горизонтальній площині навколо вертикальної осі, яка проходить через середину стрижня. Знайти частоту обертання стрижня, якщо у процесі обертання у тій же площині стрижень переміститься так, що ось обертання пройде через його кінець.

Відповідь: $n_2 = 2,5 \text{ с}^{-1}$.

5.3.14. Платформа радіусом $R = 1,5$ м і масою $m = 180$ кг обертається за інерцією навколо вертикальної осі з частотою $n = 10$ об/хв. У центрі платформи стоїть людина масою $m_1 = 60$ кг. Яку лінійну швидкість матиме людина, якщо вона перейде на край платформи? Платформу вважати однорідним диском, а людину – матеріальною точкою.

Відповідь: $v = 0,942 \text{ м/с}$.

5.3.15. Платформа у вигляді суцільного однорідного диска обертається навколо нерухомої вертикальної осі. На краю платформи стоїть людина, маса якої у три рази менша, ніж маса платформи. Визначити, як і у скільки разів зміниться кутова швидкість обертання платформи, якщо людина перейде у центр платформи.

Відповідь: $\omega_1/\omega_2 = 1,67$.

6. МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

6.1. Теоретичні відомості

6.1.1. Коливання. Механічні коливання і їх типи

Механічне коливання – механічний рух, під час якого положення (координати) матеріальної точки (або системи матеріальних точок) повторюється через певні проміжки часу. Фізична система, в якій можливі коливання, називається **коливальною системою** або **осцилятором** (від лат. *oscillo* – «гойдаюся»).

Типи коливань:

1. **Вільні (власні)** коливання – такі, що відбуваються внаслідок лише початкового одноразового впливу (тіло вивели з положення рівноваги та/або штовхнули);
2. **Вимушені** коливання – такі, що здійснюються під дією зовнішньої періодичної сили;
3. **Автоколивання** виникають в системах, здатних до саморегулювання, коли коливальна система самостійно регулює надходження енергії.

6.1.2. Вільні незгасаючі коливання. Гармонічні коливання

Найпоширенішими і найпростішими коливаннями є **гармонічні коливання**, у яких зміна періодичної величини, відбувається за законом синуса або косинуса. У разі гармонічних коливань система називається **гармонічним осцилятором**.

Вивчення гармонічних коливань обумовлене тим, що більшість коливань у природі та техніці є наближеними до гармонічних, а ті коливання, які не є гармонічними, можна представити у вигляді суми гармонічних коливань за допомогою ряду Фур'є.

Якщо матеріальна точка здійснює гармонічні коливання вздовж осі x (коливання з одним ступенем вільності), тоді залежність її координати від часу описується рівнянням гармонічних коливань (рис. 6.1):

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (6.1)$$

де x – **зміщення** точки від положення рівноваги, що залежить від часу t ; A – **амплітуда** коливань, що визначає величину найбільшого відхилення величини x від положення рівноваги (завжди є додатною величиною); ω_0 – **власна кутова (циклічна, колова) частота** гармонічних коливань (залежить від параметрів осцилятора); $(\omega_0 t + \alpha)$ – **фаза коливань** – дозволяє визначити числове значення і напрямок зміщення, тобто положення точки в будь-який момент під час коливального руху; α – **початкова фаза** (значення фази коливань в початковий момент часу $t = 0$).

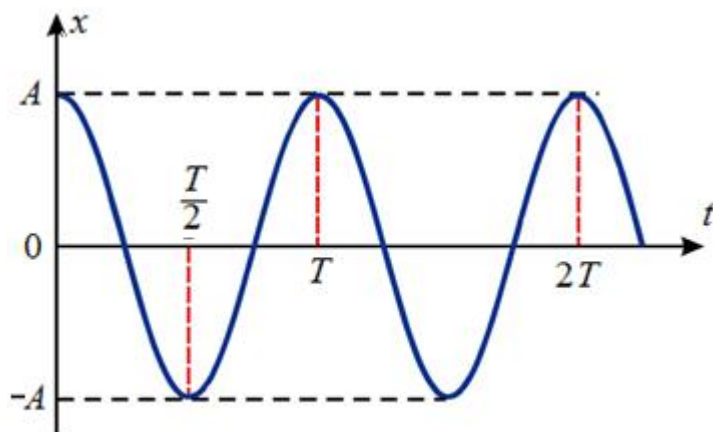


Рисунок 6.1

Час T , за який тіло робить одне повне коливання, називається **періодом коливань** (рис. 6.1). За цей час фаза коливань змінюється на π .

$$\omega_0(t + T) + \alpha = (\omega_0 t + \alpha) + 2\pi,$$

тому

$$\omega_0 T = 2\pi,$$

звідки період дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (6.2)$$

Власна частота коливань ν_0 – кількість повних коливань N , які система

робить за одиницю часу

$$\nu_0 = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}. \quad (6.3)$$

Власна частота ν_0 і власна циклічна частота ω_0 зв'язані між собою

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0. \quad (6.4)$$

Одиницями вимірювання величин, що характеризують коливання, є

$$[T] = \text{секунда} = \text{с};$$

$$[\omega_0] = \text{радіан/секунда} = \text{рад/с} = \text{с}^{-1};$$

$$[\nu_0] = \text{с}^{-1} = \text{Герц} = \text{Гц}.$$

Швидкість $v(t)$ та прискорення $a(t)$ матеріальної точки (рис. 6.2), яка здійснює гармонічне коливання, також змінюються за гармонічним законом, оскільки зв'язані зі зміщенням x як перша та друга похідні за часом:

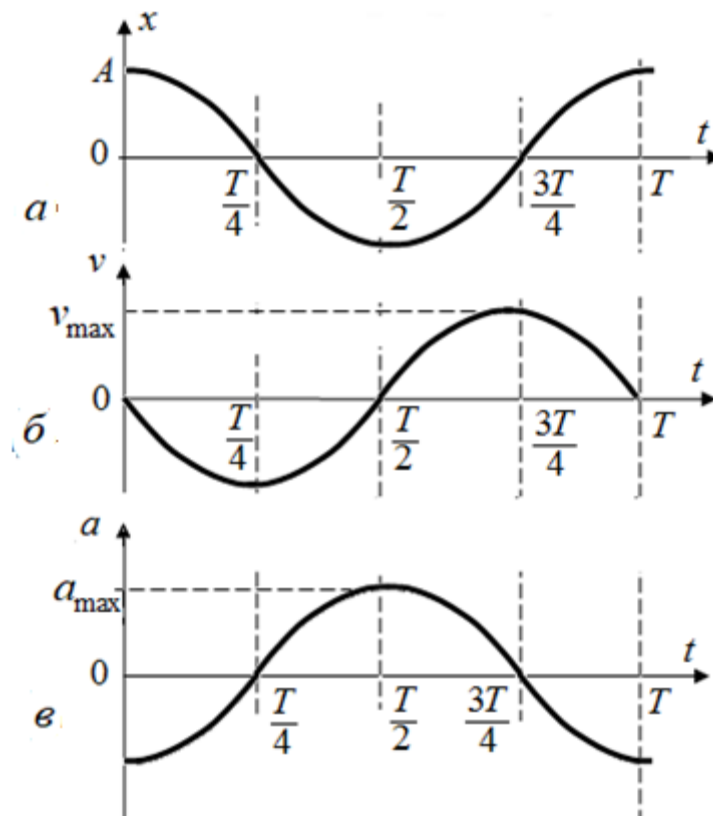


Рисунок 6.2

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = -v_{\max} \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (6.5)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = -a_{\max} \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (6.6)$$

де $v_{\max} = A\omega_0$ і $a_{\max} = A\omega_0^2$ є максимальними (амплітудними) значеннями швидкості та прискорення, відповідно (рис. 6.2).

Згідно із 2-м законом Ньютона прискорення точки, що коливається, яке залежить від часу, зв'язане з дією змінної сили

$$F(t) = ma = m\ddot{x} = -mA\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = -F_m \cos(\omega_0 t + \alpha) = -m\omega_0^2 x = -kx. \quad (6.7)$$

Ця сила спрямована в протилежний бік відносно зміщення точки та намагається повернути тіло в положення рівноваги, при цьому це може бути як справжня пружна сила, так і сила, яка подібно пружній силі лінійно залежить від зміщення $F \sim x$, але за своєю природою не є пружною. Наприклад, для маятника (рис. 6.3) це рівнодійна тих сил, які діють на об'єкт, що коливається, – сили тяжіння $m\vec{g}$ і сили натягу $\vec{T}$. В цьому випадку сила називається **квазіпружною**, тобто подібною пружній. Коефіцієнт квазіпружної сили $k = m\omega_0^2$ визначається параметрами коливальної системи.

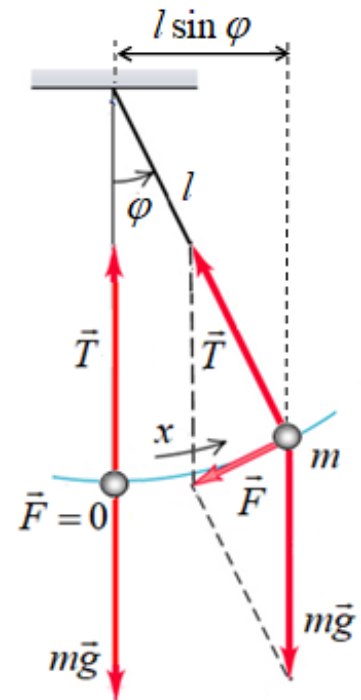


Рисунок 6.3

Під час коливань тіло рухається і змінює своє положення, тому має кінетичну і потенціальну енергії (рис. 6.4). Тому, використовуючи (6.1) і (6.5), можна записати

$$PE = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = PE_{\max} \cdot \cos^2(\omega_0 t + \alpha), \quad (6.8)$$

$$KE = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = KE_{\max} \cdot \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (6.9)$$

Максимальні значення потенціальної та кінетичної енергій дорівнюють одна одній і значенню повної енергії, яку має коливальна система. Згідно з законом збереження енергії при русі у випадку незгасаючих коливань енергії

переходять одна в іншу, а повна енергія системи зберігається.

$$E = PE + KE = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha) + \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}. \quad (6.10)$$

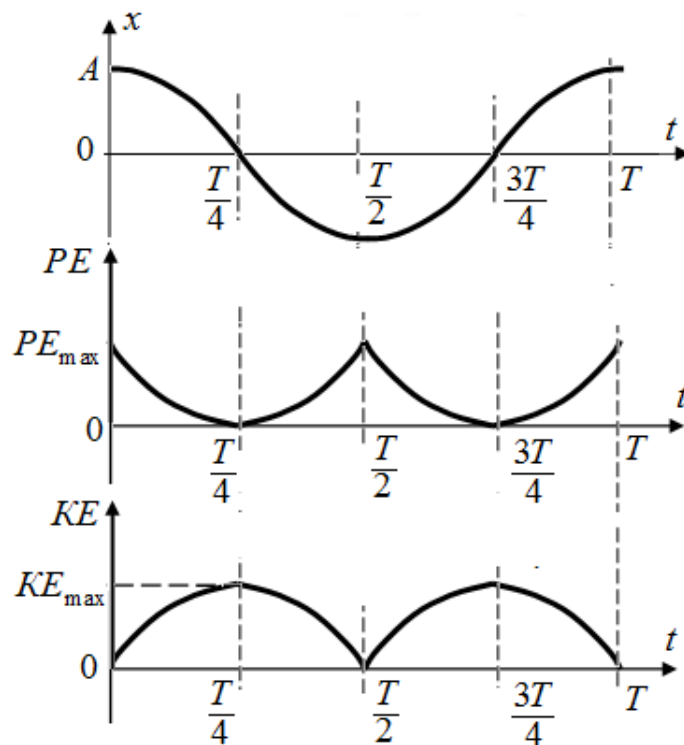


Рисунок 6.4

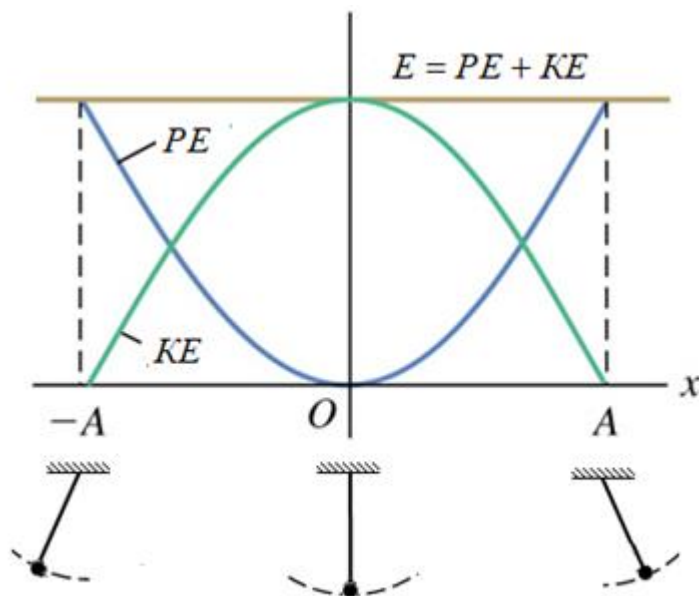


Рисунок 6.5

6.1.3. Маятники

1. Пружинний маятник (або простий лінійний гармонічний осцилятор) – це система, що складається з тіла закріпленого на пружині, масою якої можна знехтувати порівняно з масою тіла m (рис. 6.6). Інший кінець пружини жорстко закріплено.

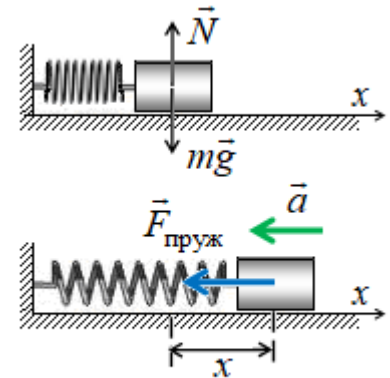


Рисунок 6.6

Рівняння руху системи, що рухається під дією пружної сили $F_{\text{пруж}} = -kx$, згідно з 2-м законом Ньютона має вигляд

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{пруж}}.$$

З врахуванням того, що $mg = N$ на рух не впливають, а $a = \ddot{x}$, горизонтальна проєкція цього рівняння

$$m\ddot{x} = -kx,$$

де k – жорсткість пружини.

Якщо позначити $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, тоді отримане диференціальне рівняння другого порядку

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (6.11)$$

має розв'язок

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Власна кутова частота пружинного маятника ω_0 залежить від параметрів коливальної системи і є власною її характеристикою:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (6.12)$$

Період коливань також є власною характеристикою осцилятора

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (6.13)$$

2. Математичний маятник – матеріальна точка, яка підвішена на

невагомий нерозтяжний нитці довжиною l , що коливається у вертикальній площині під дією сили тяжіння (рис. 6.3). Матеріальна точка – тіло, маса якого зосереджена в центрі мас і розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати.

Маятник здійснює рух вздовж криволінійної траєкторії. Рівняння його руху згідно із 2-м законом Ньютона для обертального руху має вигляд

$$I\varepsilon = M.$$

Оскільки вважається, що математичний маятник – це матеріальна точка, то його момент інерції становить $I = ml^2$, а момент сили тяжіння $M = mgl \sin \varphi$, де φ – кут відхилення маятника (сила натягу $\vec{T}$ моменту не створює тому, що проходить через центр коливань), а кутове прискорення $\varepsilon = \ddot{\varphi}$. Підставлення цих значень у 2 закон Ньютона дає диференціальне рівняння

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \cdot \sin \varphi. \quad (6.14)$$

Знак «-» вказує на те, що рівнодійна сила прагне повернути маятник у положення рівноваги.

Отримане рівняння є аналогічним (6.11), якщо розглядати так звані малі коливання, коли $\sin \varphi$ можна замінити значенням кута φ .

Таким чином, диференціальне рівняння $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$ перетворюється в

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (6.15)$$

розв'язком якого є **рівняння малих коливань математичного маятника**

$$\varphi = \varphi_{\max} \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (6.16)$$

де $\varphi_{\max}$ – максимальне кутове відхилення (амплітуда), а ω_0 – **власна кутова частота** коливань

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (6.17)$$

Період коливань математичного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g}}. \quad (6.18)$$

3. Фізичний маятник – абсолютно тверде тіло довільної форми, яке здійснює коливання навколо нерухомої горизонтальної осі, яка не проходить через його центр мас (рис. 6.7).

Для описання руху тіла, яке має момент інерції I , застосуємо 2 закон Ньютона для обертання $I\varepsilon = M$, вважаючи, що діє момент сили тяжіння $M = mgx \cdot \sin \varphi$, а кутове прискорення $\varepsilon = \ddot{\varphi}$

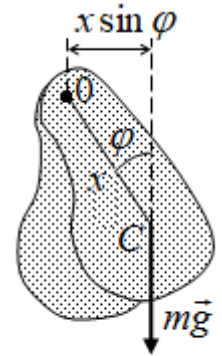


Рисунок 6.7

$$I\ddot{\varphi} = -mgx \cdot \sin \varphi. \quad (6.19)$$

За умови малих коливань, коли $\sin \varphi \approx \varphi$, отримуємо диференціальне рівняння

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgx}{I} \varphi = 0, \quad (6.20)$$

розв'язок якого має вигляд

$$\varphi = \varphi_{\max} \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (6.21)$$

де $\varphi_{\max}$ – максимальне кутове відхилення (амплітуда), а ω_0 – **власна кутова частота**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgx}{I}}. \quad (6.22)$$

Період коливань фізичного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgx}} = \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (6.23)$$

де x – відстань між центром мас тіла та горизонтальною віссю; I – момент інерції тіла відносно осі коливань, який зазвичай знаходять за допомогою теореми Штейнера.

Величина

$$L = \frac{I}{m\chi} \quad (6.24)$$

є *зведеною довжиною* фізичного маятника, яка є довжиною такого математичного маятника, період коливань якого дорівнює періоду коливань відповідного фізичного маятника.

6.1.4. Додавання гармонічних коливань, спрямованих вздовж однієї прямої. Биття

Тіло може брати участь одночасно у декількох коливальних процесах, тому виникає необхідність визначити результуюче коливання цього тіла. При цьому вислідне зміщення тіла дорівнює геометричній сумі незалежних зміщень, які отримує тіло у кожному коливальному русі окремо.

Нехай точка бере участь у двох коливальних процесах, які відбуваються в одному напрямку з однаковою частотою ω_0 , але мають різні амплітуди A_1 та A_2 і різні початкові фази α_1 і α_2

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2). \end{cases} \quad (6.25)$$

Результатом додавання цих двох коливань x_1 і x_2 буде результуюче гармонічне коливання $x = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$, в рівнянні якого треба визначити вислідну амплітуду A і початкову фазу α .

Найпростіше це зробити за допомогою векторної діаграми. **Векторна діаграма** – графічне зображення змінних за законом синуса (косинуса) величин і співвідношень між ними за допомогою спрямованих відрізків (векторів).

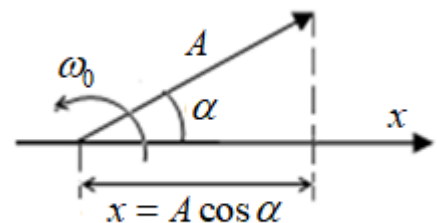


Рисунок 6.8

Принцип її побудови базується на тому, що проекція відрізка (вектора) A , який утворює з віссю x кут α , при обертанні зі швидкістю ω_0 змінюється за

гармонічним законом, тобто пропорційно косинусу (рис. 6.8).

Представимо обидва коливання за допомогою векторів (рис. 6.9), модулі яких дорівнюють амплітудам A_1 і A_2 відповідних коливань, а самі вектори у початковий момент часу утворюють кути α_1 та α_2 з віссю x . Оскільки обидва вектори обертаються з однаковою кутовою швидкістю ω_0 , то кут між ними у будь-який момент часу є незмінним.

Результуюче коливання є

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2) = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (6.26)$$

Амплітуда результуючого коливання A знаходиться за теоремою косинусів як сторона трикутника, що утворюють вектори A_1 , перенесений вектор A_2 і вислідний вектор A :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\alpha}, \quad (6.27)$$

а початкову фазу α можна знайти з прямокутного трикутника з катетами $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ та гіпотенузою A як

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \quad (6.28)$$

Згідно з (6.27), амплітуда результуючого коливання залежить від різниці фаз коливань, що додаються, $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$.

Розглянемо докладніше деякі випадки:

а) $\Delta\alpha = \pm 2\pi k$, де $k = 0, 1, 2, \dots$ $\cos \Delta\alpha = 1$. Амплітуда результуючого коливання найбільша.

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} = |A_1 + A_2|. \quad (6.29)$$

б) $\Delta\alpha = \pm(2k+1)\pi$, де $k = 0, 1, 2, \dots$ $\cos \Delta\alpha = -1$. Амплітуда результуючого коливання найменша.

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} = |A_1 - A_2|. \quad (6.30)$$

в) $\Delta\alpha = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$, де $k = 0, 1, 2, \dots$, $\cos\Delta\alpha = 0$. Результируюча амплітуда є

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}. \quad (6.31)$$

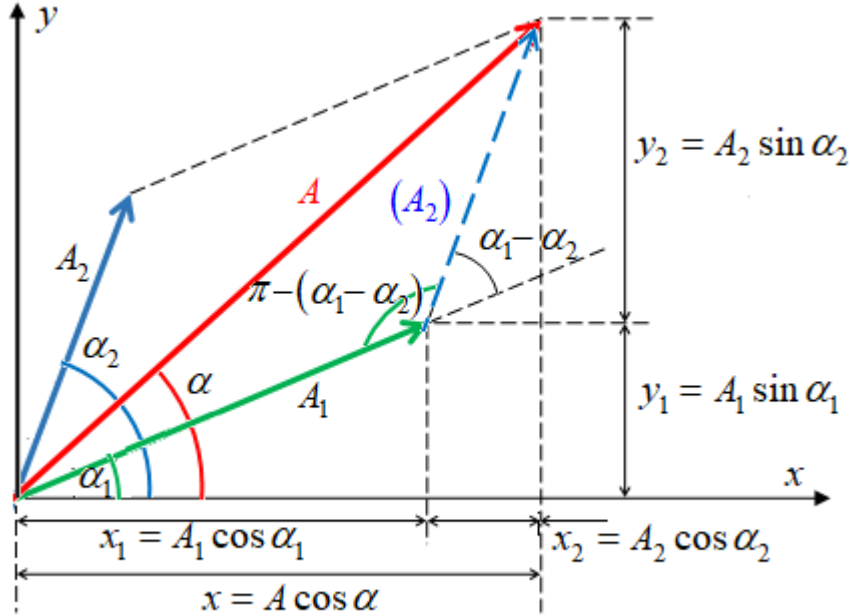


Рисунок 6.9

При додаванні двох гармонічних коливань з різними частотами різниця фаз $\Delta\alpha$ між коливаннями змінюється і результируюче коливання стає складною функцією часу. Якщо гармонічні коливання, що додаються, мають близькі значення частот ω_1 і ω_2 ($\omega_1 \approx \omega_2$):

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1), \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \end{cases} \quad (6.32)$$

то в результаті їх додавання відбуваються коливання з амплітудою, що періодично змінюється. Такі коливання мають назву **биття** (рис. 6.10).

Якщо взяти $A_1 = A_2 = A$ та позначити $\omega_1 = \omega$ і $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$ ($\omega \gg \Delta\omega$), а початок відліку обрати так, щоб початкові фази обох коливань дорівнювали нулю, то додаючи рівняння

$$\begin{cases} x_1 = A \cos \omega t, \\ x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t, \end{cases} \quad (6.33)$$

і нехтуючи $\frac{\Delta\omega}{2}$ (оскільки $\frac{\Delta\omega}{2}t \ll 2\omega t$), отримуємо

$$x = A \left[\cos \omega t + \cos \left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \right] = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t. \quad (6.34)$$

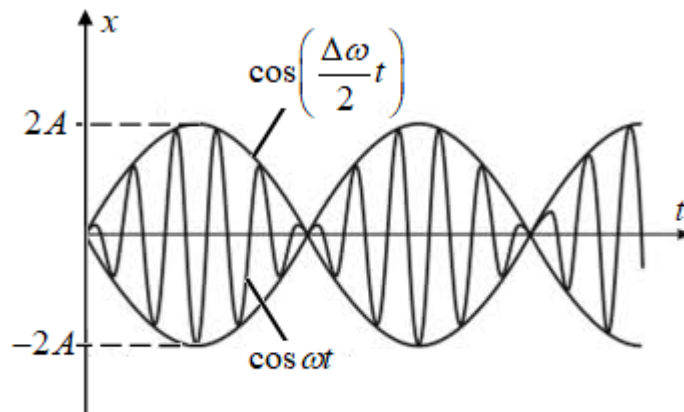


Рисунок 6.10

В отриманому рівнянні перший співмножник змінюється повільно, а другий – швидко. Таке результуюче коливання можна розглядати як гармонічне з частотою ω та амплітудою биття $A_{\text{б}}$, яка змінюється як

$$A_{\text{б}} = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (6.35)$$

Зміщення точки у випадку биття описується рівнянням

$$x = A_{\text{б}} \cos \omega t. \quad (6.36)$$

Биття широко використовуються у техніці і є найпростішим видом так званих **модульованих** коливань.

6.1.5. Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Розглянемо випадок, коли тіло бере участь у двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливаннях однакової частоти відносно координатних осей x і y .

Виберемо початок відліку часу так, щоб початкова фаза першого коливання дорівнювала нулю. Тоді рівняння коливань мають такий вигляд

$$\begin{cases} x = A \cos \omega_0 t, \\ y = B \cos(\omega_0 t + \alpha), \end{cases} \quad (6.37)$$

де α – це різниця (зсув) фаз коливань, що додаються.

Система (6.37) задає траєкторію руху точки (рис. 6.11), що коливається, яка є рівнянням еліпса в параметричному вигляді, тобто зміщення точки відносно осей є залежними від параметра – часу t . Виключаючи змінну t з обох рівнянь системи (6.37), отримуємо рівняння еліпса в канонічному вигляді

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha = \sin^2 \alpha, \quad (6.38)$$

де α є фактичною різницею фаз між двома коливаннями.

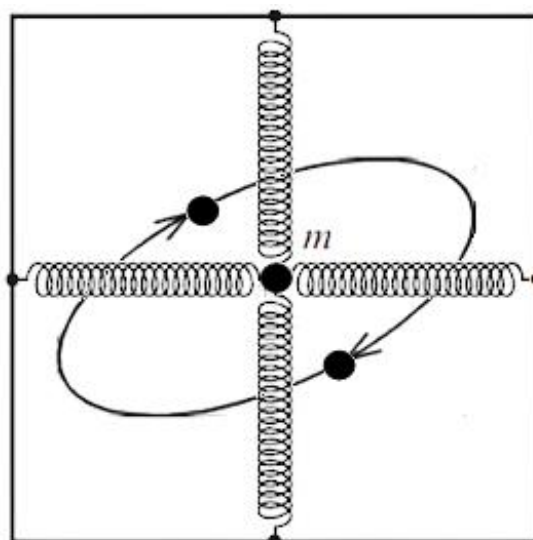


Рисунок 6.11

В загальному випадку траєкторією руху є еліпс (рис. 6.12), тому такі коливання називаються **еліптично поляризованими**. Орієнтація осей еліпса і його розміри залежать від A і B – амплітуд коливань, що складаються, і різниці фаз α (рис. 6.12).

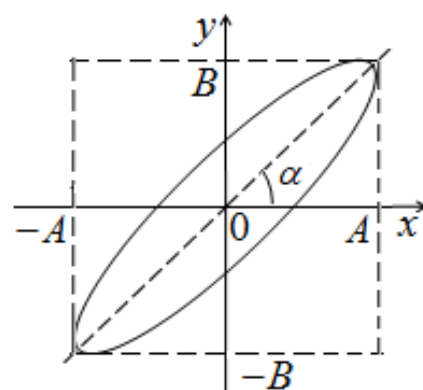


Рисунок 6.12

В залежності від різниці фаз α спостерігаються особливі форми траєкторії.

1. $\alpha = \pm 2\pi k, k = 0, 1, 2, \dots$

$$y = \frac{B}{A}x. \quad (6.39)$$

Траєкторією руху є пряма (рис. 6.13, а), що проходить через 1 і 3 квадранти координатної системи. Це гармонічне коливання з амплітудою $\sqrt{A^2 + B^2}$ та частотою ω_0 .

$$2. \alpha = \pm(2k+1)\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$y = -\frac{B}{A}x. \quad (6.40)$$

Траєкторією руху є пряма (рис. 6.13, б), що проходить через 2 і 4 квадранти координатної системи. Це гармонічне коливання з амплітудою $\sqrt{A^2 + B^2}$ і частотою ω_0 .

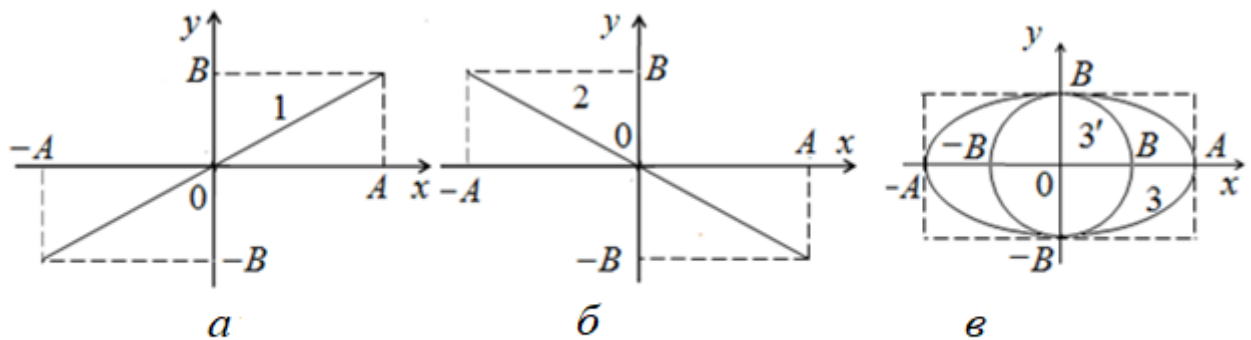


Рисунок 6.13

В 1 і 2 випадках відбуваються *лінійно поляризовані* коливання.

$$3. \alpha = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (6.41)$$

Це рівняння еліпса (рис. 6.13, в), осі якого збігаються з осями координат, а півосі дорівнюють відповідним амплітудам. Результуюче коливання в цьому випадку називається *еліптично поляризованим*.

Коли амплітуди є рівними, $A = B$, еліпс вироджується в коло (рис. 6.13. в).

Такі коливання називаються **циркулярно поляризованими** коливаннями або коливаннями, **поляризованими по колу**.

Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань різні, то траєкторії руху тіла мають вигляд замкнутих (відношення частот – раціональне число) та незамкнутих (відношення частот – ірраціональне число) кривих, які отримали назву **фігур Ліссажу**. Форма цих кривих залежить від співвідношення амплітуд, частот і різниці фаз коливань.

6.1.6. Вільні згасаючі коливання

В будь-якій реальній коливальній системі є сили опору і тертя, дія яких призводить до зменшення енергії системи, тому коливання будуть згасати з плином часу. **Згасанням** називається поступове спадання амплітуди коливань, обумовлене втратою енергії коливальної системи. Вільні коливання реальних систем завжди згасають. Коливання, що відбуваються з постійною втратою енергії, що була в системі на початку процесу, називаються **згасаючими коливаннями**.

Якщо швидкість тіла у середовищі незначна, то сила опору $F_{\text{оп}}$ пропорційна швидкості тіла $v = \frac{dx}{dt}$

$$F_{\text{оп}} = -rv = -r \frac{dx}{dt}, \quad (6.41)$$

де r – **коефіцієнт опору** середовища, в якому відбуваються коливання.

$$[r] = \frac{\text{кг}}{\text{с}}.$$

Якщо на коливальну систему діє квазіпружна сила $F = -kx$ та сила опору, то відповідно до 2-го закону Ньютона, рівняння руху осцилятора в проєкції на горизонтальну вісь є

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}. \quad (6.42)$$

Диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань лінійної системи

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (6.43)$$

Якщо ввести коефіцієнти β та ω_0 , то рівняння (6.43) набуває вигляду

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6.44)$$

де

$$\beta = \frac{r}{2m} \quad (6.45)$$

називається **коефіцієнтом загасання**, а величина

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

є **власною кутовою частотою**, тобто частотою коливань даної коливальної системи у відсутності тертя.

$$[\beta] = \frac{1}{c} = c^{-1}.$$

Якщо $\beta < \omega_0$, то розв'язок однорідного диференційного рівняння (6.44) є **рівнянням вільних згасаючих коливань**

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (6.46)$$

де $e = 2,71828\dots$ – основа натурального логарифму.

Амплітуда згасаючих коливань змінюється з часом за експоненціальним законом

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad (6.47)$$

де A_0 – амплітуда коливань у початковий момент часу ($t = 0$).

Кутова частота згасаючих коливань

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (6.48)$$

залежить від власної частоти незгасаючих коливань ω_0 і коефіцієнту загасання β .

За відсутності опору в системі ($\beta = 0$) $\omega = \omega_0$.

За умови слабого загасання період T згасаючих коливань залишається

постійним протягом процесу коливань і тому називається **умовним періодом згасаючих коливань** (рис. 6.14).

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (6.49)$$

Повна механічна енергія коливальної системи пропорційна квадрату амплітуди $E(t) \sim A^2(t)$, тому й енергія коливань з часом зменшується за експоненціальним законом:

$$E(t) = E_0 e^{-2\beta t}, \quad (6.50)$$

де E_0 – початкова енергія коливальної системи.

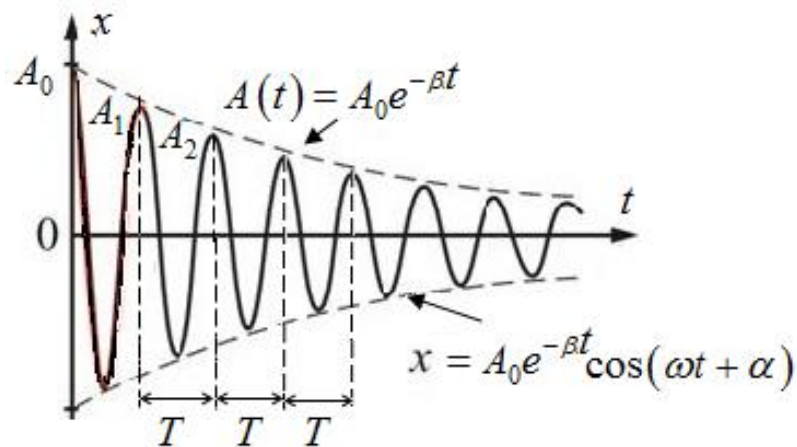


Рисунок 6.14

Декремент згасання D показує, як зменшується амплітуда коливань за один період T :

$$D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta t} \cdot e^{-\beta T}} = \frac{1}{e^{-\beta T}} = e^{\beta T}. \quad (6.51)$$

Логарифмічний декремент згасання є натуральним логарифмом декременту

$$\delta = \ln D = \ln(e^{\beta T}) = \beta T. \quad (6.52)$$

Декремент та логарифмічний декремент є безрозмірними фізичними

величинами:

$$[D]=1; [\delta]=1.$$

Час τ , за який амплітуда згасаючих коливань зменшиться у $e = 2,71828...$ разів, називається *часом релаксації*.

$$\frac{A_0}{A(\tau)} = \frac{A_0}{A_0 e^{-\beta\tau}} = e^{-\beta\tau} = e, \quad (6.53)$$

тоді час релаксації:

$$\tau = \frac{1}{\beta}. \quad (6.54)$$

$$[\tau] = \text{с}.$$

Враховуючи вираз (6.54), встановимо фізичний сенс величини δ :

$$\delta = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{\frac{\tau}{T}} = \frac{1}{N_e}, \quad (6.55)$$

де N_e – кількість коливань, які зробить система за час, протягом якого амплітуда її коливань зменшується в e разів.

Важливою характеристикою коливальної системи є *добротність* Q

$$Q = \frac{\pi}{\delta}, \quad (6.56)$$

яка є безрозмірною величиною

$$[Q]=1.$$

Враховуючи (6.55),

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\beta T} = \pi N_e, \quad (6.57)$$

тобто добротність пропорційна числу коливань N_e , що система здійснює за час релаксації τ , за який амплітуда коливань зменшується в e разів.

6.1.7. Вимушені механічні коливання. Резонанс

Для підтримки незгасаючих гармонічних коливань в реальній системі необхідно періодично поповнювати втрати механічної енергії внаслідок роботи зовнішньої сили, яка періодично діє на коливальну систему та змінюється з часом за гармонічним законом:

$$F = F_0 \cos \omega t, \quad (6.58)$$

де F_0 – амплітуда зовнішньої сили; ω – частота зовнішньої сили.

Незгасаючі коливання, які відбуваються внаслідок дії зовнішньої сили (6.58) на коливальну систему, називаються **вимушеними**, а сила F_0 – **змушуючою силою** (рис. 6.15).

Якщо на осцилятор, крім зовнішньої сили, діють квазіпружна сила та сила опору, то рівняння руху згідно з 2-м законом Ньютона має вигляд

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t.$$

Розділимо це рівняння на масу m коливальної системи та введемо такі позначення $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ і $\frac{r}{m} = 2\beta$.

Тоді диференціальне рівняння вимушених коливань набуває вигляду

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (6.59)$$

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (6.60)$$

Рівняння (6.60) є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Його загальний розв'язок дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного диференційного рівняння (6.44), яке характеризує згасаючі коливання, та частинного розв'язку неоднорідного диференційного рівняння (6.60), що описує вимушені коливання. Розв'язок дає зміщення точки (тіла)

$$x = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (6.61)$$

Амплітуда вимушених коливань

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (6.62)$$

залежить від співвідношення частоти змушуючої сили ω і власної частоти ω_0 . Максимальне значення амплітуди відповідає частоті, яка називається **резонансною частотою**

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (6.63)$$

а явище різкого збільшення амплітуди вимушених коливань при наближенні частоти змушуючої сили до значення $\omega_{\text{рез}}$ називається **явищем резонансу**. Коли частота змушуючої сили дорівнює $\omega_{\text{рез}}$ амплітуда набуває значення

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (6.64)$$

На рис. 6.15 показані залежності амплітуди вимушених коливань в залежності від частоти змушуючої сили (амплітудні резонансні криві) для різних значень коефіцієнта згасання β , з яких видно, що резонансна амплітуда коливань зростає зі зменшенням згасання: чим менше загасання, тим вище і правіше лежить максимум резонансної кривої. За відсутності опору середовища амплітуда при резонансі зверталася б в нескінченність. Відповідно до (6.64) резонансна частота за тих же умов збігалася би із власною частотою ω_0 коливань системи.

Явище резонансу часто спостерігається у природі та відіграє величезну роль техніці. В механіці з ним стикаються при роботі різних механізмів і споруд, коли досить часто резонанс призводить до серйозних негативних наслідків. Але у ряді

випадків резонанс буває доволі корисним, наприклад, в акустиці, в музичних інструментах тощо.

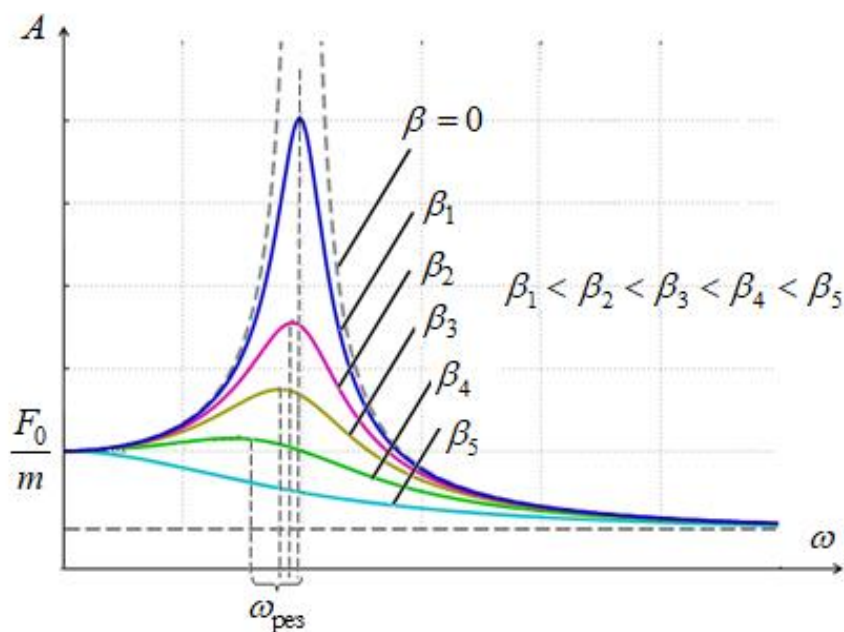


Рисунок 6.15

6.1.8. Хвилі. Класифікація хвильового руху

Якщо в будь-якому місці пружного (твердого, рідкого або газоподібного) середовища збудити коливання його частинок, то внаслідок взаємодії між частинками, це коливання розповсюдиться від частинки до частинки з деякою швидкістю v . Процес поширення коливань у середовищі називається **хвилею**. Оскільки зв'язок між частинками обумовлений пружними силами, то хвилі, що виникають в такому середовищі, називають **пружними**. Тіло, що збуджує хвилі, є джерелом хвиль. Напрямок розповсюдження хвилі називають **променем**.

Частинки середовища, в якому розповсюджується хвиля, не переміщуються разом з хвилею, а лише здійснюють коливання поблизу своїх положень рівноваги, тобто хвиля не переносить масу. Частинка, що коливається, віддає свою енергію в зовнішнє середовище. Оскільки частинки пружного середовища взаємозв'язані та взаємодіють між собою, коливальний процес супроводжується перенесенням енергії та імпульсу.

В залежності від напрямку коливань частинок, відносно до напрямку розповсюдження хвилі, розрізняють поздовжні та поперечні хвилі.

В **поздовжній** хвилі (рис. 6.16, а) частинки середовища здійснюють коливання вздовж напрямку розповсюдження хвилі. Поздовжні хвилі, які по суті є створеннями по черзі стиснень та розтягнень, відбуваються у всіх середовищах – рідких, газоподібних та твердих.

В **поперечній** хвилі (рис. 6.16, б) частинки середовища здійснюють коливання перпендикулярно до напрямку розповсюдження хвилі. Пружні поперечні хвилі можуть виникати у середовищах завдяки деформації зсуву, тому такі хвилі можуть виникати тільки у твердих тілах.

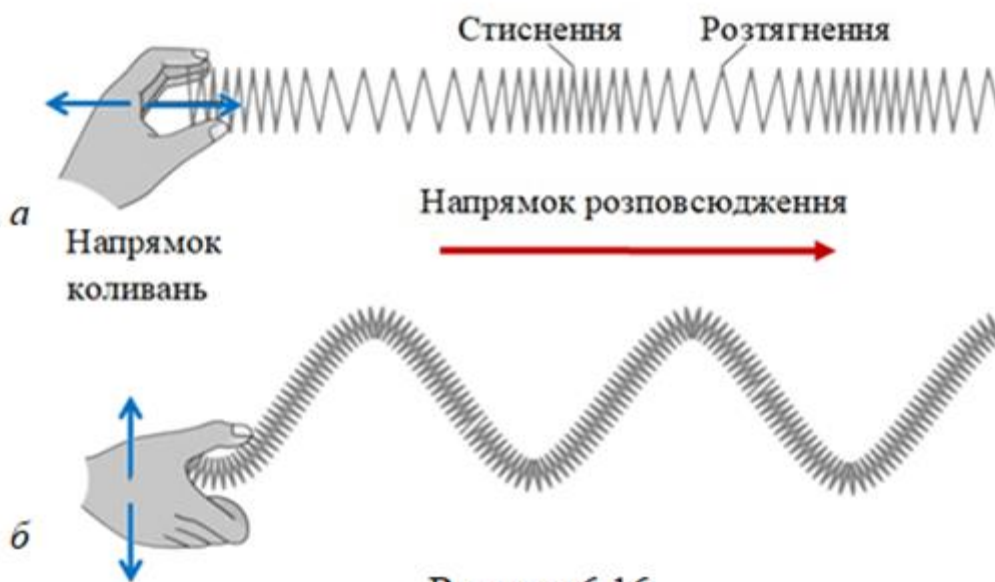


Рисунок 6.16

Хвилі поширюються в усіх напрямках від будь-якої точки збурення, яке їх створило. Якщо збурення невелике, ми можемо розглядати його як одну точку. Тоді залежно від форми середовища, в якому поширюються хвилі, вони можуть бути **одновимірними** (лінійними), **двовимірними** (круговими) і **тривимірними** (сферичними) хвилями.

Класифікуючи хвилі за тривалістю, ми повинні відзначити **епізодичні** (або пульсові) хвилі, коли збурення миттєве, а також **періодичні** (або гармонічні) хвилі, коли збурення повторюється через рівні проміжки часу.

Класифікуючи хвилі за поширенням, розрізняють **біжучі** та **стоячі** хвилі.

Біжучі хвилі – це хвилі, які поширюються в середовищі та переносять енергію. Стоячі хвилі не поширюються у просторі, але у них є області, де збурення хвилі досить мале, майже нульове. Ці місця називають **вузлами**. Існують також області, де порушення є досить інтенсивними, більшими, ніж будь-де в середовищі, які називаються **пучностями**.

Якщо джерело хвилі коливається з частотою ν , то кожна точка відповідного середовища коливається з тією ж частотою. Геометричне місце точок, до яких доходить хвиля у момент часу t , називається **хвильовим фронтом (фронтом хвилі)**. Хвильовий фронт поділяє простір на дві частини: на внутрішню, де вже існує хвильовий процес, та на зовнішню, де частинки середовища ще не здійснюють коливань. Кожна хвиля має один фронт, котрий постійно переміщується у просторі.

Геометричне місце точок, що здійснюють коливання з однаковими фазами, називається **хвильовою поверхнею**. Хвильову поверхню можна провести через будь-яку точку простору, який охоплений хвильовим процесом, тобто хвильових поверхонь багато. На відміну від фронту, хвильові поверхні залишаються нерухомими.

Залежно від форми хвильової поверхні розрізняють різні типи хвиль. Прості типи – **плоскі, сферичні** та **циліндричні**. Для плоскої хвилі хвильові поверхні – це ряд паралельних площин, для сферичної – концентричні сфери навколо джерела хвилі, а для циліндричних – ряд коаксіальних циліндрів навколо однієї з координатних осей.

6.1.9. Математичний опис біжучої хвилі

Рівнянням хвилі називають вираз, котрий дозволяє визначити зміщення ξ частинки від її положення рівноваги, яке знаходиться у точці з координатами x , y , z в будь-який момент часу t .

Припустимо, що плоска хвиля рухається зліва направо вздовж осі x (рис.

6.17), а частинка в початку координат (джерело коливань) здійснює гармонічні коливання відповідно до рівняння

$$\xi(0,t) = A \cos(\omega t + \alpha), \quad (6.65)$$

де ξ – зміщення точки від положення рівноваги, A – максимальне зміщення точки від положення рівноваги (амплітуда), t – час, $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ – кутова частота коливань, T – період коливань.

Для частинки на відстані x від початку координат 0 фаза коливань буде відрізнятися від фази в точці 0, оскільки хвилі потрібен час $\tau = x/v$, щоб досягти точки x . Отже, зміщення будь-якої частинки на відстані x від початку координат визначається як

$$\xi(x,t) = A \cos[\omega(t - \tau) + \alpha] = A \cos\left(\omega t - \omega \frac{x}{v} + \alpha\right) = A \cos(\omega t - kx + \alpha),$$

де $k = \frac{\omega}{v}$ – **хвильове число**.

$$[k] = \text{м}^{-1}.$$

Довжина хвилі λ – найменша відстань, між двома точками, які коливаються в одній фазі

$$\lambda = vT. \quad (6.66)$$

$$[\lambda] = \text{м}.$$

Виходячи з (6.66), довжину хвилі можна визначити як відстань, на яку поширюється хвиля за час, що дорівнює одному періоду коливань T .

Рівняння плоскої біжучої хвилі, що розповсюджується в додатному напрямку осі x , має вигляд

$$\xi(x,t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \alpha\right), \quad (6.67)$$

а хвильове число k можна записати

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (6.68)$$

У загальному випадку, коли хвиля поширюється у довільному напрямку в просторі (тривимірний випадок), *рівняння хвилі*, яке визначає зміщення точки, набуває вигляду

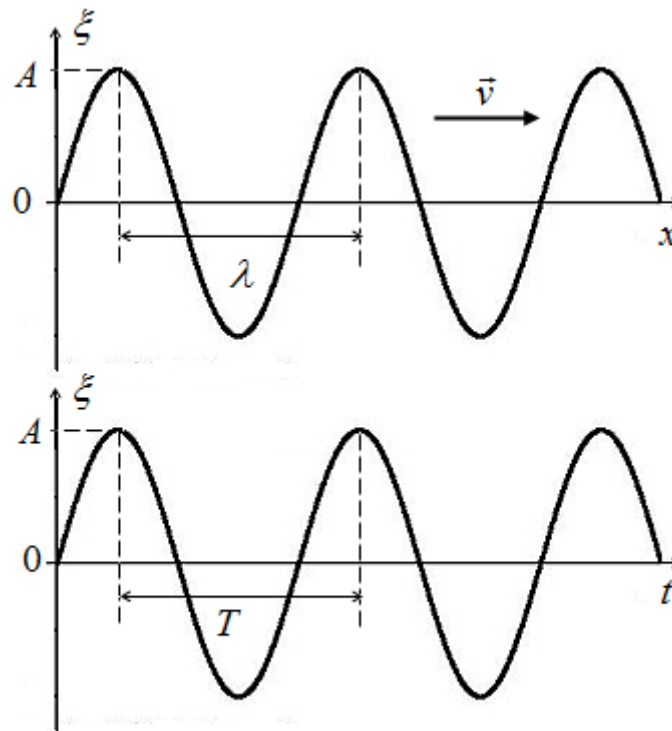


Рисунок 6.17

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha), \quad (6.69)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки, зміщення ξ якої визначається, $\vec{k}$ – хвильовий вектор, який має напрямок вздовж поширення хвилі, а величиною якого є хвильове число (6.68).

Кожна точка пружного середовища, в якому розповсюджується хвиля, здійснює коливання, швидкість і прискорення якого визначаються як перша і друга частинні похідні від зміщення за часом

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -A\omega \cdot \sin(\omega t - kx + \alpha), \quad (6.70)$$

$$\ddot{\xi} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (6.71)$$

З рівнянь (6.70) і (6.71) максимальні значення швидкості та прискорення

частинки становлять, відповідно,

$$\dot{\xi}_{\max} = A\omega, \quad (6.72)$$

$$\ddot{\xi}_{\max} = A\omega^2. \quad (6.73)$$

Слід пам'ятати, що хвиля розповсюджується з постійною швидкістю

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu = \frac{\lambda\omega}{2\pi}, \quad (6.74)$$

а кожна частинка рухається зі швидкістю, що змінюється з часом згідно з (6.70).

Різниця фаз (зсув фаз, фазовий зсув) для двох точок на промені плоскої біжучої хвилі, віддалених одна від одної на відстань Δx , дорівнює

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x, \quad (6.75)$$

де Δx – **різниця ходу** – різниця довжини шляхів.

6.2.3. Хвильове рівняння

Рівняння плоскої біжучої хвилі (6.67) є розв'язком диференціального рівняння, що називається хвильовим рівнянням.

Хвильове рівняння – це диференціальне рівняння другого порядку у частинних похідних, яке описує розповсюдження хвиль у просторі.

Отримаємо це рівняння, використовуючи рівняння хвилі (6.69) і припускаючи, що початкова фаза $\alpha = 0$.

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}). \quad (6.76)$$

Похідні першого та другого порядків (6.76) за часом є

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= -A\omega \cdot \sin(\omega t - kr), \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -A\omega^2 \cdot \cos(\omega t - kr) = -\omega^2 \cdot \xi. \end{aligned} \quad (6.77)$$

тому з (6.77) зміщення

$$\xi = -\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (6.78)$$

Перепишемо рівняння (6.76) у вигляді

$$\xi(x, y, z, t) = A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z), \quad (6.79)$$

і знайдемо другу частинну похідну від нього за змінною x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= A k_x \sin(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z), \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= -A k_x^2 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = -k_x^2 \cdot \xi. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Подібно до (6.80), другі частинні похідні (6.79) за y і z є

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -A k_y^2 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = -k_y^2 \cdot \xi, \quad (6.81)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -A k_z^2 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = -k_z^2 \cdot \xi. \quad (6.82)$$

Суму частинних похідних (6.80), (6.81) і (6.82) можна записати з урахуванням (6.78) у вигляді

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \xi = -k^2 \cdot \xi = k^2 \cdot \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (6.83)$$

Вводячи оператор Лапласа (або лапласіан) $\Delta \xi$, що є позначенням відповідної математичної дії

$$\Delta \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2},$$

перепишемо (6.83) у вигляді

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (6.84)$$

Вираз (6.84) є *хвильовим рівнянням*.

Хвильове рівняння для одновимірної хвилі має вигляд

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (6.85)$$

6.1.10. Енергія, яку переносить хвиля. Вектор Умова

Хвилі, що поширюються в середовищі, переносять енергію з одного місця в інше. Ця енергія складається з кінетичної енергії частинок, що коливаються, і потенціальної енергії деформованих ділянок пружного середовища. Енергія, яка переноситься хвилею через деяку площадку S (рис. 6.18) за одиницю часу, називається **потокем енергії** через цю поверхню.

$$\Phi = \frac{dW}{dt}. \quad (6.86)$$

$$[\Phi] = \text{Дж} \cdot \text{с}^{-1} = \text{Ват} = \text{Вт}.$$

Густина потоку енергії або **інтенсивність** I хвилі характеризується кількістю енергії, що протікає за одиницю часу через одиницю площі, орієнтовану перпендикулярно до спрямованості потоку.

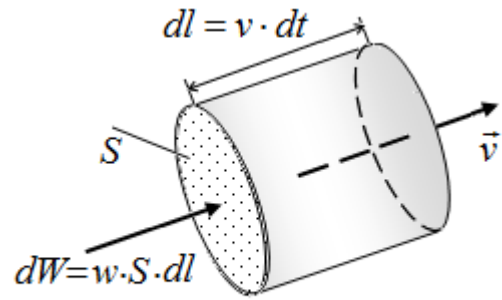


Рисунок 6.18

$$I = \frac{dW}{dt \cdot dS_{\perp}}. \quad (6.87)$$

$$[I] = \text{Дж} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} = \text{Вт} \cdot \text{м}^{-2}.$$

Переміщення ділянки хвильового фронту, що рухається зі швидкістю v , за інтервал часу Δt становить l . Якщо ввести поняття **густини енергії** w як середньої енергії частинок в одиниці об'єму, то енергія, що проходить через будь-яку площадку $S_{\perp}$ за час Δt , дорівнює $\Delta W = w \cdot S \cdot v \cdot \Delta t$. Тоді інтенсивність хвилі є

$$I = \frac{w \cdot S_{\perp} \cdot v \cdot \Delta t}{S_{\perp} \cdot \Delta t} = w \cdot v, \quad (6.88)$$

$$[w] = \text{Дж} \cdot \text{м}^{-3}.$$

У векторній формі вираз (6.89) дає визначення **вектора Умова**

$$\vec{I} = w \cdot \vec{v}, \quad (6.89)$$

як вектора густини потоку енергії, що чисельно дорівнює енергії, яка переноситься в одиницю часу через одиничну площадку, розташовану перпендикулярно напрямку поширення енергії в даній точці.

Якщо енергія кожної частинки дорівнює $\frac{m\omega^2 A^2}{2}$, а кількість частинок в одиниці об'єму дорівнює n , то густина енергії та інтенсивність становлять, відповідно,

$$w = n \cdot \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{\rho\omega^2 A^2}{2}, \quad (6.90)$$

$$I = \frac{\rho\omega^2 A^2}{2} \cdot v, \quad (6.91)$$

де ρ – густина середовища.

6.1.11. Суперпозиція хвиль. Інтерференція

В середовищі одночасно можуть розповсюджуватися декілька хвиль, які викликані різними джерелами. Якщо середовище є лінійним (пружним), виконується **принцип суперпозиції**: коли дві або більше хвиль проходять одночасно через те ж саме середовище, кожна хвиля поширюється незалежно, як ніби інших хвиль немає, а результуюче зміщення будь-якої частинки є векторною сумою зміщень, які давали б хвилі, якби поширювалися окремо.

Дві хвилі однакової частоти (або довжини хвилі), що мають однакову фазу або фіксовану різницю фаз, яка залишається постійною з часом, називаються **когерентними** хвилями. Коли дві або більше когерентних хвиль перекриваються, виникає явище інтерференції.

Розглянемо дві хвилі, що поширюються від двох близько розташованих

джерел, які збуджують коливання одного напрямку в точці, значно віддаленій від них. Амплітуда результуючого коливання згідно (6.27) становить

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi. \quad (6.92)$$

Інтенсивність хвилі I є пропорційною A^2 , тому результуюча інтенсивність в точці спостереження є

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos \Delta\varphi, \quad (6.93)$$

де I_1 і I_2 – інтенсивності, що створюється кожною з хвиль окремо, а $\Delta\varphi$ – різниця їх фаз.

Якщо хвилі мають однакові інтенсивності $I_1 = I_2 = I_0$, вираз (6.93) набуває вигляду

$$I = 2I_0 + 2I_0 \cos \Delta\varphi = 2I_0(1 + \cos \Delta\varphi). \quad (6.94)$$

Інтенсивність у точках, куди приходять хвилі, залежить від косинуса різниці фаз. У результаті дві хвилі можуть посилювати одна одну або вони можуть скасовувати вплив одна одної.

Явище перерозподілу інтенсивності при накладанні когерентних хвиль називається *інтерференцією*.

1. Якщо $\cos \Delta\varphi = 1$, $I = 2I_0 + 2I_0 \cos \Delta\varphi = 4I_0$, тобто інтенсивність в точці спостереження набуває максимального значення. Різниця фаз $\Delta\varphi = \pm 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, тому з $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \pm 2\pi k$ маємо *умову інтерференційного максимуму*

$$\Delta = \pm k\lambda = \pm 2k \frac{\lambda}{2}. \quad (6.95)$$

2. Якщо $\cos \Delta\varphi = -1$, $I = 2I_0 - 2I_0 \cos \Delta\varphi = 0$, тобто інтенсивність в точці спостереження мінімальна. Різниця фаз $\Delta\varphi = \pm(2k + 1)\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$, тому з $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \pm(2k + 1)\pi$ маємо *умову інтерференційного мінімуму*

$$\Delta = \pm(2k + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (6.96)$$

Явище інтерференції притаманне хвильовим процесам будь-якої природи та типу. Тому спостерігається як для поперечних, так і для поздовжніх хвиль; як для механічних, так і для світлових хвиль.

Якщо на поверхні води за допомогою горизонтальної пластини закріпити дві невеликі кульки, а пластину змусити коливатися, то кульки будуть ударятися об поверхню води та відігравати роль двох точкових джерел пружних хвиль, від кожного з яких поширюватиметься хвиля (рис. 6.19). На

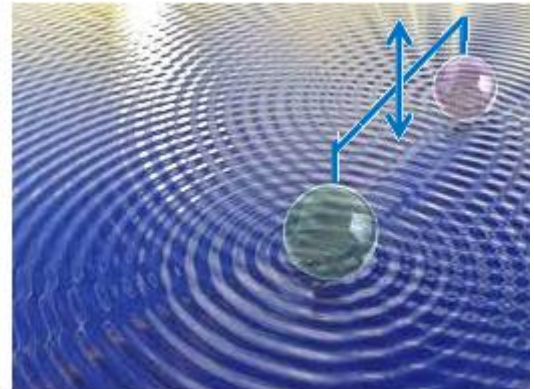


Рисунок 6.19

поверхні води утворюється інтерференційна картина, у якій чергуватимуться точки, де коливання посилюють одне одного, і точки, де коливань немає зовсім. Отже, на поверхні води утворюється картина перерозподілу енергії коливань з утворенням інтерференційних максимумів і мінімумів.

6.1.12. Стоячі хвилі

Особливим випадком інтерференції є **стоячі хвилі**, тобто хвилі, що утворюються при накладенні двох біжучих хвиль з однаковими частотами та амплітудами, які розповсюджуються назустріч одна одній, а у разі поперечних хвиль – ще й мають однаковий напрямок коливань частинок середовища (однакову поляризацію) (рис. 6.20). Практично стоячі хвилі виникають при віддзеркаленнях хвиль від перешкод і неоднорідностей у результаті накладення

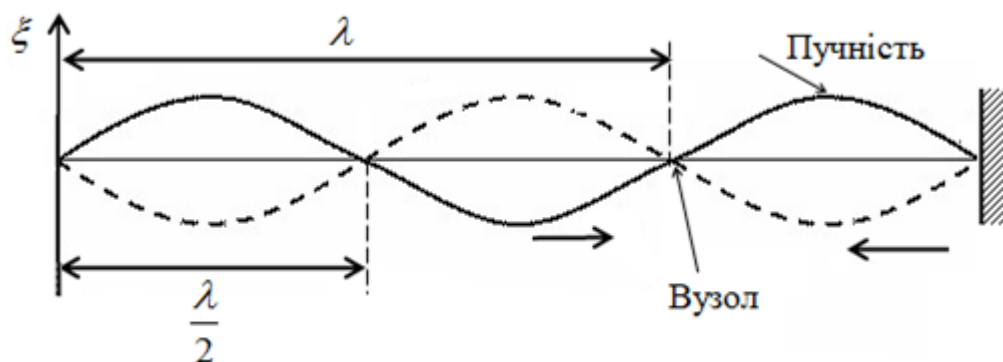


Рисунок 6.20

відбитої хвилі на пряму. Різні ділянки стоячих хвиль коливаються в одній і тій самій фазі, але з різною амплітудою. В стоячих хвилях на відміну від біжучої хвилі не відбувається трансферу енергії.

Нехай дві плоскі біжучі хвилі – падаюча та відбита, поширюються вздовж осі x в протилежних напрямках назустріч одна одній.

$$\begin{cases} \xi_1 = A \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \\ \xi_2 = A \cos(\omega t + kx + \alpha_2). \end{cases} \quad (6.97)$$

Тоді згідно із принципом суперпозиції результуюче зміщення є

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right). \quad (6.98)$$

Якщо обрати точку відліку на осі x так, щоб $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$, а точку відліку на осі y , щоб $\alpha_2 + \alpha_1 = 0$, то **рівняння стоячої хвилі** буде

$$\xi = |2A \cos kx| \cdot \cos \omega t. \quad (6.99)$$

В кожній точці стоячої хвилі відбуваються гармонічні коливання з тією ж частотою ω , що має біжуча хвиля.

Амплітуда стоячої хвилі $|2A \cos kx|$ залежить від координати:

1) В точках, де $kx = \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm \pi m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, значення $\cos kx = \pm 1$, тому амплітуда дорівнює $|2A \cos kx| = |2A|$. Ці точки називаються **пучностями** і їх координати

$$x_{\text{пуч}} = \pm m \frac{\lambda}{2}, \quad (6.100)$$

Пучність – це точка стоячої хвилі, амплітуда коливань якої максимальна.

2) В точках, де $kx = \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm (2m + 1) \frac{\pi}{2}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, значення $\cos kx = 0$, тому амплітуда дорівнює $|2A \cos kx| = 0$. Ці точки називаються **вузлами** і їх

координати

$$x_{\text{вуз}} = \pm \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}. \quad (6.101)$$

Вузол – це точка стоячої хвилі, амплітуда коливань якої дорівнює нулю. Відстань між найближчими одна до одної пучностями або один до одного вузлами становить $\frac{\lambda}{2}$, а між вузлом та пучністю – $\frac{\lambda}{4}$.

Передача енергії в стоячій хвилі відсутня. Повна енергія коливань кожного елемента об'єму середовища, обмеженого сусідніми вузлом і пучністю, не залежить від часу. Вона лише періодично перетворюється з кінетичної енергії, зосередженої в основному біля пучності, в потенційну енергію пружно деформованого середовища (біля вузла). Відсутність передачі енергії є результатом того, що дві однакові хвилі, що рухаються в протилежних напрямках, передають однакову енергію.

Стоячі хвилі мають велике значення в музиці, тому що звук є комбінацією декількох коливань. Стоячі хвилі виникають у струнних та духових музичних інструментах. Правильний розрахунок довжини та жорсткості струн або довжини труби дозволяє домогтися найкращого звучання того чи іншого музичного інструменту.

6.2. Приклади розв'язання задач

Задача 6.2.1

Частинка здійснює гармонічні коливання $x = 0,2 \sin 2\pi t$ (м). Знайти кругову частоту і період коливань, а також шлях, який вона пройде за період.

Дано:	Розв'язання
$x = 0,2 \sin 2\pi t$	Одне повне коливання здійснюється за час, що дорівнює
$s = ? \omega_0 = ? T = ?$	періоду коливань.

Тіло, коливання якого задані, в початковий момент часу $t = 0$ знаходиться в положенні рівноваги

$$x(t) = x(0) = 0,2 \sin 2\pi t = 0,2 \sin 0 = 0.$$

За час, що дорівнює періоду, $t = T$, точка перейде у вкрай праве положення, повернеться у положення рівноваги, пройде його і дійде до вкрай лівого положення, і потім повернеться знову у вихідне положення. Таким чином, шлях, що подолає точка, дорівнюватиме чотирьом амплітудам: $s = 4A = 4 \cdot 0,2 = 0,8$ м.

Рівняння коливань є $x = A \sin \omega_0 t$. Порівнюючи з даним у задачі, знаходимо, що $\omega_0 = 2\pi$ рад/с. Період коливань становить

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ с.}$$

Відповідь: $s = 0,8$ м; $\omega_0 = 2\pi$ рад/с; $T = 1$ с.

Задача 6.2.2

Тіло здійснює гармонічні коливання згідно з рівнянням $x = 6 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ (м). Знайти зміщення, швидкість, прискорення та фазу в момент часу $t = 2$ с. Визначити також кутову швидкість, частоту та період коливань.

Дано:

$$x = 6 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ м}$$

$$\varphi = ? \quad x = ? \quad v = ? \quad a = ?$$

$$\omega = ? \quad \nu = ? \quad T = ?$$

Розв'язання

Фаза в рівнянні коливань є аргументом косинуса і дорівнює $\varphi = 3\pi t + \frac{\pi}{3}$. При $t = 2$ с вона становить

$$\varphi = 3\pi t + \frac{\pi}{3} \Big|_{t=2\text{с}} = 3\pi \cdot 2 + \frac{\pi}{3} = \frac{19\pi}{3} = 19,9 \text{ рад.}$$

Зміщення точки є

$$x = 6 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \Big|_{t=2\text{с}} = 6 \cos\left(3\pi \cdot 2 + \frac{\pi}{3}\right) = 6 \cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) = 3 \text{ м.}$$

Швидкість точки є першою похідною за часом від зміщення

$$v = \frac{dx}{dt} = -6 \cdot 3\pi \cdot \sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \Big|_{t=2\text{с}} = -18\pi \sin\left(\frac{19\pi}{3}\right) = -49 \text{ м/с.}$$

Знак «мінус» означає, що швидкість відносно зміщення спрямована у протилежний бік.

Прискорення тіла є першою похідною за часом від швидкості

$$a = \frac{dv}{dt} = -6 \cdot (3\pi)^2 \cdot \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \Big|_{t=2\text{с}} = -54\pi^2 \cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) = -266,5 \text{ м/с}^2.$$

Кутова швидкість із рівняння коливань є $\omega_0 = 3\pi$ рад/с.

Зі співвідношення частоти і кутової швидкості (кутової частоти) $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ частота коливань дорівнює

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{3\pi}{2\pi} = 1,5 \text{ Гц.}$$

Період коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2}{3} \text{ с} = 0,67 \text{ с.}$$

Відповідь: $\varphi = 19,9$ рад; $x = 3$ м; $v = -49$ м/с; $a = -266,5$ м/с²; $\omega_0 = 3\pi$ рад/с;

$$\nu_0 = 1,5 \text{ Гц; } T = 0,67 \text{ с.}$$

Задача 6.2.3

Коливання точка описуються залежністю $x = 5 \cos \omega_0 t$ (м), де $\omega_0 = 2 \text{ с}^{-1}$.

Знайти прискорення точки тоді, коли її швидкість дорівнює $v = 8 \text{ м/с}$.

Дано:	Розв'язання
$x = 5 \cos \omega_0 t$ (м)	Швидкість і прискорення точки, що бере участь у гармонічних коливаннях, описується формулами
$\omega_0 = 2 \text{ с}^{-1}$	$v = \dot{x} = -A\omega_0 \sin \omega_0 t$ і $a = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos \omega_0 t$.
$v = 8 \text{ м/с}$	
$a = ?$	З першого рівняння знайдемо

$$\sin \omega_0 t = -\frac{v}{A\omega_0}.$$

Для обчислення прискорення нам не потрібно знати час t , нам необхідно знати величину $\cos \omega_0 t$. Отже, використовуючи основну тригонометричну тотожність $\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t = 1$, значення $\cos \omega_0 t$ можна знайти як

$$\cos \omega_0 t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega_0 t} = \sqrt{1 - (v/A\omega_0)^2}.$$

Тоді шукане прискорення дорівнюватиме

$$a = -A\omega_0^2 \cos \omega_0 t = -A\omega_0^2 \sqrt{1 - (v/A\omega_0)^2}$$

$$a = -5 \cdot 2^2 \sqrt{1 - (8/5 \cdot 2)^2} = -12 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $a = -12 \text{ м/с}^2$.

Задача 6.2.4

Максимальні швидкість і прискорення частинки, яка здійснює простий гармонічний рух, дорівнюють $v_{\max} = 10 \text{ см/с}$ і $a_{\max} = 50 \text{ см/с}^2$, відповідно. Знайдіть амплітуду A і кутову частоту ω_0 , а також положення частинки x , коли її швидкість $v = 8 \text{ см/с}$, якщо $x(0) = 0$.

Дано:	Розв'язання
$v_{\max} = 10 \text{ см/с}$	Максимальні значення швидкості та прискорення з рівнянь вільних незгасаючих гармонічних коливань
$a_{\max} = 50 \text{ см/с}^2$	
$v = 8 \text{ см/с}$	
$x(0) = 0$	
$x = ?$	Розділивши перше рівняння на друге, отримуємо

$$\frac{a_{\max}}{v_{\max}} = \frac{A\omega_0^2}{A\omega_0} = \omega_0 = \frac{50}{10} = 5 \text{ рад/с.}$$

Амплітуда коливань з першого рівняння є

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega_0} = \frac{0,1}{5} = 0,02 \text{ м.}$$

В даних задачі вказано, що $x(0) = 0$. Це означає, що на початку спостереження, коли $t = 0$, зміщення точки дорівнює $x = 0$, що відповідає рівнянню коливань, записаному із застосуванням функції синус, а саме, $x = A \sin \omega_0 t$.

Тоді швидкість (як перша похідна) є $v = A\omega_0 \cos \omega_0 t$. З цього рівняння

$$\cos \omega_0 t = \frac{v}{A\omega_0} = \frac{0,08}{0,02 \cdot 5} = 0,8,$$

$$\sin \omega_0 t = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \omega_0 t} = \pm \sqrt{1 - 0,8^2} = \pm 0,6.$$

Шукане зміщення відповідно до напрямку руху становить

$$x = A \sin \omega_0 t = \pm 0,02 \cdot 0,6 = \pm 0,012 \text{ м.}$$

Відповідь: $x = \pm 0,012 \text{ м.}$

Задача 6.2.5

Точка бере участь у вільних гармонічних коливаннях з періодом $T = 4 \text{ с}$. Якщо рух починається з положення на відстані $x_1 = 4 \text{ см}$ від положення

рівноваги, знайдіть час, за який вона пройшла $\Delta x = 1$ см, і швидкість, яку вона тоді набула. За який час точка вона вперше досягне положення рівноваги?

Дано:

$$T = 4 \text{ с}$$

$$x_1 = 4 \text{ см}$$

$$\Delta x = 1 \text{ см}$$

$$t = ? \quad v = ? \quad \tau = ?$$

Розв'язання

Якщо рух починається з положення $x_1 = 4$ см, то це означає, що це положення є точкою максимального відхилення, тобто амплітудним положенням, тому

$$A = x_1 = 4 \text{ см. Кутова частота}$$

$$\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi/4 = \pi/2 \text{ рад/с.}$$

Тоді можна написати рівняння руху у вигляді, який узгоджується з умовою, що при $t = 0$ зміщення дорівнює амплітуді,

$$x = A \cos \omega_0 t.$$

Нова позиція, яка відстоїть на $\Delta x = 1$ см від початкової, відповідає $x_2 = x_1 - \Delta x = 4 - 1 = 3$ см.

$$\text{В цьому положенні } \cos \omega_0 t = \frac{x}{A} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Фаза $\omega_0 t = \arccos 0,75 = 0,72$ рад, звідки шуканий час становить

$$t = \frac{0,72}{\omega_0} = \frac{0,72 \cdot T}{2\pi} = \frac{0,72 \cdot 4}{2 \cdot 3,14} = 0,46 \text{ с.}$$

Швидкість частинки описується рівнянням $v = -A\omega_0 \sin \omega_0 t$ і тому в положенні x_2 дорівнюватиме

$$v = -A\omega_0 \sin \omega_0 t = -A\omega_0 \sqrt{1 - \cos^2 \omega_0 t} = -A\omega_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} = -\omega_0 \sqrt{A^2 - x^2}.$$

Підставляючи дані задачі, отримуємо

$$v = -\omega_0 \sqrt{A^2 - x^2} = -\frac{\pi}{2} \sqrt{4^2 - 3^2} = -4,2 \text{ см/с.}$$

Знак «мінус» означає, що частинка, що починала свій рух з крайнього правого положення, рухається наліво в бік положення рівноваги.

В точці рівноваги, коли $x_3 = 0$,

$$0 = A \cos \omega_0 \tau,$$

$$\cos \omega_0 \tau = 0, \quad \omega_0 \tau = \pi/2.$$

Отже, час, за який точка вперше досягне положення рівноваги, дорівнює

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{\pi \cdot 2}{2 \cdot \pi} = 1 \text{ с.}$$

Відповідь: $v = -4,2 \text{ см/с}$, $t = 0,46 \text{ с}$, $\tau = 1 \text{ с}$.

Задача 6.2.6

Частинка, що здійснює незгасаючі гармонічні коливання вздовж прямої, має швидкість $v_1 = 4 \text{ см/с}$ на відстані $x_1 = 3 \text{ м}$ від положення рівноваги та $v_2 = 4 \text{ м/с}$ – на відстані $x_2 = 4 \text{ м}$ від нього. Знайдіть амплітуду і кутову частоту коливання, а також час, за який частинка проходить 2 м від позитивного амплітудного положення.

Дано:	Розв'язання
$v_1 = 4 \text{ см/с}$	Якщо коливання точки описувати рівнянням
$x_1 = 3 \text{ м}$	$x = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$, то її швидкість, як перша похідна, має вид
$v_2 = 4 \text{ м/с}$	$v = \frac{dx}{dt} = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$. Зробимо заміну відповідно до
$x_2 = 4 \text{ м}$	основного тригонометричного рівняння $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$
$A = ? \quad \omega_0 = ?$	та отримаємо
$\Delta t = ?$	$v = A \omega_0 \sqrt{1 - \sin^2(\omega_0 t + \alpha)} = \omega_0 \sqrt{A^2 - A^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha)}.$

Це рівняння зв'язує зміщення точки, що коливається, і її швидкість в даному положенні:

$$v = \omega_0 \sqrt{A^2 - x^2}.$$

Застосуємо це рівняння для задачі, що розглядається.

$$\begin{cases} 4^2 = \omega_0^2(A^2 - 3^2), \\ 3^2 = \omega_0^2(A^2 - 4^2), \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримуємо величини амплітуди і кутової швидкості частинки

$$A = 5 \text{ м}, \omega_0 = 1 \text{ рад/с}.$$

Зміщення відносно положення рівноваги точки, що пройшла шлях 2 см від позитивного амплітудного положення, є $x_3 = A - 2 = 5 - 2 = 3$ см. Щоб знайти час, який вона витратила, знайдемо два періоди часу. Перший – це час руху від положення рівноваги до максимального відхилення, якій дорівнює амплітуді. Зрозуміло, що він складає чверть періоду, тобто

$$t_A = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega_0} = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{\pi}{2 \cdot 1} = 1,57 \text{ с}.$$

Другий період часу – це час, який потрібен для того, щоб подолати шлях від положення рівноваги до положення $x_3 = 3$ см. Використовуючи рівняння коливань $x_3 = A \sin \omega_0 t$, знайдемо фазу $\omega_0 t = \arcsin \frac{x_3}{A} = \arcsin \frac{3}{5} = 0,64$ і тоді відповідний період часу дорівнює

$$t = \frac{0,64}{\omega_0} = \frac{0,64}{1} = 0,64 \text{ с}.$$

Отже, шуканий час є різницею

$$\Delta t = t_A - t = 1,57 - 0,64 = 0,93 \text{ с}.$$

Відповідь: $A = 5$ м; $\omega_0 = 1$ рад/с; $\Delta t = 0,93$ с.

Задача 6.2.7

Тіло здійснює вертикальні гармонічні коливання, виконуючи $N = 20$ повних коливань за $t = 10$ с. Запишіть рівняння коливань тіла, якщо в початковий момент часу зміщення дорівнює $x_0 = 5$ см, а швидкість $v_0 = 10$ см/с.

Дано:	Розв'язання
$N = 20$	Для того щоб записати рівняння коливань тіла, характеристики якого наведені в умовах задачі, треба визначити в рівнянні коливань $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ значення амплітуди A , кутової частоти ω і початкової фази α .
$t = 10$ с	
$x_0 = 5$ см	
$v_0 = 10$ см/с	
$x(t) = ?$	Якщо тіло здійснює N коливань за час t , то його

період коливань і власна кутова частота ω дорівнюють

$$T = \frac{t}{N}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi N}{t} = \frac{2\pi \cdot 20}{10} = 4\pi \text{ рад/с.}$$

Для визначення початкової фази застосуємо рівняння для зміщення і швидкості точки,

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \alpha), \\ v = -A\omega \sin(\omega t + \alpha). \end{cases}$$

і напишемо їх для моменту часу $t = 0$

$$\begin{cases} x_0 = A \cos \alpha, \\ v_0 = -A\omega \sin \alpha. \end{cases}$$

Після перетворень

$$\begin{cases} x_0 = A \cos \alpha, \\ -\frac{v_0}{\omega} = A \sin \alpha \end{cases}$$

поділимо друге рівняння системи на перше і отримаємо

$$\frac{A \sin \alpha}{A \cos \alpha} = -\frac{v_0}{\omega \cdot x_0},$$

з якого $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0}{\omega \cdot x_0}$. Тоді початкова фаза

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(-\frac{v_0}{\omega \cdot x_0} \right) = \operatorname{arctg} \left(-\frac{10}{4\pi \cdot 5} \right) = \operatorname{arctg}(-0,159) = \\ = -0,157 \text{ рад} = -0,05\pi \text{ рад}.$$

Тепер з рівняння $x_0 = A \cos \alpha$, амплітуда коливань становить

$$A = \frac{x_0}{\cos \alpha} = \frac{5}{\cos(-0,05\pi)} = 5,06 \text{ см}.$$

Рівняння коливань, параметри яких задані в умовах задачі, є

$$x(t) = 5,06 \cos(4\pi - 0,05\pi), \text{ см}.$$

Перевіримо розмірності отриманих результатів

$$[\omega] = \frac{\text{рад} \cdot 1}{\text{с}} = \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad [\alpha] = \frac{\text{м/с}}{\text{рад/с} \cdot \text{м}} = \text{рад}; \quad [A] = \frac{\text{м}}{1} = \text{м}.$$

Відповідь: $x(t) = 5,06 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(4\pi - 0,05\pi), \text{ м}$

Задача 6.2.8

Швидкість тіла масою 100 г, яке здійснює гармонічні коливання змінюється за законом: $v = 15 \sin \left(10\pi t + \frac{\pi}{3} \right)$, см/с. Визначте потенціальну енергію тіла в момент часу, коли зміщення з положення рівноваги дорівнює половині амплітуди. Записати рівняння гармонічних коливань цього тіла.

Дано:

$$v = 15 \sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right), \text{ см/с}$$

$$x = \frac{A}{2}$$

$$PE = ? \quad x(t) = ?$$

Розв'язання

Залежність $v(t)$ описується рівнянням

$$v = v_{\max} \sin(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (1)$$

Вважаючи, що швидкість є першою похідною

від зміщення точки, що здійснює коливання,

залежність зміщення від часу можна записати в вигляді

$$x(t) = -A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (2)$$

Для того щоб рівняння (2) описувало той коливальний процес, що розглядається в задачі, треба визначити його амплітуду коливань A , власну кутову частоту ω_0 і початкову фазу α . Два останніх параметри беремо з залежності швидкості (1), тому $\omega_0 = 10\pi$ рад/с, а $\alpha = \pi/3$ рад.

$$\text{Оскільки } v_{\max} = A\omega_0, \text{ то амплітуда } A = \frac{v_{\max}}{\omega_0} = \frac{15 \cdot 10^{-2}}{10\pi} = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Таким чином, рівняння коливального процесу є

$$x(t) = -4,8 \cdot 10^{-3} \cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right), \text{ м.} \quad (3)$$

Потенціальна енергія точки, що коливається, в будь-який момент часу визначається формулою

$$PE = \frac{kx^2}{2}, \quad (4)$$

де x – зміщення точки від положення рівноваги, k – коефіцієнт квазіпружної сили, що змушує тіло здійснювати коливання.

$$k = m\omega_0^2 = 0,1 \cdot (10\pi)^2 = 98,7 \text{ Н/м.}$$

За умовою задачі, зміщення тіла дорівнює половині амплітуди, тоді

$$PE = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{k \cdot A^2}{8} = \frac{98,7 \cdot (4,8 \cdot 10^{-3})^2}{8} = 2,81 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

Розмірності отриманих результатів:

$$[A] = \frac{m/c}{1/c} = m; [PE] = \frac{H \cdot m^2}{m} = H \cdot m = \text{Дж}.$$

Відповідь: $x(t) = -4,8 \cdot 10^3 \cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, м; $PE = 2,81 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Задача 6.2.9

Тіло одночасно бере участь у двох коливаннях однакового напрямку:

$x_1 = 10 \sin(\pi t)$, см та $x_2 = 5 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$, см. Записати рівняння результуючого коливання і побудувати діаграму додавання коливань. Визначити прискорення тіла у момент часу, коли його кінетична енергія вдвічі менша за максимальну кінетичну енергію.

Дано:

$$x_1 = 10 \sin(\pi t), \text{ см}$$

$$x_2 = 5 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right), \text{ см}$$

$$x(t) = ? \quad a = ?$$

Розв'язання

Якщо, тіло одночасно бере участь у двох гармонічних коливаннях однакового напрямку, то результуюче коливання x , яке є їх суперпозицією,

буде гармонічним коливанням з такою ж частотою ω_0 ,

а амплітуда A і початкова фаза α визначаються за формулами

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\alpha}, \quad (1)$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}, \quad (2)$$

де A_1 і A_2 , α_1 і α_2 – амплітуди і початкові фази коливань, що додаються,

$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ – різниця початкових фаз коливань.

Отже, амплітуда результуючого коливання з врахуванням того, що $\Delta\alpha = \pi/4$, дорівнює згідно з (1)

$$A = \sqrt{10^2 + 5^2 + 2 \cdot 10 \cdot 5 \cos \frac{\pi}{4}} = 14 \text{ см.}$$

Обчислення початкової фази за формулою (2) дає

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{10 \cdot \sin 0 + 5 \cdot \sin(\pi/4)}{10 \cdot \cos 0 + 5 \cos(\pi/4)} = \frac{3,54}{13,54} = 0,26.$$

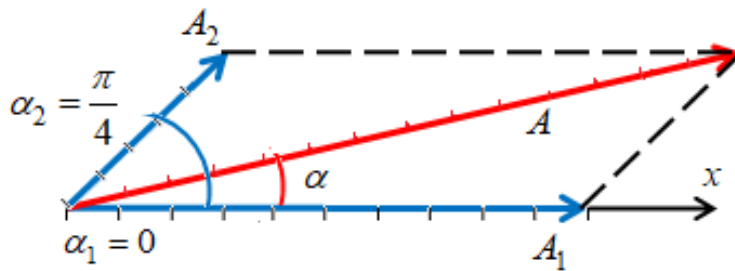
$$\alpha = \operatorname{arctg} 0,26 = 14,5^\circ = 0,254 \text{ рад} = 0,08\pi \text{ рад.}$$

Отже, результуюче коливання має вигляд

$$x = 14 \sin(\pi t + 0.08\pi), \text{ см}$$

Побудуємо векторну діаграму і з її допомогою знайдемо параметри результуючого коливання.

Відкладемо вектор $A_1 = 10$ у вибраному масштабі вздовж осі x , оскільки початкова фаза першого коливання дорівнює нулю $\alpha_1 = 0$. Другий вектор $A_2 = 5$ становить кут $\alpha_2 = \pi/4$ з віссю x . Складаємо вектори A_1 і A_2 за правилом паралелограма, виміряємо результуючий вектор A лінійкою, а кут α із віссю x – транспортиром. Результати вимірювання (див. рис) збігаються з результатами математичних розрахунків.



Якщо зміщення відбувається за законом $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$, то залежність швидкості $v(t)$ від часу можна отримати диференціюванням $x(t)$

$$v = v(t) = \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Тоді кінетична енергія тіла, що коливається, описується залежністю

$$KE = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = KE_{\max} \cos^2(\omega_0 t + \alpha).$$

Величина $KE_{\max}$ є не тільки максимальним значенням кінетичної енергії, але й значенням повної енергії, яку має коливальна система.

Застосуємо умову задачі, згідно з яким в певний момент часу поточне значення кінетичної енергії дорівнює половині її максимального значення:

$$\frac{KE_{\max}}{2} = KE_{\max} \cos^2(\omega_0 t + \alpha).$$

Таке співвідношення відповідає

$$\cos^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{1}{2}, \quad \cos(\omega_0 t + \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Використовуючи основне тригонометричне співвідношення, знайдемо відповідне значення синуса $\sin(\omega_0 t + \alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\omega_0 t + \alpha)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ і підставимо його в залежність прискорення від часу

$$a = \dot{v} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \alpha) = -14 \cdot \pi^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 97,7 \text{ м/с}^2.$$

Перевірка розмірності: $[A] = \text{м}$; $[\omega_0] = \text{с}^{-1}$; $[a] = \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$.

Відповідь: $x = 14 \sin(\pi t + 0,08\pi)$ см; $a = 97,7 \text{ м/с}^2$.

Задача 6.2.10

Точка бере участь у двох коливаннях однакової частоти, що відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках та описуються рівняннями: $x = 10 \sin(\pi t)$, см і $y = 5 \cos(\pi t)$, см. Визначте рівняння траєкторії результуючого руху точки, амплітуду результуючого коливання та напрямок руху точки.

Дано:	Розв'язання
$x = 10\sin(\pi t), \text{ см}$	Відповісти на питання задачі можна двома методами.
$y = 5\cos(\pi t), \text{ см}$	Розглянемо обидва.
$A = ?$	

1. Рівняння коливань, що задані в умові задачі, є координатами x і y траєкторії точки, які задані у параметричному вигляді, тобто обидві координати є функціями часу t . Для визначення виду траєкторії необхідно виключити t з рівнянь і перетворити їх в канонічну (явну) форму. Для цього виразимо відповідні синус і косинус з рівнянь

$$\begin{cases} x = A\sin \omega_0 t, \\ y = B\cos \omega_0 t, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{x}{A} = \sin \omega_0 t, \\ \frac{y}{B} = \cos \omega_0 t, \end{cases} \quad (2)$$

і піднесемо отримані вирази (2) до квадрата:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 = \sin^2(\omega_0 t), \quad \left(\frac{y}{B}\right)^2 = \cos^2(\omega_0 t). \quad (3)$$

Далі додаємо отримані рівняння та скористаємося основним тригонометричним співвідношенням. Рівняння траєкторії точки у явному вигляді

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = \sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t) = 1, \quad (4)$$

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{x}{10}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1 \quad (5)$$

Ми отримали рівняння еліпса (5), півосі якого дорівнюють $A=10$ см та $B=5$ см.

2. У загальному випадку взаємно перпендикулярні коливання відбуваються за законом:

$$\begin{cases} x = A \cos \omega_0 t, \\ y = B \cos(\omega_0 t + \alpha), \end{cases} \quad (6)$$

де α – різниця фаз двох коливань, вважаючи, що початкова фаза першого коливання прийнята рівною нулю.

Відповідне рівняння в канонічній формі має вигляд

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (7)$$

В залежності від α можливі окремі випадки траєкторії.

Для того щоб цим скористатися, треба, щоб рівняння коливань були задані із застосуванням однакової тригонометричної функції. За допомогою формул приведення перетворимо перше рівняння $x = 10 \sin(\pi t)$ на $x = 10 \cos(\pi t - 0,5\pi)$.

Таким чином, траєкторія в параметричному вигляді описується рівняннями

$$\begin{cases} x = 10 \cos(\pi t - 0,5\pi), \\ y = 5 \cos(\pi t), \end{cases} \quad (8)$$

або в канонічному вигляді при підставленні $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{5^2} - \frac{2xy}{10 \cdot 5} \cos \frac{\pi}{2} &= \sin^2 \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{5^2} &= 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Отже, ми отримали такий же результат, що і при застосуванні першого методу (5).

Траєкторією руху точки є еліпс, осі якого збігаються з осями координат, а півосі дорівнюють відповідним амплітудам. У випадку, коли $A > B$, амплітудою коливань, яка за визначенням є найбільшим відхиленням від положення рівноваги, є A .

Для того щоб визначити напрямок руху, знайдемо координати двох точок,

що розташовані близько одна до одної, іншими словами, перебування в яких відрізняються малим проміжком часу. Для того щоб зрозуміти, що означає «малий проміжок часу» треба його з чимось порівняти. Будемо порівнювати с періодом коливань, для чого його визначимо

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ с.} \quad (10)$$

Якщо взяти початок відліку часу при $t = 0$, то координати (x_1, y_1) першого положення будуть

$$\begin{cases} x_1 = 10 \cos(-0,5\pi) = 0, \\ y_1 = 5 \cos 0 = 5, \end{cases} \quad (11)$$

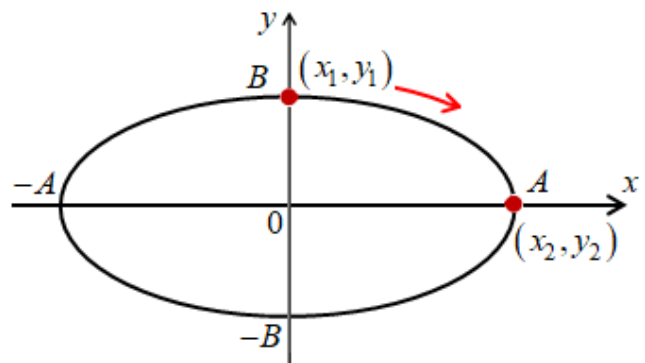
Тобто це точка В на рисунку траєкторії.

Для визначення координат (x_2, y_2) другої точки підставимо в рівняння малий проміжок часу $t = 0,5 \text{ с}$, який є меншим за період коливань T .

$$\begin{cases} x_2 = 10 \cos(0,5\pi - 0,5\pi) = 10, \\ y_2 = 5 \cos(0,5\pi) = 0. \end{cases}$$

Отримані рівняння відповідають положенню точки А.

Треба зазначити, якщо ми взяли малий інтервал, що дорівнює 1 с, що відповідає половині періоду, то ми б отримали точку $-B$, яка є протилежною початковій на осі y . В цьому випадку ми б не змогли визначитися, яким чином точка



потрапила в цю позицію, через точку А або через $-A$. Тому, обираючи «малий інтервал», треба порівнювати його з періодом T .

Отже, точка, що бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, рухається вздовж еліптичної траєкторії за годинниковою стрілкою.

Відповідь: $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1.$

Задача 6.2.11

Амплітуда вільних коливань математичного маятника довжиною $l=1$ м протягом $t=10$ хв зменшилася вдвічі. Визначити коефіцієнт згасання, логарифмічний декремент і кількість коливань, що зробив маятник за цей проміжок часу. Знайти рівняння коливань, якщо спочатку маятник відтягнули вбік на відстань 5 см і відпустили.

Дано:

$$l=1 \text{ м}$$

$$t=10 \text{ хв} = 600 \text{ с}$$

$$\frac{A_0}{A_t} = 2$$

$$x_0 = 5 \text{ см} = 0,05 \text{ м}$$

$$\beta = ? \quad \delta = ? \quad N = ?$$

$$x(t) = ?$$

Розв'язання

Амплітуда згасаючих коливань за час $t=10$ хв = 600 с зменшилася вдвічі, тому

$$\frac{A_0}{A_t} = \frac{A_0}{A_0 e^{-\beta t}} = e^{\beta t} = 2 .$$

Візьмемо натуральний логарифм отриманого виразу

$\beta t = \ln 2$ і знайдемо коефіцієнт згасання коливань

$$\beta = \frac{\ln 2}{t} = \frac{0.693}{600} = 10^{-3} \text{ с}^{-1}.$$

Для визначення логарифмічного декременту згасання $\delta = \beta T$ треба знати T – умовний період згасаючих коливань. Для цього спочатку знайдемо власний період коливань, тобто період незгасаючих коливань. Для математичного маятника він становить

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2 \text{ с},$$

а власна кутова частота коливань

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ рад/с}.$$

Підставимо отримане значення в формулу, що зв'язує частоту згасаючих коливань ω з власною частотою ω_0

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\pi^2 - 10^{-6}} \approx \omega_0.$$

Оскільки частоти практично дорівнюють одна одній, то і періоди можна вважати рівними $T \approx T_0 = 2\text{с}$. Тоді логарифмічний декремент згасання становить

$$\delta = \beta T = 2 \cdot 10^{-3}.$$

Для знаходження кількості коливань за певний час скористаємося тим, що кожний проміжок часу складається з N періодів коливань, тобто $t = NT$. Тому

$$\beta t = \beta NT = \ln 2,$$

$$N = \frac{\ln 2}{\beta T} = \frac{0,693}{2 \cdot 10^{-3}} = 346,6.$$

Відстань x_0 , на яку спочатку був відхилений маятник, це його початкова амплітуда $A_0 = 5\text{ см} = 5 \cdot 10^{-2}\text{ м}$. Оскільки $x(0) = A_0$, то для рівняння згасаючих коливань використаємо функцію косинус з початковою фазою, що дорівнює нулю.

$$x = 5 \cdot 10^{-2} e^{-0,001t} \cos \pi t, \text{ м.}$$

Відповідь: $\beta = 10^{-3}\text{ с}^{-1}$; $\delta = 2 \cdot 10^{-3}$; $N = 346,6$; $x = 5 \cdot 10^{-2} e^{-0,001t} \cdot \cos \pi t, \text{ м.}$

Задача 6.2.12

Рівняння згасаючих механічних коливань маятника має вигляд $x = 15e^{-0,1t} \sin(2\pi t - \pi/4)$, см. Визначити: 1) період власних незгасаючих коливань маятника; 2) логарифмічний декремент згасання; 3) у скільки разів зменшиться амплітуда за 20 повних коливань?

Дано:

$$x(t) = 15e^{-0,1t} \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right), \text{ см}$$

$$N = 20$$

$$T_0 = ? \quad \delta = ? \quad A_0/A_N = ?$$

Розв'язання

Коли у коливальній системі є втрати енергії, то вона здійснює згасаючі коливання, які описуються рівнянням

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha),$$

де x – зміщення тіла з положення рівноваги; t – час; A_0 – амплітуда у початковий момент часу; β – коефіцієнт згасання; ω – циклічна частота згасаючих коливань; α – початкова фаза.

Частота згасаючих коливань ω пов'язана з частотою незгасаючих коливань ω_0 як

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Період вільних незгасаючих коливань дорівнює

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}.$$

З заданого в умові задачі рівняння частота згасаючих коливань $\omega = 2\pi$ рад/с, а коефіцієнт згасання $\beta = 0,1$, тоді

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(2\pi)^2 + 0,1^2}} = 1 \text{ с}.$$

Оскільки у виразі під коренем у знаменнику $(2\pi)^2 \gg 0,1^2$, то значення кореня визначається переважно величиною $(2\pi)^2$, тому частота згасаючих коливання практично дорівнює частоті власних коливань, що свідчить про те, що коливання є слабо згасаючими, тобто $\omega \simeq \omega_0$. З цього випливає, що і періоди також дорівнюють один одному $T \simeq T_0 = 1 \text{ с}$.

Логарифмічний декремент згасання дорівнює

$$\delta = \beta T = \beta \frac{2\pi}{\omega} = 0,1 \cdot \frac{2\pi}{2\pi} = 0,1.$$

Для знаходження того, як змінилася амплітуда за N коливань, напишемо відношення амплітуд з урахуванням того, що час коливань складається з N періодів, тобто $t = NT$,

$$\frac{A_0}{A_N} = \frac{A_0}{A_0 e^{-\beta t}} = e^{\beta t} = e^{\beta NT} = e^{0,1 \cdot 20 \cdot 1} = e^2 = 7,38.$$

Відповідь: $T_0 = 1 \text{ с}; \delta = 0,1; \frac{A_0}{A_N} = 7,38.$

Задача 6.2.13

Тіло, що здійснює коливання, втрачає 3,5% своєї енергії протягом кожного циклу. Знайдіть його добротність Q . Скільки циклів проходить, перш ніж половина початкової енергії тіла, що коливається, втрачається?

Дано:	Розв'язання
$\frac{E_0}{E_1} = \frac{100\%}{(100 - 35)\%}$	Повна енергія тіла, що коливається, пропорційна квадрату його амплітуди
$Q = ? \quad N = ?$	$E = \frac{m\omega^2 A^2}{2}.$

Оскільки амплітуда згасаючих коливань залежить від часу як $A = A_0 e^{-\beta t}$, де A_0 – початкова амплітуда, а β – коефіцієнт згасання, то енергія згасаючих коливань описується рівнянням

$$E = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{m\omega^2 A_0^2}{2} \cdot e^{-2\beta t} = E_0 \cdot e^{-2\beta t}.$$

Якщо система, що коливається, втрачає 3,5% енергії за кожен цикл, то після проміжку часу $t = T$ в системі залишається $100\% - 3,5\% = 96,5\%$.

Відношення початкової амплітуди енергії E_0 і амплітуди через період E_1

$$\frac{E_0}{E_1} = \frac{E_0}{E_0 \cdot e^{-2\beta T}} = e^{2\beta T} = \frac{100}{96,5} = 1,036.$$

$$\beta T = \frac{\ln(1,036)}{2} = \frac{0,0356}{2} = 1,78 \cdot 10^{-2}.$$

За визначенням, логарифмічний декремент згасання коливань

$$\delta = \beta T = 1,78 \cdot 10^{-2},$$

тому шукана добротність є

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{1,78 \cdot 10^{-2}} = 176.$$

Напишемо співвідношення, що відповідає зменшенню енергії вдвічі

$$\frac{E_0}{E_t} = \frac{E_0}{E_0 \cdot e^{-2\beta t}} = e^{2\beta t} = 2.$$

Взявши натуральний логарифм, знайдемо

$$\beta t = \frac{\ln 2}{2} = \frac{0,693}{2} = 0,3465.$$

Зважаючи на те, що кожен проміжок часу t складається з N періодів коливань T , напишемо, що

$$\beta t = \beta N T = N \delta.$$

Тоді кількість коливань N , протягом яких тіло втратить половини своєї енергії, дорівнює

$$N = \frac{\beta t}{\delta} = \frac{0,3465}{1,78 \cdot 10^{-2}} = 19,5$$

Відповідь: $Q = 176$; $N = 19,5$.

Задача 6.2.14

Напишіть рівняння гармонічної хвилі, що розповсюджується вздовж позитивного напрямку осі x , довжина хвилі якої $\lambda = 2,8$ м, а поширюється хвиля зі швидкістю $v = 13,3$ м/с. Амплітуда хвилі $A = 0,12$ м, початкова фаза дорівнює нулю. Оцініть два випадки: а) $\xi(0,0) = 0$; б) $\xi(0,0) = A$.

Дано:	Розв'язання
$\lambda = 2,8$ м	Рівняння хвилі, що розповсюджується вздовж осі x , при нульовій початковій фазі є функцією двох змінних – координати x і часу t , що записується через синус або косинус в залежності від початкових умов:
$v = 13,3$ м/с	
$A = 0,12$ м	
$\xi(x,t) = ?$	

$$\text{При } \xi(0,0)=0 \quad \xi(x,t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right),$$

$$\text{при } \xi(0,0)=A \quad \xi(x,t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right).$$

Довжина хвилі λ – шлях, що долає хвиля, рухаючись зі швидкістю v , за час, який дорівнює періоду коливань T , $\lambda = vT$. Тому

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{2,8}{13,3} = 0,21 \text{ с.}$$

Рівняння біжучих хвиль з урахуванням початкових умов

$$\text{а) } \xi(0,0)=0 \quad \xi(x,t) = 0,12 \sin\left(\frac{2\pi}{0,21}t - \frac{2\pi}{2,8}x\right);$$

$$\text{б) } \xi(0,0)=A \quad \xi(x,t) = 0,12 \cos\left(\frac{2\pi}{0,21}t - \frac{2\pi}{2,8}x\right).$$

Відповідь: $\xi(x,t) = 0,12 \sin\left(\frac{2\pi}{0,21}t - \frac{2\pi}{2,8}x\right);$

$$\xi(x,t) = 0,12 \cos\left(\frac{2\pi}{0,21}t - \frac{2\pi}{2,8}x\right).$$

Задача 6.2.15

Вздовж осі x розповсюджується плоска монохроматична хвиля, рівняння якої має вигляд: $\xi(x,t) = 0,2 \cos(700\pi t - 2\pi x)$, мм. Визначте 1) зміщення від положення рівноваги, швидкість та прискорення точки, яка знаходиться на відстані $x = \lambda/8$ від джерела коливань у момент часу $t = T/4$, якщо λ – довжина хвилі, а T – період коливань; 2) різницю фаз коливань двох точок, які знаходяться на відстані $x_1 = 10$ см та $x_2 = 60$ см від джерела коливань; 3) швидкість хвилі.

Дано:	Розв'язання
$\xi(x,t) = 0,2 \cos(700\pi t - 2\pi x)$, мм	Якщо у пружному середовищі,
$x = \lambda/8 \quad t = T/4$	розповсюджуються плоска
$x_1 = 10$ см $x_2 = 60$ см	монохроматична хвиля, то зміщення
$\xi = ? \quad \dot{\xi} = ? \quad \ddot{\xi} = ?$	$\xi(x,t)$ частинок середовища з
$\Delta\varphi = ? \quad v = ?$	положення рівноваги визначається
рівнянням плоскої біжучої хвилі:	

$$\xi(x,t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right),$$

де x – відстань від джерела коливань до положення рівноваги частинки середовища (координата частинки); t – час; A – амплітуда коливань; T – період коливань; λ – довжина хвилі.

Рівняння хвилі записано з припущенням, що початкова фаза дорівнює нулю, а джерело хвилі у початковий момент часу знаходиться в амплітудному положенні, тобто $\xi(0,0) = A$.

Підставляємо у рівняння (1) координати частинки та момент часу відповідно до умов задачі $\left(x = \frac{\lambda}{8}; t = \frac{T}{4}\right)$, знаходимо зміщення частинки від положення рівноваги:

$$\xi(x,t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8}\right) = A \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = A \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Фаза коливань точки, що знаходиться в положенні $x = \lambda/8$ в момент часу

$t = T/4$, дорівнює $\frac{\pi}{4}$ рад. Тоді зміщення точки є

$$\xi(x,t) = A \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,2 \cdot 0,707 = 0,1414 \text{ мм.}$$

Частинки середовища, які знаходяться на відстані x від джерела,

здійснюють коливання навколо власних положень рівноваги. Оскільки $\xi(x, t)$ є функцією двох змінних, то швидкість зміщення частинок середовища визначається частинною похідною зміщення за часом:

$$\dot{\xi}(x, t) = -A \frac{2\pi}{T} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right).$$

З врахуванням фази, що ми знайшли раніше, і того, що $\frac{2\pi}{T} = \omega = 700\pi$, швидкість частинки буде

$$\dot{\xi}(x, t) = -A\omega \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0,2 \cdot 700\pi \cdot 0,707 = -311 \text{ м/с}.$$

Прискорення, яке є частинною похідною за часом від швидкості, становить

$$\ddot{\xi}(x, t) = \frac{\partial \dot{\xi}(x, t)}{\partial t} = -A \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right).$$

Використаємо попередні результати та отримуємо прискорення точки

$$\ddot{\xi}(x, t) = -\omega^2 A \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -(700\pi)^2 \cdot 0,2 \cdot 0,707 = -6,83 \cdot 10^5 \text{ мм/с}^2.$$

Порівнюючи рівняння хвилі у загальному вигляді і те, що задано в даній задачі, знайдемо, що $\frac{2\pi}{\lambda}x = 2\pi x$, звідки довжина хвилі дорівнює $\lambda = 1\text{ м}$.

Період коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{700\pi} = 2,86 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Якщо $\lambda = vT$, то швидкість хвилі

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2,86 \cdot 10^{-3}} = 350 \text{ м/с}.$$

Фази коливань частинок, що знаходяться на відстанях x_1 та x_2 від джерела коливань у момент часу t дорівнюють:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x_1; \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x_2.$$

Різниця фаз коливань двох частинок середовища:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x_1 - \frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1).$$

Якщо $\lambda = 1\text{ м}$, $x_1 = 0,1\text{ м}$, а $x_2 = 0,6\text{ м}$, то різниця фаз становить

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{1}(0,6 - 0,1) = \pi \text{ рад.}$$

Відповідь: $\xi(x, t) = 0,1414 \text{ мм}$; $\dot{\xi}(x, t) = -311 \text{ м/с}$; $\ddot{\xi}(x, t) = -6,83 \cdot 10^5 \text{ мм/с}^2$;
 $v = 350 \text{ м/с}$; $\Delta\varphi = \pi \text{ рад.}$

Задача 6.2.16

Від джерела коливань розповсюджується плоска хвиля з частотою $\nu = 440 \text{ Гц}$ і швидкістю $v = 440 \text{ м/с}$. На відстані $l = 4 \text{ м}$ від джерела коливань перпендикулярно до напрямку розповсюдження хвилі знаходиться стіна, від якої відбивається хвиля. Визначити відстань від джерела до точок, в яких знаходяться найближчі до стіни перші два вузли та перші дві пучності стоячої хвилі, яка утворилася внаслідок суперпозиції біжучої та відбитою від стіни хвиль.

Дано:	Розв'язання
$v = 440 \text{ м/с}$	Якщо у пружному середовищі, розповсюджується плоска монохроматична хвиля, то зміщення $\xi(x, t)$ частинок середовища з положення рівноваги визначається рівнянням біжучої плоскої хвилі:
$\nu = 440 \text{ Гц}$	
$l = 4 \text{ м}$	
$x_{п1} = ? \quad x_{п2} = ?$	$\xi_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx), \quad (1)$
$x_{в1} = ? \quad x_{в2} = ?$	

де A – амплітуда коливань; ω – циклічна частота; k – хвильове число; x – відстань від джерела коливань до положення рівноваги частинки середовища (координата частинки); t – час.

Оскільки густина матеріалу стінки більше густини повітря, то біжуча хвиля відбивається від стінки, причому фаза відбитої хвилі відрізняється від фази

бігучої на π . До точки, яка знаходиться на відстані x від джерела, відбита хвиля проходить загальну відстань: $l + l - x$ (відстань від джерела до стінки: l , а відстань від стінки до точки $x: l - x$). Тоді рівняння відбитої хвилі буде:

$$\xi_2(x, t) = A \cos(\omega t - k(2l - x) + \pi) = -A \cos(\omega t - k(2l - x)). \quad (2)$$

Рівняння стоячої хвилі знайдемо додавши вирази (1) та (2)

$$\xi(x, t) = \xi_1 + \xi_2 = A \cos(\omega t - kx) - A \cos(\omega t - k(2l - x)). \quad (3)$$

Використавши формулу різниці косинусів, перетворимо (3) до виду:

$$\xi(x, t) = -2A \sin k(l - x) \cdot \sin(\omega t - kl). \quad (4)$$

Оскільки множник $2A \sin k(l - x)$ в (4) не залежить від часу, то його можна вважати амплітудою стоячої хвилі:

$$A_{\text{ст}} = |2A \sin k(l - x)|. \quad (5)$$

Вважаючи, що за визначенням, амплітуда – це величина найбільшого відхилення, в (5) використовується математичне позначення модуля.

Вузол – це точка, в якій амплітуда коливань дорівнює нулю, тому

$$|2A \sin k(l - x_{\text{в}})| = 0,$$

тому

$$\sin k(l - x_{\text{в}}) = 0.$$

Розв'язання цього тригонометричного рівняння дає корені

$$k(l - x_{\text{в}}) = \pm \pi n,$$

де $n = 0, 1, 2, \dots$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число, λ – довжина біжучої хвилі.

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu},$$

де v – швидкість хвилі; T – період коливань; ν – частота коливань.

Таким чином, хвильове число становитиме

$$k = \frac{2\pi\nu}{v}.$$

З врахування отриманих співвідношень,

$$2\pi\nu(l - x_b) = \pi n\nu,$$

тоді, координати вузлів

$$x_b = l - \frac{n\nu}{2\nu}, \text{ де } n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Пучності ж утворюються у тих місцях середовища, де амплітуда стоячої хвилі набуває максимальних значень

$$2A \sin k(l - x_n) = 2A,$$

$$\sin k(l - x_n) = 1.$$

Розв'язання цього тригонометричного рівняння має вигляд

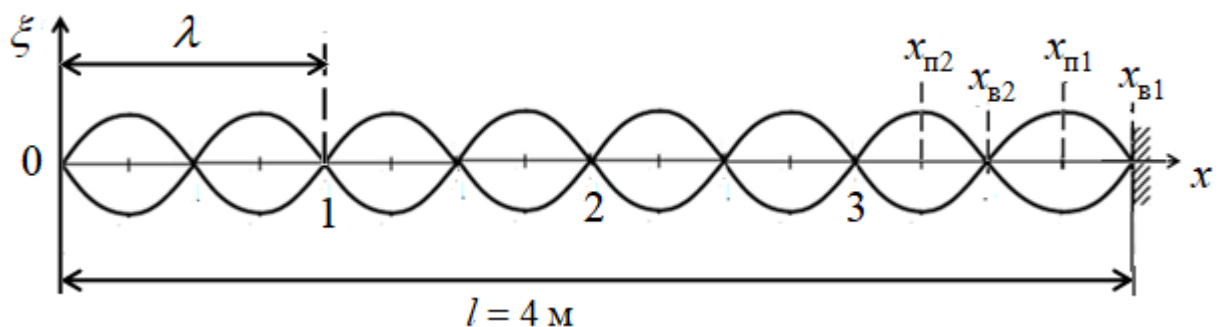
$$k(l - x_n) = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \text{ де } n = 0, 1, 2, \dots$$

Підставляючи хвильове число k в формулу, отримуємо:

$$\frac{4\pi\nu}{\nu}(l - x_n) = \frac{(2n + 1)\pi}{2}$$

Отже, координати пучностей

$$x_n = l - \frac{(2n + 1)\nu}{4\nu}, \text{ де } n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$



За допомогою формул (6) і (7) розрахуємо шукані координати:

– першого вузла ($n = 0$)

$$x_{b1} = l - \frac{n\nu}{2\nu} = 4 - \frac{0 \cdot 440}{2 \cdot 440} = 4 \text{ м};$$

– другого вузла ($n = 1$)

$$x_{\text{в2}} = l - \frac{nv}{2\nu} = 4 - \frac{1 \cdot 440}{2 \cdot 440} = 3,5 \text{ м};$$

– першої пучності ($n = 0$)

$$x_{\text{п1}} = l - \frac{(2n+1)v}{4\nu} = 4 - \frac{(2 \cdot 0 + 1) \cdot 440}{4 \cdot 440} = 3,75 \text{ м};$$

– другої пучності ($n = 1$)

$$x_{\text{п2}} = l - \frac{(2n+1)v}{4\nu} = 4 - \frac{(2 \cdot 1 + 1) \cdot 440}{4 \cdot 440} = 3,25 \text{ м}.$$

Перевірка розмірності отриманих результатів:

$$[x] = \text{м} - \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{с}}{1} \right) = \text{м} - \text{м} = \text{м}.$$

Відповідь: $x_{\text{в1}} = 4 \text{ м}; x_{\text{в2}} = 3,5 \text{ м}; x_{\text{п1}} = 3,75 \text{ м}; x_{\text{п2}} = 3,25 \text{ м}.$

6.4. Задачі для самостійної роботи

6.4.1. Тіло здійснює гармонічні коливання з амплітудою $A = 4$ см та періодом $T = 2$ с. Запишіть рівняння цих коливань (за законом косинуса), якщо на початку коливань тіло перебувало в положенні $x(0) = 2$ см.

Відповідь: $x(t) = 4\cos(\pi t + \pi/3)$, см.

6.4.2. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання за законом косинусу з амплітудою $A = 5$ см та періодом $T = 2$ с. Визначити прискорення точки через $t = 0,5$ с від початку коливань, якщо початкова фаза коливань $\alpha = 0,5\pi$. Відповідь округлити до цілого (в $\text{см}/\text{с}^2$).

Відповідь: $a \approx 50 \text{ см}/\text{с}^2$.

6.4.3. Запишіть рівняння гармонічних коливань точки (за законом косинусу), якщо амплітуда коливань дорівнює $A = 4$ см, максимальна швидкість коливань точки становить $v_{\max} = 25,1$ $\text{см}/\text{с}$, а початкова фаза коливань $\alpha = 60^\circ$.

Відповідь: $x(t) = 4\cos(2\pi t + \pi/3)$, см.

6.4.4. Тіло масою $m = 10$ г підвішене на пружині та здійснює гармонічні коливання за законом $x(t) = 3\cos\left(0,5\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$, см. Визначити максимальні значення сили, яка діє на тіло, та повної енергії тіла під час коливань.

Відповідь: $F_{\max} = 74$ мН; $E = 11$ мкДж.

6.4.5. Різниця фаз двох гармонічних коливань однакового напрямку з однаковим періодом $T = 4$ с та амплітудами $A_1 = 4$ см, $A_2 = 9$ см дорівнює $\Delta\alpha = \frac{\pi}{6}$. Запишіть рівняння результуючого коливання, якщо початкова фаза другого коливання дорівнює нулю. Коливання відбуваються за законом синусу. Значення амплітуди (в мм) округлити до цілого.

Відповідь: $x(t) \approx 126\sin\left(\frac{\pi}{2}t + 0,051\pi\right)$, мм.

6.4.6. Визначте траєкторію результуючого коливання, отриманого в

результаті додавання двох гармонічних коливань, які відбуваються во взаємно перпендикулярних напрямках з однаковим періодом та амплітудами $A_1 = A_2 = 4$ см, якщо різниця фаз цих коливань $\alpha = \pi/2$.

Відповідь: $x^2 + y^2 = 4^2$.

6.4.7. Напишіть рівняння траєкторії результуючого руху точки, отриманого в результаті додавання двох гармонічних коливань, що відбуваються во взаємно перпендикулярних напрямках, та задані рівняннями $x(t) = 4\cos(2\pi t)$, см, $y(t) = 3\cos(2\pi t + \pi)$, см. Визначте амплітуду результуючого коливання.

Відповідь: $y = -0,75x$ см; $A = 5$ см.

6.4.8. Амплітуда згасаючих коливань маятника за 2 хвилини зменшилась вдвічі. Визначте коефіцієнт згасання.

Відповідь: $\beta = 0,6$ мс⁻¹.

6.4.9. Енергія згасаючих коливань маятника, що відбуваються в деякому середовищі, за $t = 2$ хвилини зменшилася в 10 разів. Визначте коефіцієнт опору середовища, в якому відбуваються коливання, якщо маса маятника $m = 200$ г.

Відповідь: $r \approx 0,004$ кг/с

6.4.10. Рівняння згасаючих коливань маятника надано у вигляді $x = 8e^{-0,2t} \sin\left(5\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$, см. Визначити: 1) логарифмічний декремент згасання; 2) в скільки разів зменшиться енергія коливань за 10 повних коливань.

Відповідь: $\delta = 0,08$; $E_0/E \approx 4,9$.

6.4.11. Математичний маятник довжиною $l = 39$ см здійснює згасаючі коливання. Визначте його добротність, якщо за час $t = 40$ с амплітуда коливань зменшилась у двічі.

Відповідь: $Q = 300$.

6.4.12. Частота власних коливань коливальної системи дорівнює $\omega_0 = 20$ кГц. Визначте логарифмічний декремент згасання, якщо резонанс коливань системи спостерігається при частоті $\omega_{\text{рез}} = 10$ кГц.

Відповідь: $\delta = 5,4$.

6.4.13. Визначте, на якій відстані x від джерела коливань, що здійснюються за законом косинуса, в момент часу $t = T/4$ зміщення точки від положення рівноваги дорівнює половині амплітуди. Хвильове число $k = 19 \text{ м}^{-1}$.

Відповідь: $x = 27,5 \text{ мм}$.

6.4.14. Рівняння плоскої біжучої хвилі має вигляд $\xi(x, t) = 0,2 \sin(400\pi t - \pi x) \text{ мм}$. Визначте швидкість хвилі v та швидкість $\dot{\xi}$ частинки пружного середовища, яка знаходиться на відстані $x = 4 \text{ м}$ від джерела коливань у момент часу $t = 0,01 \text{ с}$.

Відповідь: $v = 400 \text{ м/с}$; $\dot{\xi} = 0,25 \text{ м/с}$.

6.4.15. Відстань між першим та четвертим вузлами стоячої хвилі дорівнює 60 см . Визначте довжину біжучої хвилі.

Відповідь: $\lambda = 0,4 \text{ м}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кучерук І.М. Загальний курс фізики, у трьох томах. Том 1 / І. М.Кучерук, І. Т.Гобачук, П. Л.Луцик. – Київ : Техніка, 2007. – 269 с.
2. Галушак М.О. Курс фізики: підручник у трьох книгах. Кн. 1/ М.О. Галушак. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2017. – 428 с.
3. Збірник задач з фізики: навч. посіб. / Андрейко А. М. [та ін.] ; за ред. І. Є. Лопатинського та А. М.Андрейка. – Львів : Вид-во Нац. ун-ту "Львів. політехніка", 2010. - 316 с.
4. Ігнатенко В.М. Посібник до практичних занять із фізики: у 3 ч. Том 1/ В. М. Ігнатенко, В. Ф. Нефедченко, А. С. Опанасюк. – Суми : Сум. держ. ун-т, 2023. – 296 с.
5. Артеменко Ю.А. Фізика : навч. посіб. для студентів вищ. навч. закл. Ч. 1 / Артеменко Ю. А., Любименко О. М. – Луцьк : ДВНЗ "ДонНТУ", 2022. - 259 с.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
1. КІНЕМАТИКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ	5
1.1. Теоретичні відомості	5
1.2. Приклади розв'язання задач	16
1.3. Задачі для самостійної роботи	41
2. КІНЕМАТИКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ	44
2.1. Теоретичні відомості	44
2.2. Приклади розв'язання задач	67
2.3. Задачі для самостійної роботи	107
3. ДИНАМІКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ. СИЛИ В ДИНАМІЦІ	111
3.1. Теоретичні відомості	111
3.2. Приклади розв'язання задач	123
3.3. Задачі для самостійної роботи	148
4. ДИНАМІКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ	152
4.1. Теоретичні відомості	152
4.2. Приклади розв'язання задач	169
4.3. Задачі для самостійної роботи	201
5. ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ	204
5.1. Теоретичні відомості	204
5.2. Приклади розв'язання задач	218
5.3. Задачі для самостійної роботи	246
6. МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ	249
6.1. Теоретичні відомості	249
6.2. Приклади розв'язання задач	282
6.3. Задачі для самостійної роботи	310
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	313

Навчальне видання

НІКОЛАЙЧУК Григорій Павлович
ПЕРЕТЯТЬКО Анастасій Олександрович
КРИВОНІС Світлана Станіславівна
КОЧУРОВА Ганна Миколаївна
ХРАМОВА Тетяна Іванівна
АНДРЕЄВА Ольга Миколаївна

ПОСІБНИК З ФІЗИКИ

Частина 1

МЕХАНІКА. КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

Навчальний посібник у 3-х частинах
для студентів першого бакалаврського рівня освіти
усіх технічних спеціальностей

за редакцією О. А. Любченко

Відповідальна за випуск проф. Любченко О. А.
Роботу до видання рекомендував доц. Дроздов А. М.

В авторській редакції

План 2023 р., поз. 130

Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 19,7.

Видавничий центр НТУ «ХПІ»
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, м. Харків, вул. Кирпичова, 2

Електронне видання