



Кафедра Фізики



Національний технічний університет  
«Харківський політехнічний інститут»

# ПОСІБНИК З ФІЗИКИ

## Частина 2

### МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА.

### ТЕРМОДИНАМІКА. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О. М. Андреев, Ю. І. Веретеннікова, О. С. Водоріз,  
Т. В. Тавріна, С. Д. Гапоченко, Т. М. Шелест, Г. А. Дроздова

**ПОСІБНИК З ФІЗИКИ**  
**Частина 2**  
**МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА. ТЕРМОДИНАМІКА.**  
**ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ**

Навчальний посібник у 3-х частинах  
для студентів першого бакалаврського рівня освіти  
усіх технічних спеціальностей

За редакцією О. А. Любченко

Затверджено  
редакційно-видавничою  
радою НТУ «ХПІ»,  
протокол № 3 від 24.10.2023 р.

Харків  
НТУ «ХПІ»  
2025

УДК 536+537(075.8)

П 61

Рецензенти:

*Є. С. Сиркін*, д-р фіз.-мат. наук, провідний науковий  
співробітник, ФТІНТ НАНУ;

*Д. Б. Глушкова*, д-р техн. наук, проф., завідувачка кафедри  
технології металів і матеріалознавства, ХНАДУ

**П 61      Посібник з фізики. Частина 2. Молекулярна фізика. Термодинаміка.**  
Електромагнетизм : навчальний посібник у 3-х частинах для студентів  
першого бакалаврського рівня освіти усіх технічних спеціальностей /  
О. М. Андреев, Ю. І. Веретеннікова, О. С. Водоріз, Т. В. Тавріна,  
С. Д. Гапochenко, Т. М. Шелест, Г. А. Дроздова; за ред. О. А. Любченко.  
– Харків : НТУ «ХПІ», 2025. – 375 с.

**ISBN 978-617-05-0573-6**

Навчальний посібник з курсу «Фізика» містить теоретичний матеріал, методичні  
вказівки до розв'язання задач з прикладами розв'язаних задач та контрольні задачі з  
відповідями з розділів, що розглядаються в курсі «Фізика» в НТУ «ХПІ».

Призначено для студентів першого бакалаврського рівня освіти усіх технічних  
спеціальностей.

Іл. 158. Табл. 5. Бібліогр. 10 назв.

УДК 536+537(075.8)

© Андреев О. М., Веретеннікова Ю. І.,  
Водоріз О. С., Тавріна Т. В.,  
Гапochenко С. Д., Шелест Т. М.,  
Дроздова Г. А., Любченко О. А., 2025  
© НТУ «ХПІ», 2025

ISBN 978-617-05-0573-6

## ВСТУП

Основною ідеєю посібника, що пропонується, є намагання органічно поєднати в одному виданні висвітлення принципів теорії та практику розв'язання задач. Він пропонується студентам в якості одного з основних джерел, що може бути використаним під час вивчення курсу фізики. Його головна мета – ознайомити студентів з основними поняттями та методами фізики, роз'яснити зміст фізичних законів і явищ, навчити свідомо застосовувати отримані знання на практиці.

Посібник складається з трьох частин: Частина 1 «Механіка. Коливання та хвилі», Частина 2 «Молекулярна фізика. Термодинаміка. Електромагнетизм», Частина 3 «Оптика. Атомна і ядерна фізика» і містить 21 розділ. Він охоплює більшість тем, що розглядаються в основному курсі фізики в технічному університеті. На початку кожного розділу надається теоретичний матеріал з відповідної теми, для зручності використання поділений на підрозділи. Матеріал супроводжується ілюстраціями та практичними прикладами, основні поняття і визначення виділені жирним шрифтом. Наскільки це можливо, автори намагалися уникнути зайвої математизації, переносячи основний акцент на фізичну сутність питань, що розглядаються. В процесі підготовки посібника велика увага приділялася коректному застосуванню україномовної фізичної термінології на основі нової редакції Українського правопису, що був затверджений Постановою Кабінету Міністрів України у 2019 році

В другій частині кожного розділу пропонуються розібрані задачі, зміст яких тісно пов'язаний з теоретичною частиною. Задачі, що розглядаються, здебільшого є доповненням теоретичного матеріалу, його розвитком. Вони допомагають краще засвоїти матеріал і опанувати навички застосування математичних знань для прикладних цілей.

Третя частина кожного розділу, яка містить задачі для самостійної роботи з відповідями, дозволяє студентам перевірити своє розуміння тем і рівень засвоєння

теоретичного матеріалу і практичних методик, попрактикуватися в умінні розв'язувати фізичні задачі.

Усі викладки теоретичного матеріалу і розрахунки, що містяться у посібнику, проведені із використанням одиниць СІ (Системи Інтернаціональної). Застосування деяких загальноприйнятих несистемних одиниць оговорювалося окремо. В багатьох задачах, особливо коли розмірність результату не є очевидною, наведені перевірки розмірностей.

Підбір задач, що розглядаються у посібнику, проводився авторами протягом багатьох років викладання фізики: використовувалися задачі, взяті з численних джерел як вітчизняних, так і закордонних, зокрема, англомовних, а також з інтернету.

Така побудова посібника робить його дуже корисним для роботи в рамках онлайн навчання, самостійного освоєння матеріалу, підготовки до іспитів і заліків, а також для застосування як бази при вивченні предметів професійної підготовки. Він може бути застосованим для усіх тих, хто цікавиться фізикою і бажає поліпшити свій рівень її розуміння.

Матеріал посібника є узагальненням багаторічного досвіду колективу кафедри фізики НТУ «ХПІ». В редагуванні та написанні усіх розділів Посібника брала участь Любченко О.А. Авторами розділів, що увійшли в «Посібник з фізики. Частина 2. Молекулярна фізика. Термодинаміка. Електромагнетизм» є

|    |                                              |                    |
|----|----------------------------------------------|--------------------|
| 7  | Молекулярна фізика                           | Андрєєв О.М.       |
| 8  | Термодинаміка                                | Веретеннікова Ю.І. |
| 9  | Електростатика                               | Водоріз О.С.       |
| 10 | Постійний електричний струм                  | Тавріна Т.В.       |
| 11 | Магнітостатика                               | Гапченко С.Д.      |
| 12 | Електромагнітна індукція. Рівняння Максвелла | Шелест Т.М.        |
| 13 | Електромагнітні коливання. Змінний струм     | Дроздова Г.А.      |

## 7. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

### 7.1. Теоретичні відомості

#### 7.1.1. Основні поняття молекулярно-кінетичної теорії

**Молекулярна** (статистична) **фізика** досліджує рівноважні системи, які складаються з великої кількості об'єктів (макросистеми) методами теорії ймовірності та математичної статистики, спираючись на атомно-молекулярну будову речовини. В цьому розділі вивчаються фізичні властивості та агрегатні стани речовини в залежності від їх молекулярної побудови та сил взаємодії між молекулами.

#### **Основні положення молекулярно-кінетичної теорії (МКТ)**

1. Всі тіла мають дискретну (переривчасту) побудову. Вони складаються з молекул і атомів, що є найменшими частинками речовини, які зберігають її хімічні властивості.

2. Молекули (атоми) знаходяться у стані безперервного хаотичного руху, який називається **теповим**. Під час нагріву речовини швидкість та кінетична енергія його частинок збільшується. Ступень нагріву тіла характеризується **температурою**, яка є мірою середньої кінетичної енергії руху молекул цього тіла.

3. Між молекулами та атомами існують **сили взаємодії** – молекулярні сили, що мають електромагнітну природу. На великих відстанях ( $r > r_0$ ) – це сили притягання, а на малих ( $r < r_0$ ) – відштовхування (рис. 7.1),  $r_0$  – відстань, що відповідає найбільшій енергії зв'язку молекул.

Для спрощення вивчення газів ми будемо користуватися простою моделлю макроскопічної системи, якою є **ідеальний газ**. Це уявний газ, розмірами молекул якого можна знехтувати, вважаючи їх матеріальними точками, між якими немає сил молекулярної взаємодії, а зіткнення молекул газу між собою (та стінками

посудини) відбувається по закону пружних ударів. У природі ідеального газу не існує; найближчим до нього є гелій, водень і сильно розріджені реальні гази.

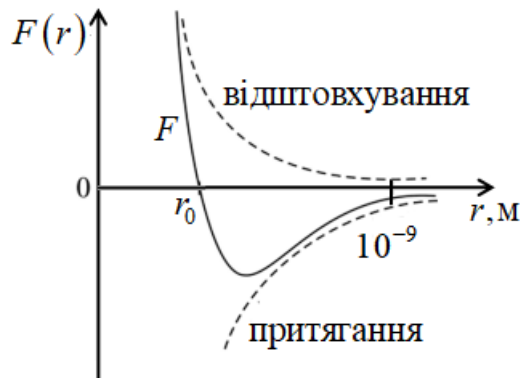


Рисунок 7.1

### 7.1.2. Маса атомів і молекул, кількість речовини, молярна маса

Масу молекул та атомів в молекулярній фізиці обчислюють у безрозмірних одиницях – відносних молекулярних та атомних масах. За **атомну одиницю маси** (а.о.м.)  $m_u$  приймається  $1/12$  маси атома  $m_C$  ізотопу вуглецю  $^{12}\text{C}$ :

$$m_u = 1 \text{ а.о.м.} = \frac{m_C}{12} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг.} \quad (7.1)$$

Тоді **відносна атомна маса**  $A_r$  (відносна маса атома) та **відносна молекулярна маса**  $M_r$  (відносна маса молекули) визначаються як

$$A_r = \frac{m_{\text{ат}}}{m_u} \text{ та } M_r = \frac{m_{\text{мол}}}{m_u}; \quad (7.2)$$

де  $m_{\text{ат}}$  і  $m_{\text{мол}}$  – маси атома та молекули, відповідно.

Відносні атомні маси лежать в межах від 1 до 100 та представлені у періодичній системі хімічних елементів (таблиці Менделєєва). Відносні молекулярні маси дорівнюють сумі відносних мас атомів, які входять до складу молекули.

**Кількість речовини**  $\nu$  – кількість структурних елементів (молекул, атомів, іонів тощо), що містяться в тілі чи системі. Кількість речовини виражається у

молях. **Моль** є кількістю речовини макроскопічної системи, яка містить таку ж кількість структурних елементів (атомів, іонів, молекул, частинок), скільки атомів знаходиться в 12 г ізотопу вуглецю  $^{12}\text{C}$ . Якщо в посудині міститься  $N$  молекул газу, то кількість молів речовини  $\nu$ :

$$\nu = \frac{N}{N_A}, \quad (7.3)$$

де  $N_A$  – універсальна константа, яка дорівнює числу молекул в 1 молі речовини, – **число (стала) Авогадро**.

Дослідним шляхом встановлено, що число Авогадро  $N_A$  дорівнює:

$$N_A = \frac{0,012\text{кг}}{12m_u} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}. \quad (7.4)$$

Масу одного моля (рис. 7.2) вимірюють у кг/моль та називають **молярною масою  $M$** :

$$M = m_{\text{мол}} N_A = M_r m_u N_A = M_r \cdot 10^{-3} (\text{кг/моль}) = M_r (\text{г/моль}). \quad (7.5)$$

Відповідно до співвідношення (7.5) молярна маса у г/моль дорівнює відносній молекулярній масі молекули.

Для речовин, молекули яких складаються з одного атома, часто використовується термін **атомна маса**.

**Кількість молів  $\nu$**  речовини також визначається формулою:

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{Nm_{\text{мол}}}{N_A m_{\text{мол}}} = \frac{m}{M}, \quad (7.6)$$

де  $m = Nm_{\text{мол}}$  – маса газу;  $M = N_A m_{\text{мол}}$  – молярна маса.

**Число Лошмідта** – число молекул, що знаходяться в  $1 \text{ м}^3$  ідеального газу за нормальних умов (тиск 101325 Па, температура  $0^\circ\text{C}$ ):

$$N_L = 2,687 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}. \quad (7.7)$$

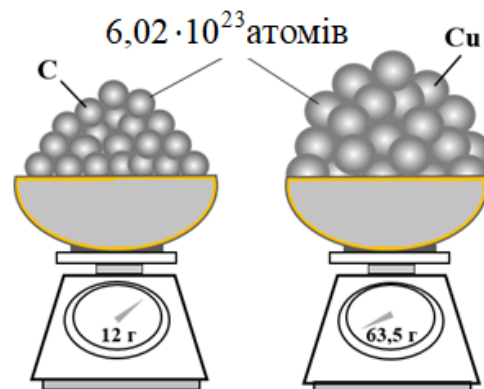


Рисунок 7.2



Якщо система є сумішшю декількох ідеальних газів, які хімічно не взаємодіють, то **кількість речовини системи**:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k = \frac{N_1}{N_A} + \frac{N_2}{N_A} + \frac{N_3}{N_A} + \dots + \frac{N_k}{N_A}, \quad (7.8)$$

або

$$\nu = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \frac{m_3}{M_3} + \dots + \frac{m_k}{M_k}, \quad (7.9)$$

де  $\nu_i$ ,  $N_i$ ,  $m_i$ ,  $M_i$  – відповідно, кількість речовини, число молекул, маса, молярна маса  $i$ -го компонента системи ( $i=1,2,3,\dots,k$ ).

### **Молярна маса суміші газів**

$$M = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_k}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k}, \quad (7.10)$$

де  $m_i$  – маса і  $\nu_i = m_i/M_i$  – кількість речовини  $i$ -го компонента суміші,  $k$  – число компонентів суміші.

### **Концентрація молекул**

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_A}{V_M} = \frac{N_A \cdot \rho}{M}, \quad (7.11)$$

де  $N$  – число молекул, що містяться в об'ємі  $V$  системи,  $V_M$  – об'єм одного моля

$V_M = \frac{M}{\rho}$ ,  $\rho$  – густина речовини.

### **7.1.3. Рівняння стану**

Для вивчення фізичних властивостей макроскопічних систем, що складаються з великої кількості частинок, застосовують два методи – статистичний та термодинамічний, що взаємно доповнюють один одного.

**Статистичний метод** базується на законах теорії ймовірностей та математичної статистики. При цьому вважають, що властивості макроскопічної системи обумовлені властивостями частинок системи, особливостями їх руху та

середніми значеннями швидкостей, енергій та інших динамічних характеристик цих частинок.

**Термодинамічний метод** базується на вивченні фізичних властивостей макросистем шляхом аналізу умов та кількісних відношень для процесів перетворень енергії в цих системах.

У статистичній фізиці та термодинаміці загальний предмет вивчення – властивості речовини та процеси, що в ній відбуваються. Підходячи до вивчення цих властивостей із різних точок зору, ці методи взаємно доповнюють одне одного.

Усі величини, що характеризують макроскопічні тіла, ділять в молекулярній фізиці на макро- і мікроскопічні. **Макроскопічними** величинами (або **макроскопічними параметрами** системи) називають такі її характеристики, які стосуються всієї системи в цілому, а не окремих молекул. Такі величини, що характеризують кожную молекулу, наприклад, координати та швидкості кожної молекули, називають **мікроскопічними** характеристиками, або **мікроскопічними параметрами**.

Одне з найважливіших завдань молекулярно-кінетичної теорії полягає у встановленні зв'язку між макроскопічними та мікроскопічними параметрами.

Властивості та стан макросистеми визначаються набором макроскопічних параметрів – **термодинамічних параметрів**. До основних параметрів стану макросистеми належать: тиск  $p$  (нормальна складова сили, що діє на одиницю площі поверхні), об'єм  $V$ , термодинамічна температура  $T$ , густина речовини  $\rho$ , концентрація  $n$  тощо.

Якщо усі параметри стану мають певні значення, які залишаються сталими при незмінних зовнішніх умовах, то стан системи називається **рівноважним**. Якщо, будь-який параметр не має певного значення, то стан системи є **нерівноважним**. Процес переходу системи з одного стану в іншій називається **термодинамічним процесом**.

Закон, який описує взаємозв'язок термодинамічних параметрів

макроскопічної системи в умовах її термодинамічної рівноваги має назву **рівняння стану**:

$$f(p, T, V) = 0; \quad (7.12)$$

де  $f(p, T, V)$  – функція, яка залежить від природи макроскопічної системи.

Вигляд функції  $f(p, T, V)$  для конкретної макросистеми може бути встановлений лише за допомогою досліду або методів статистичної фізики на основі модельних уявлень будови речовини, з якої складається система. З рівняння стану також випливає, що зміни термодинамічних параметрів  $p, T, V$  при будь-якому процесі не є незалежними.

#### **7.1.4. Основне рівняння МКТ ідеального газу**

При своєму русі молекули газу безперервно стикаються одна з одною. Через це характеристики їх руху змінюються, тому при його описанні застосовують середні значення таких величин, як імпульси, швидкості, кінетичні енергії молекул. Число зіткнень молекул газу з іншими молекулами трапляється багато разів за одиницю часу. Якщо знехтувати розмірами та взаємодією молекул (як це робиться в моделі ідеального газу), можна вважати, що між послідовними зіткненнями молекули рухаються рівномірно і прямолінійно. При цьому зіткнення молекул між собою і зі стінками посудини, в якій знаходиться газ, є абсолютно пружними. При зіткненні зі стінкою імпульс молекули змінюється, тобто молекула діє на стінку, чинячи на неї тиск. Сукупність всіх ударів всіх молекул об стінку посудини призводить до виникнення тиску газу. Якщо немає стінки чи будь-якої іншої перешкоди для молекул, саме поняття тиску втрачає сенс.

Оскільки тиск є наслідок ударів молекул о стінку посудини, очевидно, що його величина повинна залежати від середніх характеристик окремо взятих молекул. Ця залежність виражається **основним рівнянням молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу**:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 v_{\text{кв}}^2, \quad (7.13)$$

де  $p$  – тиск газу,  $n$  – концентрація його молекул (кількість на одиницю об'єму),  $m_0$  – маса однієї молекули,  $v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$  – середня квадратична швидкість.

Фізичний зміст цього рівняння полягає в тому, що воно встановлює зв'язок між характеристиками всього газу в цілому (тиском) та параметрами руху окремих молекул, тобто зв'язок між макро- та мікропараметрами.

### ***Наслідки основного рівняння МКТ***

1. Швидкість теплового руху молекул визначається температурою речовини. Для ідеального газу ця залежність виражається формулами для ***середньої квадратичної швидкості*** руху молекул газу:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \quad (7.14)$$

де  $m_0$  – маса молекули,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – ***стала Больцмана***,  $R = 8,31$  Дж/(моль · К) – ***універсальна газова стала***.

***Закон (рівняння) трьох сталих*** зв'язує основні сталі МКТ

$$kN_A = R. \quad (7.15)$$

Це рівняння показує, що стала Больцмана  $k$  — це «частка» газової сталої  $R$ , яка «припадає» на одну молекулу, а не на моль. Тобто універсальна газова стала  $R$  – це добуток сталої Больцмана на кількість частинок в одному молі ( $N_A$  – число Авогадро). Цей зв'язок дуже важливий у МКТ, бо дозволяє переходити від макроскопічного опису (тиск, об'єм, моль) до мікроскопічного (молекули, швидкості, енергія).

2. Зв'язок між температурою і кінетичною енергією молекул. Формула ***середньої кінетичної енергії*** поступального руху молекули

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (7.16)$$

з якої випливає, що середня кінетична енергія молекул залежить тільки від температури і є однаковою для усіх молекул. Це підтверджує, що тепло – це форма руху частинок.

3. Молекулярне пояснення тиску: тиск газу виникає внаслідок ударів мільярдів молекул об стінки посудини.

4. Зв'язок тиску з іншими параметрами системи

$$p = nkT, \quad (7.17)$$

$$pV = NkT, \quad (7.18)$$

де  $n$  і  $N$  – концентрація і кількість молекул, відповідно,  $V$  – об'єм.

Якщо в об'ємі знаходиться суміш газів, то повний тиск на стінки посудини визначається **законом Дальтона**

$$p = \sum_{i=1}^n p_i, \quad (7.19)$$

де  $n$  – число компонентів в суміші,  $p_i$  – парціальний тиск  $i$ -го компонента.

**Парціальним** називають такий тиск газу, що входить до складу газової суміші, який цей газ чинив би на стінки посудини, якби тільки він один займав весь об'єм, заповнений газовою сумішшю.

### **7.1.5. Рівняння Клапейрона-Менделєєва. Ізопроцеси**

Рівняння стану, що є співвідношенням між макропараметрами системи (7.12), виражається **рівнянням Клапейрона-Менделєєва**

$$pV = \nu RT. \quad (7.20)$$

Це рівняння встановлює зв'язок між основними параметрами стану ідеального газу: тиском, об'ємом, кількістю речовини та температурою. Ці параметри взаємопов'язані, зміна будь-якого з них неминуче призведе до зміни ще хоча б одного. Саме тому це рівняння і називають **рівнянням стану ідеального газу**.

В (7.20) температура речовини вимірюється в абсолютній термодинамічній шкалі. **Термодинамічна (абсолютна) температура**, одиницею вимірювання якої є Кельвін, зв'язана з температурою за шкалою Цельсія

$$T = t + 273,15 \approx t + 273. \quad (7.21)$$

Абсолютна температура має глибоке фізичне значення: вона визначається середньою кінетичною енергією теплового руху молекул. Температуру, що дорівнює 0 К, називають **абсолютним нулем**.

Якщо температура газу дорівнює  $T_{\text{н.у.}} = 273 \text{ К} = 0^\circ\text{С}$ , а тиск  $p_{\text{н.у.}} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Па} = 1 \text{ атм} = 760 \text{ мм.рт.ст.}$ ), то кажуть, що газ знаходиться за **нормальних умов**.

**Закон Авогадро:** при однаковому тиску та однаковій температурі в рівних об'ємах різних ідеальних газів міститься однакове число молекул. З цього випливає, що за нормальних умов ( $T = 273,15 \text{ К} = 0^\circ\text{С}$ ,  $p = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Па} = 1 \text{ атм} = 760 \text{ мм.рт.ст.}$ ) один моль будь-якого ідеального газу займає об'єм  $V_M = 22,414 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 22,414 \text{ літра}$ .

Якщо при здійсненні термодинамічного процесу один з термодинамічних параметрів стану ( $p$ ,  $V$  або  $T$ ) залишається сталим, а інші – змінюються, то такий процес називається **ізопроцесом**.

З рівняння Клапейрона-Менделєєва для постійної маси ( $m = \text{const}$ ) ідеального газу випливають:

**1. Закон Бойля-Маріотта** для **ізотермічного** ( $T = \text{const}$ ) процесу (рис. 7.3):

$$pV = \text{const} \text{ або } p_1V_1 = p_2V_2; \quad (7.22)$$

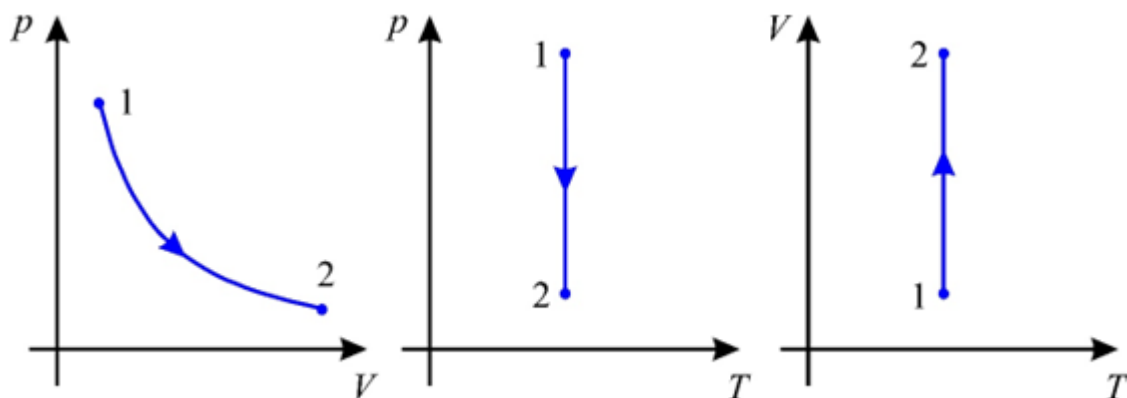


Рисунок 7.3

2. Закон Гей-Люссака для *ізобаричного* ( $p = \text{const}$ ) процесу (рис. 7.4):

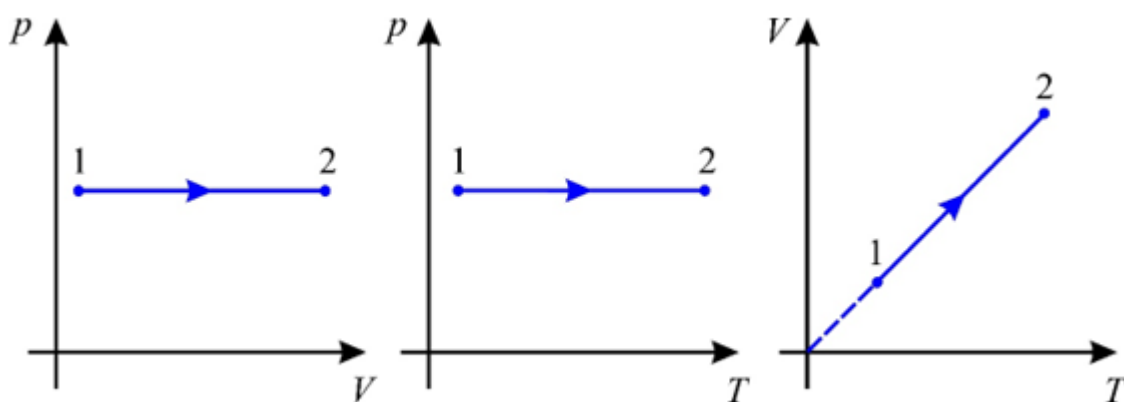


Рисунок 7.4

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad \text{або} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}; \quad (7.23)$$

3. Закон Шарля для *ізохоричного* ( $V = \text{const}$ ) процесу (рис. 7.5):

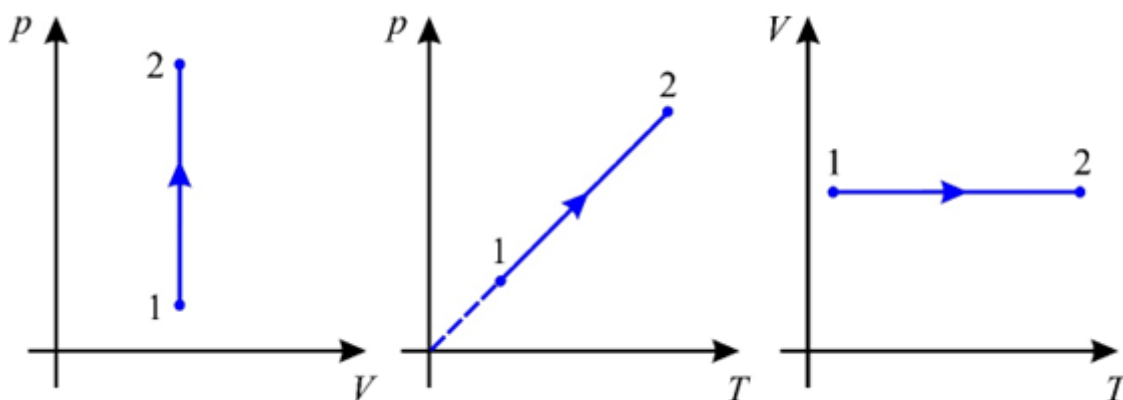


Рисунок 7.5

$$\frac{p}{T} = \text{const} \quad \text{або} \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}. \quad (7.24)$$

Для довільної маси газу є справедливим *рівняння Клапейрона-Менделєєва*

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad (7.25)$$

де  $\nu = \frac{m}{M}$  – кількість речовини (кількість молів);  $M$  – молярна маса газу.

### **7.1.6. Ступені вільності. Закон рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності**

Основне рівняння молекулярно кінетичної теорії (7.13) встановлює зв'язок між молекулярними (мікроскопічними) величинами, які стосується окремої молекули (маса, швидкість) і макроскопічною величиною (тиск), що характеризує ідеальний газ, як ціле.

Враховуючи формулу (7.16) для середнього значення кінетичної енергії поступального руху молекули ідеального газу, можна надати рівнянню (7.13) інший вигляд:

$$p = \frac{2}{3} \frac{nm_0 \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_k \rangle. \quad (7.26)$$

Таким чином, тиск газу дорівнює двом третинам середньої кінетичної енергії поступального руху молекул ( $n \langle \varepsilon_k \rangle$ ), які знаходяться в одиниці об'єму газу. Із порівняння формул (7.17) і (7.26) випливає, що середня кінетична енергія молекул ідеального газу (що складається фактично з матеріальних точок, що рухаються поступально) становить  $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT$  (7.16).

**Числом ступенів вільності (ступенів свободи)**  $i$  тіла називають найменше число незалежних координат, які необхідно задати, щоб повністю визначити положення тіла у просторі. Можна також сказати, що це кількість незалежних рухів, які може виконувати тіло. Наприклад, матеріальна точка, що довільно



рухається у просторі, має три поступальні ступені вільності ( $x, y, z$ ). Молекули одноатомного газу можна розглядати як матеріальні точки. Такими чином, одноатомна молекула має три ступені вільності поступального руху. Молекула, що складеться з понад двох атомів називається багатоатомною та має 6 ступенів вільності: 3 поступальних та 3 обертальних (табл. 1).

Таблиця 1 – Кількість ступенів вільності для різних молекул

| Тип молекули                   | Тип руху     |             |              | Усього | $i$                                  |
|--------------------------------|--------------|-------------|--------------|--------|--------------------------------------|
|                                | поступальний | обертальний | коли вальний |        |                                      |
| Одноатомна                     | 3            | -           | -            | 3      | 3                                    |
| Двоатомна з жорстким зв'язком  | 3            | 2           | -            | 5      | 5                                    |
| Двоатомна з пружним зв'язком   | 3            | 2           | 1            | 6      | 7                                    |
| Триатомна з жорстким зв'язком* | 3            | 3           | -            | 6      | 6                                    |
| Триатомна з пружним зв'язком   | 3            | 3           | 3            | 9      | $\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$ |

\*Молекула  $\text{CO}_2$  має стільки ж ступенів свободи, як і молекула двоатомного газу з жорстким зв'язком, оскільки вона лінійна, тобто три атоми розташовані вздовж однієї прямої.

**Закон рівнорозподілу енергії за ступенями вільності:** на кожен ступень вільності молекули в середньому припадає однакова кінетична енергія, що дорівнює  $\frac{kT}{2}$ . На коливальний ступінь свободи припадає енергія  $kT$ .

**Середня енергія молекули**

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (7.27)$$

де  $i$  – сума числа поступальних ( $i_{\text{пост}}$ ), числа обертальних ( $i_{\text{об}}$ ) та подвійного числа коливальних ( $i_{\text{кол}}$ ) ступенів свободи:

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{об}} + 2i_{\text{кол}}. \quad (7.28)$$

### 7.1.7. Закон Максвелла розподілу молекул за швидкостями

В рівноважному стані за відсутності зовнішнього впливу (у тому числі сили тяжіння) термодинамічні параметри, які описують стан макроскопічної системи, залишаються сталими з плином часу. Однак молекули ідеального газу безперервно зазнають зіткнень між собою, завдяки чому змінюється напрямок та швидкість руху кожної молекули. Оскільки тиск газу при цьому не змінюється, то відповідно до основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії (7.13) концентрація молекул та середнє значення квадрата швидкості молекул газу повинні залишатися сталими. З цього випливає, що кількість молекул ідеального газу, швидкості яких знаходяться в інтервалі  $(v, v + dv)$ , в середньому не змінюється.

Використовуючи методи теорії ймовірності, Дж. К. Максвелл встановив явний вигляд *функції розподілу молекул ідеального газу за модулями швидкостей*:

$$F(v) = \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp \left( -\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) 4\pi v^2. \quad (7.29)$$

Добуток функції розподілу Максвелла  $F(v)$  на нескінченно малий інтервал швидкості  $dv$  визначає ймовірність  $dP$  того, що окрема молекула має швидкість у діапазоні  $(v, v + dv)$ . З іншого боку, якщо у посудині знаходиться  $N$  молекул ідеального газу, з яких  $dN$  рухаються зі швидкостями  $(v, v + dv)$ , тоді  $dP = \frac{dN}{N}$ . Таким чином, кількість молекул ідеального газу, які мають модуль швидкості

теплового руху у діапазоні  $(v, v + dv)$  буде:

$$dN = NF(v)dv = N \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp \left( -\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) 4\pi v^2 dv. \quad (7.30)$$

Для того щоб визначити кількість молекул у кінцевому інтервалі швидкості  $(v, v + \Delta v)$  (рис. 7.6) вираз (7.30) необхідно проінтегрувати. Але, якщо виконується умова  $v \gg \Delta v$ , тоді можна використовувати наближене співвідношення:

$$\Delta N = NF(v)\Delta v = N \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp \left( -\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) 4\pi v^2 \Delta v, \quad (7.31)$$

$$\frac{\Delta N}{N\Delta v} = \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp \left( -\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) 4\pi v^2. \quad (7.32)$$

Функція розподілу Максвелла (рис. 7.6) є асиметричною та має екстремум  $(dF(v)/dv = 0)$  в точці, яка відповідає **найбільш ймовірній швидкості** молекул:

$$v_{\text{ймов}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \quad (7.33)$$

Оскільки, площа під кривою праворуч від максимуму більше за ліву частину, то кількість «швидких» молекул у газі переважає кількість «повільних», а нерухомі молекули зовсім відсутні  $(F(0) = 0)$ . Найбільша кількість молекул

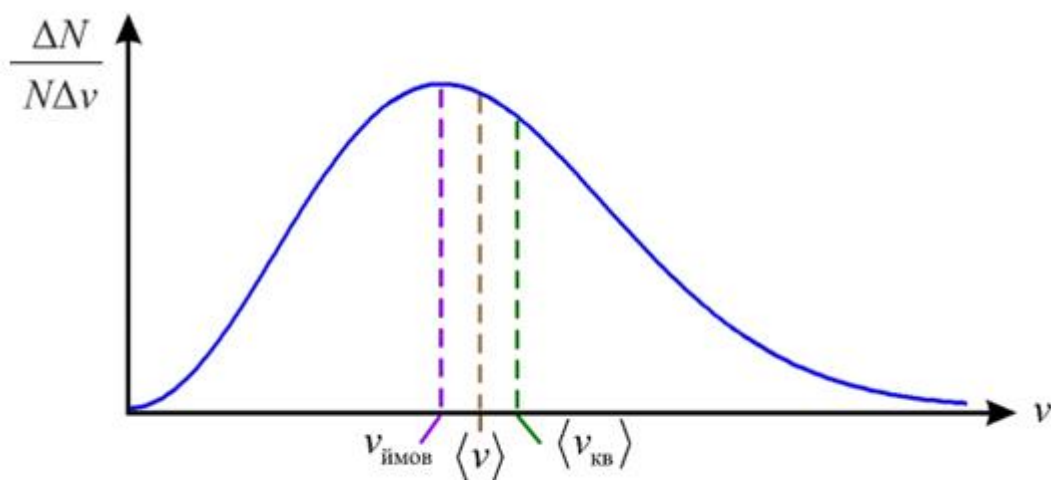


Рисунок 7.6

рухаються зі швидкостями наближеними до  $v_{\text{ймов}}$ .

Використовуючи функцію розподілу можна розрахувати

- *середню швидкість* молекул (середнє значення модуля швидкості):

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v F(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad (7.34)$$

- *середнє значення квадрата швидкості*:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 F(v) dv = \frac{3kT}{m_0} = \frac{3RT}{M}. \quad (7.35)$$

- *середню квадратичну швидкість*:

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (7.36)$$

Порівнюючи три швидкості (рис. 7.7) відповідно до виразів (7.33) - (7.36), отримаємо:

$$\langle v \rangle = 1,13 v_{\text{ймов}}, \quad (7.37)$$

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = 1,22 v_{\text{ймов}}. \quad (7.38)$$

Зі співвідношень (7.29) та (7.34) випливає, що при збільшенні температури або зменшенні маси молекул максимум функції  $F(v)$  зміщується праворуч та стає

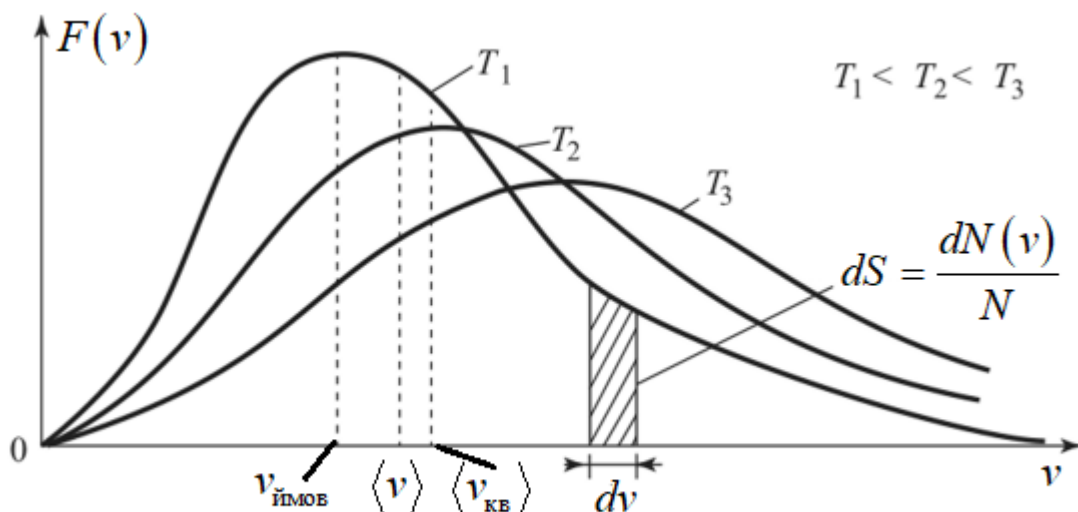


Рисунок 7.7

меншим, оскільки площа під кривою є сталою  $\int_0^{\infty} F(v) dv = 1$ . Це видно з рис. 7.7, на якому наведені функції розподілу Максвелла для різних температур ( $T_2 > T_1$ ) для одного газу ( $m_{02} = m_{01}$ ).

Якщо ввести поняття **відносної швидкості**  $u = v/v_{\text{ймов}}$  і  $\Delta u = \Delta v/v_{\text{ймов}}$ , то можна отримати функцію розподілу, яка не залежить від температури та типу газу:

$$F(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2). \quad (7.39)$$

### 7.1.8. Розподіл Больцмана. Барометрична формула

За відсутності зовнішніх сил молекули газу завдяки хаотичності теплового руху та великій частоті зіткнень, розподіляються в просторі однорідно, і всі можливі значення координат для молекули є рівноймовірними. Однак у силовому полі однорідність розподілу частинок у просторі порушується. Якщо молекули ідеального газу знаходяться у гравітаційному полі Землі, то сили тяжіння намагаються розташувати усі молекули ближче до поверхні Землі. Тому в атмосфері встановлюється певний розподіл молекул повітря по висоті, а, відповідно, з висотою змінюється й тиск газу.

Використовуючи рівняння стану ідеального газу для атмосфери, вважаючи, що її температура залишається сталою (ізотермічна атмосфера), поле тяжіння є однорідним, а маси всіх молекул однакові, можна отримати **барометричну формулу**, яка визначає залежність тиску атмосферного повітря від висоти:

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{m_0 gh}{kT}\right), \quad (7.40)$$

де  $p(h)$  – тиск на висоті  $h$ ;  $p_0 = p(0)$  – тиск на поверхні Землі (або на рівні моря);  $g$  – прискорення вільного падіння.

З барометричної формули (7.40) випливає, що тиск зменшується з висотою тем

швидше, чим важчий газ і чим нижче температура (рис. 7.8). Наприклад, на великих висотах концентрація легких газів гелію та водню набагато більше, ніж на поверхні Землі.

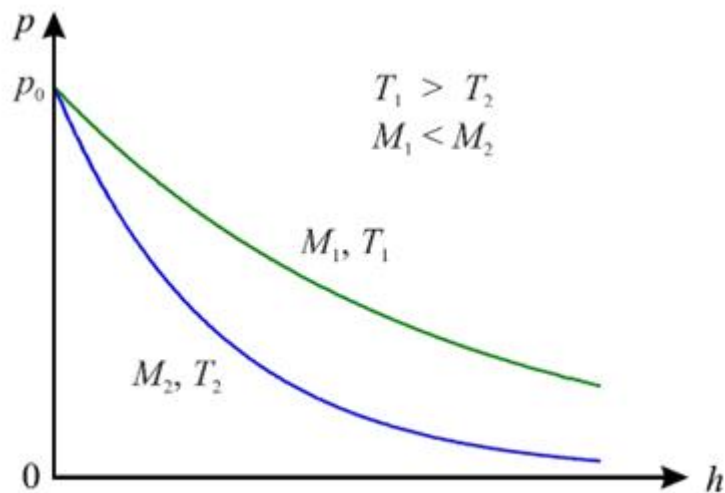


Рисунок 7.8

Підставляючи рівняння (7.17) у (7.40), знаходимо **формулу Больцмана** для концентрації молекул ідеального газу на висоті  $h$ :

$$n(h) = n_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 gh}{kT}\right), \quad (7.41)$$

де  $n_0 = n(0)$  – концентрація молекул на поверхні Землі (або на рівні моря).

Враховуючи, що величина  $m_0 gh$  у виразі (7.41) визначає потенціальну енергію молекули  $\varepsilon_p$  у гравітаційному полі Землі, отримаємо розподіл молекул по висоті за значеннями їх потенціальної енергії:

$$n(h) = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_p}{kT}\right). \quad (7.42)$$

Людвіг Больцман теоретично довів, що співвідношення (7.42) виконується для великої сукупності однакових частинок, які хаотично рухаються у будь-якому потенціальному (а не лише гравітаційному) полі відповідно до цієї формули, яку називають **розподілом Больцмана** (рис. 7.9)

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_p}{kT}\right). \quad (7.43)$$

Таким чином, аналізуючи розподіли, можна зробити висновок, що у той час, як розподіл Максвелла дає розподіл молекул за швидкостями, а значить, за

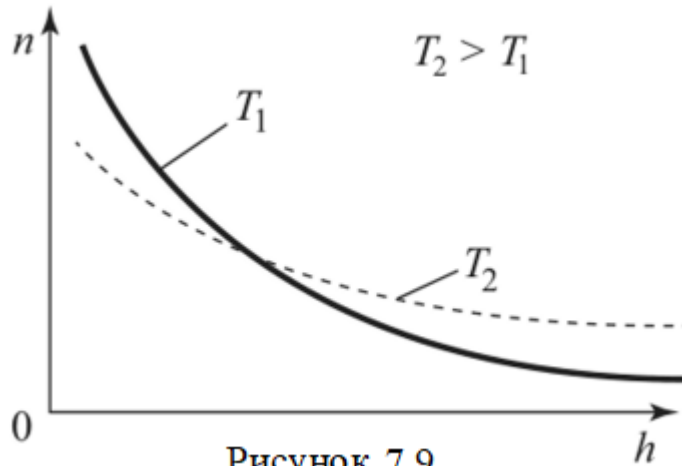


Рисунок 7.9

значенням кінетичної енергії, розподіл Больцмана дає розподіл частинок за значеннями потенціальної енергії.

### 7.1.9. Явища перенесення. Дифузія, теплопровідність, внутрішнє тертя

Частина фізики, що вивчає процеси, що виникають при порушеннях рівноваги, називається **фізичною кінетикою**. Порушення рівноваги приводять до перенесення речовини, енергії, імпульсу з одних місць середовища в інші. Потoki маси, тепла тощо, що виникають, прагнуть повернути систему в стан рівноваги. Спостережувані при цьому явища мають назву **явищ перенесення**.

**Потоком** будь-якої фізичної величини (маси, енергії, імпульсу) називається кількість цієї величини, що проходить в одиницю часу через деяку уявну поверхню. Потік є скалярною алгебраїчною величиною, знак якої обирається довільно (наприклад, для замкнутих поверхонь потік, що виходить назовні,

додатний, для незамкненої поверхні знак потоку визначається вибором додатного напрямку).

Явища перенесення: дифузія, теплопровідність та внутрішнє тертя (динамічна в'язкість).

**1. Дифузія** (перенесення частинок або маси) – обумовлене тепловим рухом вирівнювання концентрацій у суміші декількох речовин – описується **законом Фіка**:

$$M_i = -D \cdot \frac{d\rho}{dz} \cdot S \quad \text{або} \quad N_i = -D \cdot \frac{dn}{dz} \cdot S, \quad (7.44)$$

де  $M_i$ ,  $N_i$  – **потоки маси** (кг/с) або **молекул** (с<sup>-1</sup>) речовини;  $\frac{d\rho}{dz}$ ,  $\frac{dn}{dz}$  – градієнти густини (кг/м<sup>4</sup>) або концентрації (м<sup>-4</sup>);  $S$  – площа поверхні, що перпендикулярна осі  $z$  (м<sup>2</sup>);  $D$  – коефіцієнт дифузії (м<sup>2</sup>/с):

$$D = \frac{1}{3} \cdot \langle v \rangle \cdot \lambda, \quad (7.45)$$

де  $\langle v \rangle$  – середня швидкість теплового руху (7.34);  $\lambda$  – **середня довжина вільного пробігу** – середня відстань, яку молекула проходить між двома послідовними зіткненнями:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \quad (7.46)$$

де  $d$  – **ефективний діаметр** молекули (найменша відстань, на яку наближаються центри двох молекул),  $n$  – концентрація молекул (7.11), тобто їх кількість в одиниці об'єму,  $\sigma$  – **ефективний переріз**:

$$\sigma = \pi d^2. \quad (7.47)$$

**Середня кількість зіткнень** за 1 секунду

$$\langle Z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\lambda}. \quad (7.48)$$

**2. Теплопровідність** – процес перенесення теплової енергії – описується **законом Фур'є**:



$$q = -\kappa \cdot \frac{dT}{dz} \cdot S, \quad (7.49)$$

де  $q$  – **тепловий потік** (Дж/с) через поверхню  $S$ , що розташована перпендикулярну осі  $z$ ;  $\frac{dT}{dz}$  – градієнт температури (К/м);  $\kappa$  – **теплопровідність** (коефіцієнт теплопровідності) (Вт/м·К):

$$\kappa = \frac{1}{3} \cdot \langle v \rangle \cdot \lambda \cdot \rho \cdot c_v, \quad (7.50)$$

де  $\rho$  – **густина речовини** (кг/м<sup>3</sup>),  $c_v = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M}$  – **питома теплоємність при постійному об'ємі** (Дж/кг·К).

**3. Внутрішнє тертя**, що виникає між шарами рідини або газу, які знаходяться у відносному русі, характеризується **законом Ньютона**:

$$K = -\eta \cdot \frac{du}{dz} \cdot S, \quad (7.51)$$

де  $K$  – **потік імпульсу** (Н) через поверхню  $S$  (м<sup>2</sup>);  $\frac{du}{dz}$  – градієнт швидкості (с<sup>-1</sup>), що показує, як швидко змінюється швидкість течії рідини або газу у напрямку  $z$ , що є перпендикулярним їх руху;  $\eta$  – в'язкість (Па·с).

Часто формулу (7.51) записують у вигляді

$$F = \eta \cdot \left| \frac{du}{dz} \right| \cdot S, \quad (7.52)$$

де  $F$  – **сила внутрішнього тертя**, яка вимірюється у Ньютонах.

**В'язкість** (коефіцієнт в'язкості):

$$\eta = \frac{1}{3} \cdot \langle v \rangle \cdot \lambda \cdot \rho. \quad (7.53)$$

З порівняння формул (7.45), (7.50) і (7.53) може бути встановлений **зв'язок між коефіцієнтами** дифузії, теплопровідності та в'язкості:

$$\eta = D\rho, \quad \kappa = \eta c_v = D\rho c_v. \quad (7.54)$$

Знак «мінус» у формулах (7.44), (7.49) та (7.51) обумовлений тим, що напрям потоків маси, енергії та імпульсу протилежний градієнту, який вказує напрям зростання величини концентрації, температури та швидкості.

## 7.2. Приклади розв'язання задач

### Задача 7.2.1

Визначити число  $N$  молекул, що містяться в об'ємі  $V = 1 \text{ мм}^3$  та масу  $m_0$  молекули води.

| Дано:                                      | Розв'язання                                                              |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $V = 1 \text{ мм}^3 = 10^{-9} \text{ м}^3$ | Число $N$ молекул, що містяться в деякій масі $m$ , дорівнює             |
| $N = ? \quad m_0 = ?$                      | добутку числа Авогадро $N_A$ на кількість речовини $\nu = \frac{m}{M}$ : |

$$N = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A. \quad (1)$$

де  $M$  – молярна маса речовини.

Оскільки густина речовини за визначенням  $\rho = m/V$ , тоді масу можна виразити як добуток густини і об'єму  $m = \rho V$ . В результаті, шукане число молекул становить

$$N = \frac{\rho V}{M} N_A. \quad (2)$$

Хімічна формула води  $\text{H}_2\text{O}$ , тому її молярна маса є

$$M = 2M_H + M_O = 2 \cdot 1 \cdot 10^{-3} + 16 \cdot 10^{-3} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Якщо підставити у розрахункову формулу (2) молярну масу  $M$ , густину води  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$  та число Авогадро  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ , то число молекул

$$N = \frac{10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{18 \cdot 10^{-3}} = 3,34 \cdot 10^{19}.$$

В одному молі знаходиться  $N_A$  молекул води, тому маса однієї молекули

$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{18 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 2,99 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

Перевіримо розмірності результатів:

$$[N] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{моль}}{\text{м}^3 \cdot \text{кг}} = 1; \quad [m_0] = \frac{\text{кг}}{\text{моль} \cdot \text{моль}^{-1}} = \text{кг}$$

**Відповідь:**  $N = 3,34 \cdot 10^{19}$ ;  $m_0 = 2,99 \cdot 10^{-26}$  кг.

### Задача 7.2.2

За нормальних умов кисень займає об'єм  $V = 3$  літра. Визначте кількість молекул кисню у посудині та його густину.

| Дано:                                                                                | Розв'язання                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $V = 3 \text{ л} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$                                      | У одному молі газу знаходиться однакова кількість |
| $N = ? \quad \rho = ?$                                                               | частинок, яка чисельно дорівнює сталій Авогадро   |
| $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ . Для того щоб знайти кількість молекул |                                                   |

$$N = \nu N_A, \quad (1)$$

треба визначити кількість молів  $\nu$  молекул кисню знаходиться у посудині.

Скористаємося визначенням молярної маси, яка є масою одного моля речовини. Тоді, маса усіх молекул кисню (маса газу), що знаходяться у посудині, буде:

$$m = \nu M,$$

де  $M$  – молярна маса газу (кисню).

Молекула кисню складається з двох атомів, тому молярна маса молекулярного кисню  $M = 2M_{\text{ат}} = 2 \cdot 16 \cdot 10^{-3} = 32 \cdot 10^{-3}$  кг/моль. Тоді кількість молекул кисню

$$N = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A. \quad (2)$$

Оскільки за нормальних умов ( $p = 1 \cdot 10^5$  Па,  $T = 273$  К) кисень можна вважати ідеальним газом, то для знаходження маси газу скористаємося рівнянням

Клапейрона-Менделєєва

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

де  $p$  – тиск;  $V$  – об’єм;  $T$  – температура;  $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  – універсальна газова стала.

Виразимо масу кисню з рівняння Клапейрона-Менделєєва:

$$m = \frac{pVM}{RT} \quad (3)$$

і підставимо (3) в формулу (2). Тоді число молекул

$$N = \frac{m}{M} N_A = \frac{pVM}{MRT} N_A = \frac{pV}{\frac{R}{N_A} T} = \frac{pV}{kT}, \quad (4)$$

де  $k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$  – стала Больцмана.

Підставляємо чисельні значення у формулу (3), отримаємо кількість молекул кисню:

$$N = \frac{pV}{kT} = \frac{10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273} = 7,96 \cdot 10^{22} \approx 8 \cdot 10^{22}.$$

За визначенням, густина – це маса одиниці об’єму речовини:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Враховуючи формулу (3), отримаємо густину кисню у посудині:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pVM}{VRT} = \frac{pM}{RT}, \quad (5)$$

яка дорівнює

$$\rho = \frac{pM}{RT} = \frac{10^5 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 273} = 1,41 \text{ кг/м}^3.$$

Перевірка розмірності

$$[N] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3}{(\text{Дж/К}) \cdot \text{К}} = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3}{\text{Дж}} = \frac{(\text{Н/м}^2) \cdot \text{м}^3}{\text{Н} \cdot \text{м}} = 1.$$

$$[\rho] = \frac{\text{Па} \cdot (\text{кг/моль})}{\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})} = \frac{\text{Па} \cdot \text{кг}}{\text{Дж}} = \frac{(\text{Н/м}^2) \cdot \text{кг}}{\text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

**Відповідь:**  $N \approx 8 \cdot 10^{22}$ ;  $\rho = 1,41 \text{ кг/м}^3$ .

### Задача 7.2.3

Тиск повітря в зачиненій металевій пляшці дорівнює  $p_1 = 100 \text{ кПа}$  при кімнатній температурі  $T_1 = 293 \text{ К}$ . На скільки треба нагріти повітря у пляшці для того, щоб з неї вилетіла пробка. Поперечний переріз пробки складає  $S = 4 \text{ см}^2$ . Відомо, щоб витягнути пробку з пляшки необхідно прикласти силу  $F = 15 \text{ Н}$ .

#### Дано:

$$p_1 = 100 \text{ кПа} = 10^5 \text{ Па}$$

$$T_1 = 293 \text{ К}$$

$$S = 4 \text{ см}^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$F = 15 \text{ Н}$$

$$\Delta T = ?$$

#### Розв'язання

Для того щоб вилетіла пробка, необхідно шляхом нагрівання утворити надлишковий тиск повітря всередині пляшки. Тиск – це нормальна складова сили, що діє на одиницю поверхні, розташовану перпендикулярно їй, тому надлишковий тиск буде залежати від площі поперечного

перерізу  $S$  пробки:

$$\Delta p = \frac{F}{S}, \quad (1)$$

де  $F$  – сила, яку необхідно прикласти для відкоркування пляшки.

При тиску, наближеного до атмосферного, повітря у пляшці може вважатися ідеальним газом. Тому, при незмінному об'ємі пляшки можна застосовувати закон Шарля, що описує ізохорний процес

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \quad (2)$$

де  $p_1, T_1$  – тиск та температура повітря у початковому стані (до нагрівання);  
 $p_2, T_2$  – тиск та температура повітря у кінцевому стані (після нагрівання).

Тиск газу після нагрівання –  $p_2 = p_1 + \Delta p$  і  $T_2$ , тому закон Шарля, що описує ізохоричний процес, набуває вигляду

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_1 + \Delta p}{T_2}. \quad (3)$$

Кінцева температура повітря у пляшці після нагрівання становить

$$T_2 = \frac{p_1 + \Delta p}{p_1} = T_1 \left( 1 + \frac{\Delta p}{p_1} \right) = T_1 \left( 1 + \frac{F}{p_1 S} \right). \quad (4)$$

Отже, для вильоту пробки з пляшки необхідно збільшити температуру на величину:

$$\Delta T = \frac{T_1 F}{p_1 S} = \frac{293 \cdot 15}{10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 109,88 \approx 110 \text{ K}.$$

Розмірність результату:

$$[T] = \text{K}, [p] = \text{Па}, [F] = \text{Н}, [S] = \text{м}^2;$$

$$[\Delta T] = \frac{\text{К} \cdot \text{Н}}{\text{Па} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{К} \cdot \text{Н}}{\text{Н}/\text{м}^2 \cdot \text{м}^2} = \text{К}.$$

**Відповідь:**  $\Delta T \approx 110 \text{ K}$ .

#### **Задача 7.2.4**

*У запаяній з обох кінців циліндричній трубці перебуває повітря за нормальних умов. Трубка розділена рухомим поршнем на дві частини, об'єми яких  $V_1$  і  $V_2$  відносяться як 1:2. На скільки слід нагріти повітря в меншій частині трубки та наскільки охолодити в більшій, щоб поршень ділив трубку на дві рівні частини.*

Вважати, що нагрівання та охолодження в обох частинах трубки здійснюється за умови  $V/T = \text{const}$ .

|                             |                                                         |
|-----------------------------|---------------------------------------------------------|
| <b>Дано:</b>                | <b>Розв'язання</b>                                      |
| $V_1:V_2=1:2$               | За умови $V_1:V_2=1:2$ , об'єми частин співвідносяться, |
| $\Delta T_1=? \Delta T_2=?$ | як $V_2=2V_1$ .                                         |

Якщо знехтувати об'ємом поршня, то об'єм першої частини  $V_1 = \frac{V_0}{3}$ , а другої –  $V_2 = \frac{2V_0}{3}$ , де  $V_0$  – об'єм трубки. Кінцеві об'єми повинні бути однакові  $V_3 = \frac{V_0}{2}$ .

Умова  $V/T = \text{const}$  означає, що процеси нагрівання та охолодження здійснюються при постійному тиску, тобто ізобарично. Згідно із законом Гей-Люссака для повітря в меншій і більшій частинах трубки маємо, відповідно,

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{T_0}{T_1},$$

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{T_0}{T_2}.$$

де  $T_0 = 273\text{K}$  – температура, що відповідає нормальним умовам.

Тоді, кінцеві температури в кожній частині трубки

$$T_1 = \frac{V_3 \cdot T_0}{V_1} = \frac{V_0 \cdot 3 \cdot 273}{2 \cdot V_0} = 409,5\text{K},$$

$$T_2 = \frac{V_3 \cdot T_0}{V_2} = \frac{V_0 \cdot 3 \cdot 273}{2 \cdot 2V_0} = 204,75\text{K},$$

Це означає, що газ у першій половині трубки треба нагріти на  $\Delta T_1 = T_1 - T_0 = 409,5 - 273 = 136,5\text{K}$ , а в другій половині –  $\Delta T_2 = T_2 - T_0 = 204,75 - 273 = -68,25\text{K}$ , охолодити на  $68,25\text{K}$ .

Перевірка розмірності:

$$[T] = \text{K}; [V] = \text{м}^3;$$



$$[T] = \frac{\text{м}^3 \cdot \text{К}}{\text{м}^3} = \text{К}.$$

**Відповідь:**  $\Delta T_1 = 136,5\text{К}$ ;  $\Delta T_2 = -68,25\text{К}$

### Задача 7.2.5

У відкачаний і запаяний з двох кінців вузький горизонтальній трубці посередині знаходиться стовпчик ртуті довжиною  $h = 0,3$  м. Якщо трубку поставити вертикально, стовпчик ртуті зміститься на  $l = 15$  см. Визначити тиск у трубці перед тим, як з неї відкачали повітря, якщо її довжина  $H = 1$  м, а густина ртуті  $\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3$ .

**Дано:**

$$h = 0,3 \text{ м}$$

$$l = 15 \text{ см}$$

$$H = 1 \text{ м}$$

$$\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3$$

$$p = ?$$

**Розв'язання**

За умовами задачі температура газу залишається постійною, тому для її розв'язання застосуємо закон Бойля-Маріотта, який описує ізотермічний процес. В горизонтальному положенні трубки стан газу визначається об'ємом  $V_1$  та тиском  $p$ . Якщо поперечний переріз трубки

$S$ , а висота повітряного стовпчика  $\frac{H-h}{2}$ , то об'єм повітря дорівнює

$$V_1 = \frac{(H-h)S}{2}. \quad (1)$$

Коли трубка знаходиться вертикальному положенні, стан газу в верхній частині трубки визначається тиском  $p_1$  і об'ємом

$$V_2 = \left( \frac{H-h}{2} + l \right) S, \quad (2)$$

а в нижній частині – об'ємом

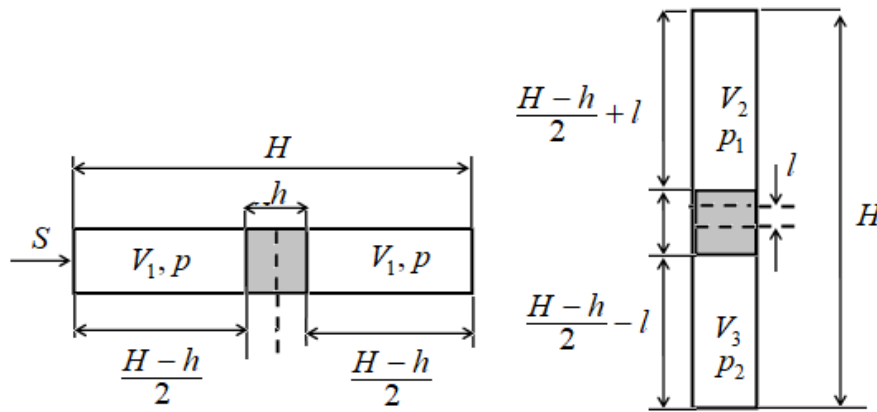
$$V_3 = \left( \frac{H-h}{2} - l \right) S \quad (3)$$

і тиском

$$p_2 = p_1 + p', \quad (4)$$

тобто тиск збільшився на величину  $p'$  завдяки вазі стовпчика ртуті висотою  $h$  і густиною  $\rho$ :

$$p' = \rho gh. \quad (5)$$



Згідно із законом Бойля-Маріотта для газу в верхній частині трубки

$$pV_1 = p_1V_2, \quad (6)$$

звідки тиск становить

$$p_1 = \frac{pV_1}{V_2}. \quad (7)$$

Для газу в нижній частині трубки закон Бойля-Маріотта має вигляд

$$pV_1 = p_2V_3. \quad (8)$$

Після підставлення (4) і (7) в (8) і нескладних математичних перетворень отримуємо

$$pV_1 = \left( \frac{pV_1}{V_2} + p' \right) V_3 = \frac{(pV_1 + p'V_2)V_3}{V_2}, \quad (9)$$

$$pV_1V_2 = (pV_1 + p'V_2)V_3 = pV_1V_3 + p'V_2V_3,$$

$$pV_1(V_2 - V_3) = p'V_2V_3,$$

$$p = \frac{p'V_2V_3}{V_1(V_2 - V_3)}. \quad (10)$$

Підставлення значень об'ємів  $V_1(1)$ ,  $V_2(2)$ ,  $V_3(3)$  і додаткового тиску (5) в (10) дає

$$\begin{aligned} p &= \frac{\rho gh \cdot \left(\frac{H-h}{2} + l\right) S \cdot \left(\frac{H-h}{2} - l\right) S}{\frac{H-h}{2} S \left[ \left(\frac{H-h}{2} + l\right) S - \left(\frac{H-h}{2} - l\right) S \right]} = \\ &= \frac{\rho gh \cdot [(H-h) + 2l] [(H-h) - 2l] \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot (H-h) [H-h + 2l - H + h + 2l]} = \\ &= \frac{\rho gh [(H-h)^2 - 4l^2]}{(H-h) \cdot 4l} = \\ &= \frac{13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 0,3 [(1-0,3)^2 - 4(0,15)^2]}{(1-0,3) \cdot 4 \cdot 0,15} = 3,8 \cdot 10^4 \text{ Па}. \end{aligned}$$

Перевірка розмірності:

$$[p] = \frac{\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right) \cdot \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) \cdot \text{м} \cdot (\text{м}^2)}{\text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} = \frac{H}{\text{м}^2} = \text{Па}.$$

**Відповідь:**  $p = 3,8 \cdot 10^4 \text{ Па}$

### Задача 7.2.6

*Визначити, наскільки змінилася маса гелію, що знаходиться в балоні об'ємом  $V = 0,25 \text{ м}^3$  під тиском  $p_1 = 10^6 \text{ Па}$  при температурі  $T_1 = 293 \text{ К}$ , якщо з балона була випущена частина маси газу, після чого тиск знизився до  $p_2 = 10^5 \text{ Па}$ , а температура зменшилася до  $T_2 = 283 \text{ К}$ .*

**Дано:**

$$V = 0,25 \text{ м}^3$$

$$p_1 = 10^6 \text{ Па}$$

$$T_1 = 293 \text{ К}$$

$$p_2 = 10^5 \text{ Па}$$

$$T_2 = 283 \text{ К}$$

$$\Delta m = ?$$

**Розв'язання**

Спочатку стан гелію визначався такими параметрами як тиск  $p_1$ , маса  $m_1$ , температура  $T_1$  та об'єм  $V$ . Після того, як з балона була випущена певна кількість газу  $\Delta m$ , його стан став визначається тиском  $p_2$  масою  $m_2$ , температура  $T_2$  та незмінним об'ємом  $V$ . Напишемо рівняння Клапейрона-Менделєєва для початкового та кінцевого станів гелію

$$p_1 V = \frac{m_1}{M} R T_1; \quad (1)$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{M} R T_2, \quad (2)$$

де  $M = 4 \cdot 10^{-3}$  кг/моль – молярна маса гелію.

Виразимо початкову і кінцеву маси гелію у балоні із рівнянь (1) і (2)

$$m_1 = \frac{p_1 V M}{R T_1}, \quad (3)$$

$$m_2 = \frac{p_2 V M}{R T_2}. \quad (4)$$

Отже, маса, яку випустили з балона, дорівнює різниці мас (3) і (4)

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{V M}{R} \left( \frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) = \frac{0,25 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{8,31} \left( \frac{10^6}{293} - \frac{10^5}{283} \right) = 0,368 \text{ кг}.$$

Перевірка розмірності:

$$[\Delta m] = \frac{\text{м}^3 \cdot (\text{кг/моль}) \text{ Па}}{\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \text{ К}} = \frac{\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{К}} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} = \text{кг}.$$

**Відповідь:**  $\Delta m = 0,368$  кг.

### Задача 7.2.7

Маса  $m=10\text{г}$  кисню знаходиться при тиску  $p=304\text{кПа}$  і температурі  $t_1=10^\circ\text{C}$ . Після розширення внаслідок нагрівання при постійному тиску кисень зайняв об'єм  $V_2=10\text{л}$ . Знайти об'єм газу до розширення, температуру газу після розширення, густину газу до і після розширення.

**Дано:**

$$m=10\text{г}$$

$$p=304\text{кПа}$$

$$t_1=10^\circ\text{C}$$

$$V_2=10\text{л}$$

$$V_1=?\ T_2=?$$

$$\rho_1=?\ \rho_2=?$$

**Розв'язання**

При не дуже великому тиску і не дуже високих температурах кисень можна вважати ідеальним газом, отже, його стан може визначатися рівнянням Клапейрона-Менделєєва. Привласнимо характеристикам газу до

розширення індекс 1, а після розширення – індекс 2, і напишемо відповідні рівняння стану, припускаючи, що,

оскільки тиск в процесі розширення газу залишається постійним, то  $p_1=p_2=p$ :

$$pV_1=\frac{m}{M}RT_1, \quad (1)$$

$$pV_2=\frac{m}{M}RT_2. \quad (2)$$

З виразу (1) знайдемо об'єм до розширення, а з (2) – температуру після розширення.

$$V_1=\frac{mRT_1}{Mp}, \quad (3)$$

$$T_2=\frac{pV_2M}{mR}. \quad (4)$$

Підставимо в (3) і (4) числові значення величин в одиницях СІ:  $m=10\text{г}=10^{-2}\text{кг}$ ;

$p=304\text{кПа}=3,04\cdot 10^5\text{Па}$ ; молярну масу кисню  $M=32\cdot 10^{-3}\text{кг/моль}$ ,

температуру в градусах Цельсія виразимо в Кельвінах  $T_1=t_1+273=283\text{К}$ .

$$V_1 = \frac{mRT_1}{Mp} = \frac{10^{-2} \cdot 8,31 \cdot 283}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 3,04 \cdot 10^5} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

$$T_2 = \frac{pV_2M}{mR} = \frac{3,04 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2} \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{10^{-2} \cdot 8,31} = 1170 \text{ К}.$$

Густина – фізична величина, що дорівнює масі одиниці об'єму речовини:

$\rho = \frac{m}{V}$ . Виразивши її з рівнянь Менделєєва-Клапейрона (1), одержимо значення

густини газу в початковому стані

$$\rho_1 = \frac{p \cdot M}{R \cdot T_1}, \quad (5)$$

Густину газу в кінцевому стані можна знайти з умов задачі, оскільки маса газу не змінюється, а об'єм  $V_2$  заданий

$$\rho_2 = \frac{m}{V_2}. \quad (6)$$

Підставимо числові значення параметрів в (5) і (6) та визначимо густину газу до і після розширення:

$$\rho_1 = \frac{3,04 \cdot 10^5 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 283} = 4,1 \text{ кг/м}^3,$$

$$\rho_2 = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3}} = 1,0 \text{ кг/м}^3.$$

Отже, при постійному тиску густина газу змінюється обернено пропорційно абсолютній температурі.

Перевірка розмірності:

$$[V] = \frac{\text{кг} \cdot (\text{Дж/моль} \cdot \text{К}) \cdot \text{К}}{(\text{кг/моль}) \cdot \text{Па}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{моль} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{Н}} = \text{м}^3;$$

$$[T] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot (\text{кг/моль})}{\text{кг} \cdot (\text{Дж/моль} \cdot \text{К})} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{м}^2 \cdot \text{моль} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \text{К};$$

$$[\rho] = \frac{\text{Па} \cdot (\text{кг/моль})}{(\text{Дж/моль} \cdot \text{К}) \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{м}^2 \cdot \text{моль} \cdot \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

**Відповідь:**  $V_1 = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ ,  $T_2 = 1170 \text{ К}$ ,  $\rho_1 = 4,1 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_2 = 1,0 \text{ кг/м}^3$ .

### Задача 7.2.8

У посудині об'ємом  $V = 2$  літри знаходиться маса  $m_1 = 6$  г вуглекислого газу ( $\text{CO}_2$ ) та маса  $m_2 = 5$  г закису азоту ( $\text{N}_2\text{O}$ ) при температурі  $t = 127^\circ\text{C}$ . Знайти тиск суміші газів у посудині.

| Дано:                                     | Розв'язання                                                                                                                                        |
|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $V = 2 \text{ л}$                         | За законом Дальтона тиск суміші газів, що не взаємодіють                                                                                           |
| $m_1 = 6 \text{ г } (\text{CO}_2)$        | один з одним хімічно, дорівнює сумі парціальних тисків газів                                                                                       |
| $m_2 = 5 \text{ г } (\text{N}_2\text{O})$ |                                                                                                                                                    |
| $t = 127^\circ\text{C}$                   |                                                                                                                                                    |
| $p = ?$                                   | $p = \sum_{i=1}^n p_i .$ <p>Парціальний тиск <math>p_i</math> кожного з цих газів – це тиск, який мав би газ, якби він один займав весь об'єм.</p> |

Для суміші двох газів закон Дальтона набуває вигляду

$$p = p_1 + p_2 . \quad (1)$$

Знайдемо парціальний тиск кожного газу, скориставшись рівнянням Клапейрона-Менделєєва.

$$p_1 = \frac{m_1 TR}{VM_1} \quad \text{та} \quad p_2 = \frac{m_2 TR}{VM_2} . \quad (2)$$

Підставимо співвідношення (2) в рівняння (1), отримаємо тиск суміші газів на стінки посудини:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{m_1 TR}{VM_1} + \frac{m_2 TR}{VM_2} = \frac{TR}{V} \left( \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) . \quad (3)$$

Підставимо в (3) числові значення, врахувавши, що молярна маса вуглекислого газу  $\text{CO}_2$   $M_1 = (12 + 2 \cdot 16) \cdot 10^{-3} = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ , молярна маса

закису азоту  $N_2O$   $M_2 = (2 \cdot 14 + 16) \cdot 10^{-3} = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ ,  $T = t + 273 = 127 + 273 = 400 \text{ К}$ ,  $R = 8,314 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$ ,  $V = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ , та отримаємо тиск суміші

$$p = \frac{TR}{V} \left( \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) = \frac{400 \cdot 8,314}{2 \cdot 10^{-3}} \left( \frac{6 \cdot 10^{-3}}{44 \cdot 10^{-3}} + \frac{5 \cdot 10^{-3}}{44 \cdot 10^{-3}} \right) = 4,155 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Перевірка розмірності:

$$[p] = \frac{\text{кг} \cdot \text{К} \cdot \text{Дж} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}.$$

**Відповідь:**  $p = 4,155 \cdot 10^5 \text{ Па}$ .

### Задача 7.2.9

У повітрі міститься 23,6% кисню та 76,4% азоту (по масі) при тиску  $p = 100 \text{ кПа}$  та температурі  $t = 13^\circ\text{C}$ . Знайти густину  $\rho$  повітря та парціальні тиски  $p_1$  та  $p_2$  кисню та азоту.

| Дано:                  | Розв'язання                                                                                                             |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 23,6% $O_2$            | Повітря – це суміш газів, тому згідно з умовою задачі маса $m$ повітря містить масу $0,236 m$ кисню та $0,764 m$ азоту. |
| 76,4% $N_2$            |                                                                                                                         |
| $p = 100 \text{ кПа}$  | Молярна маса суміші, якщо $\nu$ – кількість речовини повітря, дорівнює                                                  |
| $t = 13^\circ\text{C}$ |                                                                                                                         |
| $\rho = ?$ $p_1 = ?$   | $M = \frac{m}{\nu} = \frac{m}{\nu_1 + \nu_2}, \quad (1)$                                                                |
| $p_2 = ?$              |                                                                                                                         |

де  $\nu_1$  та  $\nu_2$  – кількості речовини кисню та азоту. Кількості речовин кисню та

азоту становлять  $\nu_1 = \frac{m_1}{M_1} = \frac{0,236m}{M_1}$  та  $\nu_2 = \frac{m_2}{M_2} = \frac{0,764m}{M_2}$ , а молярні маси,

відповідно,  $M_1 = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$  і  $M_2 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ .

Підставляючи ці дані в формулу (1) для молярної маси суміші, отримуємо



$$M = \frac{m}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{m}{\frac{0,236m}{M_1} + \frac{0,764m}{M_2}} = \frac{M_1 M_2}{0,236M_2 + 0,764M_1} =$$

$$= \frac{M_1 M_2}{0,236M_2 + 0,764M_1} = \frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{0,236 \cdot 28 \cdot 10^{-3} + 0,764 \cdot 32 \cdot 10^{-3}} = 28,8 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Густину повітря, яка за визначенням є масою одиниці об'єму речовини, знайдемо за допомогою рівняння Клапейрона-Менделєєва  $pV = \frac{m}{M}RT$ :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} = \frac{10^5 \cdot 28,8 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 286} = 1,21 \text{ кг/м}^3.$$

Для визначення парціального тиску, спочатку визначимо об'єм повітря, користуючись рівнянням Клапейрона-Менделєєва  $pV = \frac{m}{M}RT$

$$V = \frac{mRT}{pM}.$$

Виходячи з того, що парціальний тиск – це той тиск, який мав би газ, якби він один займав весь об'єм (4), знайдемо парціальні тиски кисню  $p_1$  та азоту  $p_2$ , використовуючи окремо рівняння Клапейрона-Менделєєва для кожної компоненти суміші згідно з умовами задачі:

$$p_1 = \frac{m_1 \cdot RT}{M_1 \cdot V} = \frac{0,236m \cdot RT}{M_1} \cdot \frac{pM}{mRT} =$$

$$= \frac{0,236pM}{M_1} = \frac{0,236 \cdot 10^5 \cdot 28,8 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} = 2,13 \cdot 10^4 \text{ Па,}$$

$$p_2 = \frac{m_2 \cdot RT}{M_2 \cdot V} = \frac{0,764m \cdot RT}{M_2} \cdot \frac{pM}{mRT} =$$

$$= \frac{0,764pM}{M_2} = \frac{0,764 \cdot 10^5 \cdot 28,8 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} = 7,87 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

Відповідно до закону Дальтона, сума знайдених парціальних тисків дорівнює тиску суміші газів, що задана в умовах задачі

$$p = p_1 + p_2 = 2,13 \cdot 10^4 + 7,87 \cdot 10^4 = 10^5 \text{ Па.}$$

Перевірка розмірностей

$$[\rho] = \frac{\text{Па} \cdot (\text{кг/моль})}{(\text{Дж/моль} \cdot \text{К}) \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{м}^2 \cdot \text{моль} \cdot \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$[p] = \frac{\text{кг} \cdot (\text{Дж/моль} \cdot \text{К}) \cdot \text{К}}{(\text{кг/моль}) \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}.$$

**Відповідь:**  $\rho = 1,21 \text{ кг/м}^3$ ;  $p_1 = 2,13 \cdot 10^4 \text{ Па}$ ;  $p_2 = 7,87 \cdot 10^4 \text{ Па}$ .

### Задача 7.2.10

Густина ідеального газу, який знаходиться у посудині, дорівнює  $\rho = 1 \text{ кг/м}^3$ .

Визначити тиск газу, якщо середня квадратична швидкість теплового руху його молекул складає  $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 600 \text{ м/с}$ .

**Дано:**

$$\rho = 1 \text{ кг/м}^3$$

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = 600 \text{ м/с}$$

$$p = ?$$

**Розв'язання**

Оскільки газ, що знаходиться у посудині, є ідеальним, тому

застосуємо основне рівняння молекулярно-кінетичної

теорії, яке пов'язує мікроскопічні характеристики молекул

(швидкість, маса) з макроскопічною характеристикою газу (тиск):

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle, \quad (1)$$

де  $n = \frac{N}{V}$  – концентрація молекул (кількість молекул  $N$  у посудині об'ємом  $V$ );

$m_0$  – маса молекули;  $\langle v^2 \rangle$  – середнє значення квадрата швидкості молекул газу,

яке визначає середню квадратичну швидкість:

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \quad (2)$$

де  $R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$  – універсальна газова стала;  $T$  – температура;

$M$  – молярна маса газу.

Тоді, з врахуванням співвідношення (2), рівняння (1) набуває вигляду:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{KB}} \rangle^2. \quad (3)$$

За визначенням, густина дорівнює масі одиниці об'єму:

$$\rho = \frac{m}{V}; \quad (4)$$

де  $m$  – маса газу в об'ємі  $V$ .

Якщо у посудині знаходиться  $N$  однакових молекул, то масу газу можна визначити через масу молекули  $m_0$ :

$$m = N m_0. \quad (5)$$

Вираз (4) з врахуванням формули (5), набуває вигляду:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0 N}{V} = m_0 n. \quad (6)$$

Підставляємо співвідношення (6) у формулу (3) та знаходимо тиск газу відповідно до умов задачі:

$$p = \frac{1}{3} \rho \langle v_{\text{KB}} \rangle^2. \quad (7)$$

$$p = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 600^2 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Цю задачу можна розв'язати також іншим методом, застосовуючи рівняння Клапейрона-Менделєєва:

$$pV = \frac{m}{M} RT. \quad (8)$$

В цьому випадку, тиск газу з врахуванням визначення густини (4) буде:

$$p = \frac{m}{V} \frac{RT}{M} = \rho \frac{RT}{M}. \quad (9)$$

Для знаходження  $\frac{RT}{M}$ , скористаємося формулою (2):

$$\frac{RT}{M} = \frac{\langle v_{\text{KB}} \rangle^2}{3}. \quad (10)$$

Підставляємо (10) у формулу (9) і отримаємо співвідношення, яке збігається з виразом (7):

$$p = \frac{1}{3} \rho \langle v_{\text{KB}} \rangle^2.$$

Перевірка розмірності:

$$[p] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \left( \frac{\text{м}}{\text{с}} \right)^2 = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2} \cdot \frac{\text{м}}{\text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}.$$

**Відповідь:**  $p = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Па}$ .

### Задача 7.2.11

*В посудині об'ємом  $V = 5 \text{ л}$  знаходиться азот. Визначте теплову енергію, яка припадає на поступальний та обертальний рухи молекул азоту, якщо тиск дорівнює  $p = 50 \text{ кПа}$ .*

**Дано:**

$V = 5 \text{ л}$

$p = 50 \text{ кПа}$

$E_{\text{пост}} = ?$

$E_{\text{оберт}} = ?$

**Розв'язання**

За умови, що тиск не перевищує  $\sim 10^6 \text{ Па}$ , та при порівняно високих температурах реальний газ поводить себе як ідеальний. Тому потенціальна енергія взаємодії молекул відсутня, а тепла (внутрішня) енергія газу визначається

сумою кінетичних енергій усіх його молекул:

$$E = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = N \frac{\sum_{i=1}^N \varepsilon_i}{N} = N \langle \varepsilon \rangle, \quad (1)$$

де  $\varepsilon_i$  – кінетична енергія окремої молекули;  $N$  – кількість молекул у посудині;  $\langle \varepsilon \rangle$  – середня кінетична енергія молекул.

Енергія  $\langle \varepsilon \rangle$  визначається кількістю ступенів вільності молекули, тобто кількістю незалежних (поступальних, обертальних, коливальних) рухів, які може

виконувати молекула. Відповідно до закону рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності, на кожен поступальний та обертальний рух у середньому припадає енергія  $\frac{1}{2}kT$ . Якщо атоми, які входять до складу молекули, здатні здійснювати коливання (молекула з пружним зв'язком), то необхідно врахувати потенціальну та кінетичну енергію коливань  $\left(\frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT = kT\right)$ . Таким чином, для молекули, яка має  $i_{\text{пост}}$  поступальних,  $i_{\text{оберт}}$  обертальних та  $i_{\text{колив}}$  коливальних ступенів вільності, середня кінетична енергія становить:

$$\langle \varepsilon \rangle = \left( i_{\text{пост}} + i_{\text{оберт}} + 2i_{\text{колив}} \right) \frac{kT}{2} = \frac{i}{2} kT, \quad (2)$$

де  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$  – стала Больцмана;  $T$  – температура;

$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{оберт}} + 2i_{\text{колив}}$  – сума поступальних, обертальних та подвоєного числа коливальних ступенів вільності молекули.

При температурах, що наближені до кімнатних, атоми, які входять до складу молекул, не здійснюють коливань (молекула з жорстким зв'язком), тому кількість ступенів вільності такої молекули буде

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{оберт}}. \quad (3)$$

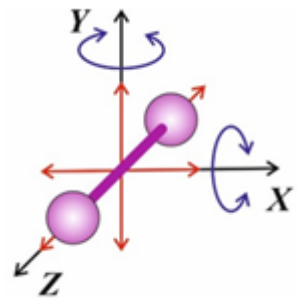
Підставляємо (3) в (2) і отримаємо:

$$\langle \varepsilon \rangle = i_{\text{пост}} \frac{kT}{2} + i_{\text{оберт}} \frac{kT}{2} = \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle + \langle \varepsilon_{\text{оберт}} \rangle, \quad (4)$$

де  $\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{i_{\text{пост}}}{2} kT$  – середня кінетична енергія молекули поступального руху;

$\langle \varepsilon_{\text{оберт}} \rangle = \frac{i_{\text{оберт}}}{2} kT$  – середня кінетична енергія молекули, яка припадає на обертальний рух.

Оскільки молекула азоту двоатомна, то для визначення її положення у просторі необхідно задати по три координати  $(X, Y, Z)$  для кожного атома, а загалом – шість. Якщо молекула з жорстким зв'язком і відстань між атомами відома, то шосту координату можна визначити за допомогою теореми Піфагора. Тому найменша кількість незалежних координат  $(i)$ , які необхідні для визначення положення молекули у просторі, дорівнює п'яти, з яких три припадають на поступальний рух ( $i_{\text{пост}} = 3$ ) молекули вздовж координат  $(X, Y, Z)$ , а дві – на обертальний рух ( $i_{\text{оберт}} = 2$ ) навколо осей  $X, Y$  (див. рис.). Для обертання молекули навколо осі симетрії  $Z$  необхідно нагріти газ до високої температури, яка перевищує температуру, за якої відбувається термічна дисоціація молекули.



Підставляємо вираз (4) у співвідношення (1):

$$E = N \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle + N \langle \varepsilon_{\text{оберт}} \rangle = E_{\text{пост}} + E_{\text{оберт}}, \quad (5)$$

де  $E_{\text{пост}}$  і  $E_{\text{оберт}}$  – кінетична енергія усіх молекул, що припадає на поступальний та обертальний рух, відповідно:

$$E_{\text{пост}} = N \frac{i_{\text{пост}} kT}{2} \quad \text{і} \quad E_{\text{оберт}} = N \frac{i_{\text{оберт}} kT}{2}. \quad (6)$$

Для визначення температури газу скористаємося рівнянням стану ідеального газу:

$$p = nkT = \frac{NkT}{V}, \quad (7)$$

де  $p$  – тиск;  $n = \frac{N}{V}$  – концентрація молекул в одиниці об'єму  $V$ .

З рівняння (5), виразимо температуру азоту

$$T = \frac{pV}{Nk}. \quad (8)$$

Підставляємо (8) у співвідношення (6) і отримуємо кінетичні енергії

$$E_{\text{пост}} = N \frac{i_{\text{пост}} k}{2} \frac{pV}{Nk} = \frac{i_{\text{пост}} pV}{2}, \quad (9)$$

$$E_{\text{оберт}} = N \frac{i_{\text{оберт}} k}{2} \frac{pV}{Nk} = \frac{i_{\text{оберт}} pV}{2}, \quad (10)$$

чисельні значення яких дорівнюють

$$E_{\text{пост}} = \frac{i_{\text{пост}} pV}{2} = \frac{3 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{2} = 375 \text{ Дж};$$

$$E_{\text{оберт}} = \frac{i_{\text{оберт}} pV}{2} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{2} = 250 \text{ Дж}.$$

Необхідно зауважити, що для розв'язку задачі можна було відразу скористатися виразом для внутрішньої енергії ідеального газу, яка залежить лише від температури:

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT, \quad (11)$$

де  $m$  – маса газу;  $M$  – молярна маса газу;  $R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$  – універсальна газова стала.

Згідно з рівнянням Менделєєва – Клапейрона  $pV = \frac{m}{M} RT$  маса газу становить

$$m = \frac{pVM}{RT}. \quad (12)$$

Підставляючи формулу (12) у (11) та враховуючи співвідношення (3), отримаємо:

$$E = U = \frac{i}{M} \frac{RT}{2} \frac{pVM}{RT} = \frac{ipV}{2} = \frac{i_{\text{пост}} pV}{2} + \frac{i_{\text{оберт}} pV}{2} = E_{\text{пост}} + E_{\text{оберт}}. \quad (13)$$

З формули (13) випливає, що вирази для  $E_{\text{пост}}$  та  $E_{\text{пост}}$  повністю збігаються з співвідношеннями (9) і (10).

Перевірка розмірності:

$$[E] = 1 \cdot \text{Па} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^3 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

**Відповідь:**  $E_{\text{пост}} = 375 \text{ Дж}$ ;  $E_{\text{оберт}} = 250 \text{ Дж}$ .

### Задача 7.2.12

*Визначте, яка частина молекул кисню за нормальних умов має швидкість в інтервалі від  $v_1 = 200 \text{ м/с}$  до  $v_2 = 210 \text{ м/с}$ .*

| Дано:                                  | Розв'язання                                                                                                                                                             |
|----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $v_1 = 200 \text{ м/с}$                | Якщо частина молекул $\Delta N$ має швидкості, які знаходяться в інтервалі $(v, v + \Delta v)$ , то ймовірність того, що окрема молекула має таку ж швидкість дорівнює: |
| $v_2 = 210 \text{ м/с}$                |                                                                                                                                                                         |
| $T = 273 \text{ К}$                    |                                                                                                                                                                         |
| $M = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ |                                                                                                                                                                         |
| $\frac{\Delta N}{N} - ?$               | $\Delta P = \frac{\Delta N}{N}, \quad (1)$                                                                                                                              |

де  $N$  – загальна кількість молекул газу.

Для опису безперервної випадкової величини, наприклад, швидкості  $v$  молекул газу, в теорії ймовірності застосовується функція розподілу  $F(v)$ , добуток якої на інтервал швидкості  $\Delta v$  ( $\Delta v \ll v$ ) дорівнює ймовірності того, що окрема молекула має швидкість у діапазоні  $(v, v + \Delta v)$ :

$$\Delta P = F(v) \Delta v. \quad (2)$$

Прирівнюючи вирази (1) та (2), отримаємо:

$$\frac{\Delta N}{N} = F(v) \Delta v. \quad (3)$$

Вид функції  $F(v)$  залежить від особливостей фізичної системи. За нормальних умов ( $p = 1 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ,  $T = 273 \text{ К}$ ) кисень можна вважати ідеальним



газом, а розподіл молекул ідеального газу за модулями швидкостями описується функцією розподілу Максвелла:

$$F(v) = \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left( -\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) 4\pi v^2, \quad (4)$$

де  $m_0$  – маса молекули;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – стала Больцмана;  $T$  – температура.

З метою спрощення розрахунків, можна перейти до функції розподілу Максвелла, яка не залежить від температури та типу газу. Для цього необхідно ввести поняття відносної швидкості:

$$u = \frac{v}{v_{\text{ймов}}} \quad \text{і} \quad \Delta u = \frac{\Delta v}{v_{\text{ймов}}}. \quad (6)$$

де  $v_{\text{ймов}}$  – найбільш ймовірна швидкість молекул:

$$v_{\text{ймов}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}, \quad (7)$$

Тоді, з врахуванням виразів (6) та (7), функція розподілу Максвелла набуває вигляду:

$$F(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2). \quad (8)$$

Підставляємо (8) у вираз (3) та знаходимо долю молекул, швидкості яких знаходяться в інтервалі  $(u, u + \Delta u)$ :

$$\frac{\Delta N}{N} = F(u) \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2) \Delta u. \quad (9)$$

Якщо  $v_1 = 200$  м/с, а  $v_2 = 210$  м/с, тоді

$$\Delta v = v_2 - v_1 = 210 - 200 = 10 \text{ м/с}.$$

Ймовірна швидкість для кисню з молярною масою  $M = 32 \cdot 10^{-3}$  кг/моль згідно з (7) становить

$$v_{\text{ймов}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 273}{32 \cdot 10^{-3}}} = 376,5 \text{ м/с}.$$

Тоді відносні значення швидкості та приросту швидкості дорівнюють

$$u = \frac{v}{v_{\text{ймов}}} = 0,531 \quad \text{і} \quad \Delta u = \frac{\Delta v}{v_{\text{ймов}}} = 0,027.$$

Частина молекул кисню, яка за нормальних умов має швидкості в інтервалі від  $v_1 = 200$  м/с до  $v_2 = 210$  м/с, складає

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp -u^2 \quad \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot 0,531^2 \cdot \exp -0,531 \cdot 0,027 = 0,01.$$

**Відповідь:**  $\frac{\Delta N}{N} = 0,01$  або 1%.

### Задача 7.2.13

*Концентрація кисню на поверхні Землі у 41000 раз перевищує концентрацію водню. На якій висоті концентрації кисню та водню зрівнюються? Температуру атмосфери вважати сталою і рівною  $T = 273$  К.*

| Дано:                           | Розв'язання                                                                                                                                                                                          |
|---------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{n_{01}}{n_{02}} = 41000$ | Молекули кисню та водню знаходяться в однорідному гравітаційному полі Землі, яке є потенціальним. Тому при сталій температурі залежність їх концентрації від висоти описується розподілом Больцмана: |
| $n_1(h) = n_2(h)$               |                                                                                                                                                                                                      |
| $T = 273$ К                     |                                                                                                                                                                                                      |
| $h = ?$                         | $n_1(h) = n_{01} \exp\left(-\frac{m_{01}gh}{kT}\right); \quad n_2(h) = n_{02} \exp\left(-\frac{m_{02}gh}{kT}\right), \quad (1)$                                                                      |

де  $n_1(h)$  і  $n_2(h)$  – концентрації молекул кисню та водню на висоті  $h$ ;  $n_{01}$  і  $n_{02}$  – концентрації молекул кисню та водню на поверхні Землі;  $m_{01}$  і  $m_{02}$  – маси молекул кисню та водню;  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup> – прискорення вільного падіння;

$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – стала Больцмана;  $T$  – температура.

Відношення концентрацій молекул:

$$\frac{n_1(h)}{n_2(h)} = \frac{n_{01} \exp\left(-\frac{m_{01}gh}{kT}\right)}{n_{02} \exp\left(-\frac{m_{02}gh}{kT}\right)} = \frac{n_{01}}{n_{02}} \exp\left(\frac{(m_{02} - m_{01})gh}{kT}\right). \quad (2)$$

Прологарифмуємо обидві частини співвідношення (2)

$$\ln\left(\frac{n_1(h)}{n_2(h)}\right) = \ln\left(\frac{n_{01}}{n_{02}} \exp\left(\frac{(m_{02} - m_{01})gh}{kT}\right)\right). \quad (3)$$

Запишемо логарифм добутку у правій частині формули (3) як суму логарифмів та врахуємо, що  $\ln(\exp(x)) = x$ :

$$\ln\left(\frac{n_{01}}{n_{02}} \exp\left(\frac{(m_{02} - m_{01})gh}{kT}\right)\right) = \ln\left(\frac{n_{01}}{n_{02}}\right) + \frac{(m_{02} - m_{01})gh}{kT}. \quad (4)$$

Підставляємо вираз (4) в (3) і отримаємо:

$$\ln\left(\frac{n_1(h)}{n_2(h)}\right) = \ln\left(\frac{n_{01}}{n_{02}}\right) + \frac{(m_{02} - m_{01})gh}{kT}. \quad (5)$$

З (5), висота, на якій концентрації молекул зрівнюються,  $n_1(h) = n_2(h)$ , становить

$$h = kT \frac{\ln\left(\frac{n_1(h)}{n_2(h)}\right) - \ln\left(\frac{n_{01}}{n_{02}}\right)}{(m_{02} - m_{01})g} = \frac{kT}{(m_{01} - m_{02})g} \cdot \ln\left(\frac{n_{01}}{n_{02}}\right). \quad (6)$$

Враховуючи, що молярна маса  $M$  – це масу одного моля, тобто маса молекул, кількість яких дорівнює сталій Авогадро  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>, знайдемо молярні маси кисню і водню

$$M_1 = N_A m_{01}; \quad M_2 = N_A m_{02}. \quad (7)$$

Тоді маса молекул кисню та водню, відповідно, дорівнює:

$$m_{01} = \frac{M_1}{N_A}; \quad m_{02} = \frac{M_2}{N_A}. \quad (8)$$

Підставляємо співвідношення (8) у (6), знаходимо висоту, на якій концентрації кисню та водню зрівняються

$$h = \frac{kTN_A}{(M_1 - M_2)g} \cdot \ln\left(\frac{n_{01}}{n_{02}}\right) = \frac{RT}{(M_1 - M_2)g} \cdot \ln\left(\frac{n_{01}}{n_{02}}\right); \quad (9)$$

де  $R = kN_A = 8,31$  Дж/моль·К – універсальна газова стала.

$$h = \frac{RT}{(M_1 - M_2)g} \cdot \ln\left(\frac{n_{01}}{n_{02}}\right) = \frac{8,31 \cdot 273}{(32 - 2) \cdot 10^{-3} \cdot 9,8} \cdot \ln(41000) = 81,95 \cdot 10^3 \text{ м} \approx 82 \text{ км}.$$

Перевірка розмірності:

$$[h] = \frac{\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot \text{К}}{\frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} \cdot 1 = \frac{\text{Дж}}{\text{моль}} \cdot \frac{\text{моль} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \cdot \frac{\text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \text{м}.$$

**Відповідь:**  $h = 82$  км.

## Задача 7.2.14

Для молекул повітря, ефективний діаметр яких вважати рівним  $d = 0,3 \text{ нм}$ , за нормальних умов визначити: 1) середню довжину  $\lambda$  вільного пробігу молекул; 2) середню кількість  $\langle Z \rangle$  зіткнень за 1 секунду; 3) середній час  $\tau$  між двома послідовними зіткненнями.

| Дано:                                     | Розв'язання                                                                                                |
|-------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $d = 0,3 \text{ нм}$                      | Середня довжина вільного пробігу молекул – це середня відстань між двома послідовними зіткненнями молекул: |
| $\lambda = ? \quad \langle Z \rangle = ?$ | $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot n}, \quad (1)$                                      |
| $\tau = ?$                                |                                                                                                            |

де  $d$  – ефективний діаметр молекули – мінімальна відстань, на яку можуть наблизитися центри молекул при зіткненні;  $n$  – концентрація молекул.

Необхідну для визначення концентрацію  $n$  знайдемо з основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії  $p = nkT$ , враховуючи, що за нормальних умов температура становить  $T = 273 \text{ К}$ , а тиск  $p = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$ .

Тоді

$$n = \frac{kT}{p}, \quad (2)$$

і середня довжина  $\lambda$  вільного пробігу молекул становить

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^{-20} \cdot 1,01 \cdot 10^5} = 9,33 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$$

Середня кількість зіткнень за 1 секунду визначається виразом

$$\langle Z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\lambda}, \quad (3)$$

де  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$  – середня арифметична швидкість,  $R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$

– універсальна газова стала;  $M = 29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$  – молярна маса повітря.

Отже,

$$\langle Z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\lambda} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 273}{\pi \cdot 29 \cdot 10^{-3}}} \cdot \frac{1}{9,33 \cdot 10^{-8}} = 4,8 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

Оскільки між зіткненнями молекула в середньому проходить шлях  $\lambda$ , рухаючись при цьому зі швидкістю  $\langle v \rangle$ , то середній час між зіткненнями становить

$$\tau = \frac{\lambda}{\langle v \rangle} = \frac{1}{\langle Z \rangle} = \frac{1}{4,8 \cdot 10^9} = 2,08 \cdot 10^{-10} \text{ с.}$$

Розмірності отриманих результатів:

$$[\lambda] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{К} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Па}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^2 \cdot \text{Н}} = \text{м}; \quad \langle Z \rangle = \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{м}} = \text{с}^{-1}; \quad [\tau] = \frac{\text{м}}{\text{м/с}} = \text{с}.$$

**Відповідь:**  $\lambda = 9,33 \cdot 10^{-8} \text{ м}; \quad \langle Z \rangle = 4,8 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}; \quad \tau = 2,08 \cdot 10^{-10} \text{ с}.$

### Задача 7.2.15

*Вуглекислий газ та азот знаходяться при однаковій температурі та тиску. Вважаючи діаметри молекул цих газів однаковими, знайти для них відношення коефіцієнтів 1) дифузії; 2) в'язкості; 3) теплопровідності.*

| Дано:                            | Розв'язання                                                                                                                                                                                                                             |
|----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| CO <sub>2</sub> , N <sub>2</sub> | Дифузія, теплопровідність і в'язкість належать до явищ перенесення, які об'єднують групу процесів, пов'язаних з                                                                                                                         |
| $D = ? \quad \kappa = ?$         | неоднорідностями густини, температури або швидкості                                                                                                                                                                                     |
| $\eta = ?$                       | впорядкованого переміщення окремих шарів речовини. Саме                                                                                                                                                                                 |
|                                  | вирівнювання неоднорідностей призводить до виникнення цих явищ, в ході яких в речовинах виникає впорядковане, спрямоване перенесення маси (дифузія), імпульсу (внутрішнє тертя або в'язкість) і внутрішньої енергії (теплопровідність). |

У вирази для законів, що описують явища перенесення, входять коефіцієнти, значення яких описують наступні вирази:

- коефіцієнт дифузії

$$D = \frac{1}{3} \cdot \langle v \rangle \cdot \lambda; \quad (1)$$

- коефіцієнт в'язкості (внутрішнього тертя)

$$\eta = \frac{1}{3} \cdot \langle v \rangle \cdot \lambda \cdot \rho, \quad (2)$$

- коефіцієнт теплопровідності

$$\kappa = \frac{1}{3} \cdot \langle v \rangle \cdot \lambda \cdot \rho \cdot c_v; \quad (3)$$

а зв'язок між ними відповідно до (1) – (3) визначається формулами

$$\eta = D\rho, \quad \kappa = \eta c_v = D\rho c_v. \quad (4)$$

1) Знайдемо відношення коефіцієнтів дифузії  $D = \frac{1}{3} \cdot \langle v \rangle \cdot \lambda$  для вуглекислого газу та азоту. Для цього необхідно знайти  $\langle v \rangle$  – середню арифметичну швидкість теплового руху молекул

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad (5)$$

і довжину вільного пробігу

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma \cdot n} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot n}. \quad (6)$$

Концентрація молекул, що входить у вираз для довжини вільного пробігу, визначається через параметри стану газів згідно з формулою основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії

$$n = \frac{p}{k T}. \quad (7)$$

Тоді коефіцієнт дифузії (1) з врахуванням (5) - (7) дорівнюватиме:

$$D = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{RT}{\pi M}} \cdot \frac{kT}{\pi d^2 p}. \quad (8)$$

Використовуючи (5) й (6), знайдемо відношення коефіцієнтів дифузії, враховуючи, що тиск, температура та діаметр молекул двох речовин однакові:

$$\frac{D_{\text{CO}_2}}{D_{\text{N}_2}} = \sqrt{\frac{M_{\text{N}_2}}{M_{\text{CO}_2}}}.$$

Молярні маси вуглекислого газу  $M_{\text{CO}_2} = 0,044$  кг/моль та азоту  $M_{\text{N}_2} = 0,028$  кг/моль, тому відношення коефіцієнтів дифузії становитиме

$$\frac{D_{\text{CO}_2}}{D_{\text{N}_2}} = \sqrt{\frac{0,028}{0,044}} = \sqrt{0,64} = 0,8.$$

2) Для визначення відношення коефіцієнтів в'язкості, скористаємося зв'язком між коефіцієнтами для явищ перенесення (4). Оскільки  $\eta = D\rho$ , то для знаходження в'язкості потрібно коефіцієнт дифузії помножити на густину газу, яку можна визначити з рівняння Клапейрона-Менделєєва, узявши до уваги закон трьох сталих – співвідношення універсальної газової сталої  $R$ , сталої Больцмана  $k$  і числа Авогадро  $N_A$ :

$$R = kN_A. \quad (9)$$

$$\eta = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{RT}{\pi M}} \cdot \frac{kT}{\pi d^2 p} \cdot \frac{pM}{RT} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{RTM}{\pi}} \cdot \frac{1}{\pi d^2 N_A}. \quad (10)$$

З огляду на це, відношення коефіцієнтів в'язкості дорівнюватиме:

$$\frac{\eta_{\text{CO}_2}}{\eta_{\text{N}_2}} = \sqrt{\frac{M_{\text{CO}_2}}{M_{\text{N}_2}}} = \sqrt{\frac{0,044}{0,028}} = \sqrt{1,57} = 1,25.$$

3) Для визначення коефіцієнта теплопровідності потрібно коефіцієнт в'язкості (10) помножити на питому теплоємність  $c_v$  при постійному об'ємі, яка становить

$$c_v = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M}. \quad (11)$$

Тоді

$$\kappa = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{RTM}{\pi}} \cdot \frac{1}{\pi d^2 N_A} \cdot \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{RT}{\pi M}} \cdot \frac{ik}{\pi d^2}. \quad (12)$$

Для розрахунку відношення коефіцієнтів теплопровідності, окрім відмінності в молярних масах, необхідно враховувати й різну структуру молекул вуглекислого газу та азоту, яка визначає число ступенів свободи молекул.

При температурах наближених до кімнатних, коливання атомів в молекулах не відбуваються, тому молекули  $\text{CO}_2$  і  $\text{N}_2$  можна вважати молекулами з жорстким зв'язком. Молекула азоту складається з двох атомів і має 5 ступенів свободи.



Молекула вуглекислого газу, хоча й складається з трьох атомів, але вони утворюють жорсткий каркас, в якому атоми розташовані лінійно, тому вона не має коливальних ступенів вільності і є виключенням: її число ступенів свободи дорівнює 5, не 6 як для звичайної багатоатомної молекули. Тоді відношення теплопровідностей буде

$$\frac{\kappa_{\text{CO}_2}}{\kappa_{\text{N}_2}} = \sqrt{\frac{M_{\text{N}_2}}{M_{\text{CO}_2}}} \cdot \frac{i_{\text{CO}_2}}{i_{\text{N}_2}} = \sqrt{\frac{0,028}{0,044}} \cdot \frac{5}{5} = 0,8.$$

**Відповідь:**  $\frac{D_{\text{CO}_2}}{D_{\text{N}_2}} = 0,8$ ;  $\frac{\eta_{\text{CO}_2}}{\eta_{\text{N}_2}} = 1,25$ ;  $\frac{\kappa_{\text{CO}_2}}{\kappa_{\text{N}_2}} = 0,8$ .

### 7.3. Задачі для самостійної роботи

**7.3.1.** В посудині об'ємом  $V = 50$  л знаходиться  $N = 12 \cdot 10^{23}$  молекул кисню. Визначте температуру та густину газу, якщо тиск  $p = 1,5 \cdot 10^5$  Па.

**Відповідь:**  $T = 453$  К;  $\rho = 1,28$  кг/м<sup>3</sup>.

**7.3.2.** Ідеальний газ знаходиться в посудині при температурі  $T = 300$  К і тиску  $p = 120$  кПа. Після нагрівання газу на  $100$  К у посудині залишилась чверть від початкової маси газу. Який тиск буде у посудині після нагрівання?

**Відповідь:**  $p = 40$  кПа.

**7.3.3.** При ізобарному нагріванні ідеального газу на  $\Delta T = 10$  К, його об'єм збільшився на 2%. Визначте температуру мав газ до нагрівання?

**Відповідь:**  $T = 500$  К.

**7.3.4.** В посудині об'ємом  $V = 15$  л знаходиться суміш  $m_1 = 8$  г кисню та  $m_2 = 14$  г азоту при температурі  $T = 301$  К. Визначте тиск газової суміші на стінки посудини.

**Відповідь:**  $p = 125$  кПа.

**7.3.5.** Визначте внутрішню енергію  $m = 1$  г деякого багатоатомного газу, якщо середня квадратична швидкість молекул цього газу  $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 250$  м/с.

**Відповідь:**  $U = 62,5$  кДж.

**7.3.6.** Визначте кінетичну енергію поступального руху усіх молекул вуглекислого газу, які знаходяться у балоні об'ємом  $V = 20$  л, якщо тиск  $p = 50$  кПа.

**Відповідь:**  $U_{\text{пост}} = 1,5$  кДж.

**7.2.7.** Середня арифметична швидкість молекул деякого газу при температурі  $T = 300$  К дорівнює  $\langle v \rangle = 1782$  м/с. Визначте кількість молекул цього газу, якщо маса газу  $m = 8$  г?

**Відповідь:**  $N = 2,4 \cdot 10^{24}$ .

**7.3.8.** Для деякого двохатомного газу середня арифметична швидкість на 63,3 м/с більша за найбільш ймовірну швидкість його молекул при температурі  $T = 314$  К. Який це газ?

**Відповідь:**  $M = 28 \cdot 10^{-3}$  кг/моль (азот).

**7.3.9.** В балоні об'ємом  $V = 10$  л міститься  $m = 10$  г газу. Визначте тиск цього газу на стінки балону, якщо найбільш ймовірна швидкість молекул цього газу  $v_{\text{ймов}} = 500$  м/с.

**Відповідь:**  $p = 124$  кПа.

**7.3.10.** В посудині об'ємом  $V = 10$  л міститься  $N = 10^{22}$  молекул кисню. Яким буде тиск у посудині, якщо середня кінетична енергія молекули водню дорівнює  $\langle \varepsilon \rangle = 103,5 \cdot 10^{-22}$  Дж?

**Відповідь:**  $p = 4140$  Па.

**7.3.11.** В балоні знаходиться  $\nu = 10$  молів кисню за нормальних умов. Визначте, на скільки зміниться внутрішня енергія газу, якщо збільшити тиск вдвічі?

**Відповідь:**  $\Delta U = 56,7$  кДж.

**7.3.12.** В посудині об'ємом  $V = 10$  л знаходиться  $m = 5$  г газу. Визначте середня квадратичну швидкість молекул цього газу, якщо тиск газу  $p = 60$  кПа?

**Відповідь:**  $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 600$  м/с.

**7.3.13.** В балоні міститься  $N = 10^{23}$  молекул кисню при температурі  $T = 300$  К. Визначте, яка кількість його молекул має швидкості, що знаходяться в межах від 190 м/с до 200 м/с.

**Відповідь:**  $N = 11 \cdot 10^{20}$ .

**7.3.14.** На поверхні Землі концентрація молекул азоту у 4 рази перевищує концентрацію молекул кисню. Визначте температуру земної атмосфери, якщо концентрації обох газів однакові на висоті  $h = 79,3$  км.

**Відповідь:**  $T = 270$  К.

## 8. ТЕРМОДИНАМІКА

### 8.1. Теоретичні відомості

#### 8.1.1. Термодинамічна система та параметри. Термодинамічний процес

**Термодинаміка** – це розділ фізики, що вивчає найбільш загальні властивості макроскопічних систем та способи передачі та перетворення енергії в таких системах. Термодинаміка не пов'язує ці властивості та процеси з будовою та внутрішньою структурою систем, а встановлює їх найбільш загальні закономірності, використовуючи при цьому узагальнені поняття, придатні для будь-якої макросистеми.

У термодинаміці розглядається **термодинамічна система** – сукупність макроскопічних тіл, які взаємодіють і обмінюються енергією між собою та із зовнішнім середовищем.

Термодинамічний стан макроскопічного тіла описується сукупністю значень фізичних величин, що характеризують фізичні властивості цієї системи. Основними **термодинамічними параметрами** є тиск  $p$ , абсолютна температура  $T$  та об'єм  $V$ . Зв'язок між цими величинами встановлюється рівнянням стану системи:

$$f(p, V, T) = 0. \quad (8.1)$$

Коли всі три параметри системи залишаються сталими, система знаходиться в **рівноважному стані**.

**Тиск**  $p$  – це скалярна фізична величина, що визначається відношенням сили, яка діє на поверхню тіла у напрямку нормалі, до величини площі цієї поверхні

$$p = \frac{F_n}{S}. \quad (8.2)$$

Тиск вимірюється в Паскалях

$$[p] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \text{Паскаль} = \text{Па}.$$

**Температура**  $T$  є мірою інтенсивності теплового руху молекул, атомів та інших частинок системи. До абсолютної термодинамічної температури, що вимірюється у Кельвінах, перехід від температури за шкалою Цельсія здійснюється за формулою:

$$T = 273,15 + t^{\circ}\text{C}. \quad (8.3)$$

Будь-яка зміна в термодинамічній системі, пов'язана зі зміною хоча б одного з її термодинамічних параметрів, називається **термодинамічним процесом**.

### 8.1.2. Внутрішня енергія

При температурі, вищій за абсолютний нуль ( $T = 0 \text{ К}$ ), молекулам та атомам тіл притаманний тепловий рух. Характер цього руху в газах, рідинах і твердих тілах відрізняється: в газах

мікроскопічні частинки знаходяться на значній відстані, так що сили взаємодії між ними майже відсутні, а рух молекул прямолінійний хаотичний (рис. 8.1). У твердих тілах, навпаки, сили взаємодії між частинками дуже великі, так що молекули не можуть переміщатись

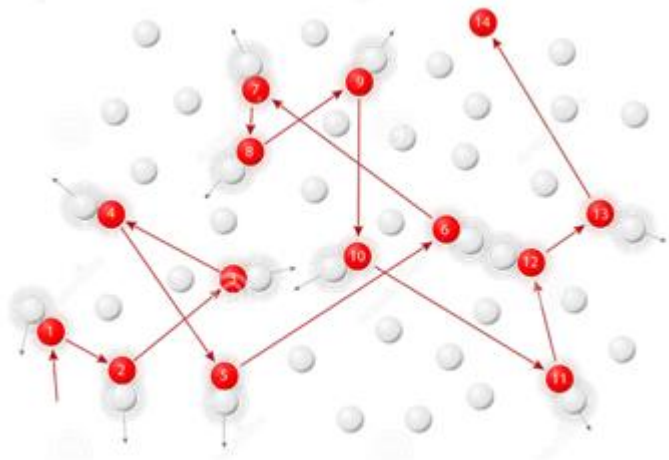


Рисунок 8.1

на великі відстані, а можуть лише коливатись біля середніх положень – вузлів кристалічної решітки. У рідинах цей процес має характерні як для газів, так і для твердих тіл, ознаки.

Макроскопічне тіло, завдяки тепловому руху молекул чи атомів, потенціальній енергії їх взаємодії, внутрішньоатомній та внутрішньоядерній енергії має певну **внутрішню енергію**  $U$ .

За нормальних умов (н.у.), які відповідають атмосферному тиску  $p = 1,01 \cdot 10^5$  Па = 101 кПа і температурі  $T = 273$  К, основним внеском у внутрішню енергію газу є середня кінетична енергія руху. Вона залежить від конфігурації молекули (поодинокій атом, двох-, трьох- чи багатоатомний комплекс) (табл. 7.1).

В загальному випадку, енергія складної молекули складається з кінетичної енергії поступального руху, кінетичної енергії обертального руху, кінетичної та потенціальної енергії коливального руху. Щоб врахувати енергію всіх видів руху молекули використовують **кількість ступенів вільності**  $i$  – найменшу кількість незалежних координат, що визначають положення точки у просторі

$$i = i_{\text{п}} + i_{\text{об}} + 2i_{\text{кол}}. \quad (8.4)$$

За законом Больцмана про рівномірний розподіл енергії за ступенями вільності у стані термодинамічної рівноваги середня кінетична енергія, що припадає на **кожну** ступінь вільності системи атомів чи молекул, дорівнює  $\frac{1}{2}kT$ .

**Середня енергія молекули**, що має  $i$  ступенів вільності, дорівнює

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2}kT, \quad (8.5)$$

де  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – стала Больцмана.

**Внутрішня енергія системи**, що містить кількість  $N$  таких молекул

$$U = N \langle \varepsilon \rangle = \nu N_A \frac{i}{2}kT = \nu \frac{i}{2}RT \quad (8.6)$$

де  $\nu$  – кількість речовини,  $N_A$  – число Авогадро,  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>.

Добуток  $kN_A = R = 8,31$  Дж/моль·К є **універсальною газовою сталою**.

Традиційно у розрахунках визначають **зміну внутрішньої енергії**  $\Delta U = U_2 - U_1$  (початковий стан обирається такий, щоб  $U_1 = 0$ )

$$\Delta U = \nu \frac{i}{2}R(T_2 - T_1) \quad (8.7)$$

### 8.1.3. Два способи передачі енергії. Робота. Теплопередача

Один зі способів передачі або відбору у системи енергії – це виконання нею або над нею механічної роботи. У термодинаміці **робота**  $A$  – це кількість енергії, яку система отримала або втратила внаслідок силової взаємодії із зовнішніми тілами. Вона є додатною при розширенні газу ( $dV > 0$ ,  $A > 0$ ) та від'ємною при його стисканні ( $dV < 0$ ,  $A < 0$ ). При довільному переході системи зі стану 1 з об'ємом  $V_1$  в стан 2 з об'ємом  $V_2$  робота розраховується як інтегральна сума елементарних робіт

$$A = \int_1^2 \partial A = \int_{V_1}^{V_2} P dV \quad . \quad (8.8)$$

Фізичний зміст цього інтегралу – площа під кривою процесу на  $p$ - $V$  діаграмі (рис. 8.2).

Робота є функцією процесу, тобто залежить від способу переходу з одного стану в інший.

Другий спосіб обміну енергією з замкнутою системою – передача ззовні/назовні певної кількості теплоти  $Q$  шляхом **теплопередачі** (теплообміну).

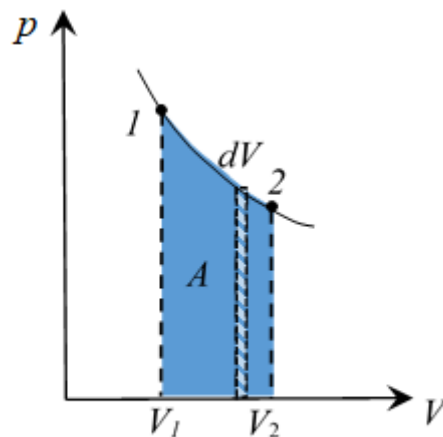


Рисунок 8.2

**Види теплопередачі** – теплопровідність, конвекція і випромінювання.

**Теплопровідність** – це процес передачі теплоти від більш нагрітого до менш нагрітого тіла внаслідок теплового руху молекул без переміщення самої речовини. Найнижча теплопровідність у вакууму та теплоізоляторів, найвища – у металів.

**Конвекція** – це процес передачі теплоти у рідинах та газах потоками речовини різної густини.

**Теплове випромінювання** – це вид теплопередачі, при якому енергія переноситься електромагнітними хвилями. Воно може відбуватися в вакуумі.

При **згорянні** маси палива  $m$ , яке має певну **питому теплоту згорання**  $q$ , виділяється кількість теплоти

$$Q = qm. \quad (8.9)$$

Кількість теплоти, яку речовина поглинає при **плавленні** або виділяє при **кристалізації** становить

$$Q = \lambda m, \quad (8.10)$$

де  $\lambda$  – **питома теплота плавлення/кристалізації**, Дж/кг;  $m$  – маса речовини, кг.

При **кипінні** речовина поглинає тепло, а при **конденсації** – виділяє теплоту згідно з формулою

$$Q = rm, \quad (8.11)$$

де  $r$  – **питома теплота пароутворення або конденсації**, Дж/кг.

#### 8.1.4. Перший закон термодинаміки

Закон збереження енергії стосовно термодинамічних систем має назву **перший закон (перше начало) термодинаміки**: кількість теплоти  $Q$ , яку отримує система ззовні, витрачається на зміну її внутрішньої енергії  $\Delta U$  та виконання нею роботи  $A$  проти зовнішніх сил.

$$Q = \Delta U + A \quad (8.12)$$

При нескінченно малій зміні стану системи **диференціальна** форма першого закону термодинаміки має вигляд

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (8.13)$$

де  $\delta Q$  – елементарна кількість теплоти;  $dU$  – повний диференціал зміни внутрішньої енергії;  $\delta A$  – елементарна робота.

Зміна внутрішньої енергії є повним диференціалом, оскільки внутрішня енергія – це функція стану системи, а робота і кількість теплоти – функції процесу.

**Функції стану** залежать лише від поточного стану системи та не залежать від того, в який спосіб система прийшла в цей стан. **Функції процесу** залежать не



лише від поточного стану системи, але також від того, в який спосіб система прийшла в даний стан.

У замкнутій системі, на яку не діють зовнішні сили ( $A = 0$ ) і відсутній теплообмін із зовнішнім середовищем ( $Q = 0$ ), не відбувається зміни внутрішньої енергії системи ( $\Delta U = 0$ ). У такій системі відбувається лише теплообмін між частинами самої системи, що призводить до вирівнювання температур. Згідно з **рівнянням теплового балансу**, кількість теплоти, яку віддала частина замкнутої системи при охолодженні  $Q_-$  дорівнює кількості теплоти, що отримала інша частина цієї системи шляхом нагрівання  $Q_+$ :

$$Q_- = Q_+ \quad (8.14)$$

#### **8.1.5. Теплоємність тіла. Питома і молярна теплоємності. Ізопроцеси**

**Теплоємність** будь-якого тіла визначається кількістю тепла  $dQ$ , яке необхідно надати тілу, щоб змінити його температуру на нескінченно малу величину  $dT$ .

$$C_{\text{тіла}} = \frac{dQ}{dT} \quad (8.15)$$

Теплоємність вимірюється в

$$[C_{\text{тіла}}] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Теплоємність одного моля  $\nu$  речовини називається молярною теплоємністю. **Молярна теплоємність** – фізична величина, яка чисельно дорівнює кількості теплоти, що відбирається або надається одному молю речовини у разі зміни її температури на 1К в даному термодинамічному процесі:

$$C = \frac{dQ}{\nu dT}. \quad (8.16)$$

**Питома теплоємність** – фізична величина, яка чисельно дорівнює кількості теплоти, що відбирається або надається одному кілограму речовини у разі зміни її температури на 1К в даному термодинамічному процесі:

$$c = \frac{dQ}{mdT}. \quad (8.17)$$

Молярна теплоємність вимірюється в

$$[C] = \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}},$$

а питома теплоємність в

$$[c] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Теплоємність залежить від виду процесу, який відбувається у системі.

**Ізопроеци** – процеси, які здійснюються, коли один з основних параметрів стану залишається незмінним.

**1. В ізохорному процесі** об'єм речовини не змінюється ( $V = \text{const}$ ,  $dV = 0$ )

$$\frac{p}{T} = \text{const} \quad \text{або} \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2},$$

механічна робота системою не виконується ( $A = 0$ ).

Перший закон термодинаміки має вигляд  $\partial Q = dU$ , або

$$\frac{m}{M} \cdot C_V \cdot dT = dU, \quad (8.18)$$

**Молярна теплоємність при сталому об'ємі**  $C_V$  дорівнює:

$$C_V = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_V = \left( \frac{dU}{dT} \right)_V = \frac{i}{2} R \frac{dT}{dT} = \frac{i}{2} R. \quad (8.19)$$

**2. В ізобарному процесі** тиск не змінюється ( $p = \text{const}$ ,  $dp \neq 0$ )

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad \text{або} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

Перший закон термодинаміки  $\partial Q = dU + \partial A$  або

$$\frac{m}{M} \cdot C_p \cdot dT = \frac{m}{M} \cdot C_v \cdot dT + p \cdot dV, \quad (8.20)$$

де  $\partial Q = \frac{m}{M} \cdot C_p \cdot dT$  – елементарна кількість теплоти, що передається газу.

Система виконує роботу, а отже для нагріву на таку ж кількість градусів потребує на величину газової сталої  $R$  більше, ніж кількість теплоти ззовні, **Молярна теплоємність при сталому тиску**  $C_p$  становить

$$C_p = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_p = \left( \frac{dU}{dT} \right)_p + \frac{pdV}{dT} = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R. \quad (8.21)$$

Зв'язок між молярними теплоємностями при постійному тиску і постійному об'ємі встановлює **рівняння Майєра**

$$C_p - C_v = R. \quad (8.22)$$

**Робота в ізобаричному процесі:**

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1). \quad (8.23)$$

**3. В ізотермічному процесі** температура залишається постійною ( $T = \text{const}, dT = 0$ )

$$pV = \text{const} \quad \text{або} \quad p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

Перший закон термодинаміки має вигляд

$$\partial Q = \partial A. \quad (8.24)$$

**Робота в ізотермічному процесі:**

$$A_{12} = Q_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (8.25)$$

**4. Адіабатичний (ізоентропійний) процес** є, зазвичай, дуже швидким і відбувається без теплообміну з навколишнім середовищем ( $\partial Q = 0$ ). Зв'язок між основними термодинамічними параметрами для нього описує **рівняння Пуассона (рівняння адіабати)**

$$PV^\gamma = \text{const} \quad \text{або} \quad TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad (8.26)$$

де  $\gamma$  – показник адіабати (**коефіцієнт Пуассона**):

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{c_P}{c_V} = \frac{i+2}{i} = 1 + \frac{2}{i} \quad (8.27)$$

Співвідношення між тиском і температурою, а також між об'ємом і температурою ідеального газу в адіабатичному процесі мають вигляд:

$$pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{const}, \quad VT^{\frac{1}{\gamma-1}} = \text{const}. \quad (8.28)$$

Перший закон термодинаміки

$$0 = dU + \delta A. \quad (8.29)$$

**Робота в адіабатичному процесі**

$$\begin{aligned} A_{12} &= \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) = \frac{m}{M} \cdot \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = \\ &= \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left( 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left( 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right). \end{aligned} \quad (8.30)$$

Всі розглянуті вище ізопроцеси є окремими випадками політропного процесу.

**Політропним** називають такий термодинамічний процес в ідеальному газі, який описується рівняннями, які в різних термодинамічних координатах мають вигляд

$$\begin{aligned} PV^n &= \text{const}, \\ TV^{n-1} &= \text{const}, \\ p^{1-n} T^n &= \text{const}, \end{aligned} \quad (8.31)$$

де  $n$  – безрозмірна величина (**показник політропи**).

Молярна теплоємність у політропічному процесі

$$C = \frac{nC_V - C_P}{n-1} = \frac{n-\gamma}{(\gamma-1)(n-1)} R. \quad (8.32)$$

**Робота газу в політропному процесі** визначається як

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV = p_1 V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right], \quad (8.33)$$

де  $p_1$  і  $V_1$  – початкові тиск і об’єм,  $V_2$  – його кінцевий об’єм.

Застосування першого закону термодинаміки та поняття теплоємності до політропних процесів представлено у таблиці 8.2.

Таблиця 8.1 – Порівняльна таблиця газових процесів

| Назва процесу             | Ізобаричний                                                     | Ізохорний                    | Ізотермічний                                                          | Адіабатний                                                                                              | Політропний                                                                                                              |
|---------------------------|-----------------------------------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Умова процесу             | $p = \text{const}$                                              | $V = \text{const}$           | $T = \text{const}$                                                    | $\partial Q \equiv 0$                                                                                   | $C = \text{const}$                                                                                                       |
| Рівняння процесу          | $\frac{V}{T} = \text{const}$                                    | $\frac{p}{T} = \text{const}$ | $pV = \text{const}$                                                   | $pV^\gamma = \text{const}$<br>$TV^{\gamma-1} = \text{const}$<br>$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}$  | $pV^n = \text{const}$<br>$TV^{n-1} = \text{const}$<br>$T^n p^{1-n} = \text{const}$                                       |
| Кількість теплоти         | $\partial Q = dU + \partial A$                                  | $\partial Q = dU$            | $\partial Q = \partial A$                                             | 0                                                                                                       | $\partial Q = dU + \partial A$                                                                                           |
| Зміна внутрішньої енергії | $dU = \nu C_V dT$<br>$\Delta U = \nu \frac{i}{2} R (T_2 - T_1)$ |                              | 0                                                                     | $dU = \nu C_V dT$<br>$\Delta U = \nu \frac{i}{2} R (T_2 - T_1)$                                         |                                                                                                                          |
| Робота                    | $A = p(V_2 - V_1)$<br>$A = \nu R(T_2 - T_1)$                    | 0                            | $A = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$<br>$A = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$ | $\partial A = -dU$<br>$A = \nu \frac{i}{2} R (T_1 - T_2)$<br>$A = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}$ | $A = \frac{\nu R}{n-1} (T_1 - T_2)$<br>$A = \frac{p_1 V_1}{n-1} \left( 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right)$ |
| Теплоємність              | $C_p = \frac{i}{2} R + R$                                       | $C_V = \frac{i}{2} R$        | $C = \infty$<br>( $dT = 0$ )                                          | $C = 0$<br>( $\partial Q = 0$ )                                                                         | $C = \frac{n C_V - C_p}{n-1}$                                                                                            |

### 8.1.6. Ентропія. Другий і третій закони термодинаміки

Термодинамічний процес називається **оборотним** (або **циклом**), якщо він допускає повернення системи в первинний стан без того, щоб в довіклі залишилися будь-які зміни. Процес, що не задовольняє цим умовам, називається **необоротним**.

**Ентропія** – функція стану термодинамічної системи, зміна якої дорівнює

$$dS = \frac{\partial Q}{T}, \quad (8.34)$$

де  $dS$  – приріст ентропії, обумовлений здобуттям системою в ході оборотного процесу кількості теплоти  $dQ$ .

З точки зору статистичної фізики ентропія становить

$$S = k \cdot \ln \Omega, \quad (8.35)$$

де  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – стала Больцмана;  $\Omega$  – **статистична вага або термодинамічна ймовірність** даного макростану (чисельно дорівнює числу мікростанів, за допомогою яких може бути реалізований даний макростан).

**Ентропія 1 моля ідеального газу:**

$$S_M = C_V \ln T + R \ln V_M + S_0 = C_p \ln T - R \ln p + S'_0 = C_V \ln p + C_p \ln V + S''_0, \quad (8.36)$$

де  $S_0$ ,  $S'_0$ ,  $S''_0$  – константи інтегрування.

Ентропія – адитивна величина, тому ентропія довільної маси газу дорівнює добутку ентропії 1 моля  $S_M$  та кількості речовини цього газу  $\nu = \frac{m}{M}$ , де  $m$ ,  $M$  – маса та молярна маса даного ідеального газу, відповідно.

Перший закон термодинаміки для **оборотних** процесів в диференціальному вигляді можна записати як

$$TdS = dU + pdV. \quad (8.37)$$

Після підставлення відповідних значень і інтегрування приріст ентропії в оборотному процесі становить

$$S_2 - S_1 = \nu C_V \ln \frac{p_2}{p_1} + \nu C_p \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (8.38)$$

**Другий закон (друге начало) термодинаміки:** неможливі такі процеси, єдиним кінцевим результатом яких був би перехід деякої кількості теплоти від тіла менш нагрітого до тіла більш нагрітого (**формулювання Клаузіуса**) або в **формулюванні Томсона:** неможливі такі процеси, єдиним кінцевим результатом яких було б видалення від будь-якого тіла деякої кількості теплоти та перетворення цієї теплоти в роботу.

Можливе ще одно формулювання другого закону термодинаміки на базі поняття ентропії, що було **введено Больцманом:** ентропія замкнутої (теплоізолюваної) макросистеми не зменшується; вона або зростає, або залишається незмінною.

Для оборотного процесу

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad \text{і} \quad \Delta S = \frac{Q}{T}, \quad (8.39)$$

для необоротного процесу

$$dS > \frac{\delta Q}{T} \quad \text{і} \quad \Delta S > \frac{Q}{T}. \quad (8.40)$$

З врахуванням (8.39) та (8.40) загальний математичний вираз для другого закону термодинаміки має вигляд

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad \text{і} \quad \Delta S \geq \frac{Q}{T}. \quad (8.40)$$

Ентропія також збільшується при змішуванні газів, оскільки процес змішування газів є суттєво необоротним.

**Третій закон термодинаміки (теорема Нернста):** ентропія будь-якого тіла наближається до нуля при наближенні до нуля абсолютної температури:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad (8.41)$$

Вважаючи на цю умову можна обчислити не тільки приріст, але й саму ентропії

$$S(p, T) = \int_0^T \frac{C_p(T) dT}{T}. \quad (8.42)$$

### 8.1.7. Теплові двигуни. Цикл Карно

На практиці для перетворення теплової енергії на механічну роботу використовують **тепловий двигун** (двигун внутрішнього згоряння, парова або газова турбіни), основним елементом якого є **робоче тіло** – газоподібна або рідка речовина, за допомогою якої відбувається це перетворення. Зазвичай вважається, що газоподібне робоче тіло має властивості ідеального газу.

З **робочим тілом** послідовно проводять низку процесів, під час яких воно обмінюється енергією з іншими тілами та повертається в початковий стан, тобто здійснює **цикл**. На діаграмі  $p$ - $V$  круговий процес (цикл) зображується замкнутою кривою.

У тепловому двигуні (рис. 8.4) енергія  $Q_H$  від нагрівача передається робочому тілу шляхом теплообміну. Розширюючись, газ здійснює механічну роботу  $A$ , а решту теплоти  $Q_X$  віддає холодильнику, повертаючись в початковий стан. Ефективність теплової машини визначається відношенням теплоти, що перетворена на механічну роботу, до теплоти, отриманої від нагрівача, – **коефіцієнтом корисної дії**  $\eta$  (к.к.д.):



Рисунок 8.4

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} = 1 - \frac{Q_X}{Q_H}, \quad (8.34)$$

де  $Q_H$  – теплота, забрана від нагрівача;  $Q_X$  – теплота, передана холодильнику.



У холодильній машині (рис. 8.5) двигун здійснює механічну роботу  $A$  стискання газу у компресорі. Стискаючись, газ відбирає теплоту  $Q_x$  від холодильної камери, а розширюючись, віддає теплоту  $Q_n$  у навколишнє середовище.



Рисунок 8.5

Згідно з другим законом термодинаміки, всю теплоту, що отримує робоче тіло від нагрівача, перетворити на роботу неможливо; можливо перетворити лише її частину, надлишок же має бути відібраним тілом з меншою температурою (холодильником).

**Цикл Карно** – це прямий круговий процес, що складається з двох ізотерм та двох адіабат (рис. 8.6). Теоретично, він має найвищий коефіцієнт корисної дії (к.к.д.) серед теплових машин, що працюють при тих самих температурах ( $T_1$  – температура нагрівача,  $T_2$  – температура холодильника):

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (8.35)$$

**Перша теорема Карно:** коефіцієнт корисної дії будь-якої оборотної теплової машини, що працює за циклом Карно, не залежить від природи робочого тіла та конструкції двигуна, а є функцією лише температури нагрівача та холодильника.

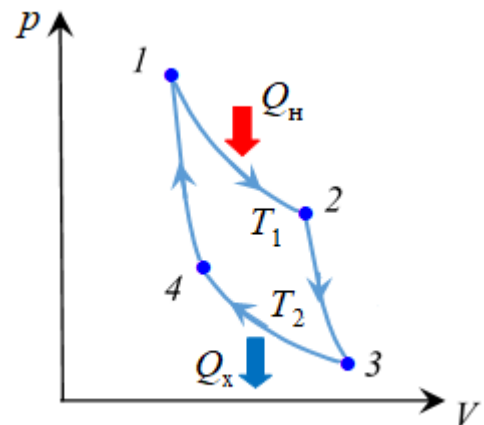


Рисунок 8.6

На практиці, через невелику різницю нахилу адіабат та ізотерм, ефективність циклу Карно знижується.

У двигунах внутрішнього згоряння найчастіше використовуються цикл Отто (тепло підводиться ізохорно), цикл Дизеля (тепло підводиться ізобарно) або цикли змішаного типу.

У замкнутій системі термодинамічний процес може бути оборотним, якщо йдучи у зворотному напрямі, він повертає систему в стан з початковим запасом

енергії, а стан навколишнього середовища при цьому не змінюється (ідеалізований процес, як, наприклад, абсолютно пружний удар чи коливання пружинного маятника у вакуумі без тертя та опору середовища). Щоб процес був оборотним, необхідною і достатньою умовою є його рівноважність.

Необоротний процес залишає після себе сліди – зміни у середовищі, та не повертає систему у початковий енергетичний стан внаслідок втрати частини енергії. Реальні процеси у природі є необоротними, і графічно їх зобразити не можна через їх нерівноважність.

**Друга теорема Карно** стверджує, к.к.д. необоротного циклу Карно завжди менше к.к.д. оборотного циклу Карно, що здійснюється між одними й тими ж джерелами теплоти, що мають постійні, але різні температури.:

$$\eta_{\text{необ}} < \eta_{\text{об}}. \quad (8.36)$$

Друга теорема Карно може бути обґрунтована тим, що при протіканні незворотного кругового процесу неминуче відбувається перетворення частини роботи в теплоту внаслідок дисипативних процесів, що мають місце всередині машини, які пов'язані з вирівнюванням параметрів стану (температури, тиску тощо) всередині робочого тіла або тертям рухомих частин. Це призводить до зменшення механічної роботи та до зменшення к.к.д. теплової машини порівняно з ідеальною машиною Карно.

Якщо провести цикл Карно у зворотному напрямку (проти годинникової стрілки) (рис. 8.6), то отримаємо зворотній цикл. При зворотному циклі розширення відбувається при меншому тиску, а стиск – при більшому. Тому робота стиснення більше, ніж робота розширення, роботу виконує не робоче тіло, а зовнішні сили. Ця робота перетворюється на теплоту. Таким чином, у холодильній машині робоче тіло забирає від холодильника деяку кількість теплоти і передає нагрівачеві більшу кількість теплоти.

Пристрій, що працює за холодильним циклом, може мати двояке призначення. Якщо корисним ефектом є вибір певної кількості тепла від охолоджуваних тіл (наприклад, від продуктів у камері холодильника), такий пристрій є звичайним

*холодильником*. Якщо корисним ефектом є передача деякої кількості тепла тілам, що нагріваються (наприклад, повітря в приміщенні), то такий пристрій називається *тепловим насосом*.

Прямий цикл Карно відображає механізм роботи теплових двигунів, зворотний цикл Карно – холодильних установок. Тобто, прямий цикл Карно фактично означає перетворення внутрішньої теплової енергії на механічну роботу. А зворотний цикл Карно навпаки – перетворення механічної роботи на внутрішню теплову енергію, точніше відбір внутрішньої теплової енергії.

## 8.2. Приклади розв'язання задач

### Задача 8.2.1

Знайти питому теплоємність азоту 1) при постійному об'ємі; 2) при постійному тиску.

| Дано:                   | Розв'язання                                                                                                                           |
|-------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $N_2$                   | Питома теплоємність чисельно дорівнює кількості                                                                                       |
| $c_p = ? \quad c_v = ?$ | теплоти, що відбирається або надається одному кілограму речовини у разі зміни її температури на 1К в даному термодинамічному процесі: |

$$c = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial Q}{dT}.$$

Зв'язок між питомою  $c$  та молярною  $C$  теплоємностями задається співвідношенням

$$c = \frac{C}{M}, \quad (1)$$

де  $M$  – молярна маса речовини.

Якщо процеси здійснюються при постійному об'ємі або при постійному тиску, то відповідні питомі теплоємності визначаються як

$$c_v = \frac{C_v}{M}, \quad (2)$$

$$c_p = \frac{C_p}{M}. \quad (3)$$

Молярні теплоємності при постійному об'ємі та тиску становлять

$$C_v = \frac{i}{2} R, \quad (4)$$

$$C_p = \frac{i+2}{2} R, \quad (5)$$

де  $i$  – загальне число ступенів вільності газу, яка дорівнює сумі кількості поступальних, обертальних і коливальних ступенів вільності.

Для азоту, молекули якого складаються з двох атомів, жорстко зв'язаних один з одним, число ступенів вільності  $i = 5$  (молекула має три поступальних і дві обертальних ступені вільності), а молярна маса дорівнює  $M = 28 \cdot 10^{-3}$  кг/моль, отримаємо

$$c_v = \frac{C_v}{M} = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M} = \frac{5 \cdot 8,31}{2 \cdot 28 \cdot 10^{-3}} = 742 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)},$$

$$c_p = \frac{C_p}{M} = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{R}{M} = \frac{7 \cdot 8,31}{2 \cdot 28 \cdot 10^{-3}} = 1039 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

Розмірність результатів

$$[c] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

**Відповідь:**  $c_v = 742 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ ,  $c_p = 1039 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ .

### Задача 8.2.2

*Суміш газів складається з хлору та криптону, узятих за однакових умов та в рівних об'ємах. Визначити питому теплоємність  $c_p$  суміші при постійному тиску.*

|                           |                                                                 |
|---------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| <b>Дано:</b>              | <b>Розв'язання</b>                                              |
| $\text{Cl}_2 + \text{Kr}$ | Питому теплоємність суміші газів при постійному тиску           |
| $V_1 = V_2$               | треба виразити через питомі теплоємності компонентів суміші.    |
| $c_p = ?$                 | Кількість теплоти, що потрібна для нагріву суміші на $\Delta T$ |

Кельвінів, можна виразити двома способами:

$$Q = c_p (m_1 + m_2) \Delta T, \quad (1)$$

де  $c_p$  – питома теплоємність суміші;  $m_1$ ,  $m_2$  – маси хлору та криптону,

$$Q = (c_{p1}m_1 + c_{p2}m_2)\Delta T, \quad (2)$$

де  $c_{p1}$  та  $c_{p2}$  – питомі теплоємності хлору та криптону, відповідно.

Прирівняємо праві частини виразів (1) і (2) та поділимо їх на  $\Delta T$ :

$$c_p(m_1 + m_2) = c_{p1}m_1 + c_{p2}m_2.$$

Звідси питома теплоємність суміші газів при постійному тиску становить

$$c_p = c_{p1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{p2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3)$$

Масу кожного газу в суміші можна знайти з рівняння Клапейрона- Менделєєва

$pV = \frac{m}{M}RT$  за умов, що гази мають рівні об'єми ( $V_1 = V_2 = V$ ) та знаходяться при рівних температурах ( $T_1 = T_2 = T$ ) та тисках ( $p_1 = p_2 = p$ ). Тоді,

$$pV = \frac{m_1}{M_1}RT, \quad (4)$$

$$pV = \frac{m_2}{M_2}RT. \quad (5)$$

Ліві частини виразів (4) і (5) дорівнюють одна одній, тому, прирівнявши праві частини, отримуємо

$$\frac{m_1}{M_1}RT = \frac{m_2}{M_2}RT,$$

звідки відношення мас хлору та криптону становить

$$m_2 = m_1 \frac{M_2}{M_1}. \quad (6)$$

З огляду на це, питома теплоємність суміші газів дорівнює

$$c_p = c_{p1} \frac{m_1}{m_1 + m_1 \frac{M_2}{M_1}} + c_{p2} \frac{m_1 \frac{M_2}{M_1}}{m_1 + m_1 \frac{M_2}{M_1}} = c_{p1} \frac{M_1}{M_1 + M_2} + c_{p2} \frac{M_2}{M_1 + M_2}. \quad (7)$$

Питомі теплоємності  $c_{p1}$  та  $c_{p2}$  визначаються в залежності від кількості ступенів вільності молекули ( $i$ ) та молярної маси речовини ( $M$ ) за формулами

$$c_{p1} = \frac{i_1 + 2}{2} \cdot \frac{R}{M_1}, \quad (8)$$

$$c_{p2} = \frac{i_2 + 2}{2} \cdot \frac{R}{M_2}. \quad (9)$$

Для хлору (двоатомний газ) число ступенів вільності  $i_1 = 5$  та молярна маса  $M_1 = 71 \cdot 10^{-3}$  кг/моль, а для криптону (інертний одноатомний газ) –  $i_2 = 3$  та  $M_2 = 83,8 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

Підставивши числові значення в (8) і (9), отримаємо

$$c_{p1} = \frac{5 + 2}{2} \cdot \frac{8,31}{71 \cdot 10^{-3}} = 410 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \quad (10)$$

$$c_{p2} = \frac{3 + 2}{2} \cdot \frac{8,31}{83,8 \cdot 10^{-3}} = 250 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}. \quad (11)$$

Підставимо значення (8) і (9) і числові результати (10, (11) в формулу (7) і знайдемо шукану питому теплоємність суміші газів

$$\begin{aligned} c_p &= c_{p1} \frac{M_1}{M_1 + M_2} + c_{p2} \frac{M_2}{M_1 + M_2} = \\ &= \frac{410 \cdot 71 \cdot 10^{-3}}{154,8 \cdot 10^{-3}} + \frac{250 \cdot 83,8 \cdot 10^{-3}}{154,8 \cdot 10^{-3}} = 323 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}. \end{aligned}$$

Розмірність результату

$$[c_p] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

**Відповідь:**  $c_p = 323 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ .

### Задача 8.2.3

Визначити коефіцієнт Пуассона для газової суміші, що складається із маси  $m_1 = 10$  г неону та маси  $m_2 = 14$  г азоту.

| Дано:                       | Розв'язання                                                                                                                                                        |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $m_1 = 10$ г Ne             | Коефіцієнт Пуассона (показник адіабати) $\gamma$ – це показник ступеня в рівнянні адіабатичного процесу, який проходить без теплообміну з навколишнім середовищем, |
| $m_2 = 14$ г N <sub>2</sub> |                                                                                                                                                                    |
| $\gamma = ?$                |                                                                                                                                                                    |

для якого  $pV^\gamma = \text{const}$ . Коефіцієнт Пуассона дорівнює

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad (1)$$

де  $C_p$  та  $C_v$  – відповідно, молярні теплоємності при постійному тиску та постійному об'ємі.

Кожна з молярних теплоємностей виражається через число ступенів вільності газової суміші:

$$C_v = \frac{i}{2} R, \quad (2)$$

$$C_p = \frac{i+2}{2} R. \quad (3)$$

Внутрішні енергії складових суміші становлять

$$U_1 = \frac{i_1}{2} \cdot \frac{m_1}{M_1} RT, \quad (4)$$

$$U_2 = \frac{i_2}{2} \cdot \frac{m_2}{M_2} RT, \quad (5)$$

де  $i_1$  та  $i_2$  – число ступенів вільності для неону та азоту, відповідно. Внутрішня енергія суміші дорівнює



$$U = U_1 + U_2 = \frac{i_1}{2} \cdot \frac{m_1}{M_1} RT + \frac{i_2}{2} \cdot \frac{m_2}{M_2} RT. \quad (6)$$

З іншого боку, внутрішня енергія суміші є

$$U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} RT, \quad (7)$$

де  $i$ ,  $m = m_1 + m_2$ ,  $M$  – число ступенів вільності, маса та молярна маса суміші, відповідно.

Прирівняємо праві частини рівнянь (6) і (7):

$$\frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} RT = \frac{i_1}{2} \cdot \frac{m_1}{M_1} RT + \frac{i_2}{2} \cdot \frac{m_2}{M_2} RT,$$

звідки отримаємо

$$\frac{i \cdot m}{M} = \frac{i_1 \cdot m_1}{M_1} + \frac{i_2 \cdot m_2}{M_2}. \quad (8)$$

Відношення маси до молярної маси – це кількість речовини, тому рівняння (8) набуває вигляду

$$i\nu = i_1\nu_1 + i_2\nu_2$$

і, остаточно,

$$i = \frac{i_1\nu_1 + i_2\nu_2}{\nu}. \quad (9)$$

де  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  та  $\nu = \nu_1 + \nu_2$  – кількості речовини неону, азоту та їх суміші, відповідно.

Підрахуємо кількості речовини:

- для неону  $\nu_1 = \frac{m_1}{M_1} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-3}} = 0,5$  моль,

- для азоту  $\nu_2 = \frac{m_2}{M_2} = \frac{14 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} = 0,5$  моль,

- для суміші  $\nu = \nu_1 + \nu_2 = 0,5 + 0,5 = 1$  моль

Тоді підставлення отриманих величин в формулу (9) дає

$$i = \frac{i_1\nu_1 + i_2\nu_2}{\nu} = \frac{3 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,5}{1} = 4.$$

Тоді коефіцієнт Пуассона (1) становить

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} = \frac{4+2}{4} = 1,5.$$

**Відповідь:**  $\gamma = 1,5$ .

#### Задача 8.2.4

*Кисень нагрівається при незмінному тиску  $p = 80 \text{ кПа}$  так, що його об'єм збільшується від  $V_1 = 1 \text{ м}^3$  до  $V_2 = 3 \text{ м}^3$ . Визначити: 1) зміну  $\Delta U$  внутрішньої енергії газу; 2) роботу  $A$ , що була здійснена газом при розширенні; 3) кількість теплоти  $Q$ , що була передана газу.*

| Дано:                 | Розв'язання                                                      |
|-----------------------|------------------------------------------------------------------|
| $p = 80 \text{ кПа}$  | Внутрішня енергія ідеального газу визначається формулою          |
| $V_1 = 1 \text{ м}^3$ | $U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} RT, \quad (1)$                |
| $V_2 = 3 \text{ м}^3$ | а її зміна залежить від зміни температури згідно із              |
| $\Delta U = ?$        | $\Delta U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} R \Delta T. \quad (2)$ |
| $A = ? \quad Q = ?$   |                                                                  |

Початкову та кінцеву температуру газу можна знайти з рівняння Клапейрона-Менделєєва

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad (3)$$

$$T_1 = \frac{pV_1 M}{mR}, \quad (4)$$

$$T_2 = \frac{pV_2 M}{mR}. \quad (5)$$

Тоді зміна температури з урахуванням (4) і (5) складе

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{pM}{mR} (V_2 - V_1) = \frac{M}{m} \frac{p\Delta V}{R}. \quad (6)$$

Цей же результат можна отримати, якщо продиференціювати рівняння Клапейрона-Менделєєва (3), вважаючи тиску незмінним,

$$p \cdot dV = \frac{m}{M} R \cdot dT \quad (7)$$

та перейшовши від нескінченно малих приростів (диференціалів) до кінцевих приростів:

$$p \cdot \Delta V = \frac{m}{M} R \cdot \Delta T. \quad (8)$$

$$\Delta T = \frac{M}{m} \frac{p\Delta V}{R}. \quad (9)$$

Тоді приріст внутрішньої енергії (2) з врахуванням (9) буде

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} R \Delta T = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} R \cdot \frac{M}{m} \frac{p\Delta V}{R} = \frac{i}{2} p \Delta V = \frac{i}{2} p (V_2 - V_1). \quad (10)$$

Для кисню, який, як двоатомний газ, має п'ять ступенів свободи ( $i=5$ ), підставлення даних задачі дає

$$\Delta U = \frac{i}{2} p (V_2 - V_1) = \frac{5}{2} \cdot 80 \cdot 10^3 \cdot (3-1) = 4 \cdot 10^5 \text{ Дж} = 0,4 \text{ МДж}.$$

Робота, що була здійснена газом при розширенні, становить

$$A = p \cdot \Delta V = 80 \cdot 10^3 \cdot 2 = 1,6 \cdot 10^5 \text{ Дж} = 0,16 \text{ МДж}.$$

Кількість теплоти, що була передана газу, з першого закону термодинаміки, дорівнює

$$Q = \Delta U + A = 0,4 + 0,16 = 0,56 \text{ МДж}.$$

Розмірність отриманих результатів

$$[\Delta U] = [A] = [Q] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^3 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

**Відповідь:**  $\Delta U = 0,4 \text{ МДж}$ ;  $A = 0,16 \text{ МДж}$ .  $Q = 0,56 \text{ МДж}$ .

### Задача 8.2.5

Стан ідеального газу, взятого в кількості  $\nu=1$  моль за абсолютної температури  $T_1=300$  К, змінюється так, як зображено на графіку. Визначте роботу газу в ході всього процесу, якщо на ізохорі  $1 \rightarrow 2$  його тиск зменшується в 3 рази, а точки 1 і 3 лежать на одній ізотермі.

**Дано:**

$\nu=1$  моль

$T_1=300$  К

$p_1=3p_2$

$T_1=T_3$

$A=?$

**Розв'язання**

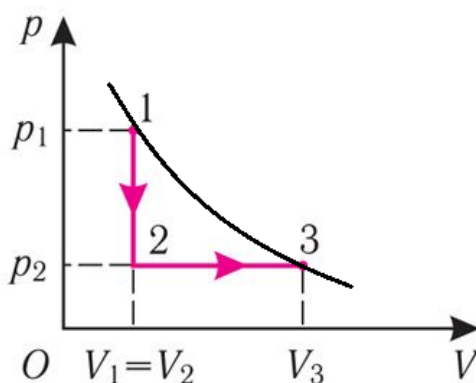
Робота  $A$  газу в ході усього процесу дорівнює сумі робіт на ділянках  $1 \rightarrow 2$  та  $2 \rightarrow 3$ .

При переході  $1 \rightarrow 2$  об'єм газу не змінюється ( $V_1=V_2$ , ізохорний процес), тому робота газу  $A_{12}=0$ .

Тиск газу при переході  $2 \rightarrow 3$  залишається постійним ( $p_2=p_3$ , ізобарний процес), тому робота  $A_{23}=p_2(V_3-V_1)$ .

Отже, шукана робота

$$A = A_{12} + A_{23} = A_{23} = p_2(V_3 - V_1). \quad (1)$$



Точки 1 і 3 лежать на ізотермі, тому  $T_1=T_3$ . Тоді, згідно із рівнянням Клапейрона-Менделєєва,

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_3},$$

звідки

$$V_3 = \frac{p_1}{p_2} V_1 = 3V_1. \quad (2)$$

З врахуванням (2), робота (1) дорівнює

$$A = p_2 (3V_1 - V_1) = 2p_2 V_1 = \frac{2p_1 V_1}{3}. \quad (3)$$

Згідно з рівнянням Клапейрона-Менделєєва для стану 1,

$$p_1 V_1 = \nu R T_1. \quad (4)$$

Підставимо (4) в вираз для роботи (3) і отримуємо

$$A = \frac{2p_1 V_1}{3} = \frac{2\nu R T_1}{3} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 8,31 \cdot 300}{3} = 1662 \text{ Дж.}$$

Розмірність результату

$$[A] = \text{моль} \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж}.$$

**Відповідь:**  $A = 1662 \text{ Дж.}$

### Задача 8.2.6

Ідеальний двоатомний (з жорстким зв'язком) газ знаходиться під тиском  $p_1 = 100 \text{ кПа}$  і займає об'єм  $V_1 = 100 \text{ л}$ . Над газом послідовно здійснюють наступні процеси:  $1 \rightarrow 2$  – ізотермічне стискання до об'єму  $V_2 = V_1/5$ ;  $2 \rightarrow 3$  – ізобарне збільшення об'єму до  $V_3 = 4V_1/5$ ;  $3 \rightarrow 4$  – ізохорне зниження тиску до  $p_4 = 3p_1$ . Визначити у ході усього процесу 1) зміну внутрішньої енергії газу; 2) роботу сил тиску газу; 3) кількість теплоти, що була передана при цьому газу.

**Дано:**

$$i = 5$$

$$p_1 = 100 \text{ кПа} = 10^5 \text{ Па}$$

$$V_1 = 100 \text{ л} = 0,1 \text{ м}^3$$

$$T_1 = T_2; V_2 = V_1/5$$

$$p_2 = p_3; V_3 = 4V_1/5$$

$$V_3 = V_4; p_4 = 3p_1$$

$$\Delta U = ? A = ? Q = ?$$

**Розв'язання**

Ідеальний двоатомний газ, молекули якого жорстко з'єднані, має 5 ступенів вільності,  $i = 5$ .

Перехід зі стану 1 у стан 2 є ізотермічним, тобто таким, що проходить при постійній температурі  $T_1$ .

Згідно з законом Бойля-Маріотта

$$p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

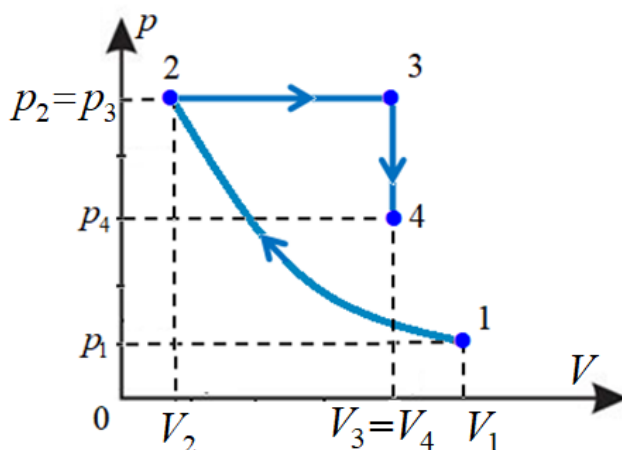
Тоді тиск газу у стані 2 дорівнює

$$p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = p_1 \frac{V_1 \cdot 5}{V_1} = 5p_1. \quad (1)$$

Зміна внутрішньої енергії  $\Delta U$  ідеального газу не залежить від типу процесу тому, що внутрішня енергія є функцією стану. Тому зміна внутрішньої енергії в ході процесу  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  буде визначатися як

$$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T = \frac{i}{2} \nu R (T_4 - T_1) = \frac{i}{2} \nu R T_4 - \frac{i}{2} \nu R T_1, \quad (2)$$

де  $\nu$  – кількість речовини газу;  $T_1$  та  $T_4$  – температури газу в початковому і кінцевому станах, відповідно;  $R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$  – універсальна газова стала.



Параметри газу в станах 1 і 4 зв'язані рівнянням Клапейрона-Менделєєва:

$$p_1 V_1 = \nu R T_1, \quad (3)$$

$$p_4 V_4 = \nu R T_4. \quad (4)$$

Враховуючи (3) і (4), рівняння (2) набуває вигляду

$$\Delta U = \frac{i}{2} (p_4 V_4 - p_1 V_1). \quad (5)$$

За умовами задачі  $p_4 = 3p_1$  і  $V_4 = V_3 = \frac{4}{5}V_1$ , тому для зміни внутрішньої енергії

отримуємо

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{i}{2} \left( 3p_1 \cdot \frac{4}{5}V_1 - p_1 V_1 \right) = \frac{i}{2} \cdot \frac{7p_1 V_1}{5} = \\ &= \frac{5 \cdot 7 \cdot 10^5 \cdot 0,1}{2 \cdot 5} = 3,5 \cdot 10^4 \text{ Дж} = 35 \text{ кДж}. \end{aligned} \quad (6)$$

Елементарна робота  $\delta A$  сил тиску газу за умови малої зміни його об'єму  $dV$  дорівнює

$$\delta A = p dV. \quad (7)$$

Для того щоб знайти роботу при кінцевій зміні об'єму газу від  $V_1$  до  $V_2$ , треба проінтегрувати (7) у відповідних межах:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV, \quad (8)$$

де  $p = p(V)$  – це залежність тиску газу від його об'єму.

Вид функції  $p(V)$  залежить від типу процесу, в ході якого змінюється об'єм газу, тому робота, що здійснюється газом, також залежить від типу процесу. Отже, у такому випадку роботу при переході газу  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  треба записати у вигляді алгебраїчної суми робіт, що здійснюються в кожному окремому процесі:  $A_{12}$  – під час ізотермічного стискання;  $A_{23}$  – при ізобаричному розширенні та  $A_{34}$  – в ізохорному процесі:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34}. \quad (9)$$

Розрахуємо відповідні роботи за допомогою рівняння Клапейрона-Менделєєва  $pV = \nu RT$ .

Під час ізотермічного процесу  $1 \rightarrow 2$  температура газу не змінюється, тому функція  $p(V) = \frac{\nu RT_1}{V}$ , а робота  $A_{12}$  при ізотермічному стисканні від об'єму  $V_1$  до об'єму  $V_2$  дорівнюватиме

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT_1}{V} dV = \nu RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT_1 \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (10)$$

Враховуючи, що  $p_1 V_1 = \nu RT_1$  і  $V_2 = \frac{V_1}{5}$ , отримуємо

$$A_{12} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{1}{5} = -10^5 \cdot 0,1 \cdot 1,61 = -1,61 \cdot 10^4 \text{ Дж}. \quad (11)$$

Процес  $2 \rightarrow 3$  є ізобаричним, коли  $p_2 = \text{const}$ , тому робота

$$A_{23} = \int_{V_2}^{V_3} p_2 dV = p_2 (V_3 - V_2) = p_2 V_3 - p_2 V_2. \quad (12)$$

Враховуючи, що з (1)  $p_2 = 5p_1$ , а з умови задачі  $V_2 = \frac{V_1}{5}$  і  $V_3 = \frac{4}{5}V_1$ , отримуємо

$$A_{23} = p_2 V_3 - p_2 V_2 = 5p_1 \left( \frac{4V_1}{5} - \frac{V_1}{5} \right) = 3p_1 V_1 = 3 \cdot 10^5 \cdot 0,1 = 3 \cdot 10^4 \text{ Дж}. \quad (13)$$

Під час ізохорного процесу  $3 \rightarrow 4$  об'єм газу не змінюється, тому робота

$$A_{34} = 0. \quad (14)$$

Підставляючи (11), (12) і (13) в вираз (9), отримаємо величину роботи в процесі  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ :

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} = -1,61 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^4 + 0 = 1,39 \cdot 10^4 \text{ Дж} = 13,9 \text{ кДж} \quad (15)$$

З першого закону термодинаміки кількість теплоти  $Q$ , що передається газу, йде на зміну внутрішньої енергії  $\Delta U$  і на здійснення роботи  $A$ . Тому з урахуванням (6) і (15)



$$Q = \Delta U + A = 3,5 \cdot 10^4 + 1,39 \cdot 10^4 = 4,89 \cdot 10^4 \text{ Дж} = 48,9 \text{ кДж}.$$

**Відповідь:**  $\Delta U = 35 \text{ кДж}$ ;  $A = 13,9 \text{ кДж}$ ;  $Q = 48,9 \text{ кДж}$ .

### Задача 8.2.7

Двоатомний газ здійснює замкнутий робочий цикл  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ , який складається з ізобари, адіабати та ізотерми, як зображено на рисунку. Визначити: 1) тиск та об'єм, який займає газ, у точці 3; 2) роботу, виконану за один цикл.

| Дано:                                         | Розв'язання                                                                                                       |
|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ | 1) Як видно з рисунка 1, цикл складається з трьох послідовних процесів: на ділянці $1 \rightarrow 2$ відбувається |
| $p_3 = ? V_3 = ?$                             | ізобаричне розширення газу, $2 \rightarrow 3$ – адіабатичне                                                       |
| $A = ?$                                       | розширення, $3 \rightarrow 1$ – ізотермічне стисання.                                                             |

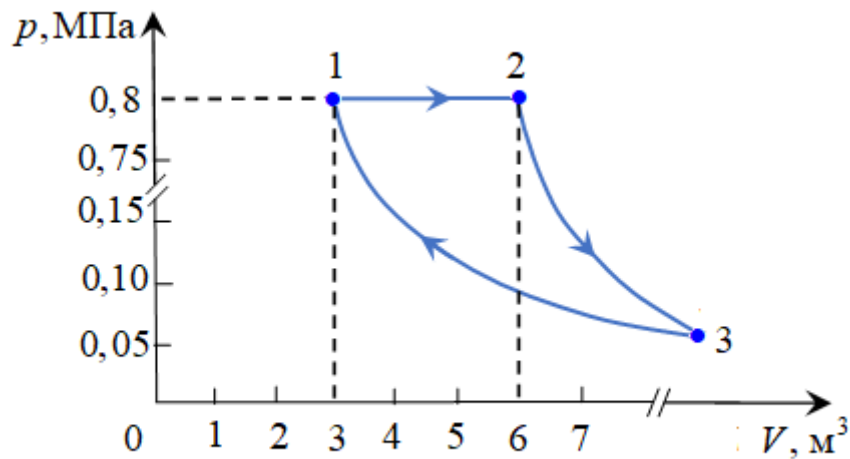


Рисунок 1

Відповідні рівняння для кожного з процесів мають наступний вигляд:

- $1 \rightarrow 2$  – ізобаричний процес

$$p_1 = p_2; \quad (1)$$

-  $2 \rightarrow 3$  – адіабатичний процес

$$p_2 \cdot V_2^\gamma = p_3 \cdot V_3^\gamma; \quad (2)$$

-  $3 \rightarrow 1$  – ізотермічний процес

$$p_3 \cdot V_3 = p_1 \cdot V_1. \quad (3)$$

Розділивши рівняння (2) на (3), отримаємо

$$\frac{p_2 \cdot V_2^\gamma}{p_1 \cdot V_1} = \frac{p_3 \cdot V_3^\gamma}{p_3 \cdot V_3}. \quad (4)$$

Оскільки  $p_1 = p_2$ , то вираз (4) набуває вигляду

$$\frac{V_2^\gamma}{V_1} = V_3^{\gamma-1}, \quad (5)$$

де коефіцієнт Пуассона  $\gamma$  в рівнянні адіабати дорівнює

$$\gamma = \frac{i+2}{i}.$$

Для двоатомної молекули з жорстким зв'язком кількість ступенів вільності дорівнює  $i=5$ , що є сумою трьох поступальних і двох обертальних ступенів вільності. Тому показник адіабати становить

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = 1,4.$$

Щоб виразити  $V_3$  з рівняння (5), зведемо обидві частини цього рівняння в обернений ступінь

$$\left( \frac{V_2^\gamma}{V_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left( V_3^{\gamma-1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Тоді шуканий об'єм в стані 3 має вигляд

$$V_3 = \left( \frac{V_2^\gamma}{V_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (6)$$

Величина тиску з формули (3)

$$p_3 = \frac{p_1 \cdot V_1}{V_3}. \quad (7)$$

Якщо з графіку (рис. 1), що зображує цикл, узяти значення  $V_1 = 3 \text{ м}^3$ ,  $V_2 = 6 \text{ м}^3$ ,  $p_1 = p_2 = 0,8 \text{ МПа} = 8 \cdot 10^5 \text{ Па}$ , і підставити їх у формули (6) і (7), то значення об'єму і тиску у стані 3 дорівнюватимуть

$$V_3 = \left( \frac{6^{1,4}}{3} \right)^{\frac{1}{1,4-1}} = \left( \frac{12,3}{3} \right)^{2,5} = 34 \text{ м}^3,$$

$$p_3 = \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 3}{34} = 0,7 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

2) Робота газу при зміні його об'єму в загальному вигляді:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (8)$$

Робота газу при ізобарному процесі  $1 \rightarrow 2$   $p_1 = p_2 = p = \text{const}$  є додатною

$$A_{12} = p \cdot \Delta V = p_1(V_2 - V_1) \quad (9)$$

і визначається площею прямокутника, що утворений ізобарою 1-2, її проєкцією на вісь абсцис  $V$  та ординатами  $p_1$  та  $p_2$  точок 1 і 2 (рис. 2, а), відповідно.

У адіабатичному процесі робота дорівнює зменшенню внутрішньої енергії системи та вимірюється площею під кривою 2-3 (рис. 2, б)

$$A_{23} = -\Delta U = -C_V \Delta T = -\frac{i}{2} \frac{m}{M} R(T_3 - T_2). \quad (10)$$

З рівняння Клапейрона-Менделєєва  $p_2 V_2 = \frac{m}{M} R T_2$ ,  $p_3 V_3 = \frac{m}{M} R T_3$ , тому

$$A_{23} = \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_3 V_3) = \frac{1}{\gamma - 1} (p_2 V_2 - p_3 V_3). \quad (11)$$

У ізотермічному процесі 3-1  $T_1 = T_2 = T = \text{const}$  робота газу проти зовнішніх сил дорівнює кількості теплоти, відведеної від системи.

Ця робота (рис. 2, в) є від'ємною і визначається як

$$A_{31} = Q_{31} = \frac{m}{M} RT \int_{V_3}^{V_1} \frac{dV}{V} = p_1 V_1 \ln \left( \frac{V_1}{V_3} \right). \quad (12)$$

Загальна робота (рис. 2, з), що була виконана за цикл, дорівнює алгебраїчній сумі робіт ( ), (11) і (12) на усіх ділянках

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31}. \quad (13)$$

$$\begin{aligned} A &= p_1(V_2 - V_1) + \frac{i}{2}(p_2 V_2 - p_3 V_3) + p_1 V_1 \ln \left( \frac{V_1}{V_3} \right) = \\ &= 8 \cdot 10^5 \cdot (6 - 3) + \frac{5}{2} (8 \cdot 10^5 \cdot 6 - 0,7 \cdot 10^5 \cdot 34) + 8 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot \ln \frac{3}{34} = \\ &= 2,4 \cdot 10^6 + 6,05 \cdot 10^6 - 5,83 \cdot 10^6 = 2,62 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 2,62 \text{ МДж}. \end{aligned}$$

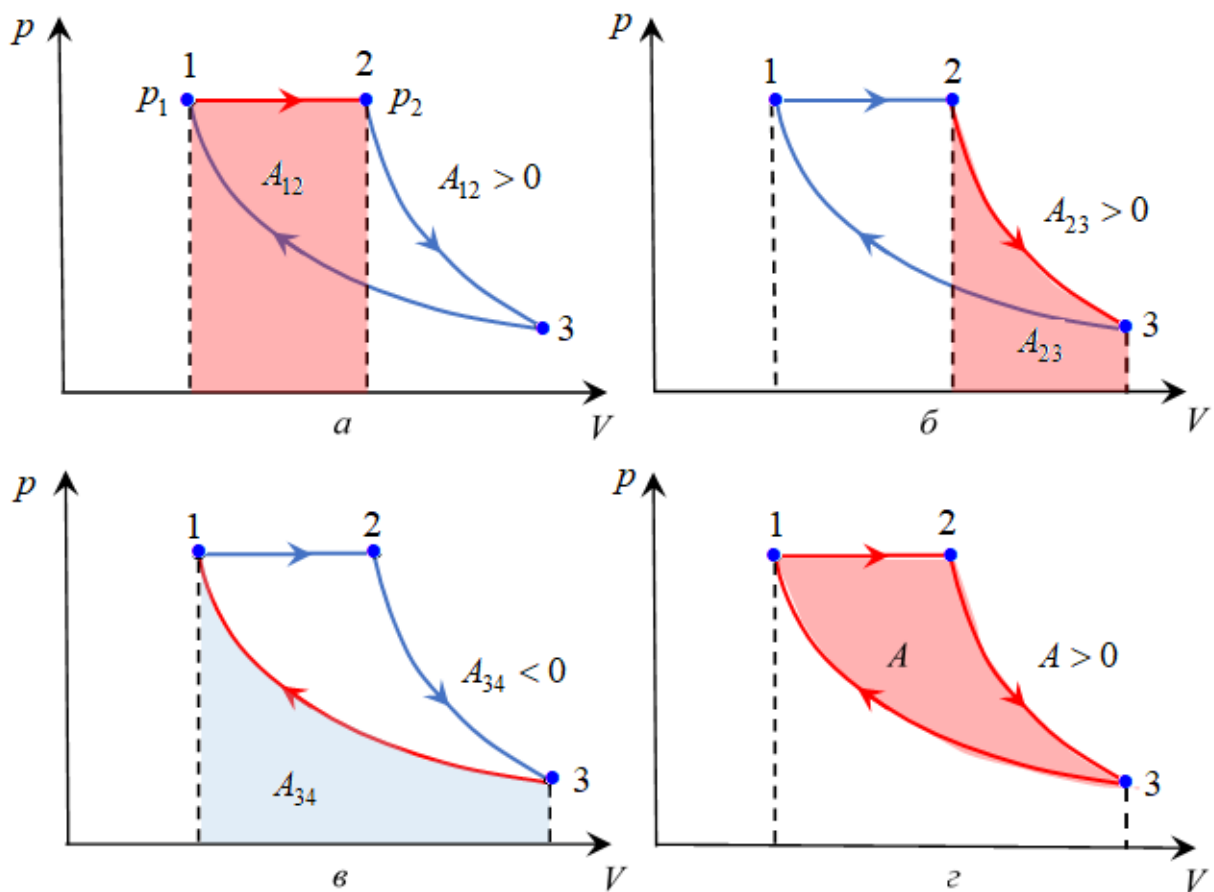


Рисунок 2

Перевірка розмірностей:

$$[p] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^3} = \text{Па},$$

$$[A] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 + \text{Па} \cdot \text{м}^3 + \text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \ln\left(\frac{\text{м}^3}{\text{м}^3}\right) = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^3 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

**Відповідь:**  $V_3 = 34 \text{ м}^3$ ;  $p_3 = 0,7 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ;  $A = 2,62 \text{ МДж}$ .

### Задача 8.2.8

У кімнаті, що має форму паралелепіпеда зі сторонами  $3 \text{ м} \times 6 \text{ м} \times 3 \text{ м}$ , при сталому тиску  $p = 10^5 \text{ Па}$  внаслідок спалення дров у пічці температура піднялась від  $T_1 = 285 \text{ К}$  до  $T_2 = 295 \text{ К}$ . Визначити: 1) зміну внутрішньої енергії повітря при нагріванні; 2) роботу розширення повітря; 3) кількість теплоти, отриманої ним від пічки; 4) масу дров, що була спалена. Теплотворна здатність дров  $q = 10^7 \text{ Дж/кг}$ , коефіцієнт корисної дії пічки  $\eta = 15\%$ .

#### Дано:

$$a \times b \times c = 3 \times 6 \times 3 \text{ м}^3$$

$$p = 10^5 \text{ Па}$$

$$T_1 = 285 \text{ К}$$

$$T_2 = 295 \text{ К}$$

$$q = 10^7 \text{ Дж/кг}$$

$$\eta = 15\%$$

$$\Delta U = ? \quad A = ?$$

$$Q = ? \quad m = ?$$

#### Розв'язання

Повітря у кімнаті будемо вважати ідеальним газом, що є сумішшю азоту  $\text{N}_2$  і кисню  $\text{O}_2$ , молекули кожного з яких складаються з двох атомів, з'єднаних жорстким зв'язком, тому кількість ступенів вільності молекул  $i = 5$ . Кімната не є герметично ізольованою, величина тиску дорівнюватиме атмосферному значенню.

Зміна внутрішньої енергії ідеального газу

$$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} \nu R (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} (\nu R T_2 - \nu R T_1). \quad (1)$$

Щоб знайти вирази, різниця яких стоїть в правій частині формули (1), скористаємося рівнянням Клапейрона-Менделєєва  $pV = \nu RT$ . Для двох температур маємо

$$\begin{aligned} pV_1 &= \nu RT_1, \\ pV_2 &= \nu RT_2, \end{aligned}$$

звідки

$$\nu RT_2 - \nu RT_1 = p(V_2 - V_1). \quad (2)$$

Об'єм  $V_2$  можна знайти із закону Гей-Люссака, що описує ізобарний процес,  $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ . Тоді

$$V_2 = \frac{T_2 V_1}{T_1}. \quad (3)$$

З врахуванням (2) і (3) формула (1) набуває вигляду

$$\Delta U = \frac{5}{2} p \left( \frac{T_2 V_1}{T_1} - V_1 \right) = \frac{5}{2} p \cdot abc \cdot \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right). \quad (4)$$

Таким чином, внутрішня енергія дорівнює

$$\Delta U = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3}{2} \cdot \left( \frac{295}{285} - 1 \right) = 4,74 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

Робота розширення газу при сталому тиску

$$A = p \Delta V = p(V_2 - V_1) = p \left( \frac{T_2 V_1}{T_1} - V_1 \right) = p V_1 \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = p \cdot abc \cdot \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right). \quad (5)$$

Підставляючи дані задачу в (5), отримуємо величину роботи

$$A = 10^5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \left( \frac{295}{285} - 1 \right) = 1,9 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

Кількість теплоти, яку отримав газ у ході процесу, знайдемо з першого закону термодинаміки

$$Q = \Delta U + A, \quad (6)$$

числове значення якої є

$$Q = 4,74 \cdot 10^5 + 1,9 \cdot 10^5 = 6,64 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

Кількість теплоти, яку газ отримує від згоряння дров масою  $m$  з врахуванням к.к.д., дорівнює

$$Q = \eta q m,$$

звідки шукана маса дров становить

$$m = \frac{Q}{\eta q}. \quad (7)$$

Підставлення числових значень в (7) дає

$$m = \frac{6,64 \cdot 10^5}{0,15 \cdot 10^7} = 0,44 \text{ кг.}$$

Перевірка розмірності отриманих результатів:

$$[\Delta U] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \left( \frac{K}{K} - 1 \right) = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^3 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж},$$

$$[A] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \left( \frac{K}{K} - 1 \right) = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^3 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж},$$

$$[Q] = \text{Дж} + \text{Дж} = \text{Дж},$$

$$[m] = \frac{\frac{\text{Дж}}{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 1}}{\text{кг}} = \text{кг}.$$

**Відповідь:**  $\Delta U = 4,74 \cdot 10^5 \text{ Дж}; A = 1,9 \cdot 10^5 \text{ Дж}; Q = 6,64 \cdot 10^5 \text{ Дж};$

$$m = 0,44 \text{ кг}.$$

### Задача 8.2.9

*Два циліндри А та В містять під поршнями однакові кількості ідеального одноатомного газу при кімнатній температурі. Поршень у циліндрі А може вільно рухатись, а в циліндрі В – зафіксований. Обидві ємності отримали*

однакову кількість теплоти. Визначити зміну температури у циліндрі В, якщо температура газу у циліндрі А зросла на  $\Delta T = 30 \text{ K}$ .

|                             |                                                           |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------|
| <b>Дано:</b>                | <b>Розв'язання</b>                                        |
| $\Delta T_A = 30 \text{ K}$ | Здатність тіла нагріватися при підведенні до нього        |
| $\Delta T_B = ?$            | теплоти характеризується величиною теплоємності $C$ тіла. |

Вона визначається природою і кількістю газу, що треба нагріти, а також способом підведення теплоти (наприклад, в адіабатичному процесі газ нагрівається без теплообміну, а в ізотермічному – взагалі не нагрівається, скільки б теплоти не отримав).

Виходячи з визначення теплоємності, кількість теплоти можна знайти як

$$\Delta Q = \nu C \Delta T, \quad (1)$$

де  $\nu$  – кількість речовини газу у молях,  $C$  – молярна теплоємність системи у даному процесі,  $\Delta T$  – зміна температури системи.

У ізобаричному процесі, що здійснюється у циліндрі А

$$\Delta Q_A = C_p \nu \Delta T_A, \quad (2)$$

де  $C_p$  – молярна теплоємність системи при сталому тиску.

Для циліндра В в умовах постійного об'єму  $\Delta V = 0$ , кількість теплоти, що підведена до системи, визначається як

$$\Delta Q_B = C_V \nu \Delta T_B, \quad (3)$$

де  $C_V$  – молярна теплоємність системи при сталому об'ємі.

За умовою задачі  $\Delta Q_A = \Delta Q_B$ , з цього випливає, що праві частини рівнянь (2) і (3) дорівнюють одна одній. Оскільки кількості молей газу в циліндрах однакова, тоді

$$C_p \Delta T_A = C_V \Delta T_B. \quad (4)$$

З формули (4) виразимо температуру у циліндрі В



$$\Delta T_B = \frac{C_p}{C_v} \Delta T_A. \quad (5)$$

Відношення молярних теплоємностей при сталому тиску і сталому об'ємі  $\frac{C_p}{C_v}$

– це коефіцієнт Пуассона  $\gamma$  (показник адіабати), який залежить від кількості ступенів вільності молекули газу. У разі ідеального одноатомного газу кількість ступенів  $i = 3$ , а коефіцієнт Пуассона

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} = \frac{3+2}{3} = 1,67. \quad (6)$$

Тоді із врахуванням (6) шукана температура становить

$$\Delta T_B = \frac{C_p}{C_v} \Delta T_A = 1,67 \cdot 30 = 50,1 \text{ К}.$$

**Відповідь:**  $\Delta T_B = 50,1 \text{ К}.$

### Задача 8.2.10

Температура нагрівача ідеальної теплової машини  $T_H = 500 \text{ К}$ , температура холодильника  $T_x = 400 \text{ К}$ . Визначити коефіцієнт корисної дії  $\eta$  циклу Карно і корисну потужність машини, якщо нагрівач передає їй  $Q = 1675 \text{ Дж}$  теплоти за  $t = 1 \text{ секунду}$ .

| Дано:                  | Розв'язання                                                                                                    |
|------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $T_H = 500 \text{ К}$  | Коефіцієнт корисної дії теплової машини визначається за формулою                                               |
| $T_x = 400 \text{ К}$  |                                                                                                                |
| $Q = 1675 \text{ Дж}$  | $\eta = \frac{T_H - T_x}{T_H} = \frac{500 - 400}{500} = 0,2,$ <p>або в відсотках <math>\eta = 20\%</math>.</p> |
| $t = 1 \text{ с}$      |                                                                                                                |
| $\eta = ? \quad P = ?$ | На корисну роботу перетворюється частина теплової                                                              |

енергії, яка надходить у теплову машину від нагрівача:

$$A = \eta Q = 0,2 \cdot 1675 = 335 \text{ Дж.}$$

Корисна потужність теплової машини – це корисна робота, яка здійснюється протягом 1 секунди,

$$P = \frac{A}{t} = \frac{335}{1} = 335 \text{ Вт.}$$

**Відповідь:**  $\eta = 0,2$ ;  $P = 335 \text{ Вт.}$

### Задача 8.2.11

*Ідеальний двоатомний газ здійснює цикл Карно, графік якого показаний на рисунку. Об'єми газу в станах 2 і 3 дорівнюють  $V_2 = 12 \text{ л}$  та  $V_3 = 16 \text{ л}$ . Знайти термічний коефіцієнт корисної дії циклу  $\eta$ .*

| Дано:                | Розв'язання                                                                 |
|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $V_2 = 12 \text{ л}$ | Коефіцієнт корисної дії циклу за визначенням є<br>$\eta = A/Q_1, \quad (1)$ |
| $V_3 = 16 \text{ л}$ |                                                                             |
| $\eta = ?$           |                                                                             |

де  $A$  – корисна робота,  $Q_1$  – кількість теплоти, що отримана газом від нагрівача.

Цикл Карно складається з двох ізотерм (12 та 34) та двох адіабат (23 та 41). Корисна робота, що здійснюється за цикл, дорівнює різниці кількостей теплоти:  $Q_1$ , отриманої від нагрівача, та  $Q_2$ , переданої охолоджувачу. Отримання тепла відбувається при ізотермічному розширенні на ділянці 12 та повністю йде на здійснення роботи, оскільки зміна внутрішньої енергії при цьому дорівнює 0.

$$A = Q_1 - Q_2. \quad (2)$$

Під час ізотермічного розширення  $1 \rightarrow 2$  від  $V_1$  до  $V_2$  при температурі  $T_1$  газ отримує кількість теплоти  $Q_1$ , яка йде на здійснення роботи  $A_{12}$ ,

$$Q_1 = A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (3)$$

Аналогічно, для ізотермічного стискання  $3 \rightarrow 4$

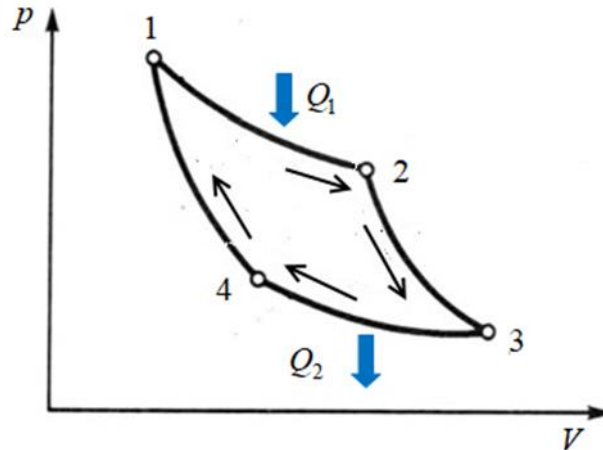
$$Q_2 = A_{34} = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_4}{V_3} = -\frac{m}{M} \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_3}{V_4}. \quad (4)$$

З врахуванням (2), (3) і (4) коефіцієнт корисної дії (1) набуває вигляду

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\left( T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \cdot \ln \frac{V_4}{V_3} \right)}{T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (5)$$

Для визначення  $\eta$  за формулою (5) треба встановити температури ізотерм  $T_1$  та  $T_2$ , що можна зробити, застосовуючи рівняння Пуассона, яке описує адіабатичний процес 23:

$$p_2 \cdot V_2^\gamma = p_3 \cdot V_3^\gamma. \quad (6)$$



Напишемо рівняння Пуассона в параметрах температури та об'єму, для чого виразимо тиск з рівняння Клапейрона-Менделєєва:

$$p = \frac{m \cdot R \cdot T}{M \cdot V}. \quad (7)$$

Після підставлення (7) в (6) отримуємо

$$\frac{T_1}{V_2} \cdot V_2^\gamma = \frac{T_2}{V_3} \cdot V_3^\gamma, \quad (8)$$

$$T_1 \cdot V_2^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_3^{\gamma-1}, \quad (9)$$

та остаточно

$$T_2 = T_1 \cdot \left( \frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1}. \quad (10)$$

Для двоатомного газу з жорстким зв'язком число ступенів вільності  $i = 5$ , отже, коефіцієнт Пуассона

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5} = 1,4, \\ \gamma - 1 = 0,4, \quad (11)$$

З рахуванням (11) температура

$$T_2 = T_1 \cdot \left( \frac{12}{16} \right)^{0,4} = 0,891 \cdot T_1.$$

Таким чином, коефіцієнт корисної дії теплової машини, що працює за циклом Карно, є

$$\eta = \frac{T_1 - 0,891 \cdot T_1}{T_1} = \frac{0,109 \cdot T_1}{T_1} = 0,109,$$

або у відсотках,  $\eta = 10,9 \%$ .

**Відповідь:**  $\eta = 0,109$ .

### Задача 8.2.12

*Теплова машина працює за циклом Карно, коефіцієнт корисної дії якого  $\eta = 0,25$ . Яким буде холодильний коефіцієнт  $\eta'$  машини, якщо вона буде здійснювати той самий цикл у зворотному напрямку?*

**Дано:**

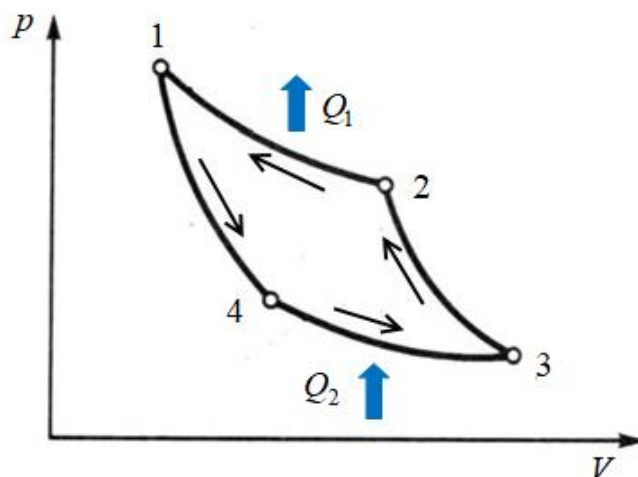
$$\eta = 0,25$$

$$\eta' = ?$$

**Розв'язання**

Цикл Карно може протікати не тільки в прямому, але й у зворотному напрямку.

Холодильним коефіцієнтом називається відношення кількості теплоти, відібраної від охолоджуваного тіла, до величини роботи, яку здійснює двигун, що приводить у рух машину.



Коефіцієнт корисної дії будь-якого циклу, у тому числі і циклу Карно, виражається формулою

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (1)$$

Особливість циклу Карно – його зворотність: процес може протікати як у прямому, так і у зворотному напрямку. При зворотному циклі Карно робоча речовина буде, розширюючись по ізотермі 3-4, відбирати від холодильника кількість теплоти  $Q_2$  і, стискаючись по ізотермі 1-2, віддавати нагрівачу кількість теплоти  $Q_1$ . При цьому робота, виконана робочою речовиною за один цикл, буде від'ємною (додатна робота розширення менше за модулем від'ємної роботи стиснення). У цьому випадку позитивною буде робота  $A$  двигуна, що приводить в дію теплову машину.

Відповідно до визначення холодильного коефіцієнта

$$\eta' = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}. \quad (2)$$

Виключимо з (1) величину

$$Q_1 = A + Q_2 \quad (3)$$

і отримаємо

$$\eta = \frac{A}{A + Q_2}. \quad (4)$$

Звідки

$$\frac{1}{\eta} = \frac{A + Q_2}{A} = 1 + \frac{Q_2}{A} = 1 + \eta'. \quad (5)$$

З (5) холодильний коефіцієнт машини дорівнює

$$\eta' = \frac{1}{\eta} - 1 = \frac{1}{0,25} - 1 = 3$$

або в відсотках  $\eta' = 300\%$ .

Зазначимо, що на відміну від традиційного поняття ККД, холодильний коефіцієнт, який показує відношення отриманої кількості відведеного тепла від холодного тіла  $Q_2$  до витраченої роботи  $A$ :  $\eta' = Q_2/A$ , може бути більшим за одиницю (або 100%), що, звичайно, не порушує закон збереження енергії. Це означає, що за рахунок роботи  $A$  машина може перемістити більше тепла  $Q_2$ , ніж сама робота. Це можливо завдяки тому, що теплова машина не створює тепло, а лише переносить його від холодного резервуара до гарячого.

**Відповідь:**  $\eta' = 3$ .

### Задача 8.2.13

*Знайти зміну ентропії при переході маси  $m = 10\text{ г}$  азоту від об'єму  $V_1 = 10$  літрів до об'єму  $V_2 = 30$  літрів 1) при зміні температури від  $T_1 = 350\text{ К}$  до*

$T_2 = 400\text{ K}$ ; 2) при зміні тиску від  $p_1 = 150\text{ кПа}$  до  $p_2 = 100\text{ кПа}$ ; 3) при незмінному тиску.

| Дано:                     | Розв'язання                                                                                                                                                                                                              |
|---------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $m = 10\text{ г } N_2$    | Якщо замкнута система переходить зі стану 1 у стан 2, то кількість теплоти $Q$ , яку вона отримує з навколишнього середовища, залежить від шляху, по якому відбувається процес. Але величина, зміна якої визначається як |
| $V_1 = 10\text{ л}$       |                                                                                                                                                                                                                          |
| $V_2 = 30\text{ л}$       |                                                                                                                                                                                                                          |
| 1) $T_1 = 350\text{ K}$   |                                                                                                                                                                                                                          |
| $T_2 = 400\text{ K}$      |                                                                                                                                                                                                                          |
| 2) $p_1 = 150\text{ кПа}$ | залежить від початкового і кінцевого станів системи і не залежить від шляху, за яким здійснюється процес. Ця величина називається ентропією і вона є функцією стану системи.                                             |
| $p_2 = 100\text{ кПа}$    |                                                                                                                                                                                                                          |
| 3) $p = \text{const}$     |                                                                                                                                                                                                                          |
| $\Delta S = ?$            |                                                                                                                                                                                                                          |

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}, \quad (1)$$

1) Згідно із першим законом термодинаміки кількість теплоти, що надходить у систему, витрачається на зміну внутрішньої енергії та здійснення роботи

$$dQ = dU + dA = \frac{m}{M} C_v dT + p dV. \quad (2)$$

З рівняння Клапейрона-Менделєєва виразимо тиск

$$p = \frac{mRT}{MV}, \quad (3)$$

і підставимо його в (2)

$$dQ = \frac{m}{M} C_v dT + \frac{mRT}{MV} dV, \quad (4)$$

де молярна теплоємність при сталому об'ємі  $C_v = \frac{i}{2} R$ , а  $i$  – кількість ступенів вільності молекули газу.

Тоді зміна ентропії

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{mC_v}{M} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{mR}{M} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m \cdot i \cdot R}{2M} \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{mR}{M} \ln \frac{V_2}{V_1},$$

$$\Delta S = \frac{mR}{M} \left( \frac{i}{2} \ln \frac{T_2}{T_1} + \ln \frac{V_2}{V_1} \right). \quad (5)$$

Молярна маса молекули азоту  $M = 28 \cdot 10^{-3}$  кг/моль, універсальна газова стала  $R = 8,31$  Дж/(моль · К), маса азоту  $m = 10 \text{ г} = 10 \cdot 10^{-3}$  кг, кількість ступенів вільності для азоту, молекули якого складаються з двох атомів, з'єднаних жорстким зв'язком, є  $i = 5$  (3 ступені поступальні та 2 – обертальні). Враховуючи ці дані, зміна ентропії для даних умов становить

$$\Delta S_1 = \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31}{28 \cdot 10^{-3}} \left( \frac{5}{2} \ln \frac{400}{350} + \ln \frac{30}{10} \right) = 4,26 \text{ Дж/кг}.$$

2) Для знаходження зміни ентропії при зміні тиску використаємо рівняння (5) і виразимо відношення температур з рівнянь Клапейрона-Менделєєва для двох станів газу

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}. \quad (6)$$

Підставимо (6) в (5), враховуючи, що  $\ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \ln \frac{p_2}{p_1} + \ln \frac{V_2}{V_1}$

$$\begin{aligned} \Delta S_2 &= \frac{m}{M} C_v \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{M} C_v \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1} = \\ &= \frac{mR}{M} \left[ \frac{i}{2} \left( \ln \frac{p_2}{p_1} + \ln \frac{V_2}{V_1} \right) + \ln \frac{V_2}{V_1} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Delta S_2 = \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31}{28 \cdot 10^{-3}} \left[ \frac{5}{2} \left( \ln \frac{100}{150} + \ln \frac{30}{10} \right) + \ln \frac{30}{10} \right] = 8,42 \text{ Дж/кг}.$$

3) Для знаходження зміни ентропії при сталому тиску використаємо попередній результат (7). В цьому випадку скористаємося рівнянням Майєра  $C_p - C_v = R$ , що визначає зв'язок між молярними теплоємностями при сталому тиску  $C_p$  і сталому об'ємі  $C_v$  і універсальною газовою сталою  $R$ .

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_v \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{M} C_v \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1} =$$



$$= \frac{m}{M} C_v \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{M} (C_v + R) \ln \frac{V_2}{V_1},$$

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_v \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{M} C_p \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

При ізобаричному процесі, про який йдеться в задачі,  $p = \text{const}$ , тоді перший доданок дорівнює нулю, а зміна ентропії становить

$$\begin{aligned} \Delta S_3 &= \frac{m}{M} C_p \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} \cdot \frac{i+2}{2} \cdot R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = \\ &= \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 7 \cdot 8,31}{28 \cdot 10^{-3} \cdot 2} \ln \frac{30}{10} = 11,4 \text{ Дж/кг}. \end{aligned}$$

Розмірності отриманих результатів

$$[\Delta S] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К})}{(\text{кг/моль})} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

**Відповідь:**  $\Delta S_1 = 4,26 \text{ Дж/кг}$ ;  $\Delta S_2 = 8,42 \text{ Дж/кг}$ ;  $\Delta S_3 = 11,4 \text{ Дж/кг}$ .

### Задача 8.2.14

*Знайти зміну  $\Delta S$  ентропії при нагріванні води масою  $m=100\text{г}$  від температури  $t_1=0^\circ\text{C}$  до температури  $t_2=100^\circ\text{C}$  і подальшому перетворенні води на пару тієї ж температури.*

| Дано:                   | Розв'язання                                                                                                                                                                                                                    |
|-------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $m=100\text{г}$         | Зміна ентропії відбувається як при нагріванні води ( $\Delta S_1$ ), так і при перетворенні її у пару ( $\Delta S_2$ ). Тому будемо шукати ці зміни окрема, а повну зміну ентропії знайдемо як суму відповідних змін ентропій. |
| $t_1=0^\circ\text{C}$   |                                                                                                                                                                                                                                |
| $t_2=100^\circ\text{C}$ |                                                                                                                                                                                                                                |
| $\Delta S = ?$          |                                                                                                                                                                                                                                |

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2. \quad (1)$$

Зміна ентропії виражається загальною формулою

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \quad (2)$$

Ентропія є функцією стану, тому вона не залежить від того, яким шляхом система переходить з одного стану в інший, а залежить тільки від початкового та кінцевого станів.

При нескінченно малій зміні температури  $dT$  тіла, що нагрівається, витрачається кількість теплоти

$$dQ_1 = mcdT, \quad (3)$$

де  $m$  – маса речовини,  $c$  – її питома теплоємність

Підставивши вираз (3) в (2), отримаємо формулу для обчислення зміни ентропії при нагріванні води

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ_1}{T} = \int_{T_1}^{T_2} mc \frac{dT}{T} = mc \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (4)$$

Перетворення води на пару відбувається при постійній температурі  $T_2$ , тому зміна ентропії в процесі пароутворення становить

$$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_2} \int_1^2 dQ_2 = \frac{Q_2}{T_2}, \quad (5)$$

де  $Q_2$  – кількість теплоти, яка передається при перетворенні нагрітої води на пару, що має таку ж температуру.

Кількість теплоти

$$Q_2 = \lambda m, \quad (6)$$

де  $\lambda$  – питома теплота пароутворення,  $m$  – маса речовини.

Підставивши (6) в формулу (5), отримуємо величину зміни ентропії в процесі пароутворення

$$\Delta S_2 = \frac{\lambda m}{T_2}. \quad (7)$$

Отже, повна зміна ентропії при нагріванні води та подальшому перетворенні на пару дорівнює

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda m}{T_1}. \quad (8)$$

Підставимо в (8)  $m = 100 \text{ г} = 0,1 \text{ кг}$ ;  $T_1 = t_1 + 273 = 0 + 273 = 273 \text{ К}$ ;  
 $T_2 = t_2 + 273 = 100 + 273 = 373 \text{ К}$ ; питому теплоємність води  $c = 4190 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ;  
 питому теплоту пароутворення води  $\lambda = 2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$ .

$$\Delta S = m \left( c \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda}{T_1} \right) = 0,1 \left( 4190 \cdot \ln \frac{373}{273} + \frac{2,26 \cdot 10^6}{273} \right) = 736,7 \text{ Дж/К}.$$

Перевірка розмірності:

$$[\Delta S_1] = \text{кг} \cdot \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}; \quad [\Delta S_2] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{кг}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

**Відповідь:**  $\Delta S = 736,7 \text{ Дж/К}$ .

### Задача 8.2.15

В циклі Карно різниця ентропій між двома адіабатами  $\Delta S = 4200 \text{ Дж/К}$ .  
 Різниця температур між ізотермами в цьому циклі  $\Delta T = 100 \text{ К}$ . Знайти роботу,  
 що здійснюється за цикл.

| Дано:                          | Розв'язання                                                                                                                        |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Delta S = 4200 \text{ Дж/К}$ | Робота $A$ , що здійснюється за цикл,                                                                                              |
| $\Delta T = 100 \text{ К}$     | $A = Q_1 - Q_2, \quad (1)$                                                                                                         |
| $A = ?$                        | де $Q_1$ – це кількість теплоти, яку отримала система від нагрівача, а $Q_2$ – це кількість теплоти, що була віддана холодильнику. |

Зміна ентропії при переході з однієї адіабати на другу дорівнює

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}, \quad (2)$$

де  $T_1$  – температура нагрівача,  $T_2$  – температура холодильника.

З виразу (2) випливає, що

$$Q_1 = \Delta S \cdot T_1 \quad \text{і} \quad Q_2 = \Delta S \cdot T_2. \quad (3)$$

Підставляючи величини кількостей теплоти (3) в формулу (1), можна отримати шукану роботу

$$A = \Delta S \cdot T_1 - \Delta S \cdot T_2 = \Delta S (T_1 - T_2) = \Delta S \cdot \Delta T = 4200 \cdot 100 = 4,2 \cdot 10^5 \text{ Дж} = 420 \text{ кДж}.$$

Перевірка розмірності

$$[A] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot \text{К} = \text{Дж}.$$

**Відповідь:**  $A = 420 \text{ кДж}.$

### 8.3. Задачі для самостійної роботи

**8.3.1.** Тіло нагрілося на 5 К, поглинувши 10 кДж теплоти. Чому дорівнює його молярна теплоємність?

**Відповідь:**  $C = 2$  кДж/К.

**8.3.2.** На скільки збільшилася внутрішня енергія 1 кг води під час нагрівання її на 2 К?

**Відповідь:**  $\Delta U = 8400$  Дж.

**8.3.3.** На скільки збільшиться внутрішня енергія 1,5 моль гелію при нагріванні на 40 К?

**Відповідь:**  $\Delta U = 747,9$  Дж.

**8.3.4.** Яку роботу здійснив гелій масою 40 г при його ізобарному нагріванні на 20 К?

**Відповідь:**  $A = 1,66$  кДж.

**8.3.5.** У скільки разів зміниться внутрішня енергія ідеального газу, якщо його тиск та абсолютна температура збільшиться у 2 рази?

**Відповідь:**  $U_2/U_1 = 2$ .

**8.3.6.** Об'єм повітря  $19 \text{ м}^3$  має температуру  $50^\circ\text{C}$ . Яку роботу здійснить повітря, розширюючись ізобарно при тиску  $200 \text{ кПа}$ , якщо його нагріти на  $17^\circ\text{C}$ ?

**Відповідь:**  $A = 0,2$  МДж.

**8.3.7.** Кисень масою 0,3 кг при температурі 320 К охолодили ізохорно так, що його тиск зменшився в 3 рази. Потім газ ізобарно розширили до початкової температури. Яку роботу здійснив газ?

**Відповідь:**  $A = 16620$  Дж.

**8.3.8.** У посудині об'ємом 2 л знаходиться гелій при тиску  $100 \text{ кПа}$  та температурі 200 К, а в посудині об'ємом 5 л – неон при тиску  $200 \text{ кПа}$  та температурі 500 К. Визначити температуру газу в посудинах після з'єднання їх трубкою.

**Відповідь:**  $T = 400 \text{ К}$ .

**8.3.9.** При адіабатному розширенні внутрішня енергія газу зменшилася на 120 Дж. Яку роботу здійснив газ?

**Відповідь:**  $A = 120 \text{ Дж}$ .

**8.3.10.** Двигун працює за циклом Карно. У скільки разів зміниться його к.к.д., якщо за постійної температури холодильника  $17^\circ\text{С}$  температуру нагрівача підвищити зі  $127^\circ\text{С}$  до  $447^\circ\text{С}$ ?

**Відповідь:**  $\eta_2/\eta_1 = 2,17$

**8.3.11.** Ідеальний тепловий двигун здійснює за цикл роботу 30 кДж. Якщо температура нагрівача  $127^\circ\text{С}$ , а температура холодильника  $27^\circ\text{С}$ , то скільки теплоти віддано за один цикл холодильнику?

**Відповідь:**  $Q = 90 \text{ кДж}$ .

**8.3.12.** Маса  $m = 10 \text{ г}$  кисню нагрівається від температури  $50^\circ\text{С}$  до температури  $150^\circ\text{С}$ . Знайти зміну  $\Delta S$  ентропії, якщо нагрівання відбувається: а) ізохорично; б) ізобарично.

**Відповідь:**  $\Delta S = 1,75 \text{ Дж/К}$ ;  $\Delta S = 2,45 \text{ Дж/К}$ .

**8.3.13.** Об'єм  $V_1 = 1 \text{ м}^3$  повітря, що знаходиться при температурі  $t_1 = 0^\circ\text{С}$  та тиску  $p_1 = 98 \text{ кПа}$ , ізотермічно розширюється від об'єму  $V_1$  до об'єму  $V_2 = 2 V_1$ . Знайти зміну  $\Delta S$  ентропії у цьому процесі.

**Відповідь:**  $\Delta S = 500 \text{ Дж/К}$ .

**8.3.14.** Знайти зміну  $\Delta S$  ентропії при переході маси  $m = 8 \text{ г}$  кисню від об'єму  $V_1 = 10 \text{ л}$  при температурі  $t_1 = 80^\circ\text{С}$  до об'єму  $V_2 = 40 \text{ л}$  за температури  $t_2 = 300^\circ\text{С}$ .

**Відповідь:**  $\Delta S = 5,4 \text{ Дж/К}$ .

**8.3.15.** Кусок льоду масою  $m = 200 \text{ г}$ , взятий при температурі  $t_1 = -10^\circ\text{С}$ , був нагрітий до температури  $t_2 = 0^\circ\text{С}$  і розплавлений. Визначити зміну ентропії.

**Відповідь:**  $\Delta S = 262 \text{ Дж/К}$ .

## 9. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

### 9.1. Теоретичні відомості

#### 9.1.1. Електричний заряд і його властивості

**Електростатика** – це розділ фізики, в якому розглядаються взаємодії та властивості нерухомих електричних зарядів.

**Електричний заряд**  $q$  – скалярна фізична величина, яка є кількісною мірою властивості фізичних тіл чи частинок речовини бути джерелом електромагнітних полів і вступати в електромагнітну взаємодію.

Одиницею заряду є

$$[q] = \text{Кулон} = \text{Кл.}$$

**Фундаментальні властивості** електричного заряду:

1. Існує два види електричних зарядів: **позитивні** (напр., протон) і **негативні** (напр., електрон). Заряди одного знаку відштовхуються, різного знаку – притягаються.

2. **Закон збереження** електричного заряду: в ізольованій (замкнутій) фізичній системі алгебраїчна сума зарядів залишається незмінною при будь-яких процесах, які відбуваються всередині системи.

3. Заряд – скалярна величина, яка не залежить від вибору системи відліку.

4. Заряд є дискретною величиною, яка є кратною елементарному електричному заряду  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Це відповідає заряду найменшої позитивно зарядженої частинки **протона**, а з протилежним знаком – негативно зарядженої частинки **електрона**.

### 9.1.2. Електричне поле. Закон Кулона. Напруженість електричного поля

Фундаментальним законом електростатики є **закон Кулона**: сила, що діє на точковий заряд  $q_1$  з боку точкового заряду  $q_2$ , відстань між якими у вакуумі становить  $r$  (рис. 9.1), дорівнює

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{e}_r = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r, \quad (9.1)$$

де  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – електрична стала;  $k$  – коефіцієнт пропорційності  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$  Н·м<sup>2</sup>·Кл<sup>-2</sup>;  $\vec{e}_r$  – одиничний вектор, що задає положення другого заряду відносно першого.

У разі середовища, заповненого нескінченною однорідною ізотропною діелектричною речовиною, до знаменника формули закону Кулона додається діелектрична проникність середовища  $\epsilon$ . Тоді коефіцієнт

пропорційності набуває вигляду  $k' = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0}$ .

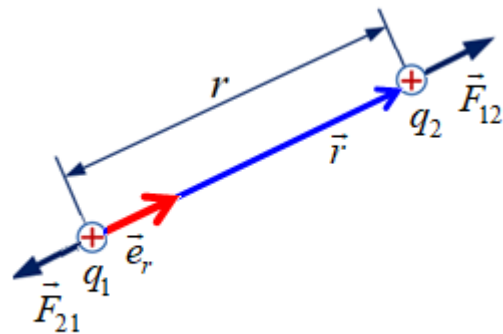


Рисунок 9.1

**Точковим** називається заряд, зосереджений на тілі, розмірами якого можна знехтувати в порівнянні з відстанню до інших тіл або до точки поля, що розглядається, тобто це матеріальна точка, що має електричний заряд.

Сили взаємодії однойменних зарядів є силами **відштовхування**, різнойменних – силами **притягання**.

**Електричне поле** – особливий вид матерії, який оточує кожен електричний заряд і здійснює силовий вплив на всі інші заряди, притягуючи або відштовхуючи їх.



**Напруженість**  $\vec{E}$  є силовою характеристикою електричного поля. Це векторна величина, яка чисельно дорівнює силі  $\vec{F}$ , що діє на одиничний позитивний заряд  $q$  та збігається з нею за напрямком

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (9.2)$$

Напруженість електричного поля вимірюється в

$$[E] = \text{Вольт/метр} = \text{В/м}.$$

Використовуючи визначення напруженості електричного поля можна знайти силу, що діє на будь-який заряд, що знаходиться в електричному полі з напруженістю  $\vec{E}$ .

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}. \quad (9.3)$$

**Напруженість поля точкового заряду** у вакуумі на відстані  $r$  від заряду:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{e}_r. \quad (9.4)$$

**Принцип суперпозиції** для силової характеристики поля ґає у тому, що вектор напруженості електричного поля, створеного системою точкових зарядів в даній точці, дорівнює векторній сумі напруженостей полів, які створюються у цій точці кожним із зарядів окремо

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = k \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \vec{e}_r. \quad (9.5)$$

Електричне поле графічно зображують за допомогою **силових ліній** (ліній напруженості, ліній вектора  $\vec{E}$ ), тобто таких ліній, дотичні до яких у кожній точці збігаються за напрямком з вектором напруженості поля в тій же точці (рис. 9.2). Вони мають такі властивості:

1. Починаються на позитивних та закінчуються на негативних зарядах;
2. Вони не перетинаються між собою;
3. Напруженість поля прямо пропорційна кількості силових ліній, що проходять через одиницю площі поверхні (густини ліній);
4. Кількість проведених ліній пропорційна величині заряду.

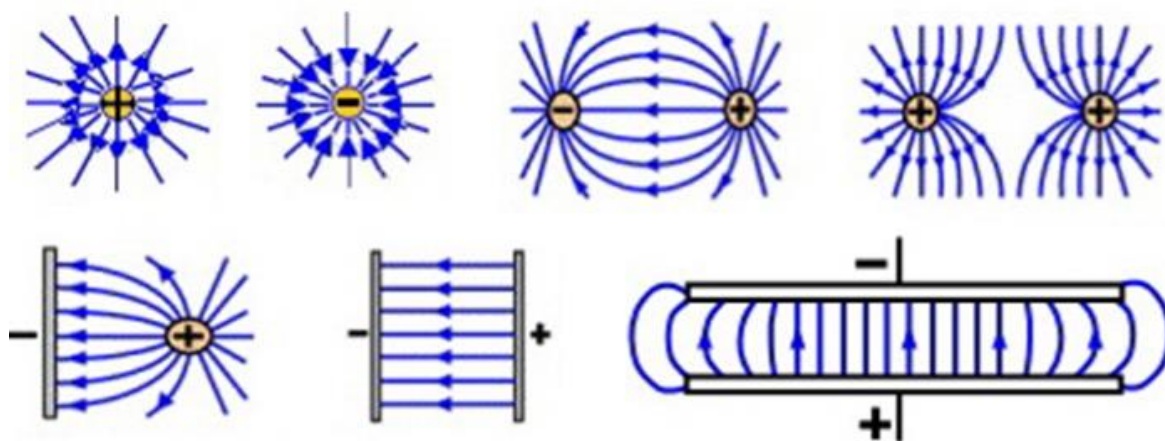


Рисунок 9.2

### 9.1.3. Розподіл зарядів. Потік вектора $\vec{E}$

У випадку, коли доводиться мати справу з великою кількістю електричних зарядів, які розподілені вздовж деякої кривої, по поверхні чи в просторі, для спрощення розрахунків вводять *лінійну* ( $\lambda$ ), *поверхневу* ( $\sigma$ ) або *об'ємну* ( $\rho$ ) *густини* зарядів:

$$\lambda = \frac{dq}{dl}; \quad \sigma = \frac{dq}{dS}; \quad \rho = \frac{dq}{dV}, \quad (9.6)$$

де  $dq$  – заряд, розташований на довжині  $dl$ , на поверхні  $dS$  або в об'ємі  $dV$ .

Густини зарядів вимірюються в

$$[\lambda] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}}; \quad [\sigma] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}; \quad [\rho] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}.$$

**Потоком вектора напруженості** електричного поля через елементарну площадку  $dS$  називається добуток модуля вектора напруженості на площу елементарної поверхні та на косинус кута між нормаллю до поверхні та напрямком вектора  $\vec{E}$  (рис. 9.3).

$$d\Phi = E \cdot dS \cdot \cos \alpha = (\vec{E}, d\vec{S}) = \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad (9.7)$$

де  $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ , а  $\vec{n}$  – одинична нормаль до площинки  $dS$ .

**Потік вектора  $\vec{E}$**  – це скалярна величина, як є скалярним добутком вектора  $\vec{E}$  і вектора  $d\vec{S}$ . Якщо кут  $\alpha$  гострий, то потік вважається **додатним**, якщо тупий – то **від’ємним**.

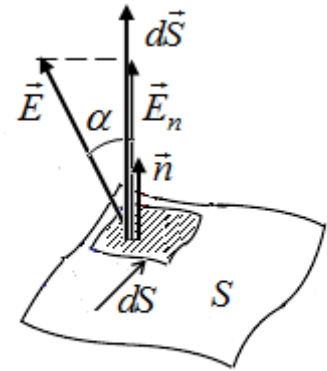


Рисунок 9.3

**Повний електричний потік** через будь-яку поверхню  $\vec{S}$  – це поверхневий інтеграл

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E \cdot dS \cdot \cos \alpha. \quad (9.8)$$

Одиницею потоку є

$$[\Phi] = \text{Вольт} \cdot \text{метр} = \text{В} \cdot \text{м}.$$

#### 9.1.4. Теорема Гаусса та її застосування

**Теорема Гаусса:** потік вектора напруженості електричного поля у вакуумі через довільну замкнену поверхню дорівнює відношенню алгебраїчної суми зарядів, оточених цією поверхнею, до електричної сталої:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i. \quad (9.9)$$

Теорема Гаусса дозволяє знайти напруженість симетричних електричних полів, створених однорідно розподіленим зарядом.

##### 1. Поле однорідно зарядженої нескінченно протяжної площини (рис. 9.4)

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad (9.10)$$

де  $\sigma$  – поверхнева густина заряду.

2. Поле двох паралельних нескінченно протяжних площин, рівномірно заряджених з поверхневою густиною зарядів  $+\sigma$  та  $-\sigma$  (рис. 9.5).

В області між площинами

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (9.11)$$

а ліворуч і праворуч від площин  $E = 0$ .

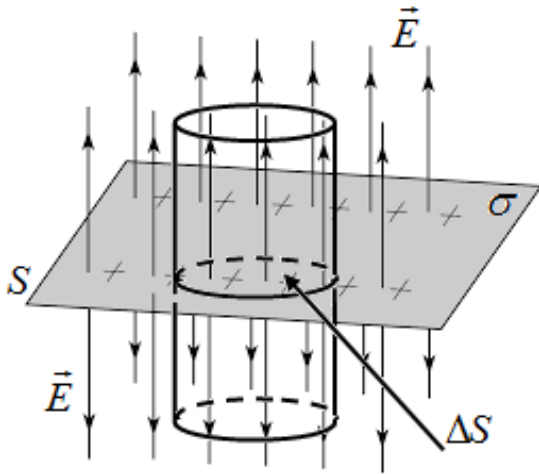


Рисунок 9.4

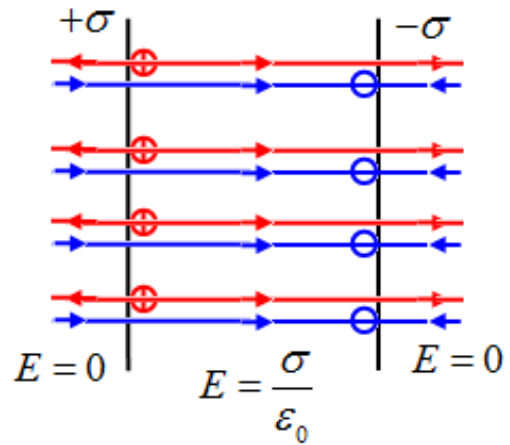


Рисунок 9.5

**3. Поле нескінченно протяжної нитки** (циліндру) з лінійною густиною електричного заряду  $\lambda$

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\lambda}{r} = k \frac{2\lambda}{r}, \quad (9.12)$$

де  $r$  – відстань точки від осі циліндру (нитки)

**4. Поле рівномірно зарядженої сфери** радіуса  $a$  з зарядом  $Q$ , що розподілений по поверхні, або з поверхневою густиною електричного заряду  $\sigma$  (рис. 9.7)

- в точках, розташованих на відстані  $r > a$

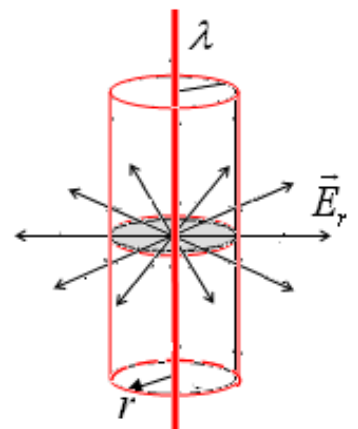


Рисунок 9.6

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left( \frac{a}{r} \right)^2, \quad (9.13)$$

– всередині сфери  $r < a$

$$E = 0. \quad (9.14)$$

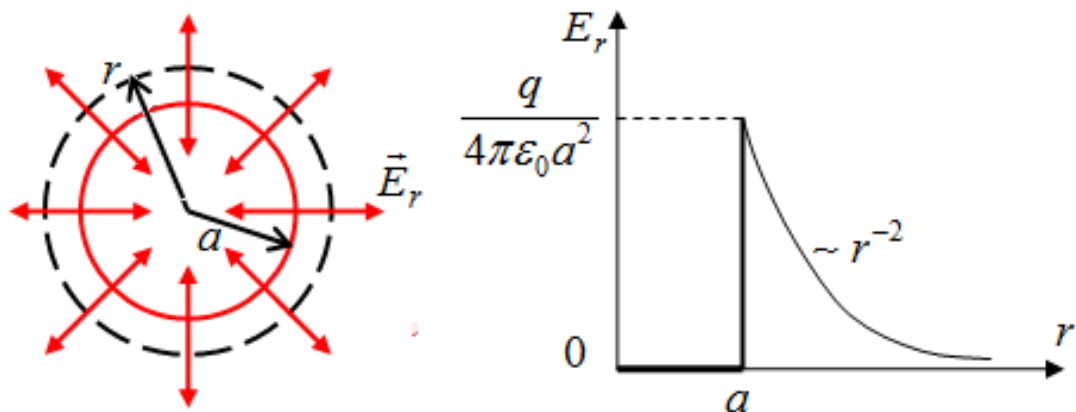


Рисунок 9.7

5. *Поле об'ємно зарядженої кулі* радіуса  $a$  із зарядом  $q$ , розподіленому по об'єму, або з об'ємною густиною електричного заряду  $\rho$  (рис. 9.8):

- в точках, розташованих на відстані  $r > a$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2}, \quad (9.15)$$

- в точках, розташованих всередині кулі  $r < a$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R^3} \cdot r, \quad (9.16)$$

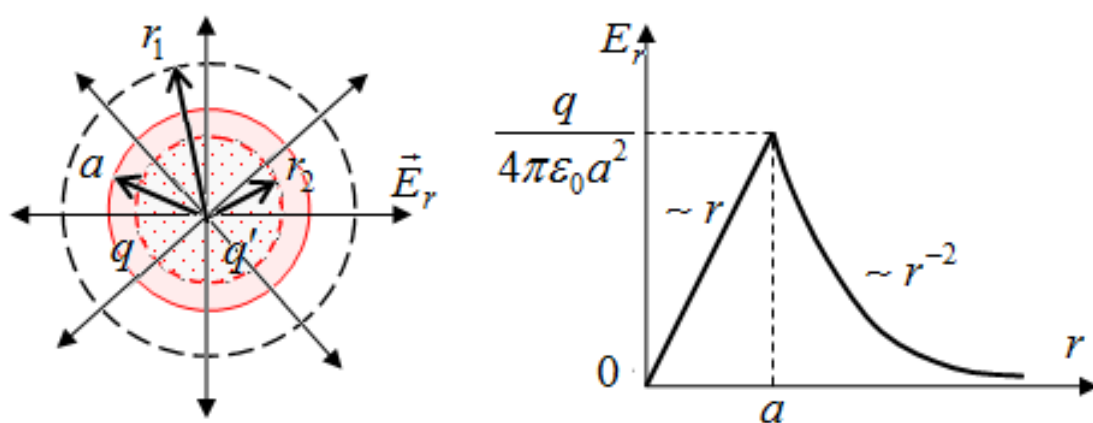


Рисунок 9.8

### 8.1.5. Потенціал. Зв'язок потенціалу і напруженості поля. Робота електричного поля

**Потенціальна енергія**  $PE$  взаємодії двох точкових зарядів, які віддалені один від одного на відстань  $r$ , за умови, що потенціальна енергія на нескінченності  $PE_{\infty} = 0$ :

$$PE = k \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (9.17)$$

**Потенціал**  $\varphi$  є енергетичною характеристикою електричного поля. Це скалярна величина, що чисельно дорівнює потенціальній енергії, яку має одиничний позитивний заряд в електричному полі:

$$\varphi = \frac{PE}{q}. \quad (9.18)$$

Одиницею потенціалу є

$$[\varphi] = \text{Вольт} = \text{В}.$$

Потенціал поля **точкового заряду** у вакуумі на відстані  $r$  від заряду

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} = k \frac{q}{r}. \quad (9.19)$$

**Принцип суперпозиції:** потенціал електричного поля, створеного системою точкових зарядів у даній точці, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, які створюються у цій точці кожним із зарядів окремо

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i. \quad (9.20)$$

Напруженість і потенціал електричного поля зв'язані відношенням:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (9.21)$$

де  $\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$  – **градієнт потенціалу**.

Зазвичай в математиці градієнт – це вектор, що вказує напрямок найшвидшого зростання деякої скалярної величини. У формулі (9.21) знак « – » вказує на те, що вектор  $\vec{E}$  спрямований в бік найшвидшого зменшення потенціалу.

Для однорідного поля (одновимірний випадок):

$$E = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{\Delta x} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta x}, \quad (9.22)$$

де  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  – потенціали двох точок на одній силовій лінії;  $\Delta x$  – відстань між точками, яка виміряна уздовж силової лінії;  $\Delta \varphi$  – різниця потенціалів.

Робота, яку виконують електростатичні сили при переміщенні заряду  $q$  із точки 1 з потенціалом  $\varphi_1$  в точку 2 з потенціалом  $\varphi_2$

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\Delta\varphi = qU. \quad (9.23)$$

**Напруга**  $U = \Delta\varphi$  – це фізична величина, яка чисельно дорівнює роботі електростатичного поля при переміщенні одиничного позитивного заряду з однієї точки в іншу.

**Еквіпотенціальною поверхнею** називається поверхня, в кожній точці якої потенціал має одну й ту ж величину, тобто  $\varphi = const$ . Еквіпотенціальні поверхні застосовуються для графічного зображення електростатичного поля і разом із силовими лініями вони дають повну картину силових та енергетичних характеристик поля. Силові лінії та еквіпотенціальні поверхні у точці перетину взаємно перпендикулярні (рис. 9.9). Робота з переміщення заряду по еквіпотенціальній поверхні дорівнює нулю.

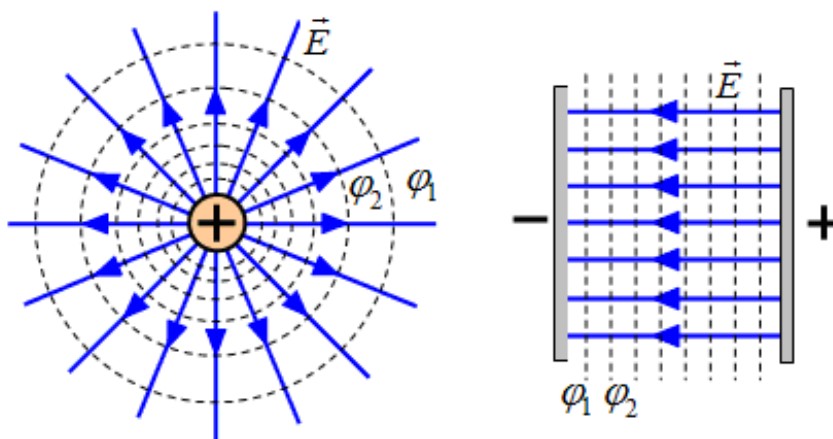


Рисунок 9.9

### 8.1.6. Електричний диполь. Поле диполя

**Електричним диполем** (двополюсником) називаються два різноіменні заряди (полюси) однакової величини ( $q$  і  $-q$ ), що розміщені на малій відстані  $l$  один від одного (рис. 9.10).

**Електричним дипольним моментом** називається векторна величина

$$\vec{p} = q \cdot \vec{l}, \quad (9.24)$$

де  $q$  – величина заряду диполя, а вектор  $\vec{l}$ , проведений від негативного до позитивного полюса, називається **плечем** диполя.

**Потенціал** поля диполя в точці спостереження  $P$  (рис. 9. 10) дорівнює

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_+ + \varphi_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \cdot \left( \frac{r_- - r_+}{r_+ \cdot r_-} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot p \cdot \cos \vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \cdot \cos \vartheta}{r^2}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

**Напруженість** електричного поля диполя

$$\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\vartheta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p \cdot \cos \vartheta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \cdot \sin \vartheta}{r^3} \vec{e}_\vartheta, \quad (9.26)$$

а її величина

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\vartheta^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3} \cdot \sqrt{1 + 3\cos^2 \vartheta}. \quad (9.27)$$

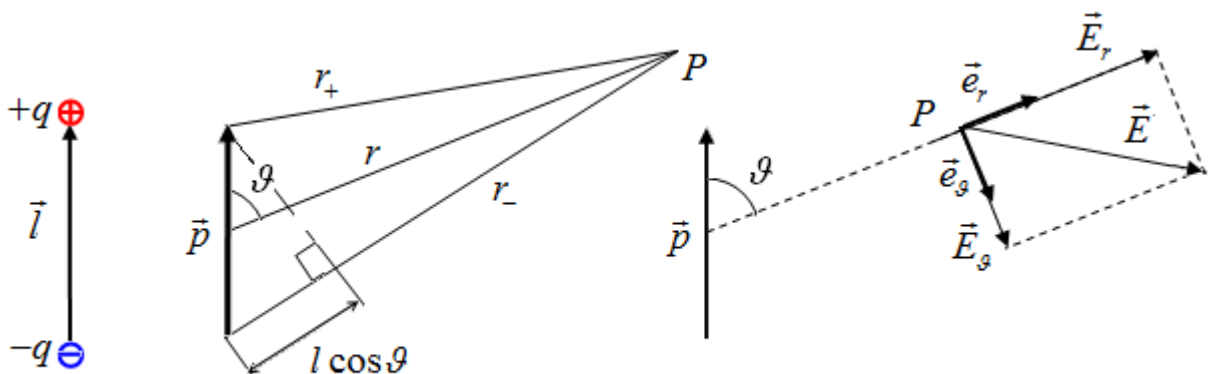


Рисунок 9.10



В однорідному електричному полі на диполь діє момент сил, який намагається зорієнтувати диполь так, аби напрямок дипольного моменту збігався із напрямком поля (рис. 9.11, *а*).

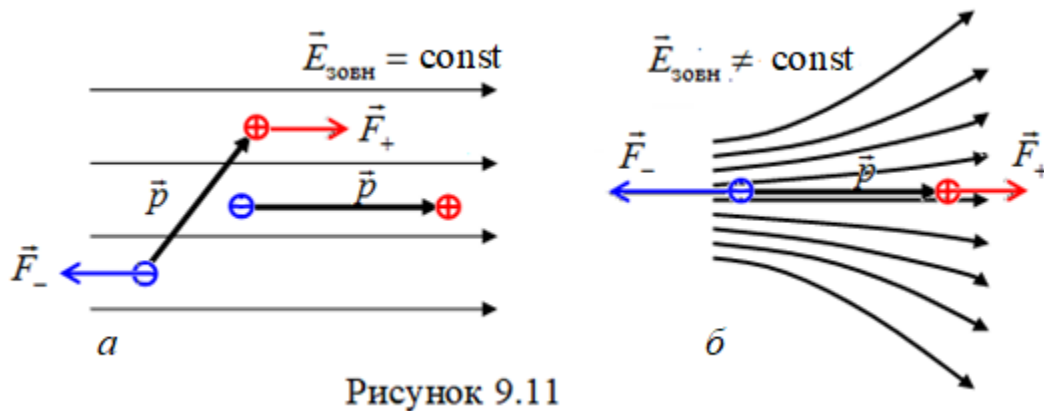


Рисунок 9.11

В неоднорідному полі (рис. 9.11, *б*) при орієнтації по полю  $\vartheta < 90^\circ$  диполь втягується в область сильнішого поля, а при протилежній орієнтації  $\vartheta > 90^\circ$  – виштовхується в бік слабшого поля. Якщо у неоднорідне поле внести диполь у довільній орієнтації, то він почне одночасно повертатися і рухатися у той чи інший бік, але врешті зорієнтується по полю і рухатиметься в бік зростання напруженості.

Диполь у зовнішньому полі  $\vec{E}_{\text{зовн}}$  має потенціальну енергію

$$PE = -(\vec{p}, \vec{E}_{\text{зовн}}) = -pE_{\text{зовн}} \cos \vartheta. \quad (9.28)$$

### 9.1.7. Провідник в електричному полі

**Провідниками** називаються речовини, що мають у своєму складі багато вільних заряджених частинок, які здатні рухатися по всьому об'єму тіла під дією електричного поля. Заряди таких частинок називають **вільними**. Провідниками є метали, деякі хімічні сполуки, водні розчини солей, кислот та лугів, розплави солей, іонізовані гази. У металах носіями вільних зарядів є вільні електрони, які називаються **електронами провідності**.

Якщо внести незаряджений металевий провідник в однорідне електричне поле, то під дією поля у провіднику виникає спрямований рух вільних електронів у напрямку протилежному напрямку вектора напруженості цього поля (рис. 9.12). Зрештою поле позитивних частинок і поле електронів провідності скомпенсує зовнішнє електростатичне поле. Таким чином, усередині провідника, що знаходиться у зовнішньому

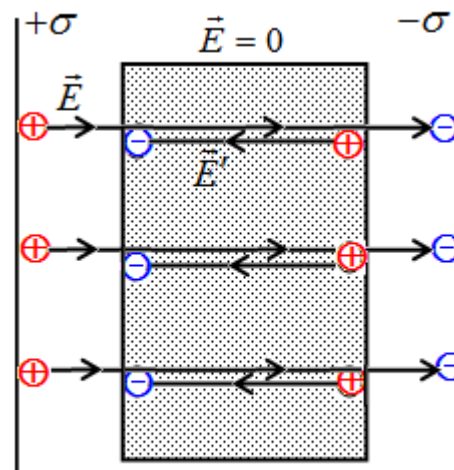


Рисунок 9.12

електростатичному полі, у будь-якій його точці, напруженість електричного поля дорівнюватиме нулю.

### 9.1.8. Електроємність. Конденсатори

Якщо надати провіднику заряд, на його поверхні з'явиться деякий потенціал  $\varphi$ . Залежно від форми та розмірів провідника потенціал може бути різним, але він буде пропорційний заряду. Коефіцієнт пропорційності називається **електричною ємністю** (електроємністю)

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (9.29)$$

**Електроємністю** називається фізична величина, що дорівнює заряду, який потрібно надати провіднику, щоб змінити його потенціал на одиницю.

$$[C] = \text{Фарад} = \text{Ф}.$$

**Конденсатор** – пристрій, який має здатність накопичувати електричний заряд і який складається з двох провідників, розділених діелектриком. **Електроємність конденсатора** – фізична величина, яка чисельно дорівнює відношенню величини заряду  $q$ , накопиченого у конденсаторі, до різниці потенціалів між обкладками  $\Delta\varphi$  (напрузі на конденсаторі  $U$ )

$$C = \frac{q}{(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{U}. \quad (9.30)$$

Ємність конденсатора залежить від розмірів і форми провідника, а також від діелектричних властивостей матеріалу всередині конденсатора.

Для того щоб на ємність конденсатора не впливали навколишні тіла, провідникам надають певної форми. Тоді електричне поле, яке створюється зарядами, зосереджується у проміжку між обкладками конденсатора. Виходячи з цього конденсатори бувають плоскі, циліндричні та сферичні (рис. 9.13).

**Ємність плоского конденсатора** (рис.9.13, а):

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \quad (9.31)$$

де  $\varepsilon$  – діелектрична проникність середовища,  $\varepsilon_0$  – електрична стала;  $S$  – площа пластини конденсатора;  $d$  – відстань між пластинами.

**Ємність циліндричного конденсатора** (рис.9.13, б):

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 L}{\ln(R/r)}, \quad (9.32)$$

де  $L$  – довжина коаксіальних циліндрів,  $R$  і  $r$  – їхні радіуси.

**Ємність сферичного конденсатора** (рис.9.13, в):

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{rR}{R-r}, \quad (9.33)$$

де  $R$  і  $r$  – радіуси концентричних провідних сфер.

З врахуванням співвідношення (9.30) можна записати енергію зарядженого конденсатора, яку слід розглядати як потенціальну енергію, що запасена у конденсаторі, і яка локалізована в просторі між його пластинами.

$$W_{\text{ел}} = PE = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}. \quad (9.34)$$

Цю енергію можна виразити з урахуванням (9.30) і (9.31) у вигляді

$$W_{\text{ел}} = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SE^2 d^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V, \quad (9.35)$$

де  $V = Sd$  – об’єм простору між обкладками конденсатора, що зайнятий електричним полем.

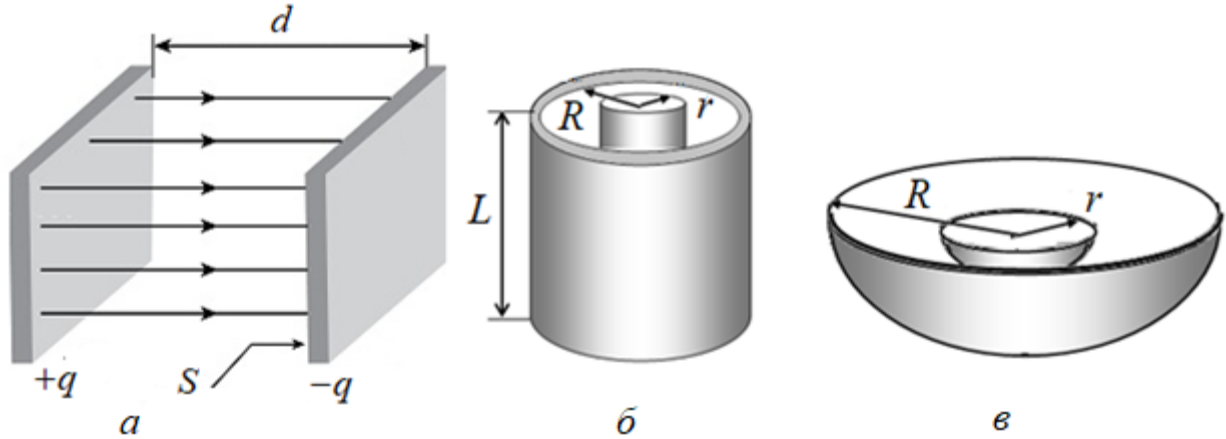


Рисунок 9.13

Фізична величина, яка є електричною потенціальною енергією одиниці об’єму простору, в якому створено електричне поле,

$$w_{\text{ел}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}, \quad (9.36)$$

називається *об’ємною густиною електричної енергії*.

### 9.1.9. Послідовне та паралельне з’єднання конденсаторів

З метою збільшення ємності, а також для варіювання її можливих значень, конденсатори з’єднують у батареї.

Ємність системи  $N$  конденсаторів, які з’єднані паралельно (рис. 9.14, а):

$$C = \sum_{i=1}^N C_i. \quad (9.37)$$

Ємність системи  $N$  конденсаторів, які з’єднані послідовно (рис. 9.14, б):

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}. \quad (9.38)$$

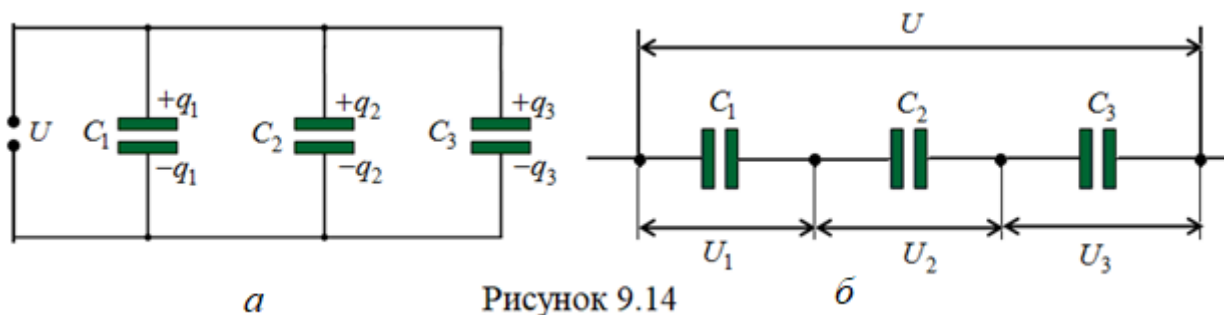


Рисунок 9.14

### 9.1.10. Діелектрики. Типи діелектриків. Діелектрики в електричному полі

**Діелектрики (ізолятори)** – речовини, що практично не проводять електричного струму (у  $10^{15}$ - $10^{25}$  разів проводять гірше провідників). Це означає, що в діелектриках відсутні електричні заряди, які здатні переміщатися на значні відстані, створюючи струм. При внесенні навіть нейтрального діелектрика в зовнішнє електричне поле виявляються суттєві зміни як у полі, і у самому діелектрику.

Діелектрики поділяються на **полярні** (рис. 9.15, а) та **неполярні** (рис. 9.15, б) в залежності від наявності або відсутності дипольного моменту в їх молекулах. Полярні діелектрики мають молекули, в яких центри позитивних і негативних зарядів не збігаються, а в неполярних діелектриків ці центри збігаються. Молекули полярних діелектриків мають постійні дипольні моменти і в зовнішньому електричному полі вони поведуться як маленькі електричні диполі орієнтуючись за полем (рис. 9.15, б). Молекули неполярних діелектриків не мають постійного дипольного моменту. Але в електричному полі їх молекули можуть деформуватися і в них виникають (індукуються) дипольні моменти, які мають орієнтацію у відповідності до поля (рис. 9.15, з).

**Іонні кристали** (напр., NaCl) – дві підрешітки, вставлені одна в одну, у вузлах яких розташовані заряджені іони (рис. 9.15, з). Під дією зовнішнього поля позитивна підрешітка зміщується у напрямку поля, а негативна – проти поля. Це так звана **іонна поляризація**.

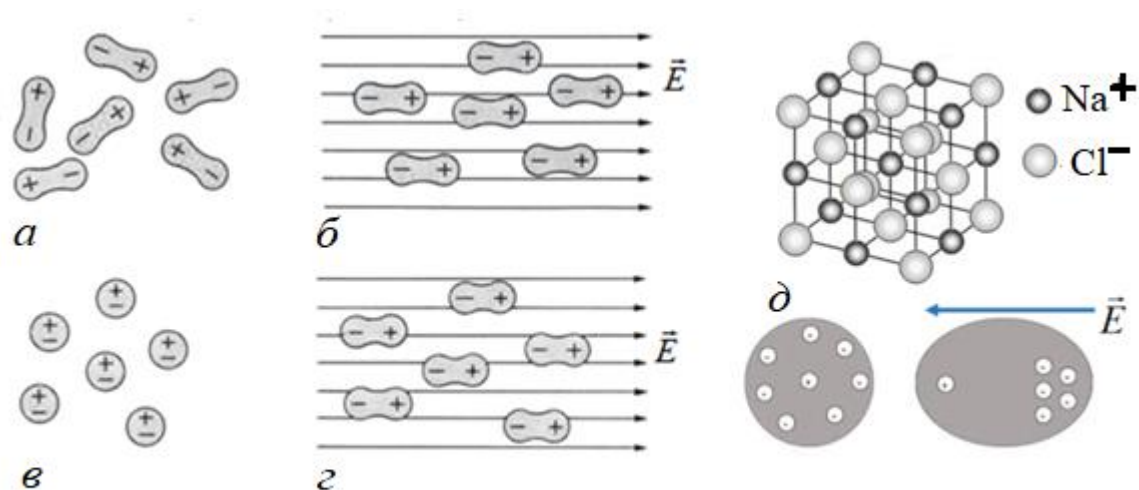


Рисунок 9.15

Таблиця 9.1 – Типи молекул діелектриків

| Тип молекул            | <i>Полярні молекули</i>                                             | <i>Неполярні молекули</i>                                                                                                               |
|------------------------|---------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | Центри позитивних і негативних зарядів зміщені відносно один одного | Центри позитивних і негативних зарядів збігаються                                                                                       |
| Дипольний момент       | Має власний дипольний момент (рис. 9.15, а)                         | Немає власного дипольного моменту (рис. 9.15, в)                                                                                        |
| Приклади               | HCl, H <sub>2</sub> O тощо                                          | H <sub>2</sub> , O <sub>2</sub> тощо                                                                                                    |
| Вплив зовнішнього поля | Поле орієнтує диполь вздовж $\vec{E}$ поля (рис.9.15, б)            | Поле зміщує центри позитивних і негативних зарядів в протилежні сторони, молекула набуває індукованого дипольного моменту (рис.9.15, г) |
| Тип поляризації        | Орієнтаційна                                                        | Електронна                                                                                                                              |
| Дипольний тип          | Жорсткий диполь                                                     | Пружний диполь                                                                                                                          |

### 9.1.11. Поляризація. Поляризованість. Діелектрична проникність

**Поляризацією** діелектрика називається перехід його в такий стан, у якому результуючий дипольний момент діелектрика стає відмінним від нуля. Внаслідок поляризації на поверхні і в об'ємі діелектрика з'являються некомпенсовані заряди, які називають **поляризаційними** або **зв'язаними**. Заряди, які не входять до складу молекул діелектрика, називаються **сторонніми**. В результаті поле  $\vec{E}$  в діелектрику є сумою поля  $\vec{E}_0$  сторонніх зарядів і поля  $\vec{E}'$  зв'язаних зарядів.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (9.39)$$

**Вектор поляризації** або **поляризованість** – це векторна величина, яка визначається як

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_i = n \cdot \langle \vec{p} \rangle. \quad (9.40)$$

де  $\Delta V$  – фізично нескінченно малий об'єм діелектрика в околі точки, де визначають поляризацію;  $\vec{p}$  – електричні дипольні моменти окремих молекул у даному об'ємі;  $n$  – концентрація молекул;  $\langle \vec{p} \rangle$  – середній дипольний момент однієї молекули.

Одиницею поляризації є

$$[P] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

Для більшості ізотропних діелектриків зв'язок між поляризованістю і напруженістю поля лінійний

$$\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}, \quad (9.41)$$

де  $\kappa$  – **діелектрична сприйнятливість** – безрозмірна додатна величина, що характеризує властивості самого діелектрика. Чисельні значення діелектричної сприйнятливості більшості діелектриків становлять порядку кількох одиниць чи десятків.

**Теорема Гаусса для вектора  $\vec{P}$** : потік вектора  $\vec{P}$  крізь довільну замкнуту поверхню дорівнює взятому зі зворотним знаком надмірному *зв'язаному заряду*  $q'$  діелектрика в об'ємі, що охоплюється цією поверхнею.

$$\oint \vec{P} d\vec{S} = -q', \quad (9.42)$$

Поле вектора  $\vec{P}$  залежить від усіх зарядів, як зв'язаних, так і сторонніх. Зв'язані заряди визначають лише потік вектора через замкнуту поверхню, а не саме поле.

**Теорема Гаусса для вектора  $\vec{D}$** : потік вектора  $\vec{D}$  через довільну замкнуту поверхню дорівнює алгебраїчній сумі *сторонніх* зарядів, що охоплюються даною поверхнею.

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q, \quad (9.43)$$

де  $\vec{D}$  – допоміжний вектор, що не має будь-якого глибокого фізичного сенсу, який називають *електричним зміщенням* або *електричною індукцією*.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (9.44)$$

Для ізотропних діелектриків поляризованість  $\vec{P} = \kappa \varepsilon_0 \vec{E}$ , отже,

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \kappa \varepsilon_0 \vec{E} = (\kappa + 1) \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (9.45)$$

Безрозмірна величина

$$\varepsilon = \kappa + 1 \quad (9.46)$$

називається *діелектричною проникністю* речовини, яка є основною характеристикою діелектрика. Вона показує, у скільки разів в діелектричному середовищі зменшується сила взаємодії між зарядами, тобто, наскільки діелектрик послаблює поле.

Для всіх діелектриків  $\varepsilon > 1$ , для вакууму  $\varepsilon = 1$ . Значення діелектричної проникності залежать від природи діелектрика:  $\varepsilon \sim 1$  для газів,  $\varepsilon$  – близько кількох тисяч одиниць для кераміки,  $\varepsilon = 81$  – для дистильованої води.



## 9.2. Приклади розв'язання задач

### Задача 9.2.1

Знайти силу електричної взаємодії між електроном і протоном в атомі водню, якщо вони віддалені на відстань  $r = 5,3 \cdot 10^{-11}$  м.

| Дано:                           | Розв'язання                                                                                                       |
|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $r = 5,3 \cdot 10^{-11}$ м      | Електрична сила взаємодії між двома зарядженими частинками (електроном і протоном) визначається за законом Кулона |
| $e = \pm 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл |                                                                                                                   |
| $F = ?$                         |                                                                                                                   |

Величина цієї сили становить

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}.$$

Сила кулонівської взаємодії між позитивним протоном і негативним електроном є силою притягання.

Враховуючи, що заряди електрона і протона за величиною дорівнюють елементарному заряду  $q_1 = q_2 = e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, відстань між ними  $r = 5,3 \cdot 10^{-11}$

м, а електростатична стала становить  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$  Н·м<sup>2</sup>/Кл<sup>2</sup>, шукана сила притягання є

$$F = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(5,3 \cdot 10^{-11})^2} = 8,2 \cdot 10^{-8} \text{ Н} = 82 \text{ нН}.$$

Розмірність результату

$$[F] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2} \cdot \frac{\text{Кл}^2}{\text{м}^2} = \text{Н}.$$

**Відповідь:**  $F = 82$  нН.

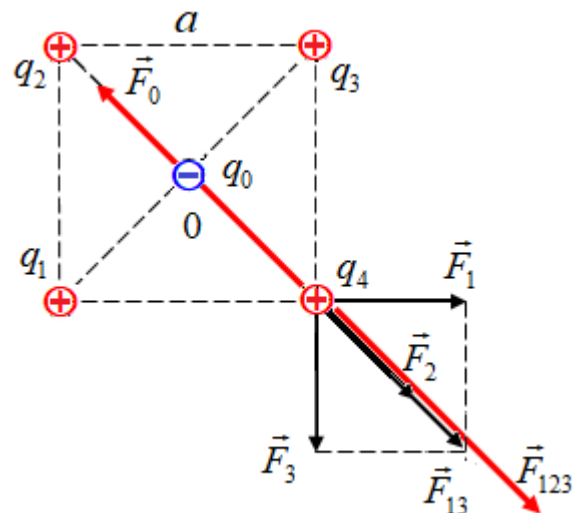
### Задача 9.2.2

У вершинах квадрата зі стороною  $a$  знаходяться однакові позитивні заряди  $q = 1$  мкКл. Який негативний заряд  $q_0$  треба помістити в центр квадрата для того, щоб уся система знаходилася у рівновазі?

| Дано:        | Розв'язання                                                  |
|--------------|--------------------------------------------------------------|
| $q = 1$ мкКл | Система буде знаходитися у рівновазі, якщо рівнодійна        |
| $q_0 = ?$    | усіх сил, що діють на кожен із зарядів буде дорівнювати нулю |

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_0 = 0.$$

Це означає, що рівнодійна сил відштовхування між позитивними зарядами  $\vec{F}_{123}$  повинна врівноважитися силою притягання  $\vec{F}_0$  до негативного заряду, розташованого у центрі квадрата  $O$ . Кожна з сил взаємодії між зарядами визначається згідно із законом Кулона. Усі заряди знаходяться в однаковому стані, тому розглянемо ті сили, які діють на заряд  $q_4$ .



Якщо  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$ , а сторона квадрата  $a$ , то сили відштовхування заряду  $q_4$  від зарядів  $q_1$  і  $q_3$  є однаковими за величиною і направлені вправо та донизу, відповідно (див. рис.).

$$F_1 = F_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2}.$$

Сила відштовхування заряду  $q_4$  від заряду  $q_2$  направлена вздовж діагоналі квадрата, довжина якої  $a\sqrt{2}$ , і дорівнює

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2a^2}.$$

Векторну суму сил  $\vec{F}_1$  та  $\vec{F}_3$  знайдемо по правилу паралелограма, а її величина становить

$$F_{13} = F_1\sqrt{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2\sqrt{2}}{a^2}.$$

Сили  $\vec{F}_2$  та  $\vec{F}_{13}$  направлені вздовж однієї прямої, що є продовженням діагоналі, тому їх сума

$$F_{123} = F_{13} + F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2\sqrt{2}}{a^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2a^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2} \left( \sqrt{2} + \frac{1}{2} \right).$$

Враховуючи симетричність системи доходимо висновку, що на кожен з чотирьох зарядів діє сила, яка дорівнює за величиною  $F_{123}$  і яка спрямована вздовж діагональної лінії від центру, тому система не знаходиться в рівновазі. Заряди відштовхуються один від одного і будуть рухатися у чотири боки. Для того щоб забезпечити рівновагу, на кожен із зарядів повинна діяти рівна за величиною і протилежна за напрямком сила притягання до негативного заряду, що знаходиться у центрі квадрата. Якщо відстань від вершини до центру квадрата становить  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ , то сила притягання між зарядами  $q_4$  та  $q_0$  становить

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2qq_0}{a^2}.$$

Сили  $F_0$  та  $F_{123}$  дорівнюють одна одній за величиною, тому

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2} \left( \sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2qq_0}{a^2},$$

звідки

$$q_0 = q \frac{\sqrt{2} + 0,5}{2} = 0,956q = 0,956 \cdot 10^{-6} = 9,56 \cdot 10^{-7} \text{ Кл} = 956 \text{ нКл}.$$

**Відповідь:**  $q_0 = 956 \text{ нКл}$ .

### Задача 9.2.3

Електричне поле створене двома точковими зарядами  $q_1$  та  $q_2$ , що розташовані в точках  $A$  та  $B$ , відповідно, на відстані  $d = 10 \text{ см}$  один від одного. Знайти напруженість та потенціал електричного поля в точці  $C$ , якщо

1)  $q_1 = 8 \text{ нКл}$ ,  $q_2 = -6 \text{ нКл}$ ,  $r_{AC} = r_{BC} = 5 \text{ см}$ ; 2)  $q_1 = 8 \text{ нКл}$ ,  $q_2 = 6 \text{ нКл}$ ,  $r_{AC} = r_{BC} = 5 \text{ см}$ ; 3)  $q_1 = 8 \text{ нКл}$ ,  $q_2 = 6 \text{ нКл}$ ,  $r_{AC} = 6 \text{ см}$ ;  $r_{BC} = 8 \text{ см}$ ; 4)  $q_1 = 8 \text{ нКл}$ ,  $q_2 = 6 \text{ нКл}$ ,  $r_{AC} = r_{BC} = 10 \text{ см}$ ; 5) Знайти потенціал електричного поля в точці  $D$ , де напруженість поля дорівнює нулю, якщо  $q_1 = 8 \text{ нКл}$ ,  $q_2 = 6 \text{ нКл}$ .

#### Дано:

$$d = 10 \text{ см}$$

$$1) \quad q_1 = 8 \text{ нКл}, \quad q_2 = -6 \text{ нКл},$$

$$r_{AC} = r_{BC} = 5 \text{ см};$$

$$2) \quad q_1 = 8 \text{ нКл}, \quad q_2 = 6 \text{ нКл},$$

$$r_{AC} = r_{BC} = 5 \text{ см};$$

$$3) \quad q_1 = 8 \text{ нКл}, \quad q_2 = 6 \text{ нКл},$$

$$r_{AC} = 6 \text{ см}; \quad r_{BC} = 8 \text{ см};$$

$$4) \quad q_1 = 8 \text{ нКл}, \quad q_2 = 6 \text{ нКл},$$

$$r_{AC} = r_{BC} = 10 \text{ см};$$

$$5) \quad q_1 = 8 \text{ нКл}, \quad q_2 = 6 \text{ нКл}$$

$$E = ? \quad \varphi = ?$$

#### Розв'язання

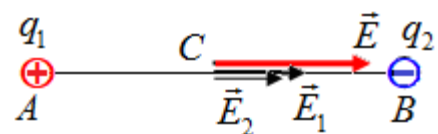
Згідно з принципом суперпозиції електричних полів кожен заряд створює поле незалежно від присутності інших зарядів. Тому напруженість поля в кожній з заданих точок будемо визначати як векторну суму напруженостей полів першого  $\vec{E}_1$  та другого  $\vec{E}_2$  зарядів

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \quad (1)$$

Заряди  $q_1$  і  $q_2$  є точковими, тому величини напруженостей

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{AC}^2}; \quad E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{BC}^2} \quad (2)$$

1) Вектор  $\vec{E}_1$  спрямований вздовж лінії, що з'єднує заряди, від заряду  $q_1$  в бік заряду  $q_2$ , оскільки  $q_1 > 0$ . Вектор  $\vec{E}_2$  спрямований також



вздовж цієї лінії в бік заряду  $q_2$ , оскільки  $q_2 < 0$ . Враховуючи, що обидва вектори спрямовані в один бік, модуль вислідного вектору становить

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{AC}^2} + \frac{q_2}{r_{BC}^2} \right).$$

Підставляючи числові значення, беремо величину заряду  $q_2$  по модулю, тому що напрямок вектора напруженості його поля ми вже врахували при додаванні векторів.

$$E = 9 \cdot 10^9 \left( \frac{8 \cdot 10^{-9}}{25 \cdot 10^{-4}} + \frac{6 \cdot 10^{-9}}{25 \cdot 10^{-4}} \right) = 5,04 \cdot 10^4 \text{ В/м.}$$

Потенціал електричного поля, створеного системою зарядів, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів полів, створених кожним із зарядів незалежно один від одного  $\varphi = \sum_i \varphi_i$ . Тому для двох зарядів

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

де  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  – потенціали полів точкових зарядів  $q_1$  та  $q_2$ , відповідно.

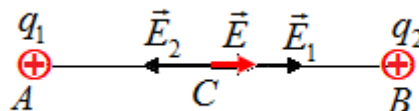
Потенціали дорівнюють

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r_{AC}}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r_{BC}}.$$

Взявши до уваги те, що заряд  $q_2$  негативний, отримуємо

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r_{AC}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r_{BC}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{AC}} + \frac{q_2}{r_{BC}} \right) = \\ &= 9 \cdot 10^9 \left( \frac{8 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-2}} + \frac{-6 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-2}} \right) = 3,6 \cdot 10^2 \text{ В.} \end{aligned}$$

2) Якщо обидва заряди позитивні, то в точці  $C$  вектори  $\vec{E}_1$  та  $\vec{E}_2$  спрямовані у протилежні боки. Вислідний вектор  $\vec{E}$  є векторною сумою цих векторів, а його модуль є різницею між модулями векторів  $E_1$  та  $E_2$ .



$$E = E_1 - E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{AC}^2} - \frac{q_2}{r_{BC}^2} \right).$$

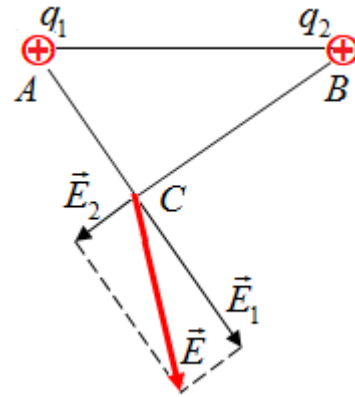
Підставлення числових значень дає результат

$$E = 9 \cdot 10^9 \left( \frac{8 \cdot 10^{-9}}{25 \cdot 10^{-4}} - \frac{6 \cdot 10^{-9}}{25 \cdot 10^{-4}} \right) = 7,2 \cdot 10^3 \text{ В/м.}$$

Потенціал точки  $C$  становить

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r_{AC}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r_{BC}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{AC}} + \frac{q_2}{r_{BC}} \right) = \\ &= 9 \cdot 10^9 \left( \frac{8 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-2}} + \frac{6 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-2}} \right) = 2,52 \cdot 10^3 \text{ В.} \end{aligned}$$

3) Якщо відстань між зарядами становить  $d = 10$  см, а точка, де треба визначити напруженість електричного поля, відстоїть від першого заряду на  $r_{AC} = 6$  см, а від другого – на  $r_{BC} = 8$  см, то виявляється, що ця точка  $C$  є вершиною прямокутного (єгипетського) трикутника. До речі, таких точок дві, і вони розташовані симетрично відносно ділянки  $AB$ , над і під нею. Знайдемо напруженість поля в одній з них. Вектор напруженості  $\vec{E}$  є векторною сумою векторів  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$ , тобто по правилу додавання векторів є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах. Напруженості полів точкових зарядів  $q_1$  і  $q_2$  є



$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{AC}^2}; E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{BC}^2}$$

А модуль вислідного вектора визначається за допомогою теореми Піфагора:

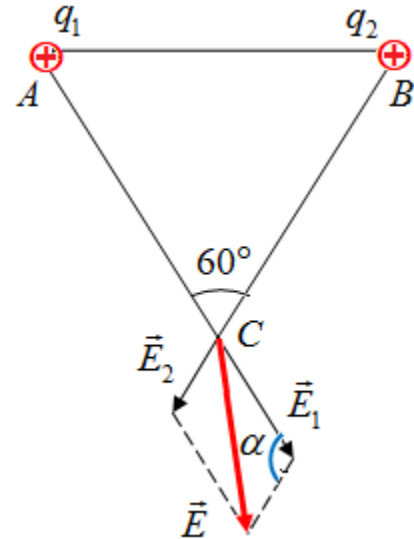
$$\begin{aligned} E &= \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{\left( \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{AC}^2} \right)^2 + \left( \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{BC}^2} \right)^2}, \\ E &= 9 \cdot 10^9 \sqrt{\left( \frac{8 \cdot 10^{-9}}{36 \cdot 10^{-4}} \right)^2 + \left( \frac{6 \cdot 10^{-9}}{64 \cdot 10^{-4}} \right)^2} = 2,16 \cdot 10^4 \text{ В/м.} \end{aligned}$$

### Потенціал точки С

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r_{AC}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r_{BC}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{AC}} + \frac{q_2}{r_{BC}} \right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \left( \frac{8 \cdot 10^{-9}}{6 \cdot 10^{-2}} + \frac{6 \cdot 10^{-9}}{8 \cdot 10^{-2}} \right) = 1,88 \cdot 10^3 \text{ В.}$$

4) У випадку, коли точка С, в якій треба визначити напруженість електричного поля, віддалена від кожного із зарядів на 10 см, а відстань між зарядами також складає 10 см, вона є вершиною рівнобічного трикутника, а вислідний вектор  $\vec{E}$  є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{E}_1$  та  $\vec{E}_2$  як на сторонах. Модулі цих векторів



$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{AC}^2}; \quad E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{BC}^2}.$$

Модуль вислідного вектора знайдемо за допомогою теореми косинусів:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos \alpha} =$$

$$= \sqrt{\left( \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{AC}^2} \right)^2 + \left( \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{BC}^2} \right)^2 - 2 \cdot \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{AC}^2} \cdot \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{BC}^2} \cos \alpha}.$$

Виходячи із геометрії розташування зарядів та точки С, кут між векторами  $\vec{E}_1$  та  $\vec{E}_2$  становить  $60^\circ$ , тоді кут  $\alpha$  дорівнює  $120^\circ$ .

Підставляючи числові значення, отримуємо модуль вектора  $\vec{E}$ :

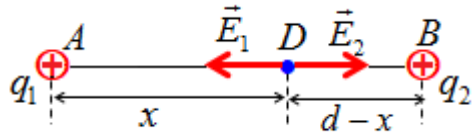
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\left( \frac{8 \cdot 10^{-9}}{10^{-2}} \right)^2 + \left( \frac{6 \cdot 10^{-9}}{10^{-2}} \right)^2 - 2 \left( \frac{48 \cdot 10^{-18}}{10^{-4}} \right) \cos 120^\circ} = 1,1 \cdot 10^4 \text{ В/м.}$$

Потенціал точки С становить

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r_{AC}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r_{BC}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{AC}} + \frac{q_2}{r_{BC}} \right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \left( \frac{8 \cdot 10^{-9}}{10 \cdot 10^{-2}} + \frac{6 \cdot 10^{-9}}{10 \cdot 10^{-2}} \right) = 1,26 \cdot 10^3 \text{ В.}$$

5) Для відповіді на останнє питання задачі знайдемо спочатку положення точки  $D$ , напруженість електричного поля в якій дорівнює нулю. Позначимо  $r_{AD} = x$ , а  $r_{DB} = d - x$ .



Якщо  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$ , то  $E_1 = E_2$ , звідки

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{AD}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{DB}^2},$$

$$\frac{8 \cdot 10^{-9}}{x^2} = \frac{6 \cdot 10^{-9}}{(d-x)^2}$$

та остаточно

$$x^2 - 0,8x - 0,04 = 0.$$

Корені цього квадратного рівняння  $x_1 = 0,054 \text{ м}$ ,  $x_2 = 0,746 \text{ м}$  (остання відповідь не задовольняє умовам задачі).

Потенціал точки  $D$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r_{AD}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r_{BD}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{AD}} + \frac{q_2}{r_{BD}} \right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \left( \frac{8 \cdot 10^{-9}}{5,4 \cdot 10^{-2}} + \frac{6 \cdot 10^{-9}}{4,6 \cdot 10^{-2}} \right) = 2,51 \cdot 10^3 \text{ В.}$$

**Відповідь:** 1)  $E = 5,04 \cdot 10^4 \text{ В/м}$ ;  $\varphi = 3,6 \cdot 10^2 \text{ В}$ ;

2)  $E = 7,2 \cdot 10^3 \text{ В/м}$ ;  $\varphi = 2,52 \cdot 10^3 \text{ В}$ ;

3)  $E = 2,16 \cdot 10^4 \text{ В/м}$ ;  $\varphi = 1,88 \cdot 10^3 \text{ В}$ ;

4)  $E = 1,1 \cdot 10^4 \text{ В/м}$ ;  $\varphi = 1,26 \cdot 10^3 \text{ В}$ ;

5)  $\varphi = 2,51 \cdot 10^3 \text{ В}$ .



### Задача 9.2.4

Дві однаково заряджені кульки, що підвішені на нитках однакової довжини, розійшлися на кут  $2\alpha$ . Яка густина  $\rho_2$  матеріалу кульок, якщо при зануренні їх у гас, кут між ними не змінився? Густина гасу  $\rho_1 = 800 \text{ кг/м}^3$ , а його діелектрична проникність  $\varepsilon = 2$ .

**Дано:**

$$2\alpha$$

$$\rho_1 = 800 \text{ кг/м}^3$$

$$\varepsilon = 2$$

$$\rho_2 = ?$$

**Розв'язання**

На кожную кульку в вакуумі (або в повітрі) діють сили:  $m\vec{g}$  – сила тяжіння (спрямована вертикально донизу),  $\vec{T}$  – сила натягу нитки та  $\vec{F}_{\text{ел}}$  – сила електричної взаємодії кульок (кулонівська сила). Кульки знаходяться у рівновазі, тому згідно з першим законом Ньютона рівнодійна усіх сил

дорівнює нулю

$$0 = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{ел}} + \vec{T}.$$

Спроектуємо це рівняння на обрані осі  $x$  та  $y$ :

$$\begin{aligned} x: & \begin{cases} 0 = F_{\text{ел}} - T \sin \alpha, \\ y: & \begin{cases} 0 = -mg + T \cos \alpha. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} T \sin \alpha = F_{\text{ел}}, \\ T \cos \alpha = mg. \end{cases}$$

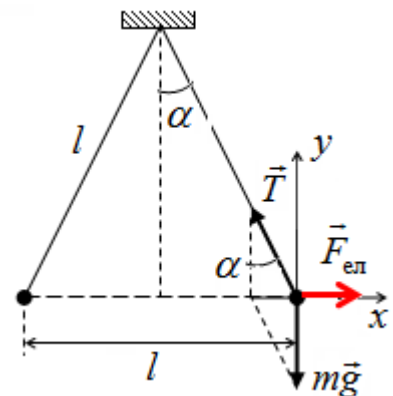
Поділимо перше рівняння системи на друге

$$\text{tg} \alpha = \frac{F_{\text{ел}}}{mg}.$$

З урахуванням того, що  $F_{\text{ел}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{l^2}$  та  $m = \rho_2 V$ , де  $V$  – об'єм кульки,

$$\text{tg} \alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{l^2 \rho_2 V g}.$$

Умова рівноваги кульки у гасі згідно із 1 законом Ньютона

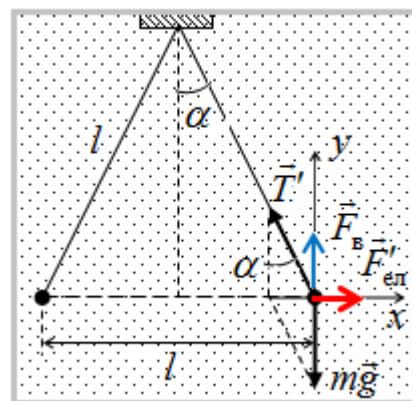


$$0 = m\vec{g} + \vec{F}'_{\text{ел}} + \vec{T}' + \vec{F}_\text{в},$$

де  $\vec{F}'_{\text{ел}}$  – сила електричної взаємодії зарядів кульок у гасі,  $\vec{T}'$  – сила натягу нитки,  $\vec{F}_\text{в}$  – виштовхувальна (Архімедова) сила, яка визначається згідно із законом Архімеда: на тіло, занурене у рідину чи газ, діє виштовхувальна сила, що дорівнює вазі рідини або газу, яка витиснена об'ємом тіла.

Проекції на осі  $x$  та  $y$  мають вид:

$$\begin{cases} x: & 0 = F'_{\text{ел}} - T' \sin \alpha, \\ y: & 0 = -mg + T' \cos \alpha + F_\text{в}. \end{cases}$$



Враховуючи те, що у цьому випадку  $F'_{\text{ел}} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{l^2}$ , де  $\epsilon$  – діелектрична

проникність гасу, отримаємо

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F'_{\text{ел}}}{mg - F_\text{в}} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{l^2 (\rho_2 - \rho_1) V g}.$$

Оскільки згідно з умовами задачі кути розходження у повітрі та у гасі є однаковими, то прирівнюємо значення тангенсів відповідних кутів

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{l^2 \rho_2 V g} &= \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{l^2 (\rho_2 - \rho_1) V g}, \\ \frac{1}{\rho_2} &= \frac{1}{\epsilon (\rho_2 - \rho_1)}, \end{aligned}$$

Підставляючи густину гасу та його діелектричну проникність, отримаємо густину матеріалу кульок

$$\rho_2 = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \rho_1 = \frac{2}{2 - 1} \cdot 800 = 1,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

**Відповідь:**  $\rho_2 = 1,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

### Задача 9.2.5

Маленька пластикова кулька масою  $m = 2$  г підвішена на нитці в однорідному електричному полі, створеному зарядженою площиною з поверхневою густиною заряду  $\sigma = 40 \text{ мкКл/м}^2$ , як показано на рисунку. Якщо кулька знаходиться в рівновазі, коли нитка утворює кут  $\alpha = 30^\circ$  з вертикаллю, то який заряд має кулька?

**Дано:**

$$m = 2 \text{ г}$$

$$\sigma = 40 \text{ мкКл/м}^2$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2$$

$$q = ?$$

**Розв'язання**

На заряджену кульку діють: сила тяжіння  $m\vec{g}$ , що направлена донизу, сила електричної взаємодії  $\vec{F}_{\text{ел}}$ , яка направлена перпендикулярно поверхні вздовж ліній вектора  $\vec{E}$ , та сила натягу нитки  $\vec{T}$ , що діє вздовж нитки.

Враховуючи, що кулька знаходиться в рівновазі, згідно з першим законом Ньютона векторна сума всіх сил, що діють на неї, дорівнює нулю

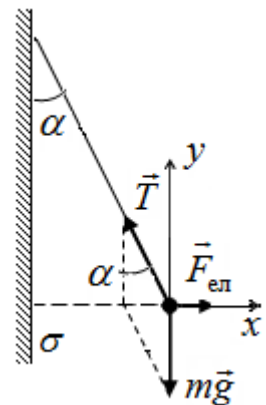
$$0 = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{ел}} + \vec{T}.$$

Проекції на осі  $x$ - і  $y$

$$\begin{aligned} x: & \quad 0 = F_{\text{ел}} - T \sin \alpha, \\ y: & \quad 0 = -mg + T \cos \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} T \sin \alpha = F_{\text{ел}}, \\ T \cos \alpha = mg. \end{cases}$$

$$\frac{T \sin \alpha}{T \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{\text{ел}}}{mg}.$$



Електрична сила, що діє на заряд  $q$  в електричному полі  $\vec{E}$ , дорівнює

$\vec{F}_{\text{ел}} = q\vec{E}$ , де  $\vec{E}$  – напруженість електричного поля однорідно зарядженої

площини, величина якої  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ .

Тоді

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{\text{ел}}}{mg} = \frac{qE}{mg} = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mg}.$$

Звідки шуканий заряд кульки є

$$q = \frac{2\varepsilon_0 mg}{\sigma} \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \cdot 0,58}{40 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} = 5 \text{ нКл}.$$

**Відповідь:**  $q = 5 \text{ нКл}$ .

### Задача 9.2.6

Знайти потенціальну енергію системи з трьох зарядів  $q_1 = 10 \text{ нКл}$ ,  $q_2 = 8 \text{ нКл}$  і  $q_3 = -5 \text{ нКл}$ , розділених відстанями  $r_{12} = 3 \text{ см}$ ,  $r_{13} = 4 \text{ см}$  і  $r_{23} = 5 \text{ см}$ .

**Дано:**

$$q_1 = 10 \text{ нКл}$$

$$q_2 = 8 \text{ нКл}$$

$$q_3 = -5 \text{ нКл}$$

$$r_{12} = 3 \text{ см},$$

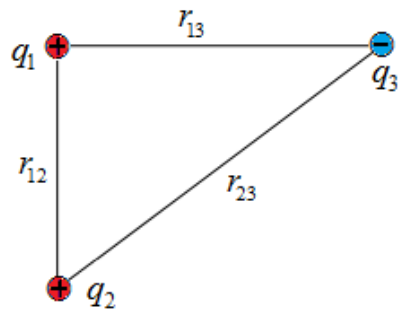
$$r_{13} = 4 \text{ см}$$

$$r_{23} = 5 \text{ см}$$

$$PE = ?$$

**Розв'язання**

Тіла мають потенціальну енергію через своє положення відносно інших тіл, тому і заряд в електричному полі також має потенціальну енергію, яка визначається його положенням відносно іншого зарядженого тіла.



Для кожної пари зарядів, що взаємодіють один з одним, потенціальна енергія визначається як

$$PE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}.$$

Система зарядів має потенціальну енергію, яка складається із потенціальних енергій взаємодії між кожними двома зарядами:

$$PE = PE_{12} + PE_{13} + PE_{23}.$$

$$PE_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-9} \cdot 8 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-2}} = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

$$PE_{13} = k \frac{q_1 q_3}{r_{13}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-9} \cdot (-5) \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 10^{-2}} = -1,125 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

$$PE_{23} = k \frac{q_2 q_3}{r_{23}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-9} \cdot (-5) \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-2}} = -0,72 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

$$PE = PE_{12} + PE_{13} + PE_{23} = 2,4 \cdot 10^{-5} - 1,125 \cdot 10^{-5} - 0,72 \cdot 10^{-5} = 5,55 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

**Відповідь:**  $PE = 5,55 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$

### Задача 9.2.7

Два точкові заряди  $q_1 = 4 \text{ нКл}$  і  $q_2 = 6 \text{ нКл}$  віддалені на відстань  $r_1 = 2 \text{ м}$ . Яку роботу потрібно виконати, щоб перемістити перший заряд у точку, віддалену від другого заряду на  $r_2 = 0,5 \text{ м}$ ? Яка різниця потенціалів  $\Delta\varphi$  між цими точками?

**Дано:**

$$q_1 = 4 \text{ нКл}$$

$$q_2 = 6 \text{ нКл}$$

$$r_1 = 2 \text{ м}$$

$$r_2 = 0,5 \text{ м}$$

$$A = ? \quad \Delta\varphi = ?$$

**Розв'язання**

Задачу можна розв'язати двома способами.

1) Роботу можна знайти як різницю енергій, в цьому випадку, потенціальних, оскільки змінюється взаємне розташування зарядів. Відповідно до закону збереження енергії, робота дорівнює приросту потенціальної енергії зі зворотним знаком

$$A = -\Delta PE = -(PE_2 - PE_1) = PE_1 - PE_2.$$

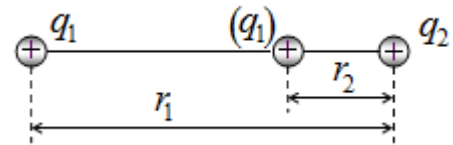
Оскільки потенціальна енергія для двох зарядів  $q_1$  і  $q_2$ , що розділені відстанню  $r$ , дорівнює  $PE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$ , шукану роботу можна виразити як

$$A = PE_1 - PE_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1)$$

Підставляючи дані задачі, отримуємо

$$A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-9} \cdot 6 \cdot 10^{-9} (0.5 - 2)}{0.5 \cdot 2} = -3.24 \cdot 10^{-7} \text{ Дж.}$$

2) Вважатимемо, що перший заряд рухається в електричному полі, створеному другим зарядом  $q_2$ . Визначимо потенціали точок поля на відстанях  $r_1$  і  $r_2$  від заряду  $q_2$ :



$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r_1} \quad \text{і} \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r_2}.$$

Тоді робота сил електричного поля з перенесення заряду  $q_1$  становить

$$A = q_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = q_1 \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} \right) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (2)$$

Отримано той самий вираз, що й у першому способі (1); природно, що підставлення даних задачі дає такий же самий результат.

Важливо відзначити, що оскільки йдеться про два позитивних заряди, які відштовхуються, робота сил електричного поля для їх зведення є негативною, тобто роботу здійснює не електричне поле, а зовнішні сили.

Розмірність результату:

$$[A] = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Кл}^{-2}}{\text{м}} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

**Відповідь:**  $A = -3,24 \cdot 10^{-7} \text{ Дж.}$

## Задача 9.2.8

*В напрямку ядра платини, що містить 78 протонів, з дуже великої відстані зі швидкістю  $v = 1,6 \cdot 10^6 \text{ м/с}$  рухається  $\alpha$ -частинка, що містить два протони. На яку мінімальну відстань вони можуть зблизитися?*

| Дано:                            | Розв'язання                                                                    |
|----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| $q_{\alpha} = 2e$                | $\alpha$ -частинка є ядром гелію ${}^4_2\text{He}$ , тому її електричний       |
| $m_{\alpha} = 4m_p$              | заряд дорівнює $q_{\alpha} = 2e$ Кл, а заряд ядра платини ${}_{78}\text{Pt}$ – |
| $q_{Pt} = 78e$                   | $q_{Pt} = 78e$ Кл. Відстань їх зближення в нерухомому стані                    |
| $v = 1,6 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ | визначається потенціальною енергією цих позитивно                              |
| $r = ?$                          | заряджених частинок. Але коли $\alpha$ -частинка рухається                     |

до ядра платини, то частина її кінетичної енергії буде перетворюватися на електричну потенціальну енергію згідно із законом збереження енергії. Тому відстань, на яку можуть зблизитися частинки, буде меншою, ніж між нерухомими частинками.

Початкова кінетична енергія  $\alpha$ -частинки

$$KE = \frac{m_{\alpha} v^2}{2},$$

$$\text{де } m_{\alpha} = 4m_p = 4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} = 6,68 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Кінцева кінетична енергія дорівнює нулю, бо її швидкість стає рівною нулю.

Якщо  $\alpha$ -частинка починає рух з дуже великої відстані, то це означає, що її початкова потенціальна енергія відносно ядра платини дорівнює нулю, а кінцева

$$PE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\alpha} q_{Pt}}{r}.$$

За законом збереження енергії приріст кінетичної енергії дорівнює приросту потенціальної енергії зі знаком «мінус», тобто її спаду

$$\Delta KE = -\Delta PE,$$

$$0 - \frac{m_{\alpha} v^2}{2} = -\left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\alpha} q_{Pt}}{r} - 0 \right),$$

$$\frac{m_{\alpha} v^2}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\alpha} q_{Pt}}{r},$$

звідки відстань мінімального зближення з врахуванням величин зарядів

$q_{\alpha} = 2e = 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 3,2 \cdot 10^{-19}$  Кл і  $q_{Pt} = 78e = 78 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 1,25 \cdot 10^{-17}$  Кл, становить,

$$r = \frac{2q_{\alpha}q_{Pt}}{4\pi\epsilon_0 m_{\alpha} v^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 1,25 \cdot 10^{-17}}{6,68 \cdot 10^{-27} \cdot (1,6 \cdot 10^6)^2} = 4,2 \cdot 10^{-12} \text{ м.}$$

Слід зазначити, що в точці, де швидкість дорівнює нулю, прискорення не дорівнює нулю, а направлено в бік «від ядра» платини. Тому  $\alpha$ -частинка почне рухатися протилежний від ядра платини бік, перетворюючи свою потенціальну енергію в кінетичну.

Розмірність результату:

$$[r] = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Кл}^{-2}}{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}} = \text{м}.$$

**Відповідь:**  $r = 4,2 \cdot 10^{-12}$  м.

## Задача 9.2.9

Дві різнойменно заряджені нитки розташовані на відстані  $r_1 = 7,5$  см одна від одної. Лінійні густини електричного заряду ниток дорівнюють  $\lambda_1 = 5$  мкКл/м і  $\lambda_2 = -2,5$  нКл/м. Визначити на одиницю довжини 1) силу  $F_1$ , з якою притягуються нитки, і 2) роботу  $A_1$ , яку треба здійснити для того, щоб розсунути нитки на відстань  $r_2 = 15$  см.

| Дано:                    | Розв'язання                                                                                       |
|--------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $r_1 = 7,5$ см           | 1) Будемо вважати, що перша нитка створює електричне                                              |
| $\lambda_1 = 5$ мкКл/м   | поле $E_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r_1}$ , яке впливає на заряд $q_2 = \lambda_2 l$ , що |
| $\lambda_2 = -2,5$ нКл/м | скупчився на довжині $l$ другої нитки. Величина сили, що                                          |
| $r_2 = 15$ см            | діє на другу нитку з боку першої є                                                                |
| $F_1 = ?$ $A_1 = ?$      |                                                                                                   |

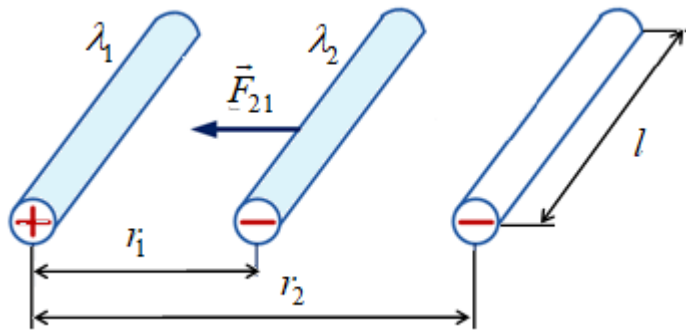


$$F_{21} = E_1 q_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 l}{2\pi\epsilon_0 r_1}. \quad (1)$$

На одиницю довжини нитки приходить сила

$$F_l = \frac{F_{21}}{l} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r_1}. \quad (2)$$

Треба звернути увагу на те, що ми отримали симетричний вираз відносно першої та другої ниток, бо можна було вважати, що саме друга нитка створює електричне поле, яке впливає на першу нитку.



2) Для знаходження роботи треба скористатися тим, що згідно з визначенням, робота є

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r}.$$

Сила (1) взаємодії між нитками залежить від відстані між ними. Тому робота із розсування заряджених ниток з відстані  $r_1$  до відстані  $r_2$  з врахуванням того, що кут між напрямками сили (притягання) і переміщення  $\alpha = 180^\circ$ , косинус якого  $\cos \alpha = -1$ , дорівнює

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr \cdot \cos \alpha = - \int_{r_1}^{r_2} q_2 E_1 dr = - \frac{\lambda_1 \lambda_2 l}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = - \frac{\lambda_1 \lambda_2 l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Робота, що припадає на одиницю довжини, становить

$$A_l = \frac{A}{l} = - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (3)$$

Знайти роботу можна також і іншим способом, скориставшись виразом для роботи електричного поля.

Робота електричного поля з переміщення заряду  $q_2$  між точками, що розташовані на відстанях  $r_1$  та  $r_2$  від першої нитки, потенціали яких дорівнюють  $\varphi_1$  та  $\varphi_2$ , відповідно.

$$A = q_2(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (4)$$

Різниця потенціалів  $(\varphi_1 - \varphi_2) = -\int_{r_1}^{r_2} E_1 dr$ , де  $E_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r_1}$ , а у якості точкового

заряду  $q_2$  візьмемо заряд одиниці довжини нескінченно довгої нитки, а саме,  $\lambda_2$ .

В цьому випадку робота становить

$$A_l = q_2(\varphi_1 - \varphi_2) = -q_2 \int_{r_1}^{r_2} E_1 dr = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Як бачимо, обидва способи визначення дали однаковий результат

$$A_l = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (5)$$

Оскільки робота сил поля від'ємна, то робота, яку потрібно здійснити зовнішнім силам, щоб розсунути нитки, повинна бути додатною.

$$A' = -A = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Розрахунки дають наступні результати для сили та роботи, що припадають на одиницю довжини нитки,

$$F_l = \frac{10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 5,4 \cdot 10^{-8} \text{ Н/м.}$$

$$A_l = \frac{10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{15}{7,5} = 3,7 \cdot 10^{-10} \text{ Дж/м.}$$

Перевірка розмірностей результатів

$$[F_l] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Кл}^{-2}}{\text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}}, \quad [A_l] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Кл} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Кл}^{-2}}{\text{м} \cdot \text{м}} = \text{Н} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}}.$$

**Відповідь:**  $F_l = 5,4 \cdot 10^{-8} \text{ Н/м}$ ;  $A_l = 3,7 \cdot 10^{-10} \text{ Дж/м}$ .

### Задача 9.2.10

Позитивно заряджена крапелька олії радіусом  $r = 1,5 \cdot 10^{-6}$  м знаходиться посередині між двома горизонтальними пластинами конденсатора в стані рівноваги. Відстань між пластинами  $d = 20$  мм, а різниця потенціалів  $\Delta\varphi = 100$  В. Густина олії  $\rho = 920$  кг/м<sup>3</sup>,  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>. 1) Знайти заряд краплі олії; 2) Яким буде миттєве прискорення краплі, якщо змінити полярність пластин конденсатора?

**Дано:**

$$r = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$d = 20 \text{ мм}$$

$$\Delta\varphi = 100 \text{ В}$$

$$\rho = 920 \text{ кг/м}^3$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2$$

$$q = ? \quad a = ?$$

**Розв'язання**

1) На краплю діють дві сили:  $m\vec{g}$  – сила тяжіння, що направлена донизу, і  $\vec{F}_{\text{ел}}$  – сила електричного притягання до негативно зарядженої пластини (або відштовхування від позитивно зарядженої пластини), що спрямована вгору. Враховуючи той факт, що крапелька знаходиться у стані спокою, ці сили врівноважують одна одну, тому згідно із 1-м

законом Ньютона

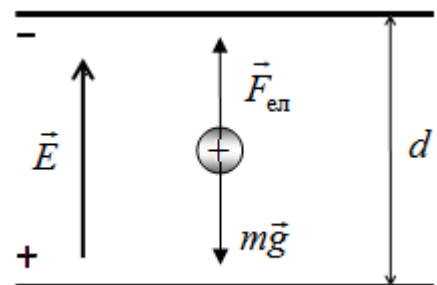
$$mg = F_{\text{ел}}. \quad (1)$$

Якщо густина олії  $\rho$ , тоді

$$mg = \rho V g = \rho \frac{4\pi r^3}{3} g. \quad (2)$$

Сила електричної взаємодії з врахуванням того, що напруженість поля і різниця потенціалів зв'язані як  $E = \frac{\Delta\varphi}{d}$ , становить

$$F_{\text{ел}} = qE = q \frac{\Delta\varphi}{d}. \quad (3)$$



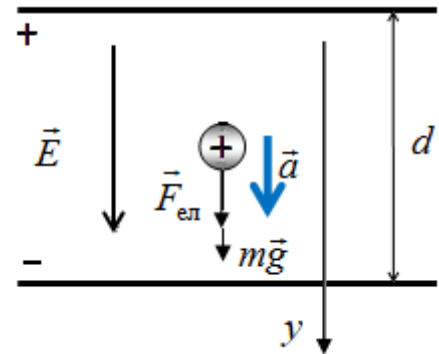
Підставляючи (2) і (3) в (1), отримаємо

$$\rho \frac{4\pi r^3}{3} g = q \frac{\Delta\varphi}{d},$$

звідки

$$q = \frac{4\pi r^3 \rho g d}{3 \cdot \Delta\varphi} = \frac{4\pi (1,5 \cdot 10^{-6})^3 \cdot 920 \cdot 9,8 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 100} = 2,55 \cdot 10^{-17} \text{ Кл.}$$

2) При зміні полярності пластин конденсатора стан рівноваги порушується. На крапельку тепер діють ті ж дві сили, але направлені вони тепер в один бік, а саме, донизу. Згідно із 2-м законом Ньютона прискорення крапельки маси  $m$  визначається дією рівнодійної цих двох сил:



$$m\vec{a} = q\vec{E} + m\vec{g}. \quad (4)$$

Проекції рівняння (4) на вертикальну вісь  $y$

$$ma = qE + mg.$$

Тоді миттєве прискорення крапельки дорівнює

$$a = \frac{qE}{m} + g = \frac{3q\Delta\varphi}{4\pi r^3 \rho d} + g = \frac{3 \cdot 2,55 \cdot 10^{-17} \cdot 100}{4\pi \cdot (1,5 \cdot 10^{-6})^3 \cdot 920 \cdot 20 \cdot 10^{-3}} + 9,8 = 19,6 \text{ м/с}^2.$$

Розмірність отриманих результатів:

$$[q] = \frac{\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{В}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 (\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1})} = \text{А} \cdot \text{с} = \text{Кл},$$

$$[a] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{м} \cdot \text{кг}} + \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \frac{(\text{А} \cdot \text{с}) \cdot (\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1})}{\text{м} \cdot \text{кг}} + \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

**Відповідь:**  $q = 2,55 \cdot 10^{-17} \text{ Кл}$ ;  $a = 19,6 \text{ м/с}^2$ .

### Задача 9.2.11

Дві пластини конденсатору довжиною  $s = 4$  см утримуються горизонтально одна над одною у вакуумі на відстані  $d = 0,1$  см, різниця потенціалів між ними  $\Delta\varphi = 300$  В. Електрон зі швидкістю  $v_x = 1 \cdot 10^7$  м/с влітає посередині між пластинами у напрямку паралельному пластинам.

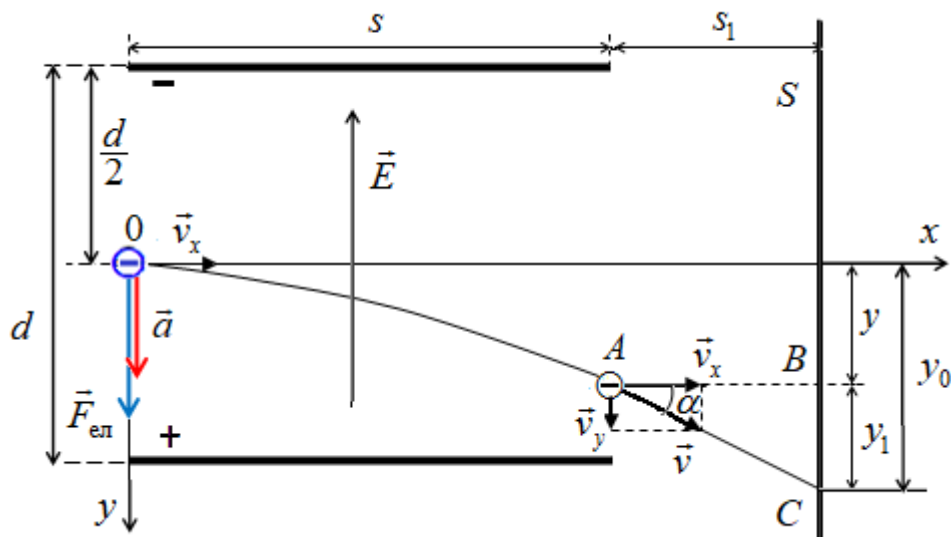
1) Яка сила діє на електрон і яке він має прискорення під час руху між пластинами? 2) За який час електрон залишить конденсатор і яку швидкість матиме у цей момент? 3) Знайти вертикальне зміщення електрона і кут, що утворює траєкторія електрона з горизонталлю в момент, коли він покидає пластини. Якщо електрон потрапляє на екран  $S$ , розташований на відстані  $s_1 = 10$  см від кінця пластин, то чому дорівнює загальне вертикальне зміщення електрона в порівнянні з тим, якби він рухався в незарядженому конденсаторі?

| Дано:                    | Розв'язання                                                                                                                                        |
|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $s = 4$ см               | На електрон з негативним зарядом, що дорівнює по величині елементарному заряду $q = e$ , який рухається в електричному полі конденсатора, діє сила |
| $d = 0,1$ см             | $\vec{F}_{\text{ел}} = q\vec{E} = e\vec{E}. \quad (1)$                                                                                             |
| $\Delta\varphi = 300$ В  | Враховуючи співвідношення між напруженістю поля $\vec{E}$                                                                                          |
| $v_x = 1 \cdot 10^7$ м/с | і різницею потенціалів $\Delta\varphi$ , $E = \frac{\Delta\varphi}{d}$ , можна знайти силу, що                                                     |
| $s_1 = 10$ см            | діє на електрон під час його руху в електричному полі конденсатора                                                                                 |
| $F = ?$ $a = ?$          |                                                                                                                                                    |
| $t = ?$ $v = ?$          |                                                                                                                                                    |
| $y = ?$ $\alpha = ?$     |                                                                                                                                                    |
| $y_0 = ?$                |                                                                                                                                                    |
|                          | $F_{\text{ел}} = eE = \frac{e\Delta\varphi}{d} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 300}{0,1 \cdot 10^{-2}} = 4,8 \cdot 10^{-14} \text{ Н}. \quad (2)$ |

Ця сила діє на електрон, що рухається паралельно пластинам, в перпендикулярному пластинам напрямку. В результаті частинка бере участь у

двох рухах: рівномірному – вздовж осі  $x$ , і рівноприскореному – вздовж осі  $y$ . Траєкторією руху є парабола. До речі, цей рух електрона нагадує рух тіла, що було кинуте із висоти з горизонтальною швидкістю  $v_x$ . Тому математично ці рухи описуються подібним чином. В механічному випадку прискорення, з яким рухається тіло, є прискоренням вільного падіння, а в випадку, що розглядається, це направлене вздовж осі  $x$  прискорення

$$a = \frac{F_{\text{ел}}}{m} = \frac{eE}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 300}{9,1 \cdot 10^{-31}} = 5,27 \cdot 10^{13} \text{ м/с}^2. \quad (3)$$



Кінематичні рівняння, що описують рух електрона, мають вигляд

$$\begin{cases} x = v_x t, \\ v_x = \text{const}, \\ y = \frac{at^2}{2}, \\ v_y = at. \end{cases} \quad (4)$$

В момент часу, коли електрон залишає конденсатор (точка  $A$ ),  $x = s$ , і перше рівняння системи (4) набуває вигляду

$$s = v_x t.$$

Отже, час, протягом якого електрон рухався в конденсаторі, дорівнює

$$t = \frac{s}{v_x} = \frac{0,04}{1 \cdot 10^7} = 4 \cdot 10^{-9} \text{ с}. \quad (5)$$

Оскільки прискорення (3) направлено вертикально, то змінюється лише вертикальна складова швидкості  $v_y$ , і в момент, коли електрон залишає конденсатор, вона становить

$$v_y = at = \frac{eE}{m} \cdot \frac{s}{v_x} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 300}{9,1 \cdot 10^{-31}} \cdot \frac{0,04}{1 \cdot 10^7} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ м/с.} \quad (6)$$

За час (5) руху в конденсаторі вертикальне зміщення електрона є

$$y = \frac{at^2}{2} = \frac{5,27 \cdot 10^{13} \cdot (4 \cdot 10^{-9})^2}{2} = 4,22 \cdot 10^{-4} \text{ м.} \quad (7)$$

Траєкторія електрону утворює з горизонталлю кут  $\alpha$ , тангенс якого можна визначити як відношення складових швидкості

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{seE}{v_x^2 m} = \frac{2,1 \cdot 10^5}{1 \cdot 10^7} = 2,1 \cdot 10^{-2}, \quad (8)$$

звідки шуканий кут дорівнює

$$\alpha = \operatorname{arctg} 2,1 \cdot 10^{-2} = 1,2^\circ.$$

Величину швидкості електрона, яка є векторною сумою її складових  $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$ , знайдемо за допомогою теореми Піфагора

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(10^7)^2 + (2,1 \cdot 10^5)^2} = 1,0002 \cdot 10^7 \text{ м/с.} \quad (9)$$

Коли електрон залишає конденсатор, він продовжує рухатися у напрямку швидкості, яку він мав в т. А, оскільки на нього не діють сили (силою тяжіння нехтуємо як під час руху в конденсаторі, так і після нього). Тоді додаткове відхилення може бути знайдено з трикутника  $ABC$ :

$$y_1 = s_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0,1 \cdot 2,1 \cdot 10^{-2} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \quad (10)$$

Загальне зміщення електрона складається зі зміщення  $y$  при русі в конденсаторі (7) і зміщення  $y_1$  після виходу з нього (10):

$$y_0 = y + y_1 = 4,22 \cdot 10^{-4} + 2,1 \cdot 10^{-3} = 2,52 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

**Відповідь:**  $F_{\text{ел}} = 4,8 \cdot 10^{-14} \text{ Н; } a = 5,27 \cdot 10^{13} \text{ м/с}^2; t = 4 \cdot 10^{-9} \text{ с;}$

$v = 1,0002 \cdot 10^7 \text{ м/с; } y = 4,22 \cdot 10^{-4} \text{ м; } \alpha = 1,2^\circ; y_0 = 2,52 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$

### Задача 9.2.12

Протон, прискорений зі стану спокою напругою  $U_0 = 52$  В, влітає в горизонтально розташований конденсатор посередині між його пластинами, які знаходяться на відстані  $d = 4$  см одна від одної. Швидкість протона в момент його потрапляння в конденсатор направлена паралельно його пластинам, довжина яких  $l = 10$  см. Верхня пластина позитивна щодо нижньої, напруженість електричного поля  $E = 100$  В/м. 1) Визначте, чи виходить протон з конденсатора. Якщо це неможливо, знайдіть положення точки А, де протон потрапляє на пластину. 2) Знайдіть нормальну і тангенціальну складові прискорення у цій точці, а також радіус кривизни траєкторії.

**Дано:**

$$U_0 = 52 \text{ В}$$

$$d = 4 \text{ см}$$

$$l = 10 \text{ см}$$

$$E = 1000 \text{ В/м}$$

$$s = ?$$

**Розв'язання**

Перед тим, як потрапити в конденсатор, протон пройшов прискорювальну різницю потенціалів  $U_0$  і отримав свою кінетичну енергію внаслідок роботи електричного поля:

$$\Delta KE = A. \quad (1)$$

Приріст кінетичної енергії

$$\Delta KE = KE_2 - KE_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2} - 0 = \frac{mv_x^2}{2}, \quad (2)$$

а робота електричного поля з прискорення заряду  $q = e$

$$A = qU_0 = eU_0. \quad (3)$$

Прирівнюючи вирази (2) і (3), отримаємо

$$\frac{mv_x^2}{2} = eU_0, \quad (4)$$

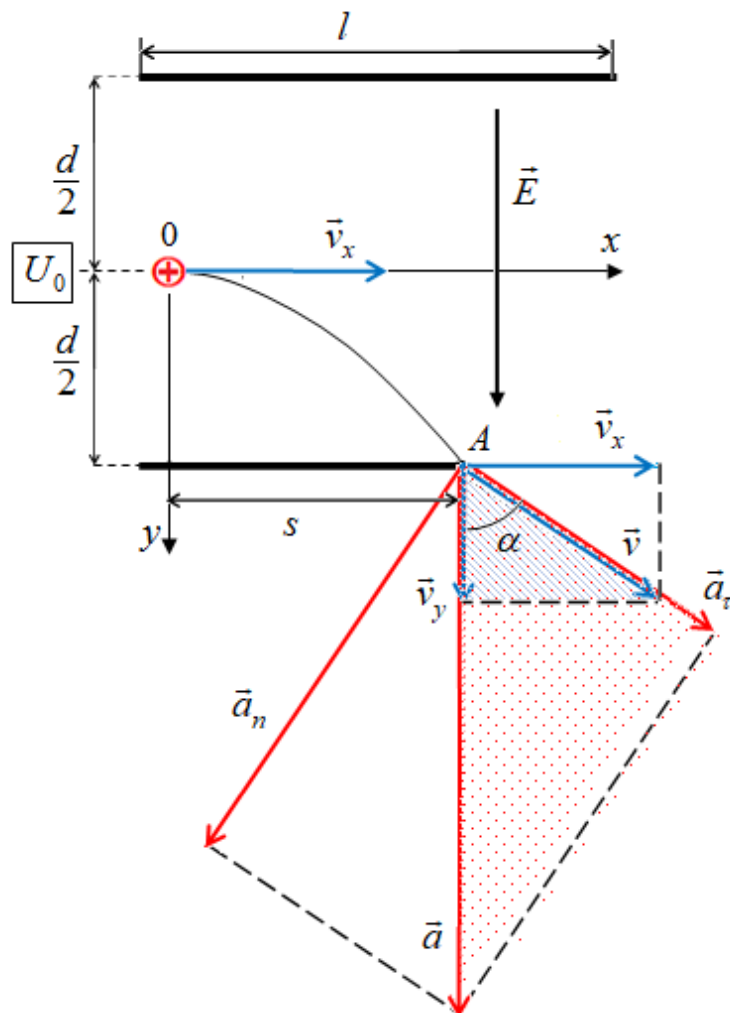
звідки швидкість протона в момент його потрапляння в конденсатор з урахуванням величин заряду і маси протона, відповідно,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл і  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг, становить



$$v_x = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 52}{1,67 \cdot 10^{-27}}} = 1 \cdot 10^5 \text{ м/с.} \quad (5)$$

Рух протона, який одночасно бере участь у двох рухах: рівномірному – вздовж осі  $x$  і рівноприскореному – вздовж осі  $y$ , описується кінематичними рівняннями

$$\begin{cases} x = v_x t, \\ v_x = \text{const}, \\ y = \frac{at^2}{2}, \\ v_y = at. \end{cases} \quad (6)$$



Прискорення, з яким рухається протон, можна знайти за допомогою 2 закону Ньютона  $ma = eE$ , звідки

$$a = \frac{eE}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1000}{1,67 \cdot 10^{-27}} = 9,58 \cdot 10^{10} \text{ м/с}^2. \quad (7)$$

Припустимо, що протон потрапляє на пластину у точці  $A$ , для якої система (6) набуває вигляду

$$\begin{cases} s = v_x t, \\ v_x = \text{const}, \\ \frac{d}{2} = \frac{at^2}{2}, \\ v_y = at. \end{cases} \quad (8)$$

Тоді з третього рівняння системи (8) час руху протона в конденсаторі дорівнює

$$t = \sqrt{\frac{d}{a}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-2}}{9,58 \cdot 10^{10}}} = 6,46 \cdot 10^{-7} \text{ с.} \quad (9)$$

За цей час, рухаючись в горизонтальному напрямку, протон здолає відстань

$$s = v_x t = 1 \cdot 10^5 \cdot 6,46 \cdot 10^{-7} = 6,46 \cdot 10^{-2} \text{ м.} \quad (10)$$

Порівнюючи відстань  $s = 6,46 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  з довжиною пластини  $l = 10 \text{ см} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ , доходимо висновку, що протон не вийде з конденсатора.

2) В точці  $A$ , як і у будь-якій точці траєкторії, вектор швидкості протона можна розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові  $\vec{v}_x$  і  $\vec{v}_y$ . Складову  $\vec{v}_y$  визначимо з четвертого рівняння системи (8), підставляючи прискорення  $a$  з (7) і час руху  $t$  з (9):

$$v_y = at = 9,58 \cdot 10^{10} \cdot 6,46 \cdot 10^{-7} = 6,19 \cdot 10^4 \text{ м/с.} \quad (11)$$

Швидкість протона в точці  $A$  є сумою складових  $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$ , величина якої визначається за теоремою Піфагора

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(1 \cdot 10^5)^2 + (6,19 \cdot 10^4)^2} = 1,18 \cdot 10^5 \text{ м/с.} \quad (12)$$

Прискорення  $\vec{a}$  також можна розкласти на складові: тангенціальну  $\vec{a}_\tau$  – вздовж напрямку швидкості  $\vec{v}$ , і нормальну  $\vec{a}_n$ , що перпендикулярна  $\vec{v}$ .

В результаті отримуємо два трикутники: трикутник швидкостей і трикутник прискорень. Вони є подібними, оскільки прямокутні та мають загальний кут  $\alpha$ , тому їх сторони пропорційні.

$$\frac{v}{a} = \frac{v_x}{a_n} = \frac{v_y}{a_\tau}. \quad (13)$$

З пропорції  $\frac{v}{a} = \frac{v_y}{a_\tau}$  тангенціальна складова прискорення дорівнює

$$a_\tau = a \frac{v_y}{v} = 9,58 \cdot 10^{10} \cdot \frac{6,19 \cdot 10^4}{1,18 \cdot 10^5} = 5,03 \cdot 10^{10} \text{ м/с}^2. \quad (14)$$

З пропорції  $\frac{v}{a} = \frac{v_x}{a_n}$  нормальна складова прискорення становить

$$a_n = a \frac{v_x}{v} = 9,58 \cdot 10^{10} \cdot \frac{1 \cdot 10^5}{1,18 \cdot 10^5} = 8,12 \cdot 10^{10} \text{ м/с}^2. \quad (15)$$

Нормальна складова прискорення

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (16)$$

звідки радіус кривизни траєкторії дорівнює

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(1,18 \cdot 10^5)^2}{8,12 \cdot 10^{10}} = 0,17 \text{ м.}$$

**Відповідь:**  $s = 6,46 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ;  $a_\tau = 5,03 \cdot 10^{10} \text{ м/с}^2$ ;  $a_n = 8,12 \cdot 10^{10} \text{ м/с}^2$ ;  $R = 0,17 \text{ м}$ .

### Задача 9.2.13

*Дві вертикальні паралельні мідні пластини знаходяться на відстані  $d = 5 \text{ см}$  одна від одної. Одночасно від правої, негативно зарядженої пластини починає рух електрон, а від лівої, позитивно зарядженої пластини, – протон. Нехтуючи силою дії частинок одна на одну, знайдіть відстань від позитивної пластини до точки, де частинки проходять повз одна одну.*

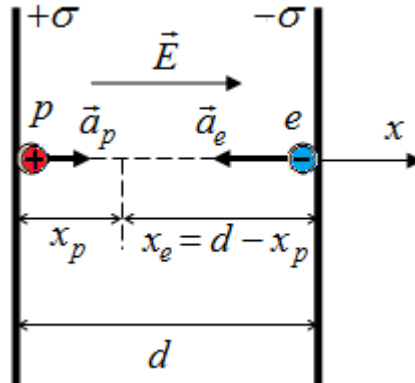
Дано:

$$d = 5 \text{ см}$$

$$x = ?$$

Розв'язання

Припустимо, що частинки рухаються вздовж горизонтальної осі  $x$ , як показано на рисунку.



Протон із зарядом  $+e$  прискорюватиметься в  $+x$ -напрямку, а електрон з негативним зарядом  $-e$  – в  $-x$ -напрямку. Електричне поле між пластинами спрямовано в бік  $+x$  і має величину  $E$ . Сила, що діє на протон, дорівнює  $F_p = eE$ , а рівняння його руху згідно з 2 законом Ньютона є

$$m_p a_p = F_p = eE,$$

де  $m_p$  – це маса протона.

Прискорення протона дорівнює

$$a_p = \frac{eE}{m_p}, \quad (1)$$

а шлях, подоланий їм за час руху, буде

$$x_p = \frac{a_p t^2}{2} = \frac{eEt^2}{2m_p}. \quad (2)$$

Оскільки електрон є негативно зарядженою частинкою, то величина сили, що діє на електрон, дорівнює  $F_e = -eE$  і спрямована в бік  $-x$ -напрямку. Рівняння його руху в проєкції на вісь  $x$

$$m_e a_e = F_e = -eE,$$

де  $m_e$  – маса електрона.

Прискорення електрона становить

$$a_e = \frac{eE}{m_e} \quad (3)$$

Шлях, що подолає електрон за час руху до зустрічі з протоном, дорівнює

$$x_e = \frac{a_e t^2}{2} = \frac{eEt^2}{2m_e}. \quad (4)$$

Відстань між пластинами  $d$ , тому  $x_e = d - x_p$ . Тоді

$$\begin{cases} x_p = \frac{eEt^2}{2m_p}, \\ d - x_p = \frac{eEt^2}{2m_e}. \end{cases} \quad (5)$$

Поділивши друге рівняння системи (5) на перше, отримуємо

$$\frac{d - x_p}{x_p} = \frac{eEt^2 \cdot 2m_p}{2m_e \cdot eEt^2} = \frac{m_p}{m_e}. \quad (6)$$

Отже, частинки пройдуть одна повз одну на відстані  $x_p$  від позитивно зарядженої пластинки, яка становить

$$x_p = \frac{m_e \cdot d}{m_e + m_p} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{9,1 \cdot 10^{-31} + 1,67 \cdot 10^{-27}} = 2,72 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Зауважимо, що результат задачі не залежить від величини електричного поля між пластинками.

**Відповідь:**  $x_p = 2,72 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$

### Задача 9.2.14

*Повітряний конденсатор з паралельними пластинами ємністю  $C = 100 \text{ нФ}$  має заряд величиною  $q = 0,1 \text{ мкКл}$  на кожній пластині. Відстань між пластинами становить  $d = 0,5 \text{ мм}$ . Визначте різницю потенціалів між пластинами; площу кожної з пластини; величину електричного поля між пластинами та поверхневу густину заряду на кожній пластині.*

**Дано:**

$$C = 100 \text{ пФ}$$

$$q = 0,1 \text{ мкКл}$$

$$d = 0,5 \text{ мм}$$

$$U = ? \quad S = ?$$

$$E = ? \quad \sigma = ?$$

**Розв'язання**

Щоб знайти різницю потенціалів, нам потрібно скористатися визначенням ємності конденсатора

$$C = \frac{q}{U}.$$

Тому

$$U = \frac{q}{C} = \frac{0,1 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-12}} = 1000 \text{ В}.$$

Щоб знайти площу пластин, нам потрібно використати вираз для ємності

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

Якщо відстань між пластинами  $d = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ , то площа кожної пластини дорівнює

$$S = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 100 \cdot 10^{-12}}{8,85 \cdot 10^{-12}} = 5,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Різниця потенціалів пов'язана з напруженістю електричного поля наступним співвідношенням

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi.$$

Для одновимірного випадку величина напруженості електричного поля дорівнює

$$E = \frac{U}{d} = \frac{1000}{5 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 10^6 \text{ В/м}.$$

Поверхневу густину заряду можна знайти з рівняння

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{10^{-7}}{5,6 \cdot 10^{-3}} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}^2.$$

**Відповідь:**  $U = 1000 \text{ В}$ ;  $S = 5,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ ;  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ В/м}$ ;  $\sigma = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}^2$ .

### Задача 9.2.15

На плоский повітряний конденсатор подається різниця потенціалів  $U_1 = 4$  кВ. Після зарядки конденсатор від'єднують від джерела і розсовують пластини (обкладки) таким чином, що відстань між ними збільшується удвічі. Визначити роботу з розсування обкладок. Розміри пластин  $S = 170 \text{ см}^2$ , початкова відстань між пластинами  $d = 6 \text{ см}$ .

| Дано:                  | Розв'язання                                                                                           |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $U_1 = 4 \text{ кВ}$   | Робота з розсування пластин конденсатора $A$ залежить від зміни енергії $PE$ зарядженого конденсатора |
| $S = 170 \text{ см}^2$ |                                                                                                       |
| $d = 6 \text{ см}$     |                                                                                                       |
| $d_1 = 2d$             | Енергія зарядженого конденсатора визначається його ємністю $C$ і різницею потенціалів $U$             |
| $A = ?$                |                                                                                                       |

$$A = PE_2 - PE_1. \quad (1)$$

$$PE = \frac{CU^2}{2}. \quad (2)$$

Ємність – головна характеристика конденсатора, залежить від заряду  $q$

$$C = \frac{q}{U}. \quad (3)$$

З умови задачі відомо, що конденсатор зарядили та відокремили від джерела струму. Отже, заряд на пластинах не змінився, тобто  $q_1 = q_2 = \text{const}$ .

Беручи до уваги (3), можна написати

$$C_1 U_1 = C_2 U_2, \quad (4)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – ємності конденсатора до та після розсування обкладок, відповідно.

Ємність плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}, \quad (5)$$

де  $\varepsilon$  – діелектрична проникність середовища (у випадку повітряного конденсатора  $\varepsilon=1$ ),  $S$  – площа пластини конденсатора;  $d$  – відстань між пластинами.

З умови задачі відомо, що після розсування обкладок відстань між ними збільшилась удвічі.

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \text{ і } C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1} = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}. \quad (6)$$

З (6) випливає, що  $C_1 = 2C_2$  і, беручи до уваги (4),  $U_2 = 2U_1$ . Тоді робота з розсування обкладок конденсатора, враховуючи (1) і (6)

$$A = \frac{C_2 U_2^2}{2} - \frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{0,5 C_1 \cdot 4 U_1^2}{2} - \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{\varepsilon_0 S U_1^2}{2d}. \quad (7)$$

$$A = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 170 \cdot 10^{-4} \cdot (4 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 6 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Дж} = 20 \text{ мкДж}.$$

Розмірність результату:

$$[A] = \frac{\Phi \cdot \text{м}^2 \cdot \text{В}^2}{\text{м} \cdot \text{м}} = \Phi \cdot \text{В}^2 = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}^2}{\text{В}} = \text{Кл} \cdot \text{В} = \text{Дж}.$$

**Відповідь:**  $A = 20 \text{ мкДж}$ .



### 9.3. Задачі для самостійної роботи

**9.3.1.** Два точкових електричних заряди ( $q_1 = 1$  нКл і  $q_2 = -8$  нКл) взаємодіють із силою  $F = 50$  мН. Визначити відстань  $r$  між зарядами.

**Відповідь:**  $r = 1,2$  мм.

**9.3.2.** Електричне поле створене двома точковими зарядами  $q_1 = 2$  мкКл і  $q_2 = -3$  мкКл, які знаходяться на відстані  $r = 1,1$  м один від одного. Визначити напруженість  $E$  електричного поля в точці  $C$ , яка знаходиться на прямій, що з'єднує заряди, та віддалена від позитивного заряду на 50 см.

**Відповідь:**  $E = 147$  кВ/м.

**9.3.3.** Електричне поле створене двома точковими зарядами  $q_1 = 8$  мкКл і  $q_2 = -3$  мкКл, відстань між якими  $r = 12$  см. Визначити потенціал  $\varphi$  електричного поля в точці  $C$ , яка знаходиться на прямій, що з'єднує заряди, та віддалена від позитивного заряду на 8 см.

**Відповідь:**  $\varphi = 225$  кВ.

**9.3.4.** Два точкових електричних заряди  $q_1 = 2$  мкКл і  $q_2 = 3$  мкКл знаходяться на відстані  $r = 3$  см. Визначити роботу  $A$ , яку треба виконати для того, щоб зблизити заряди до відстані 1 см.

**Відповідь:**  $A = -3,6$  Дж.

**9.3.5.** Дві різнойменно заряджені нитки розташовані на відстані  $r_1 = 7$  мм. Лінійні густини електричного заряду ниток дорівнюють  $\lambda_1 = 2$  мкКл/м і  $\lambda_2 = 90$  мКл/м, відповідно. Визначити роботу (на одиницю довжини), яку треба виконати для того, щоб розсунути нитки на відстань  $r_2 = 2$  см.

**Відповідь:**  $A_l = 3,4$  кДж.

**9.3.6.** Визначити силу (на одиницю площі), з якою відштовхуються дві однойменно заряджені паралельні площини. Поверхневі густини електричного заряду площин дорівнюють  $\sigma_1 = 50$  нКл/м<sup>2</sup> і  $\sigma_2 = 3$  нКл/м<sup>2</sup>, відповідно.

**Відповідь:**  $F_s = 8,5$  мкН.

**9.3.7.** Визначити потенціал  $\varphi$  точки поля, яка віддалена на  $r = 30$  см від центру зарядженої кулі. Поверхнева густина заряду кулі  $\sigma = 2$  нКл/м<sup>2</sup>, радіус кулі  $R = 1$  см.

**Відповідь:**  $\varphi = 75$  мВ.

**9.3.8.** Різниця потенціалів між пластинами плоского конденсатора становить 22 кВ. Визначте швидкість протона, який влетів в конденсатор.

**Відповідь:**  $v = 2,05 \cdot 10^6$  м/с.

**9.3.9.** Визначити відстань між пластинами плоского конденсатора, якщо різниця потенціалів становить  $U = 13$  В, а поверхнева густина заряду на пластинах  $\sigma = 2$  нКл/м<sup>2</sup>.

**Відповідь:**  $d = 6$  см.

**9.3.10.** Електрон, прискорений різницею потенціалів  $U = 77$  В, з деякою швидкістю влітає в плоский горизонтально розташований конденсатор. Визначте швидкість електрона і час, через який він потрапить на пластину, подолавши при цьому відстань  $S = 4$  см від початку конденсатора.

**Відповідь:**  $v = 5,2 \cdot 10^6$  м/с,  $t = 7,7 \cdot 10^{-9}$  с.

**9.3.11.** Протон влітає в плоский горизонтально розташований конденсатор паралельно пластинам на рівній відстані від них. Через  $6 \cdot 10^{-3}$  с він потрапляє на одну з пластин. Визначити напруженість електричного поля в конденсаторі. Відстань між пластинами становить 19 мм.

**Відповідь:**  $E = 5,5$  мкВ/м.

**9.3.12.** Електрон, прискорений різницею потенціалів, влітає в плоский горизонтально розташований конденсатор паралельно пластинам на рівній відстані від них. Рухаючись з прискоренням  $2 \cdot 10^{13}$  м/с<sup>2</sup>, електрон потрапляє на одну з пластин. Визначити час руху електрона і різницю потенціалів на пластинах конденсатора. Відстань між пластинами конденсатора  $d = 6,5$  см.

**Відповідь:**  $t = 5,7 \cdot 10^{-8}$  с,  $U = 114$  В.

**9.3.13.** Знайти роботу  $A$  поля з переміщення заряду  $q = 10$  нКл з точки 1 в точку 2 між двома різнойменно зарядженими з поверхневою густиною  $\sigma = 0,4$

мкКл/м<sup>2</sup> нескінченними паралельними площинами, відстань  $l$  між якими дорівнює 3 см.

**Відповідь:**  $A = 13,6$  мкДж

**9.3.14.** Плоский повітряний конденсатор заряджений до різниці потенціалів 300 В. Визначити поверхневу густину заряду на пластинах конденсатора. Ємність конденсатора становить 12 пФ, площа пластин 0,02 м<sup>2</sup>.

**Відповідь:**  $\sigma = 1,8 \cdot 10^{-7}$  Кл/м<sup>2</sup>.

**9.3.15.** До пластин плоского повітряного конденсатора прикладена різниця потенціалів 100 В. Після від'єднання конденсатора від джерела напруги простір між пластинами заповнюється діелектриком ( $\varepsilon = 6$ ). Визначити різницю потенціалів між пластинами конденсатора і його ємність після заповнення. Площа пластин 0,02 м<sup>2</sup>, відстань між пластинами 3 мм.

**Відповідь:**  $U = 20$  В,  $C = 3,54 \cdot 10^{-10}$  Ф.

## 10. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

### 10.1. Теоретичні відомості

#### 10.1.1. Електричний струм. Густина струму

**Електричний струм** – це впорядкований рух електричних зарядів. За напрямок електричного струму приймають напрямок протилежний напрямку руху негативних зарядів, інакше кажучи, той напрям, в якому рухалися б позитивні заряди під дією різниці потенціалів. Наприклад, в металевих провідниках електричний струм створюється рухом електронів у напрямку, зворотному напрямку струму (рис. 10.1).

Впорядкований рух електричних зарядів може здійснюватися шляхом переміщення у просторі зарядженого тіла (провідника або діелектрика). Такий струм називають **конвекційним**.

Мікроскопічні електричні заряди можуть рухатися впорядковано незалежно від макроскопічних тіл, створюючи струм у вакуумі (наприклад, потоки електронів у електронно-променевих трубках).

Впорядкований рух електричних зарядів всередині макроскопічного тіла (твердого, рідкого чи газоподібного) під дією електричного поля називають **струмом провідності**.

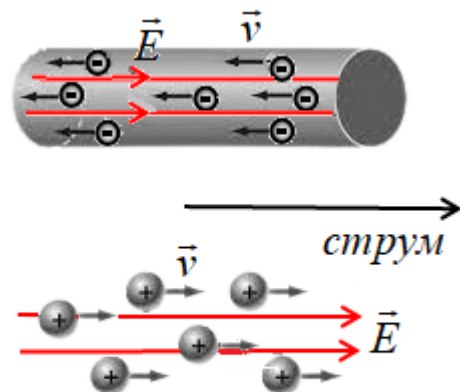


Рисунок 10.1

Для виникнення електричного струму провідності необхідно виконання двох умов:

1) наявність у середовищі **електричного поля**, енергія якого витрачається на переміщення вільних зарядів.

2) наявність у середовищі *вільних зарядів*, які б могли переміщатися в ньому. В провідниках (металах) електричний струм – це рух електронів (електронний струм). Але струм може складатися також і з інших типів заряджених частинок, наприклад, іонів. *Іон* – електрично заряджена частинка, що утворилася з атома або атомної групи внаслідок втрати або приєднання до них електронів. Іони можуть бути позитивними та негативними. Носіями струму в рідких провідниках є позитивні та негативні іони, в газах – позитивні іони та електрони.

Для існування струму в електричному ланцюзі протягом тривалого часу необхідний пристрій, в якому будь-який різновид енергії безперервно перетворювався б в енергію електричного поля. Такий пристрій називають *джерелом електрорушійної сили (ЕРС)* або *джерелом струму*.

За відсутності зовнішнього електричного поля, швидкості теплового руху носіїв струму розподілені хаотично та підпорядковуються загальним закономірностям статистичної фізики. За наявності поля носії заряду рухаються під його дією з *дрейфовою швидкістю*  $\vec{u}$  – середньою швидкістю спрямованого руху, яка в звичайних умовах становить  $\sim 10^{-3}$  м/с. Електричний струм є пропорційним цій швидкості, а дрейфова швидкість своєю чергою є пропорційною напруженості зовнішнього електричного поля.

Кількісною мірою електричного струму є *сила струму*  $I$  – скалярна величина, яка чисельно дорівнює заряду, що переноситься через поперечний переріз провідника за одиницю часу

$$I = \frac{dq}{dt} . \quad (10.1)$$

$$[I] = \text{Ампер} = \text{А} .$$

Якщо сила струму не змінюється з плином часу (при цьому протягом рівних проміжків часу через переріз провідника проходять однакові заряди), такий струм називають *постійним*.

Оскільки електричний струм може нерівномірно розподілятися поверхнею, через яку він протікає, для характеристики розподілення струму за перетином

провідника вводять **вектор густини струму**  $\vec{j}$ . Модуль вектора  $\vec{j}$  чисельно дорівнює відношенню сили струму  $dI$  через елементарну площину, розташовану перпендикулярно напрямку руху носіїв заряду, до її площі  $dS_{\perp}$

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}, \quad (10.2)$$

а напрямок  $\vec{j}$  збігається з напрямком вектора швидкості  $\vec{u}$  впорядкованого руху позитивних носіїв заряду (або є зворотним відносно напрямку впорядкованого руху негативних носіїв заряду).

$$[j] = \frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

Якщо існують як негативні, так й позитивні носії заряду, то

$$\vec{j} = \rho_+ \vec{u}_+ + \rho_- \vec{u}_-, \quad (10.3)$$

де  $\rho_+$  і  $\rho_-$  – об’ємні густини позитивних та негативних носіїв заряду,  $\vec{u}_+$  і  $\vec{u}_-$  – швидкості їх впорядкованого руху.

В провідниках, у яких носіями струму є електрони ( $\rho_- < 0, u_+ = 0$ ), густина струму

$$\vec{j} = \rho_- \vec{u}_-. \quad (10.4)$$

Знаючи вектор густини струму в кожній точці поверхні  $S$ , можна знайти силу струму через цю поверхню

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad (10.5)$$

де  $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ , а  $\vec{n}$  – позитивна нормаль до елементарної поверхні  $dS$ .

Швидкість електронів  $u = l/t$ , де  $l$  – шлях, пройдений електроном протягом часу  $t$ . Якщо час виразити з визначення струму  $I = \frac{dq}{dt}$ , то, проінтегрувавши у межах від нуля до кількості електронів  $q = N \cdot e$ , що пройшли за цей час крізь перетин провідника, можна отримати

$$\int_0^{Ne} dq = I \int_0^t dt ,$$

$$Ne = I \cdot t ,$$

звідки

$$t = \frac{Ne}{I} , \quad (10.6)$$

а дрейфова швидкість

$$u = \frac{l}{t} = \frac{l}{(Ne/I)} = \frac{l \cdot I}{Ne} . \quad (10.7)$$

Враховуючи, що *густина вільних електронів*  $n = \frac{N}{V}$ , дрейфова швидкість

руху електронів набуває вигляду

$$u = \frac{l \cdot I}{Ne} = \frac{l \cdot S}{N \cdot e} \cdot \frac{I}{S} = \frac{(I/S)}{(Ne/lS)} = \frac{j}{e(N/V)} = \frac{j}{ne} ,$$

$$u = \frac{j}{ne} . \quad (10.8)$$

Досліди показали, що густина постійного струму однакова в межах всього поперечного перерізу  $S$  однорідного провідника, а саме,  $I = j \cdot S$ . В електричному ланцюзі постійного струму, який складається з провідників, що мають змінну площу, густини струмів у різних перерізах  $S_1$  та  $S_2$  обернено пропорційні площам цих перерізів:

$$\frac{j_1}{j_2} = \frac{S_2}{S_1} . \quad (10.9)$$

Як вже зазначалося вище, усі заряджені частинки (електрони провідності в метали, іони в електроліті, іони та електрони в газі) здійснюють хаотичний (тепловий) рух. Електричне поле в речовині додає усім вільним зарядженим частинкам додаткову швидкість впорядкованого руху  $\vec{u}$ , обумовлюючи струм. Середня швидкість впорядкованого руху  $u$  в твердих та рідких провідних тілах зазвичай мала ( $10^{-1} - 10^{-3}$  см/с), тобто у ланцюзі постійного струму електрони рухаються вздовж провідника досить повільно. Ця швидкість впорядкованого

руху не має ніякого відношення до швидкості розповсюдження струму в провіднику. Коли на електростанції вмикають рубильник, струм в оселі з'являється в момент приходу електромагнітної хвилі, що розповсюджується вздовж дротів зі швидкістю  $v$ , яка дорівнює швидкості світла у середовищі, що оточує дроти:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}, \quad (10.10)$$

де  $c$  – швидкість світла у вакуумі,  $\varepsilon$  – діелектрична проникність,  $\mu$  – магнітна проникність середовища. Швидкість цієї хвилі і є швидкістю розповсюдження струму в провіднику.

### 10.1.2. Електрорушійна сила

У випадку, коли на носії струму діють виключно сили електростатичного поля, позитивні носії струму рухаються у напрямку від більшого потенціалу до меншого, а негативні – навпаки (рис. 10.2).

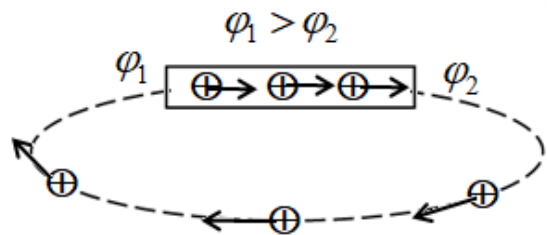


Рисунок 10.2

В результаті відбувається вирівнювання потенціалу, і, відповідно, до припинення струму. Отже, для підтримання постійного струму в електричному ланцюзі повинні діяти сили іншого, неелектростатичного походження, так звані **сторонні сили**, які безперервно переносили б заряди від кінця провідника з меншим значенням потенціалу  $\varphi_2$  (носії заряду передбачаються позитивними) до кінця провідника з більшим значенням потенціалу  $\varphi_1$ . Це можуть бути сили вихрового поля, породженого змінним магнітним полем, або сили, обумовлені хімічною та фізичною неоднорідністю провідника (наприклад, сили, що виникають при дотику різнорідних провідників – у гальванічних елементах, акумуляторах, або провідників з різними температурами – у термоелементах).



Сторонні сили можна характеризувати роботою, яку вони здійснюють над зарядами, що переміщуються в електричному ланцюзі. **Електрорушійна сила (ЕРС)**, яка діє в електричному ланцюзі або на його ділянці, чисельно дорівнює роботі, яку здійснюють сторонні сили при переміщенні одиничного позитивного заряду

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{q}, \quad (10.11)$$

де  $A_{\text{ст}}$  – робота сторонніх сил над зарядом  $q$ .

Стороння сила  $\vec{F}_{\text{ст}} = q\vec{E}^*$ . Векторну величину  $\vec{E}^*$  називають **напруженістю поля сторонніх сил**. Роботу сторонніх сил, що діють на заряд  $q$  при його русі замкнутим електричним ланцюгом, можна записати як

$$A_{\text{ст}} = \oint \vec{F}_{\text{ст}} d\vec{l} = \oint q\vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}. \quad (10.12)$$

Поділивши цю роботу на  $q$ , отримаємо ЕРС, що діє в електричному ланцюзі:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}^* d\vec{l}, \quad (10.13)$$

З математичної точки зору, ЕРС, що діє у замкнутому ланцюзі, можна визначити як циркуляцію вектора напруженості поля сторонніх сил.

Крім сторонніх сил на заряд діють сили електростатичного поля

$$\vec{F}_{\text{ел}} = q\vec{E}, \quad (10.14)$$

отже, результуюча сила, що діє на заряд  $q$  в кожній точці ланцюга, дорівнює

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{ст}} + \vec{F}_{\text{ел}} = q(\vec{E} + \vec{E}^*). \quad (10.15)$$

Робота, яку здійснює ця сила на заряд  $q$  на ділянці 1-2, визначається виразом

$$A_{12} = q \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l} + q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = q\mathcal{E}_{12} + q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (10.16)$$

оскільки на ділянці ланцюга 1-2 напруженість електричного поля  $E = -\frac{d\varphi}{dl}$ .

Величину, що чисельно дорівнює роботі, яку здійснюють електростатичні та сторонні сили при переміщенні одиничного позитивного заряду, називають **падінням напруги** або **напругою**  $U$  на даній ділянці ланцюга

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}. \quad (10.17)$$

За відсутності сторонніх сил, коли  $\mathcal{E}_{12} = 0$ , напруга  $U$  збігається з різницею потенціалів

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (10.18)$$

Одиницею ЕРС, потенціалу і напруги є Вольт

$$[\mathcal{E}] = [\varphi] = [U] = \text{Вольт} = \text{В}.$$

### 10.1.3. Закон Ома в інтегральній формі

**Закон Ома:** сила струму, який протікає однорідним провідником, пропорційна різниці потенціалів на його кінцях (напрузі  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ ):

$$I = \frac{U}{R}, \quad (10.19)$$

де  $R$  – *електричний опір*.

$$[R] = \text{Вольт/Ампер} = \text{В/А} = \text{Ом}.$$

Опір провідника залежить від його форми й розмірів, матеріалу і температури, а також від конфігурації (розподілення) струму в межах провідника. Для однорідного циліндричного провідника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (10.20)$$

де  $\rho$  – *питомий опір*, який залежить від матеріалу провідника і температури (рис. 10.3, а),  $l$  і  $S$  – довжина та площа поперечного перерізу провідника.

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (10.21)$$

де  $\rho_0$  – питомий опір при  $0^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  – *температурний коефіцієнт опору*.

Для опису температурної залежності питомого опору провідника вводять *температурний коефіцієнт опору*  $\alpha$ , що чисельно дорівнює відносній зміні питомого опору речовини провідника при збільшенні його температури на 1 К (або на  $1^\circ\text{C}$ )

$$\alpha = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0 (T - T_0)}, \quad (10.22)$$

де  $\rho$  і  $\rho_0$  – питомі опори речовини провідника, відповідно, за температури  $T_0 = 273\text{K}$  та за даної температури  $T$ .

Враховуючи залежність опору провідника  $R$  від  $\rho$  і нехтуючи незначною температурною залежністю співвідношення  $l/S$ , для опору провіднику можна записати

$$R = R_0(1 - \alpha\Delta T) = R_0(1 - \alpha\Delta t), \quad (10.23)$$

де  $R$  і  $R_0$  – опори провідника за температури  $T_0 = 273\text{K}$  ( $0^\circ\text{C}$ ) та за даної температури  $T$  ( $t^\circ\text{C}$ ).

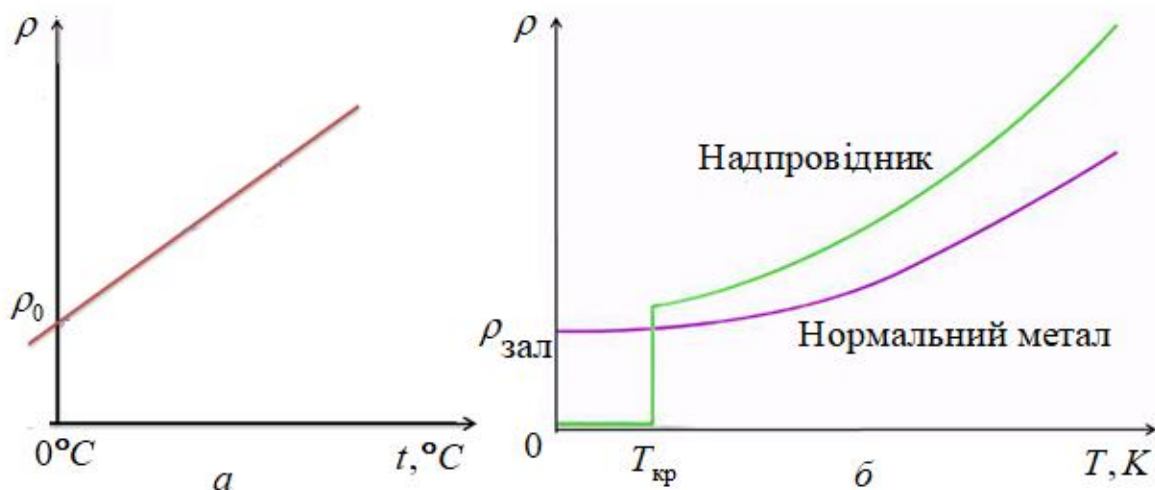


Рисунок 10.3

При зниженні температури до абсолютного нуля опір нормальних металів прямує до постійного значення – **залишкового опору**. Винятком з цього правила є **надпровідні** метали та сплави, в яких опір зникає нижче за деяку **критичну температуру**  $T_{\text{кр}}$  (температура переходу в надпровідний стан) (рис. 10.3, б).

#### 10.1.4. Паралельне та послідовне з'єднання провідників (резисторів)

**Резистор** – найпростіший прилад, присутній практично в усіх електричних схемах, основним параметром якого є електричний опір. Резистором є будь-який зразок провідної речовини із заданим опором  $R$ . Виготовляють резистори з матеріалів із малими значеннями електропровідності, що дозволяє отримувати великі значення опору при малих розмірах резисторів. Електричне коло зазвичай складається з декількох провідників, які можуть бути з'єднані між собою по-різному.

Для  $n$  провідників з опором  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , що з'єднані між собою **послідовно** (рис. 10.4, *a*), загальний опір кола дорівнює сумі опорів всіх включених в коло провідників

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i, \quad (10.24)$$

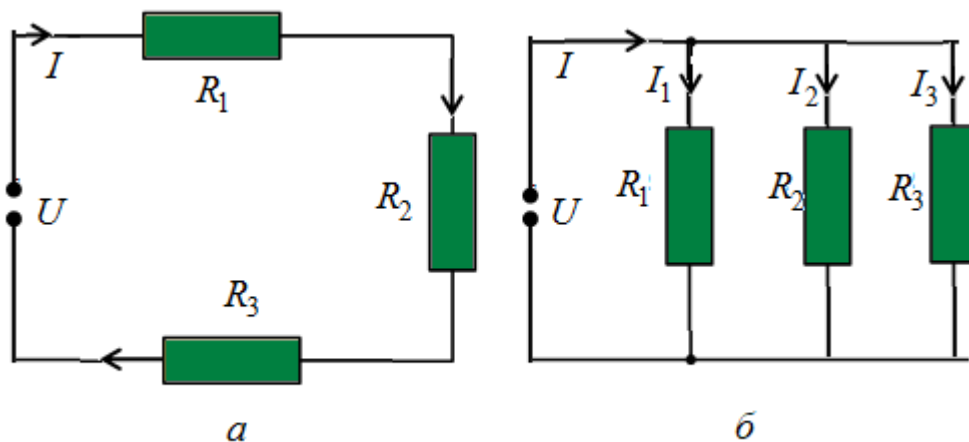


Рисунок 10.4

Сила струму в усіх провідниках однакова:

$$I = I_1 = I_2 = \dots = I_n, \quad (10.25)$$

Повна напруга в колі при послідовному з'єднанні, або напруга на полюсах джерела струму, дорівнює сумі напруг на окремих ділянках кола

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \sum_{i=1}^n U_i. \quad (10.26)$$

У разі **паралельного з'єднання** (рис. 10.4, б), спад напруги між двома вузлами, що поєднують елементи кола, однаковий для всіх елементів. При цьому величина, обернена загальному опору кола, дорівнює сумі величин, обернених опорів паралельно з'єднаних провідників

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (10.27)$$

Сила струму в загальному колі рівна сумі сил струмів у вітках розгалуження (ділянках електричного кола, якими протікає однаковий струм):

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \sum_{i=1}^n I_i, \quad (10.28)$$

Напруга на кожній ділянці такого кола однакова і дорівнює напрузі на кінцях всіх паралельно з'єднаних між собою провідників:

$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_n. \quad (10.29)$$

#### **10.1.5. Закон Ома для однорідної та неоднорідної ділянок ланцюга**

Якщо ділянка ланцюга не містить ЕРС (рис. 10.5, а), таку ділянку називають **однорідною**, і закон Ома для неї має вигляд:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}, \quad (10.30)$$

де  $\varphi_1 - \varphi_2$  – різниця потенціалів на кінцях ділянки ланцюга,  $R$  – її електричний опір.

Ділянку електричного ланцюга, яка містить ЕРС (рис. 10.5, б), називають **неоднорідною**, і для неї закон Ома має вигляд

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \mathcal{E}}{R + r}, \quad (10.31)$$

де  $\varphi_1 - \varphi_2$  – різниця потенціалів на кінцях ділянки ланцюга,  $R$  – опір зовнішньої ділянки електричного ланцюга,  $r$  – опір джерела ЕРС. Знак ЕРС вважається

додатним, якщо напрямок струму збігається з переходом від негативного до позитивного полюсу джерела струму.

Якщо електричний ланцюг замкнути (рис. 10.5, в), тоді  $\varphi_1 = \varphi_2$ , і закон Ома для **повного ланцюга** набуває вигляду:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (10.32)$$

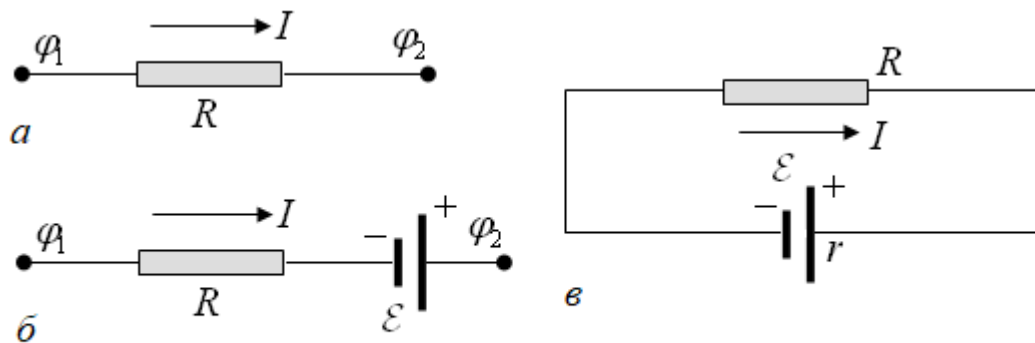


Рисунок 10.5

Якщо з'єднати клеми джерела проводом з дуже малим опором ( $R = 0$ ), то відбудеться **коротке замикання**, під час якого через джерело потече максимальний струм – **струм короткого замикання**:

$$I_{\text{кз}} = \frac{\mathcal{E}}{r}. \quad (10.33)$$

#### 10.1.6. Послідовне і паралельне з'єднання джерел струму

Дуже часто джерела струму з'єднують між собою для спільного живлення ланцюга. Батарея складається з декількох з'єднаних між собою елементів. Параметри батареї – електрорушійна сила ЕРС і внутрішній опір  $r$ , так само як і опір з'єднань резисторів, можна розрахувати на основі закону збереження заряду та закону Ома.

Якщо джерела струму з'єднані **послідовно** (рис. 10.6, а), загальна ЕРС дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС окремих джерел. Для визначення знаку ЕРС кожного джерела потрібно вибрати позитивний напрямок руху на ділянці з цим

джерелом. ЕРС джерела береться зі знаком "+", якщо напрям дії ЕРС збігається з обраним напрямком. В іншому випадку обирається знак "-".

$$\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots + \mathcal{E}_n = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i. \quad (10.34)$$

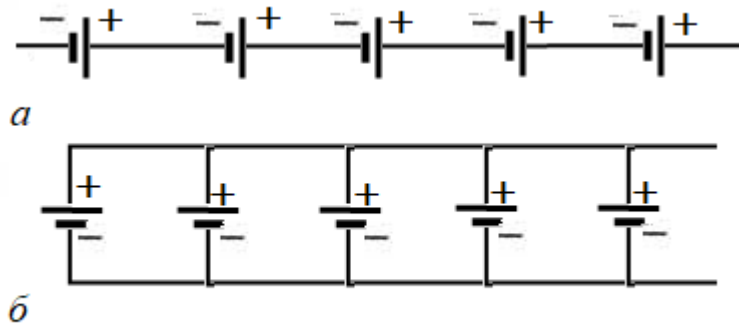


Рисунок 10.6

Загальний внутрішній опір батареї, яка складається з  $n$  елементів, дорівнює сумі внутрішніх опорів окремих елементів.

$$r_e = r_1 + r_2 + \dots + r_n = \sum_{i=1}^n r_i \quad (10.35)$$

Струм у ланцюзі дорівнює

$$I = \frac{\mathcal{E}_e}{R + r_e} = \frac{n \cdot \mathcal{E}}{R + n \cdot r}. \quad (10.36)$$

При **паралельному з'єднанні** джерел (рис. 10.6, б) з однаковими ЕРС та можливо різними внутрішніми опорами загальна ЕРС (ЕРС батареї) дорівнює ЕРС одного джерела.

$$\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_i. \quad (10.37)$$

Внутрішній опір батареї в цьому випадку розраховується як при паралельному з'єднанні провідників з опорами, що дорівнюють внутрішнім опорам джерел струму, а саме: величина, обернена загальному опору батареї, дорівнює сумі величин, обернених внутрішнім опором паралельно з'єднаних джерел струму.

$$\frac{1}{r_e} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}. \quad (10.38)$$

При паралельному з'єднанні джерел з різними ЕРС вираз для ЕРС батареї складний і тут не наводиться.

Струм, який тече через батарею паралельно з'єднаних однакових джерел струму, дорівнює

$$I = \frac{\mathcal{E}_e}{R + r_e} = \frac{\mathcal{E}}{R + r/n}. \quad (10.39)$$

### 10.1.7. Закон Ома у диференціальній формі

Знайдемо зв'язок між вектором густини струму та напруженістю поля у деякій точці ізотропного провідника.

Величини, що входять в закон Ома (10.19) можна виразити як

$$I = j \cdot dS; \quad U = E \cdot dl; \quad R = \rho \frac{dl}{dS}.$$

Підставимо ці вирази у формулу  $I = \frac{U}{R}$  та отримаємо **закон Ома у диференціальній формі**

$$j = \frac{1}{\rho} E. \quad (10.40)$$

У векторному вигляді закон Ома для однорідного провідника у диференціальній формі набуває вигляду

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \cdot \vec{E}, \quad (10.41)$$

де  $\sigma = \rho^{-1}$  – **питома електропровідність**.

$$[\sigma] = \text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} = \text{Сіммєнс} \cdot \text{м}^{-1} = \text{См} \cdot \text{м}^{-1}.$$

За умови дії сторонніх сил на неоднорідній ділянці електричного ланцюга **узагальнений закон Ома в диференціальній формі** має вигляд:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*), \quad (10.42)$$

де  $\vec{E}^*$  – напруженість поля сторонніх сил.



### 10.1.8. Закон Джоуля-Ленца. Потужність струму

Однією з дій електричного струму є його теплова дія: при проходженні струму через провідник, останній нагрівається.

**Закон Джоуля-Ленца:** кількість теплоти, яка виділяється у провіднику при проходженні струму через нього, пропорційна опору провідника, квадрату сили струму, а також часу його протікання:

$$Q = RI^2t. \quad (10.43)$$

Кількість теплоти можна виразити через інші параметри

$$Q = IUt = \frac{U^2}{R}t. \quad (10.44)$$

Якщо сила струму змінюється з плином часу, тоді

$$Q = \int_0^t RI^2 dt = \int_0^t UI dt = \int_0^t \frac{U^2}{R} dt. \quad (10.45)$$

Нагрівання провідника відбувається внаслідок виконання **роботи**, яка здійснюється силами поля над носіями струму. Скориставшись законом Ома для однорідної ділянки ланцюга в інтегральній формі і виразом для кількості теплоти, що виділяється в провіднику при проходженні струму, можна отримати наступний вираз для **роботи електричного струму**:

$$A = RI^2t = IUt = \frac{U^2}{R}t. \quad (10.46)$$

Одиницею роботи в СІ є Джоуль (Дж), але часто в техніці та в побутових розрахунках використовують позасистемну одиницю **кіловат-година**:

$$1 \text{ кВт} = 3600 \text{ кДж}, \text{ а } 1 \text{ Дж} = 2,78 \cdot 10^{-7} \text{ кВт} \cdot \text{год}.$$

За величиною роботи (10.46), яку виконує електричний струм за деякий проміжок часу, можна розрахувати й потужність струму. Під **потужністю струму** розуміють роботу, яка виконується за одиницю часу.

$$P = \frac{dA}{dt} = IU = I^2R = \frac{U^2}{R}. \quad (10.47)$$

$$[P] = \text{Ват} = \text{Вт}.$$

Якщо коло складається з кількох споживачів, то, розраховуючи їхню фактичну потужність, слід пам'ятати, що за будь-якого з'єднання споживачів загальна потужність струму в усьому колі дорівнює сумі потужностей окремих споживачів.

#### **10.1.9. Розгалужені кола. Правила Кірхгофа**

Правила (закони) Кірхгофа встановлюють співвідношення між струмами та напругами у розгалужених електричних ланцюгах довільного типу. Найчастіше закони Кірхгофа застосовуються для розрахунку розгалужених електричних кіл, оскільки разом із законом Ома вони дозволяють визначити величину та напрямок електричного струму в окремих вітках та величину електричної напруги на затискачах окремих елементів.

Для формулювання правил Кірхгофа вводяться поняття вузол, гілка (вітка) та контур електричного ланцюга.

**Гілкою (віткою)** називають ділянку електричного ланцюга з тим самим струмом.

**Вузлом** називають точку з'єднання трьох і більше гілок.

**Контур** – замкнутий шлях, що проходить через кілька гілок і вузлів розгалуженого електричного кола. Термін **замкнутий шлях** означає, що, почавши з деякого вузла ланцюга і пройшовши одноразово по кількох гілках і вузлах, можна повернутися у вихідний вузол. Гілки та вузли, які зустрічаються при такому обході, належать до даного контуру. При цьому потрібно мати на увазі, що гілка та вузол можуть належати одночасно до кількох контурів.

**Перше правило Кірхгофа (правило струмів):** алгебраїчна сума струмів, що сходяться у даному вузлу, дорівнює нулю (рис.10.7, а).

При цьому спрямований до вузла струм прийнято вважати позитивним, а спрямований від вузла – негативним.

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0. \quad (10.48)$$

Якщо  $m$  – число вузлів у ланцюзі, то **кількість незалежних рівнянь** згідно з першим правилом Кірхгофа дорівнює  $m - 1$ .

Це правило випливає з фундаментального закону збереження електричного заряду.

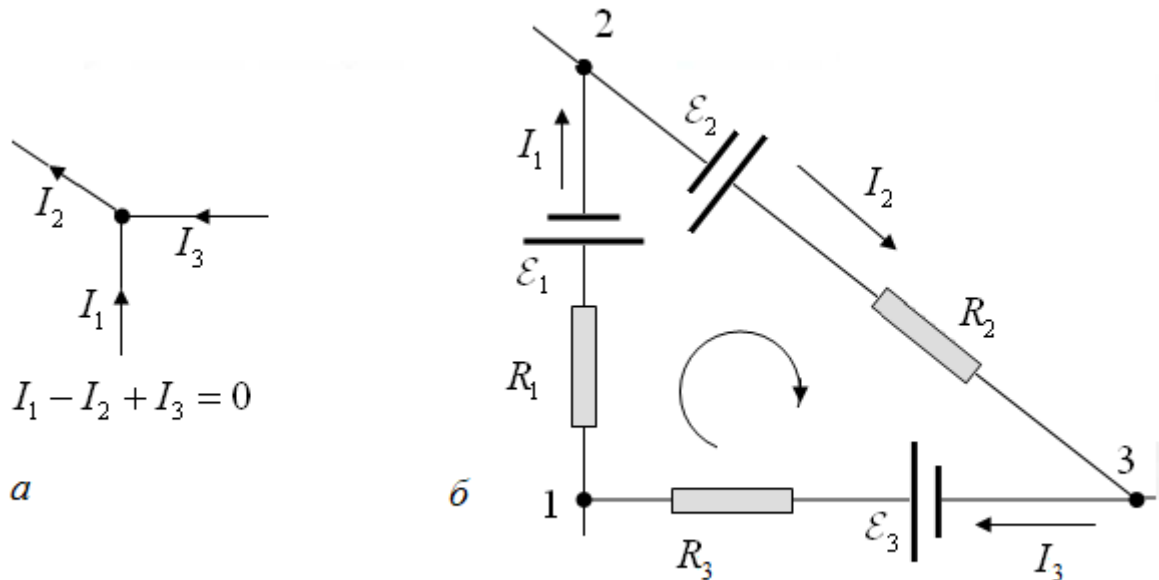


Рисунок 10.7

**Друге правило Кірхгофа (правило напруг):** алгебраїчна сума спадів напруги (добутків сил струму на опори відповідних гілок) у замкненому контурі дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, які діють у цьому контурі (рис. 10.7, б):

$$\sum_{i=1}^n I_i \cdot R_i = \sum_{i=1}^k \mathcal{E}_i \quad (10.49)$$

При складанні рівняння напруги для контуру спочатку потрібно обрати напрямок обходу цього контуру. Знаки величин сили струму та ЕРС є умовними, але мають бути узгодженими між собою. Тому вони визначаються за наступними правилами. Якщо даний струм  $I_i$  (а, відповідно, і спад напруги) за напрямком збігається з напрямком обходу контуру, обраним при складанні рівнянь за правилом напруг (10.49), то його вважають позитивним ( $I_i > 0$ ). Знак ЕРС збігається зі знаком роботи сторонніх сил всередині джерела струму при переміщенні **позитивних носіїв** заряду в напрямку обходу контуру. Це означає,

що якщо при русі вздовж обраного напрямку обходу контуру ми спочатку зустрічаємо від'ємний полюс джерела струму і рухаємося до його додатного полюсу, ЕРС такого джерела струму є додатною ( $\mathcal{E}_i > 0$ ), і навпаки.

**Кількість незалежних рівнянь** згідно з другим правилом Кірхгофа дорівнює  $[p - (m - 1)]$ , де  $p$  – кількість гілок у електричному ланцюзі.

Окремим випадком другого правила для ланцюга, що складається з одного контуру, є закон Ома для цього ланцюга.

Використання правил Кірхгофа спрощує розрахунок розгалуженого електричного ланцюга до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Хоча таке розв'язання зазвичай не викликає принципових труднощів, інколи буває дуже громіздким, навіть у разі досить простих кіл. Якщо в результаті рішення сила струму на якійсь ділянці електричного кола виявляється негативною, це означає, що насправді струм на цій ділянці тече в напрямку, протилежному тому, який було умовно обрано на початку складання першого правила Кірхгофа.

Слід також зазначити, що правила Кірхгофа дозволяють у принципі розрахувати скільки завгодно складні ланцюги. Але обчислення можуть бути досить складними. Тому рекомендується спочатку пошукати можливу симетрію ланцюга. Іноді з міркувань симетрії стає очевидним, що деякі струми дорівнюють один одному або деякі напруги дорівнюють нулю (і тоді дану ділянку ланцюга можна виключити з розгляду). Якщо це виконується, обчислення суттєво спрощуються.

## 10.2. Приклади розв'язання задач

### Задача 10.2.1

Визначити густину  $j$  струму в мідному дроті довжиною  $l = 10$  м, якщо різниця потенціалів на його кінцях  $\varphi_1 - \varphi_2 = 12$  В.

**Дано:**

$$l = 10 \text{ м}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 12 \text{ В}$$

$$\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$$

$$j = ?$$

**Розв'язання**

Оскільки мідний дріт є однорідним провідником, тому густина струму в ньому визначається як

$$j = \frac{I}{S}. \quad (1)$$

Струм  $I$  можна знайти з закону Ома для однорідної ділянки ланцюга

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}. \quad (2)$$

Опір провідника можна виразити з формули

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (3)$$

Підставимо (2) і (3) в (1), і отримуємо

$$j = \frac{I}{S} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)S}{\rho l \cdot S} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{\rho l} = \frac{12}{1,7 \cdot 10^{-8} \cdot 10} = 7 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2.$$

Такий же результат можна отримати, якщо використати закон Ома в диференціальній формі

$$j = \sigma E, \quad (4)$$

де  $\sigma$  – питома електрична провідність речовини,  $E$  – напруженість електричного поля всередині однорідного провідника, яка визначається як

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l}. \quad (5)$$

Зважаючи на те, що провідність обернено пропорційна питомому опору

$$\sigma = \frac{1}{\rho}, \quad (6)$$

отримуємо такий же результат, як і в попереднім (1) методом

$$j = \sigma E = \frac{E}{\rho} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\rho l}.$$

Розмірність результату:

$$[j] = \frac{\text{В}}{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{А} \cdot \text{Ом}}{\text{Ом} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

**Відповідь:**  $j = 7 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2$ .

### Задача 10.2.2

Електрична лампочка розжарювання споживає струм  $I = 0,2 \text{ А}$ . Діаметр вольфрамової нитки  $d = 0,02 \text{ мм}$ , температура волоска під час горіння лампи  $t = 2000^\circ\text{C}$ . Визначить напруженість  $E$  електричного поля в нитці. Питомий опір вольфраму  $\rho_0 = 0,056 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ , термічний коефіцієнт опору  $\alpha = 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ град}^{-1}$ .

**Дано:**

$$I = 0,2 \text{ А}$$

$$d = 0,02 \text{ мм}$$

$$t = 2000^\circ\text{C}$$

$$\rho_0 = 0,056 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$$

$$\alpha = 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ град}^{-1}$$

$$E = ?$$

**Розв'язання**

Для розв'язання задачі потрібно використати закон Ома для ділянки ланцюга та формулу для опору. Особливість розв'язання задачі в тому, що треба зв'язати напруженість електричного поля всередині провідника з силою струму, площею перерізу та питомим опором провідника.

Припустимо, що по провіднику, що має довжину  $l$  і площу перерізу  $S$ , тече струм  $I$ , тоді напруга на кінцях провідника становить

$$U = IR. \quad (1)$$

Зв'язок між напруженістю  $E$  і напругою (різницею потенціалів)  $U$  :

$$E = \frac{U}{l}, \quad (2)$$

звідки

$$U = El. \quad (3)$$

Опір провідника дорівнює

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (4)$$

тоді, підставляючи напругу (3) і опір (4) в формулу закону Ома (1), отримуємо

$$E = \frac{I}{S} \rho. \quad (5)$$

Зі співвідношення (5) випливає, що при зростанні температури провідника і при постійній густині струму, напруженість поля в провіднику зростає, оскільки з ростом температури зростає питомий опір  $\rho$ .

Питомий опір залежить від температури як

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t), \quad (6)$$

де  $\rho_0$  – питомий опір при  $0^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  – термічний коефіцієнт опору.

Тепер, з урахуванням формули (6), даних задачі та того, що  $S = \pi d^2/4$ , вираз (5) набуває вигляду

$$E = \frac{4I}{\pi d^2} \rho_0 (1 + \alpha t). \quad (7)$$

Підставляючи в (7) числові дані, отримуємо

$$E = \frac{4 \cdot 0,2 \cdot 0,056 \cdot 10^{-6} (1 + 4,6 \cdot 10^{-3} \cdot 2000)}{\pi (0,02 \cdot 10^{-3})^2} = 360 \text{ В/м.}$$

Перевірка розмірності:

$$[E] = \frac{\text{А} \cdot \text{Ом} \cdot \text{м} (\text{град}^{-1} \cdot \text{град})}{\text{м}^2} = \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

**Відповідь:**  $E = 360 \text{ В/м.}$

### Задача 10.2.3

При послідовному замиканні джерела струму на опори  $R_1$  і  $R_2$  в них виділилася рівна кількість тепла. Знайти внутрішній опір  $r$  джерела струму.

| Дано:       | Розв'язання                                                        |
|-------------|--------------------------------------------------------------------|
| $R_1$       | Застосуємо закон Джоуля-Ленца для двох випадків, що розглядаються: |
| $R_2$       |                                                                    |
| $Q_1 = Q_2$ | $Q_1 = I_1^2 R_1 t$ і $Q_2 = I_2^2 R_2 t$ . (1)                    |
| $r = ?$     | Із закону Ома для повного ланцюга $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$  |

відповідні струми дорівнюють

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r} \quad \text{і} \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r}. \quad (2)$$

З умов задачі  $Q_1 = Q_2$ , тому можемо прирівняти вирази (1):

$$I_1^2 R_1 t = I_2^2 R_2 t$$

і підставити в них вирази (2)

$$\left( \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r} \right)^2 \cdot R_1 t = \left( \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r} \right)^2 \cdot R_2 t,$$

$$\frac{R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{R_2}{(R_2 + r)^2},$$

$$R_1 (R_2 + r)^2 = R_2 (R_1 + r)^2,$$

$$R_1 R_2^2 + r^2 R_1 = R_2 R_1^2 + r^2 R_2,$$

$$r^2 (R_1 - R_2) = R_1 R_2 (R_1 - R_2),$$

$$r^2 = R_1 R_2,$$

$$r = \sqrt{R_1 R_2}.$$

**Відповідь:**  $r = \sqrt{R_1 R_2}$ .



### Задача 10.2.4

Амперметр з опором  $R_A = 5 \text{ Ом}$  призначений для вимірювання струмів до  $I_A = 15 \text{ А}$ . Який опір треба взяти і як його під'єднати, щоб цим приладом можна було вимірювати: 1) силу струму до  $I_0 = 150 \text{ А}$ ; 2) різницю потенціалів до  $U_0 = 150 \text{ В}$ ?

**Дано:**

$$R_A = 5 \text{ Ом}$$

$$I_A = 15 \text{ А}$$

$$I_0 = 150 \text{ А}$$

$$U_0 = 150 \text{ В}$$

$$R_{\text{ш}} = ? \quad R_{\text{д}} = ?$$

**Розв'язання**

При вимірюванні сили струму на ділянці ланцюга  $a-b$  амперметр підключається між цими точками. Якщо струм, що вимірюється, є більшим за струм, на який розрахований амперметр ( $I_0 > I_A$ ) то паралельно до амперметра необхідно під'єднати провідник з опором  $R_{\text{ш}}$ , який називають **шунтом**.

При паралельному з'єднанні спади напруги на амперметрі та шунті однакові. Застосовуючи закон Ома для однорідної ділянки ланцюга можна записати:

$$I_A R_A = I_{\text{ш}} R_{\text{ш}},$$

звідки

$$I_{\text{ш}} = I_A \frac{R_A}{R_{\text{ш}}}$$

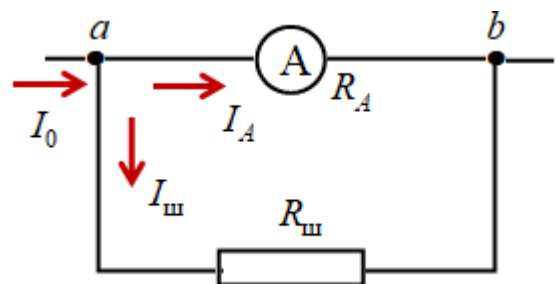
За 1 правилом Кірхгофа алгебраїчна сума струмів у вузлу  $a$  дорівнює нулю:

$$I_0 = I_A + I_{\text{ш}},$$

тоді

$$I_0 = I_A + I_A \frac{R_A}{R_{\text{ш}}},$$

звідки опір шунта становить

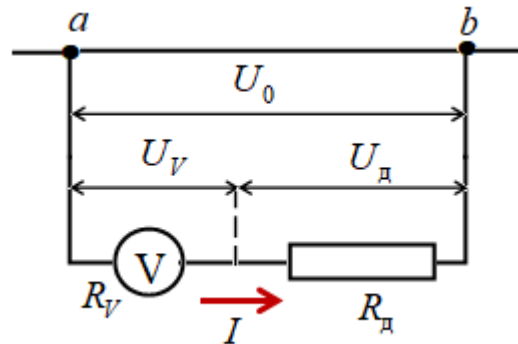


$$R_{\text{ш}} = \frac{R_A}{\frac{I_0}{I_A} - 1}.$$

Підставляючи числові значення, отримаємо

$$R_{\text{ш}} = \frac{5}{\frac{150}{15} - 1} = 0,55 \text{ Ом.}$$

2) Амперметр можна використовувати як вольтметр для вимірювання спаду напруги. Для цього вольтметр підключається паралельно до тієї ділянки ланцюга, де необхідно провести вимірювання. Якщо при цьому спад напруги  $U_0$  (наприклад, на ділянці ланцюга



$a-b$ ) перевищує допустиме значення спаду напруги на вольтметрі ( $U_0 > U_V$ ), послідовно до нього приєднують провідник, який називають **додатковий опір**  $R_d$ . Оскільки за умови паралельного з'єднання, струм, що проходить через вольтметр та додатковий опір, один і той же, то враховуючи закон Ома для однорідної ділянки ланцюга, отримуємо:

$$\frac{U_V}{R_V} = \frac{U_d}{R_d},$$

звідки

$$U_d = \frac{R_d}{R_V} U_V.$$

При послідовному з'єднанні вольтметра та додаткового опору

$$U_0 = U_V + U_d,$$

тоді

$$U_0 = U_V + U_V \frac{R_d}{R_V}.$$

Виразимо додатковий опір

$$R_d = R_v \left( \frac{U_0}{U_v} - 1 \right).$$

Максимальна напруга  $U_v$ , яку може витримати амперметр, який використовується як вольтметр, дорівнює  $U_v = I_A R_A$ , отже, додатковий опір становить

$$R_d = R_v \left( \frac{U_0}{I_A R_A} - 1 \right).$$

Підставивши числові значення, маємо

$$R_d = 5 \left( \frac{150}{15 \cdot 5} - 1 \right) = 5 \text{ Ом.}$$

Перевірка розмірності

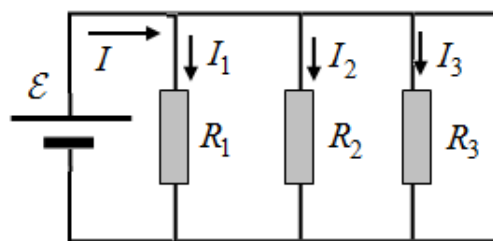
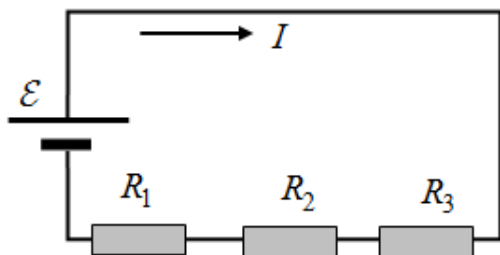
$$[R_{ш}] = \frac{\text{Ом}}{\text{А/А}} = \text{Ом},$$

$$[R_d] = \text{Ом} \left( \frac{\text{В}}{\text{А} \cdot \text{Ом}} \right) = \text{Ом}.$$

**Відповідь:**  $R_{ш} = 0,55 \text{ Ом}; R_d = 5 \text{ Ом}.$

### Задача 10.2.5

До джерела струму з електрорушійною силою  $\mathcal{E} = 125 \text{ В}$  під'єднали три провідники з опорами  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 30 \text{ Ом}$  та  $R_3 = 50 \text{ Ом}$ , з'єднавши їх послідовно і паралельно (див. рис). Визначити для кожної схеми підключення 1) загальний опір; 2) струм від джерела; 3) струм через кожен провідник; 4) напругу на кожному провіднику; 5) потужність, що споживається у кожному провіднику.



**Дано:**

$$R_1 = 20 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 30 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 50 \text{ Ом}$$

$$\mathcal{E} = 125 \text{ В}$$

$$R = ? \quad I = ?$$

$$I_1 = ? \quad I_2 = ? \quad I_3 = ?$$

$$U_1 = ? \quad U_2 = ? \quad U_3 = ?$$

$$P_1 = ? \quad P_2 = ? \quad P_3 = ?$$

**Розв'язання**

1) Для першого ланцюга з послідовно з'єднаними провідниками загальний опір дорівнює

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = 20 + 30 + 50 = 100 \text{ Ом.}$$

Загальний струм визначається напругою джерела живлення та загальним опором ланцюга;

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{125}{100} = 1,25 \text{ А.}$$

Струм через послідовно з'єднані резистори такий самий,

як загальний струм у ланцюзі.

$$I_1 = I_2 = I_3 = I = 1,25 \text{ А.}$$

Спад напруги на кожному провіднику можна знайти за допомогою закону Ома

$$U_1 = I_1 R_1 = 1,25 \cdot 20 = 25 \text{ В,}$$

$$U_2 = I_2 R_2 = 1,25 \cdot 30 = 37,5 \text{ В,}$$

$$U_3 = I_3 R_3 = 1,25 \cdot 50 = 62,5 \text{ В.}$$

У правильності наших розрахунків можна легко переконатися, додавши спади напруг. У послідовному ланцюзі вони повинні дорівнювати напрузі джерела живлення:

$$U_1 + U_2 + U_3 = \mathcal{E},$$

$$25 \text{ В} + 37,5 \text{ В} + 62,5 \text{ В} = 125 \text{ В.}$$

Для розрахунку потужності  $P$  можна використовувати будь-які дві величини з трьох, що характеризують електричний ланцюг: струм  $I$ , опір  $R$  і напругу  $U$ :

$$P = I^2 R = IU = \frac{U^2}{R}.$$

Але в цій задачі краще використовувати перший вираз, оскільки він включає опір, вказаний у даних задачі, і струми, розраховані за меншу кількість обчислювальних кроків у порівнянні з розрахунком падінь напруги.

$$P_1 = I_1^2 R_1 = (1,25)^2 \cdot 20 = 31,25 \text{ Вт},$$

$$P_2 = I_2^2 R_2 = (1,25)^2 \cdot 30 = 46,88 \text{ Вт},$$

$$P_3 = I_3^2 R_3 = (1,25)^2 \cdot 50 = 78,13 \text{ Вт}.$$

2) Для другого контуру з паралельно з'єднаними провідниками загальний опір можна знайти із суми зворотних величин:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{50} = \frac{31}{300},$$

$$R = \frac{300}{31} = 9,68 \text{ Ом}.$$

Загальний струм визначається напругою джерела живлення (ЕРС) та загальним опором ланцюга

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{125}{9,68} = 12,92 \text{ А}.$$

У паралельному ланцюзі на кожній гілці відбуваються однакові спади напруги

$$\mathcal{E} = U_1 = U_2 = U_3 = 125 \text{ В}.$$

Силу струму в кожній гілці можна знайти за допомогою закону Ома

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{125}{20} = 6,25 \text{ А},$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{125}{30} = 4,17 \text{ А},$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{125}{50} = 2,5 \text{ А}.$$

Як і в попередньому випадку, розрахунки можна перевірити. В цьому випадку

шляхом додавання струмів. У паралельному ланцюзі їх сума повинна дорівнювати струму від джерела живлення:

$$I_1 + I_2 + I_3 = I,$$

$$6,25 \text{ A} + 4,17 \text{ A} + 2,5 \text{ A} = 12,92 \text{ V}.$$

Вибір формули для розрахунку потужності визначається, як і в попередньому випадку, шляхом мінімізації обчислювальної похибки. Отже, електричні потужності для кожного провідника дорівнюють

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = \frac{(125)^2}{20} = 781,25 \text{ Вт},$$

$$P_2 = \frac{U_2^2}{R_2} = \frac{(125)^2}{30} = 520,83 \text{ Вт},$$

$$P_3 = \frac{U_3^2}{R_3} = \frac{(125)^2}{50} = 312,5 \text{ Вт}.$$

Слід зауважити, що при паралельному з'єднанні елемент з найменшим опором споживає найбільшу потужність.

**Відповідь:** 1)  $R = 100 \text{ Ом}$ ;  $I = 1,25 \text{ A}$ ;  $I_1 = I_2 = I_3 = 1,25 \text{ A}$ ;  $U_1 = 25 \text{ В}$ ;

$U_2 = 37,5 \text{ В}$ ;  $U_3 = 62,5 \text{ В}$ ;  $P_1 = 31,25 \text{ Вт}$ ;  $P_2 = 46,88 \text{ Вт}$ ;  $P_3 = 78,13 \text{ Вт}$ .

2)  $R = 9,68 \text{ Ом}$ ;  $I = 12,92 \text{ A}$ ;  $I_1 = 6,25 \text{ A}$ ;  $I_2 = 4,17 \text{ A}$ ,  $I_3 = 2,5 \text{ A}$ ;

$\mathcal{E} = U_1 = U_2 = U_3 = 125 \text{ В}$ ;  $P_1 = 781,25 \text{ Вт}$ ;  $P_2 = 520,83 \text{ Вт}$ ,  $P_3 = 312,5 \text{ Вт}$ .

### Задача 10.2.6

*Визначте опір ланцюга  $R$ , схема якого показана на рисунку, якщо опір кожного з провідників, розташованих між вузлами дорівнює  $R = 1 \text{ Ом}$ .*

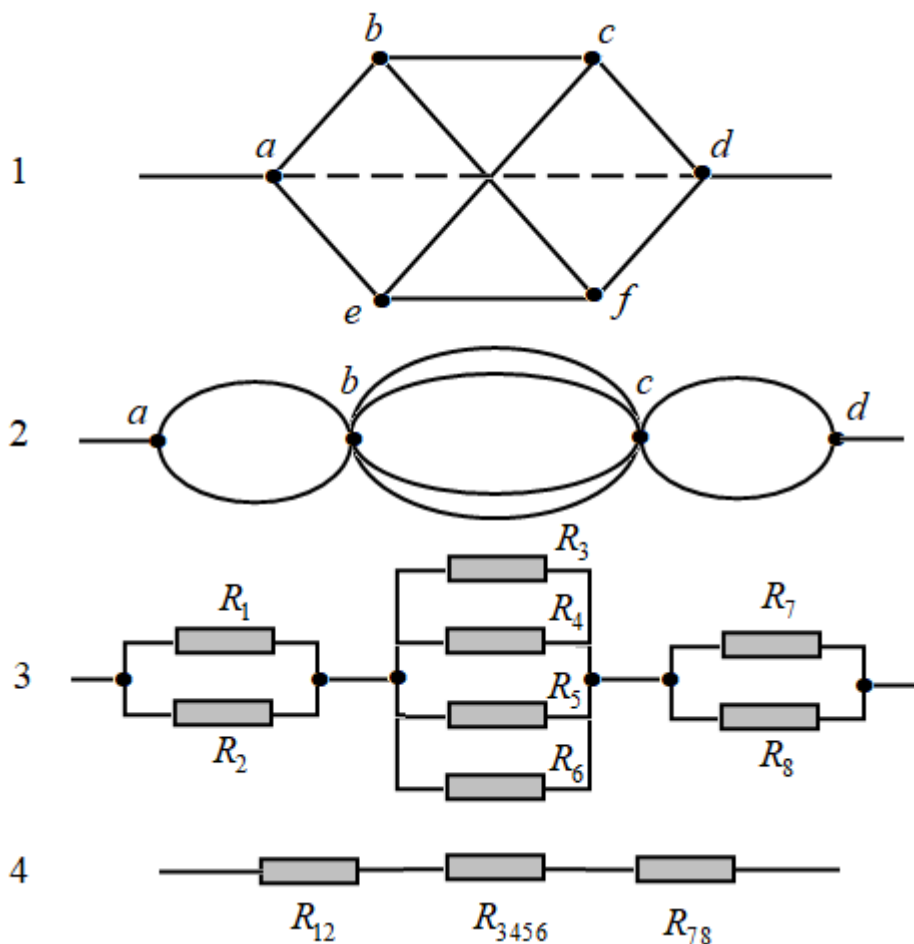
| Дано:              | Розв'язання                                           |
|--------------------|-------------------------------------------------------|
| $R = 1 \text{ Ом}$ | В запропонованій схемі немає жодної пари провідників, |
| $R = ?$            | з'єднаних між собою послідовно або паралельно. Проте  |

схема симетрична, причому точки входу та виходу (затиски ланцюга) лежать на осі симетрії  $ad$ . Перетворимо схему за кілька послідовних кроків.

Крок 1. На схемі видно, що точка  $b$  симетрична точці  $e$  відносно осі  $ad$ . Отже, за наявності струму в ланцюзі, потенціали точок  $b$  та  $e$  будуть однаковими, тому їх можна об'єднати в один вузол  $b$ . З цієї ж причини можна з'єднати в один вузол  $c$  точки  $c$  та  $f$ .

Крок 2. Далі перебудуємо цю схему в більш прийнятний вигляд та отримаємо нову еквівалентну схему ланцюга.

Крок 3. В еквівалентній схемі є три системи паралельно з'єднаних провідників: 1)  $R_1, R_2$ ; 2)  $R_3, R_4, R_5, R_6$ ; 3)  $R_7, R_8$ .



Застосовуючи формули для розрахунку опору при паралельному з'єднанні провідників, знайдемо:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2, \quad R_{12} = 0,5 \text{ Ом};$$

$$\frac{1}{R_{3456}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 4, \quad R_{3456} = 0,25 \text{ Ом};$$

$$\frac{1}{R_{78}} = \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} = 2, \quad R_{78} = 0,5 \text{ Ом}.$$

Крок 4. Провідники  $R_{12}$ ,  $R_{3456}$  і  $R_{78}$  з'єднані послідовно, тому загальний опір дорівнює сумі окремих опорів

$$R = R_{12} + R_{3456} + R_{78} = 0,5 + 0,25 + 0,5 = 1,25 \text{ Ом}.$$

**Відповідь:**  $R = 1,25 \text{ Ом}.$

### Задача 10.2.7

В електричному ланцюзі включені два джерела струму з  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 1,5 \text{ В}$  і внутрішнім опором  $r_1 = r_2 = 0,5 \text{ Ом}$  кожний. Активні опори  $R_1 = R_4 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 3 \text{ Ом}$ . Визначте силу струму  $I_3$  в провіднику з опором  $R_3$ .

**Дано:**

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 1,5 \text{ В}$$

$$r_1 = r_2 = 0,5 \text{ Ом}$$

$$R_1 = R_4 = 2 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 1 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 3 \text{ Ом}$$

$$I_3 = ?$$

**Розв'язання**

Маємо розгалужений електричний ланцюг, в якому два провідники з опорами  $R_2$  і  $R_3$  з'єднані паралельно, тому їх загальний опір можна визначити за формулою

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

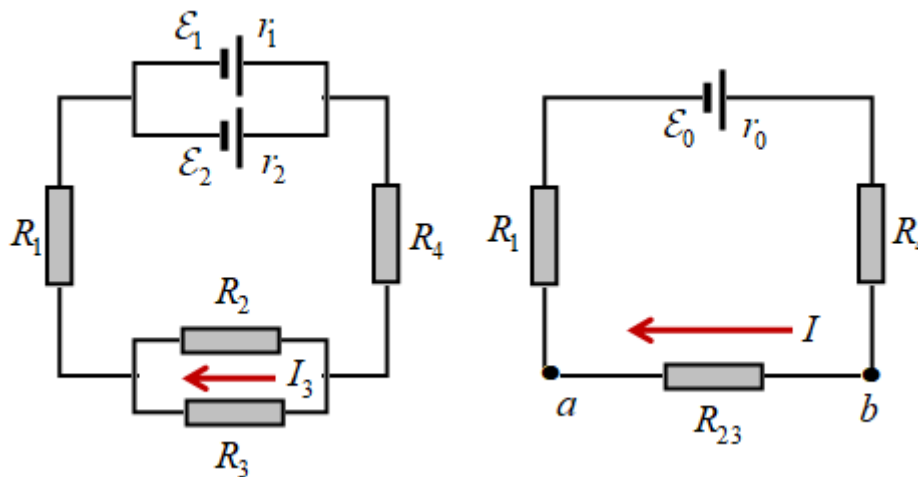
Два джерела струму  $\mathcal{E}_1$  та  $\mathcal{E}_2$  також підключені паралельно, тому така батарея має ЕРС  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 1,5 \text{ В}$ . Внутрішній опір знайдемо з формули

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2},$$

$$r_0 = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2} = \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 0,25 \text{ Ом}.$$



Тепер початковий складний електричний ланцюг перетворюється в простий контур з послідовним з'єднанням провідників  $R_1$ ,  $R_{23}$  і  $R_4$  та джерелом струму  $\mathcal{E}_0$  і внутрішнім опором  $r_0$ .



Згідно з законом Ома для замкненого кола сила струму

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R_0 + r_0} = \frac{\mathcal{E}_0}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_4 + r_0} = \frac{\mathcal{E}_0}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_4 + \frac{r}{2}}.$$

Оскільки різниця потенціалів точок  $a$  та  $b$  згідно з законом Ома для однорідної (такої, що не містить ЕРС) ділянки ланцюга дорівнює

$$U_{ab} = I \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = I_3 R_3,$$

отримуємо струм, який тече через провідник з опором  $R_3$ :

$$I_3 = I \frac{R_2}{R_2 + R_3}.$$

Підрахунки дають

$$I = \frac{1,5}{2 + \frac{3 \cdot 1}{3 + 1} + 2 + \frac{0,5}{2}} = 0,3 \text{ A},$$

$$I_3 = 0,3 \frac{1}{1 + 3} = 0,075 \text{ A} = 75 \text{ mA}.$$

**Відповідь:**  $I_3 = 75 \text{ mA}$ .

### Задача 10.2.8

Джерела струму в ланцюзі становлять  $\mathcal{E}_1 = 110 \text{ В}$  і  $\mathcal{E}_2 = 220 \text{ В}$ , а активні опори дорівнюють  $R_1 = R_2 = 100 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 500 \text{ Ом}$ . Визначте струми в ланцюзі.

| Дано:                                 | Розв'язання                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathcal{E}_1 = 110 \text{ В}$       | Силу струму в розгалуженому ланцюзі визначимо за допомогою правил Кірхгофа. Для цього виберемо довільно напрямки струмів $I_1, I_2$ і $I_3$ у гілках. У ланцюзі є два вузли $a$ і $d$ (точки, де сходяться три струми), отже $m = 2$ , це значить, що кількість незалежних рівнянь, які можна скласти за першим правилом Кірхгофа $m - 1 = 2 - 1 = 1$ . Напишемо рівняння для вузла $a$ , сумі струмів для якого дорівнює нулю: |
| $\mathcal{E}_2 = 220 \text{ В}$       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| $R_1 = R_2 = 100 \text{ Ом}$          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| $R_3 = 500 \text{ Ом}$                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| $I_1 = ? \quad I_2 = ? \quad I_3 = ?$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |

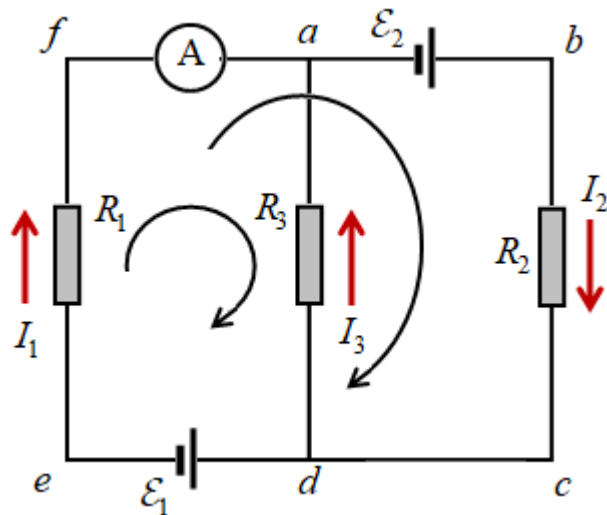
$$I_1 - I_2 + I_3 = 0. \quad (1)$$

При складанні рівняння враховуємо правило знаків: струм, який входить у вузол, беремо в рівняння зі знаком «плюс», а струм, який виходить із вузла, – зі знаком «мінус».

Гілка – це ділянка між двома вузлами. Кількість гілок в даному ланцюзі  $p = 3$  (це –  $aefd$ ,  $ad$  та  $abcd$ ), кількість незалежних рівнянь, які можна скласти за другим правилом Кірхгофа становить  $p - (m - 1) = 3 - (2 - 1) = 2$ .

Для складання рівнянь за другим правилом Кірхгофа виберемо два контури, наприклад,  $abcdefa$  та  $adefa$ , і визначимо напрямки їх обходу за годинниковою стрілкою. Будемо також враховувати правила знаків:

1) якщо напрямок струму збігається з обраним напрямком обходу контуру, тоді відповідний добуток  $I \cdot R$  входить у рівняння зі знаком «плюс», в інакшому випадку – зі знаком «мінус»;



2) якщо ЕРС, що діє в контурі, підвищує потенціал у напрямку обходу контуру, тоді ця ЕРС входить в рівняння зі знаком «плюс», а якщо знижує – зі знаком «мінус».

Рівняння за другим правилом Кірхгофа:

$$\text{для контуру } abcdefa: I_1 R_1 + I_2 R_2 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1, \quad (2)$$

$$\text{для контуру } adefa: I_1 R_1 - I_3 R_3 = -\mathcal{E}_1. \quad (3)$$

Рівняння, що записані за першим (1) і другим (2)-(3) правилами Кірхгофа, складають систему рівнянь, розв'язання якої дозволяє знайти струми у всіх гілках ланцюга:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0, \\ I_1 R_1 + I_2 R_2 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1, \\ I_1 R_1 - I_3 R_3 = -\mathcal{E}_1. \end{cases} \quad (4)$$

Виразимо струми  $I_2$  і  $I_3$  з другого та третього рівнянь системи (4):

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R_2} - I_1 \frac{R_1}{R_2}, \quad (5)$$

$$I_3 = I_1 \frac{R_1}{R_3} + \frac{\mathcal{E}_1}{R_3} \quad (6)$$

та підставимо їх в перше рівняння системи (4)

$$I_1 - \left( \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R_2} - I_1 \frac{R_1}{R_2} \right) + I_3 = I_1 \frac{R_1}{R_3} + \frac{\mathcal{E}_1}{R_3} = 0,$$

з якого знайдемо перший струм:

$$I_1 = \frac{\frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R_2} - \frac{\mathcal{E}_1}{R_3}}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}}.$$

Якщо в результаті розрахунків значення  $I_1, I_2, I_3$  виявляться додатними, тоді робимо висновок, що ми вірно обрали напрямки усіх струмів в ланцюзі. Від'ємне значення струму буде означати, що даний струм має напрямок, протилежний тому, що був обраний на початку розв'язку задачі.

Розрахуємо струми:

$$I_1 = \frac{\frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R_2} - \frac{\mathcal{E}_1}{R_3}}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}} = \frac{\frac{220 - 110}{100} - \frac{110}{500}}{1 + \frac{100}{100} + \frac{100}{500}} = 0,4 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R_2} - I_1 \frac{R_1}{R_2} = I_2 = \frac{220 - 110}{100} - 0,4 \frac{100}{100} = 0,7 \text{ A},$$

$$I_3 = I_1 \frac{R_1}{R_3} + \frac{\mathcal{E}_1}{R_3} = 0,4 \frac{100}{500} + \frac{110}{500} = 0,3 \text{ A}.$$

У відповіді усі значення сили струму додатні, отже, їх напрямки були обрані вірно.

Перевірка розмірностей:

$$[I_1] = \frac{\text{В/Ом}}{\text{Ом/Ом}} = \text{А}$$

$$[I_2] = \frac{\text{В}}{\text{Ом}} - \text{А} \frac{\text{Ом}}{\text{Ом}} = \text{А};$$

$$[I_3] = \text{А} \frac{\text{Ом}}{\text{Ом}} + \frac{\text{В}}{\text{Ом}} = \text{А};$$

**Відповідь:**  $I_1 = 0,4 \text{ A}; I_2 = 0,7 \text{ A}; I_3 = 0,3 \text{ A}.$

### Задача 10.2.9

Для схеми, показаної нижче, знайдіть ЕРС  $\mathcal{E}_2$  і  $\mathcal{E}_3$ , струм  $I_2$  і різницю потенціалів  $\Delta\varphi_{DA}$ , якщо  $R_1=1\text{ Ом}$ ,  $R_2=6\text{ Ом}$ ,  $R_3=4\text{ Ом}$ ,  $R_4=1\text{ Ом}$ ,  $R_5=1\text{ Ом}$ ,  $R_6=2\text{ Ом}$ ,  $I_1=1\text{ А}$ ,  $I_3=2\text{ А}$ , ЕРС  $\mathcal{E}_1=20\text{ В}$ . Опором дротів і внутрішнім опором батареї знехтуйте.

| Дано:                                                                                                                                                                                 | Розв'язання                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $R_1=1\text{ Ом}$ $R_2=6\text{ Ом}$<br>$R_3=4\text{ Ом}$ $R_4=1\text{ Ом}$<br>$R_5=1\text{ Ом}$ $R_6=2\text{ Ом}$<br>$I_1=1\text{ А}$ $I_3=2\text{ А}$<br>$\mathcal{E}_1=20\text{ В}$ | <p>Для розв'язання задачі будемо використовувати правила Кірхгофа. Насамперед спростимо задану схему, об'єднавши пари послідовно з'єднаних провідників, що дозволить проводити розрахунки в еквівалентній схемі. Опір послідовно з'єднаних провідників дорівнює сумі окремих опорів.</p> |
| $\mathcal{E}_2=?$ $\mathcal{E}_3=?$ $\Delta\varphi_{DA}=?$                                                                                                                            | $R_{12}=R_1+R_2=1+6=7\text{ Ом},$<br>$R_{34}=R_3+R_4=4+1=5\text{ Ом},$<br>$R_{56}=R_5+R_6=1+2=3\text{ Ом}.$                                                                                                                                                                              |

Для того щоб використати закон Ома для неоднорідної ділянки кола, виберемо напрямок обходу, що збігається з напрямком струму  $I_1$  в еквівалентній схемі. Тоді

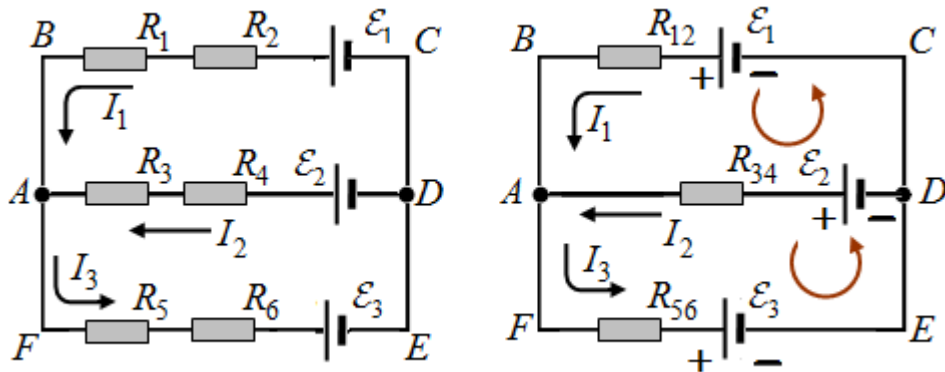
$$I_1 = \frac{\Delta\varphi_{DA} + \mathcal{E}_1}{R_{12}}.$$

Зверніть увагу, що для обраного напрямку проходження контуру (від  $D$  до  $A$ ) ми «зустрічаємо» негативний полюс ЕРС, тому записуємо його зі знаком «плюс». Спад напруги на ділянці між точками схеми  $D$  і  $A$  становить

$$\Delta\varphi_{DA} = I_1 R_{12} - \mathcal{E}_1 = 1 \cdot 7 - 20 = -13\text{ В}.$$

Від’ємне значення різниці потенціалів свідчить про те, що потенціал точки  $A$  більше потенціалу точки  $D$ :  $\varphi_A > \varphi_D$ .

В ланцюгу є два вузли  $A$  і  $D$  ( $p=2$ ), тому по першому правилу Кірхгофа



можна скласти  $(p-1)=2-1=1$  одно незалежне рівняння. Для вузла  $A$ :

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0,$$

$$I_2 = I_3 - I_1 = 2 - 1 = 1 \text{ A.}$$

В ланцюгу є три гілки  $m=3$ , тому по другому правилу Кірхгофа можна скласти  $[m-(p-1)]=3-(2-1)=2$  незалежних рівняння. Обравши напрямок обходу контуру проти годинникової стрілки, напишімо

для  $DCBAD$   $I_1 R_{12} - I_2 R_{34} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2,$

для  $DAFED$   $I_2 R_{34} + I_3 R_{56} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3.$

З цих рівнянь, визначимо шукані ЕРС:

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 - I_1 R_{12} + I_2 R_{34} = 20 - 1 \cdot 7 + 1 \cdot 5 = 18 \text{ V.}$$

$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_2 - I_2 R_{34} - I_3 R_{56} = 20 - 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 7 \text{ V.}$$

**Відповідь:**  $\Delta\varphi_{DA} = -13 \text{ V}$ ;  $\mathcal{E}_2 = 18 \text{ V}$ ;  $\mathcal{E}_3 = 7 \text{ V}$ .

### Задача 10.2.10

Визначте роботу електричних сил і кількість теплоти, що виділяється щосекунди: 1) в опорі, в якому тече струм  $I = 1 \text{ A}$ , а до його кінців прикладено

різницю потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\text{ В}$ ; 2) в акумуляторі з ЕРС  $\mathcal{E} = 1,3\text{ В}$ , який заряджається струмом  $I = 1\text{ А}$ , а різниця потенціалів на його затисках дорівнює  $U = \varphi_a - \varphi_b = 2\text{ В}$ .

**Дано:**

$$I = 1\text{ А}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\text{ В}$$

$$\mathcal{E} = 1,3\text{ В}$$

$$U = \varphi_a - \varphi_b = 2\text{ В}$$

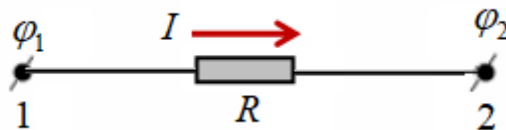
$$A = ? \quad Q = ?$$

**Розв'язання**

1) Ділянка 1-2 (див. рис), що розглядається, не містить ЕРС, тому згідно з законом Ома для однорідної ділянки ланцюга:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR.$$

Це означає, що  $A = (\varphi_1 - \varphi_2)It$  і  $Q = UIt$  дають однаковий результат, оскільки  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ . З цього випливає, що уся робота



електричних сил іде на нагрів провідника.

Тому робота

$$A = Q = (\varphi_1 - \varphi_2)It.$$

Підставляючи дані задачі, отримуємо

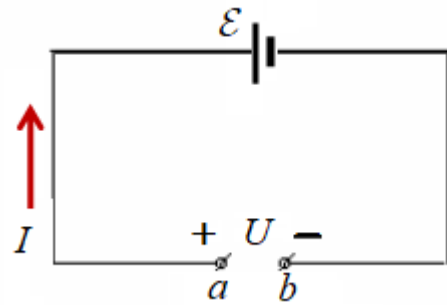
$$A = Q = (\varphi_1 - \varphi_2)It = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2\text{ Дж}.$$

2) При зарядці акумулятора його затиски приєднують до джерела напруги  $U$ , різниця потенціалів якого не змінюється. При цьому струм всередині акумулятора тече від його позитивного полюса до негативного, тобто в напрямку, зворотному напрямку струму розрядки.

Робота електричних сил, як і у попередньому випадку, дорівнює

$$A = (\varphi_a - \varphi_b)It = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2\text{ Дж}.$$

Щоб визначити кількість теплоти, що виділяється, знайдемо опір ділянки, де знаходиться акумулятор. Застосовуючи закон Ома для неоднорідної ділянки ланцюга і враховуючи напрямок струму та ЕРС, напишімо в відповідності до правила знаків



$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E}}{R},$$

звідки

$$R = \frac{\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E}}{I}.$$

Підставивши значення  $R$  в формулу закону Джоуля-Ленца, отримаємо:

$$Q = I^2 R t = (\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E}) I t = (2 - 1,3) \cdot 1 \cdot 1 = 0,7 \text{ Дж.}$$

У такому випадку лише частина роботи електричних сил йде на нагрівання акумулятора, решта, яка дорівнює різниці між роботою і кількістю теплоти

$$A - Q = 2 - 0,7 = 1,3 \text{ Дж}$$

перетворюється на хімічну енергію акумулятора, що заряджається.

Перевірка розмірності

$$[A] = \text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{с} = \text{Вт} \cdot \text{с} = \text{В} \cdot \text{Кл} = \text{Дж}.$$

**Відповідь:** 1)  $A = Q = 2 \text{ Дж}$ ; 2)  $A = 2 \text{ Дж}$ ,  $Q = 0,7 \text{ Дж}$ .

### Задача 10.2.11

Реостат підключений до джерела струму з ЕРС  $\mathcal{E} = 6 \text{ В}$  та внутрішнім опором  $r = 1 \text{ Ом}$ . При якому опорі реостата потужність струму буде максимальною? Визначити силу струму при максимальній потужності.



|                             |                                                       |
|-----------------------------|-------------------------------------------------------|
| <b>Дано:</b>                | <b>Розв'язання</b>                                    |
| $\mathcal{E} = 6 \text{ В}$ | Реостат – це електричний прилад, яким змінюють опір   |
| $r = 1 \text{ Ом}$          | електричного кола, регулюють струм або напругу.       |
| $R = ? \quad P = ?$         | Потужність струму у реостаті визначається за формулою |

$$P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2}.$$

Визначимо значення опору  $R$ , при якому потужність  $P$  максимальна, дослідивши функцію  $P(R)$  на екстремум. Для цього візьмемо похідну

$$\frac{dP}{dR} = \frac{d}{dR} \left( \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2} \right) \text{ та прирівняємо її нулю:}$$

$$\frac{dP}{dR} = \frac{\mathcal{E}^2 (R + r)^2 - 2\mathcal{E}^2 (R + r)}{(R + r)^4} = \frac{\mathcal{E}^2 (r - R)}{(R + r)^3} = 0.$$

Дріб дорівнює нулю, коли чисельник дробу перетворюється на нуль

$$R = r.$$

Таким чином, потужність максимальна, коли зовнішній опір дорівнює внутрішньому опору джерела живлення, у такому випадку

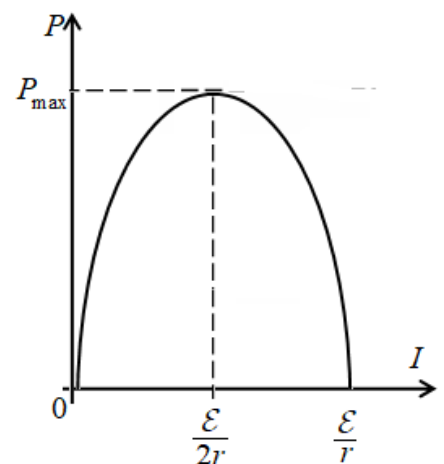
$$R = r = 1 \text{ Ом}.$$

Силу струму можна визначити за законом Ома для замкнутого ланцюга:

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{(R + r)} = \frac{\mathcal{E}}{2r} = \frac{6}{2 \cdot 1} = 3 \text{ А}.$$

На рисунку наведено графік залежності потужності, яка виділяється в зовнішньому ланцюзі, від сили струму. Як видно, коли струм дорівнює нулю або  $\frac{\mathcal{E}}{r}$ , потужність в зовнішньому ланцюзі

$P = 0$ , а при струмі  $I = \frac{\mathcal{E}}{2r}$  вона має найбільше значення:



$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2 r}{(r+r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = \frac{6^2}{4 \cdot 1} = 9 \text{ Вт.}$$

Перевірка розмірності:  $[P] = \frac{\text{В}^2}{\text{Ом}} = \text{В} \cdot \text{А} = \text{Вт.}$

**Відповідь:**  $R = 1 \text{ Ом}; I_{\max} = 3 \text{ А}; P_{\max} = 9 \text{ Вт.}$

### Задача 10.2.12

Електричний ланцюг складається з двох гальванічних елементів, трьох опорів та гальванометра. У цьому ланцюзі  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 50 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 20 \text{ Ом}$ , ЕРС елементу  $\mathcal{E}_1 = 2 \text{ В}$ . Струм  $I_3 = 50 \text{ мА}$  через гальванометр тече у напрямку, вказаному стрілкою. Визначити ЕРС  $\mathcal{E}_2$  другого елемента. Опором гальванометра і внутрішнім опором гальванічних елементів знехтувати.

| Дано:                         | Розв'язання                                                                                            |
|-------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $R_1 = 100 \text{ Ом}$        | Виберемо напрямки струмів, як показано рисунку, і напрямком обходу контуру – за годинниковою стрілкою. |
| $R_2 = 50 \text{ Ом}$         |                                                                                                        |
| $R_3 = 20 \text{ Ом}$         | В контурі два вузли $p = 2$ , тому за першим правилом                                                  |
| $\mathcal{E}_1 = 2 \text{ В}$ | Кірхгофа можна записати $(p-1) = 2-1=1$ незалежне                                                      |
| $I_3 = 50 \text{ мА}$         | рівняння. Для вузла $F$ маємо                                                                          |
| $\mathcal{E}_2 = ?$           | $I_1 - I_2 - I_3 = 0. \quad (1)$                                                                       |

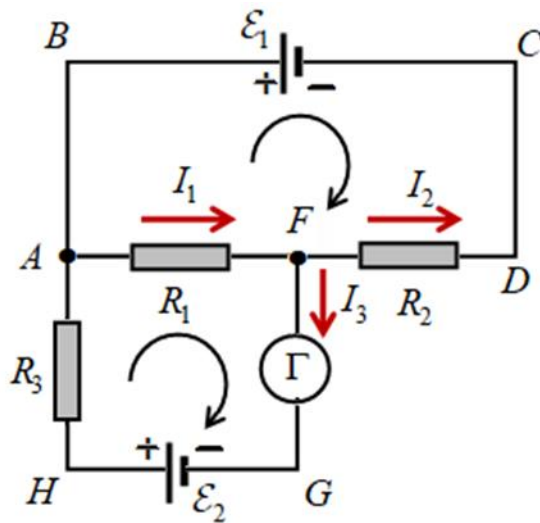
В контурі три гілки  $m = 3$ , тому за другим правилом Кірхгофа можна записати  $[m - (p-1)] = 3 - (2-1) = 2$  незалежних рівняння. Напишемо їх для контурів

$$AFGHA \quad I_1 R_1 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_2, \quad (2)$$

$$ADCDA \quad -I_1 R_1 - I_2 R_2 = -\mathcal{E}_1, \quad (3)$$

Після множення рівняння (3) на -1 воно набуває вигляду

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = \mathcal{E}_1. \quad (4)$$



Сформуємо систему з рівнянь (1), (2) і (4)

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0, \\ I_1 R_1 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_2, \\ I_1 R_1 + I_2 R_2 = \mathcal{E}_1. \end{cases} \quad (5)$$

Підставимо чисельні дані з умови задачі, враховуючи, що  $I_3 = 50 \text{ мА} = 0,05 \text{ А}$ .

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - 0,05 = 0, \\ 100I_1 + 0,05 \cdot 20 = \mathcal{E}_2, \\ 50I_1 + 25I_2 = 1. \end{cases}$$

Перетворимо систему до виду

$$\begin{cases} I_1 - I_2 = 0,05, \\ 50I_1 + 25I_2 = 1, \\ 100I_1 - \mathcal{E}_2 = -1. \end{cases}$$

Цю систему з трьома невідомими можна розв'язати звичайними прийомами алгебри, але, бо за умовою завдання треба визначити тільки одне невідоме з трьох, а саме  $\mathcal{E}_2$ , скористаємося методом Крамера – методом розв'язання системи лінійних рівнянь, у яких число рівнянь збігається з числом невідомих і визначник яких  $\Delta$  відмінний від нуля.

Складемо та обчислимо визначник  $\Delta$  системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 50 & 25 & 0 \\ 100 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 50 & 25 \end{vmatrix} = -(25 + 50) = -75.$$

Складемо та обчислимо визначник  $\Delta\mathcal{E}_2$ :

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}_2 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0,05 \\ 50 & 25 & 1 \\ 100 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 25 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 100 & -1 \end{vmatrix} + 0,05 \begin{vmatrix} 50 & 24 \\ 100 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -25 - 50 - 125 = -300. \end{aligned}$$

Розділивши визначник  $\Delta\mathcal{E}_2$  на визначник  $\Delta$ , знайдемо числове значення електрорушійної сили  $\mathcal{E}_2$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\Delta\mathcal{E}_2}{\Delta} = \frac{-300}{-75} = 4 \text{ В.}$$

**Відповідь:**  $\mathcal{E}_2 = 4 \text{ В.}$

### Задача 10.2.13

Обмотка електричного кип'ятильника має дві секції. Якщо включено одну секцію, вода закипає через  $t_1 = 10$  хв, якщо інша, то через  $t_2 = 20$  хв. За скільки хвилин закипить вода, якщо обидві секції включити: 1) послідовно: 2) паралельно? Напругу на затискачах кип'ятильника та коефіцієнт корисної дії приладу вважати однаковими.

| Дано:                | Розв'язання                                              |
|----------------------|----------------------------------------------------------|
| $t_1 = 10$ хв        | Опір ланцюга при різних включеннях секцій буде різним.   |
| $t_2 = 20$ хв        | Очевидно, що шуканий час нагрівання води є деяка функція |
| $t = ?$              | опору ланцюга. Щоб знайти цю функцію, скористаємося      |
| законом Джоуля-Ленца |                                                          |

$$Q = I^2 R t. \quad (1)$$

Оскільки йдеться про ділянку ланцюга, що не містить ЕРС, до якого застосовуємо закон Ома  $I = (\varphi_1 - \varphi_2)/R$ , то перепишемо (1) у вигляді

$$Q = \frac{U^2}{R} t, \quad (2)$$

звідки легко визначити вид функції  $t = f(R)$ .

У всіх випадках для нагрівання води потрібна одна і та ж кількість теплоти  $Q_{\text{нагр}}$ , яка визначається формулою

$$Q_{\text{нагр}} = cm\Delta t,$$

де  $c$  і  $m$  – питома теплоємність і маса води,  $\Delta t$  – різниця температур.

Внаслідок того, що коефіцієнт корисної дії  $\eta$  приладу зберігається незмінним, однаковою буде і повна кількість теплоти, що виділяється при проходженні струму

$$Q = \frac{Q_{\text{нагр}}}{\eta}.$$

Враховуючи постійну напругу на затискачах ланцюга, опір з формули (2) визначиться як

$$R = \frac{U^2}{Q} t = kt, \quad (3)$$

де  $k = \frac{U^2}{Q}$  – постійна величина.

Отже, залежність часу від опору є пряма пропорційність.

При послідовному з'єднанні секцій загальний опір

$$R_{\text{посл}} = R_1 + R_2. \quad (4)$$

Підставивши сюди значення опору з формули (3), маємо

$$kt_{\text{посл}} = kt_1 + kt_2,$$

звідки

$$t_{\text{посл}} = t_1 + t_2.$$

Підставимо числові дані і отримаємо

$$t_{\text{посл}} = t_1 + t_2 = 10 + 20 = 30 \text{ хв.}$$

При паралельному з'єднанні секцій опір з'єднання

$$\frac{1}{R_{\text{парал}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2},$$

$$R_{\text{парал}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Звідси, застосувавши співвідношення (3), знайдемо

$$kt_{\text{парал}} = \frac{kt_1 \cdot kt_2}{kt_1 + kt_2},$$

$$t_{\text{парал}} = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2} = \frac{10 \cdot 20}{10 + 20} = \frac{200}{30} = 6,7 \text{ хв.}$$

**Відповідь:**  $t_{\text{посл}} = 30 \text{ хв}; t_{\text{парал}} = 6,7 \text{ хв.}$

### Задача 10.2.14

*Два мідні дроти однакової довжини  $l = 1 \text{ м}$  і діаметрами  $d_1 = 0,1 \text{ мм}$  та  $d_2 = 0,2 \text{ мм}$ , що під'єднуються по черзі до затискачів гальванічного елемента, нагріваються до однакової температури. Визначити внутрішній опір гальванічного елемента. Вважати віддачу теплоти дротом у навколишній простір за постійної температури пропорційною площі її поверхні.*

| Дано:                                                                                                       | Розв'язання                                                                                                                                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $l = 1 \text{ м}$                                                                                           | При тепловому режимі, коли температура дроту перестав підвищуватися, кількість теплоти, що виділяється струмом за 1 с, згідно із законом збереження енергії, повинне дорівнювати кількості теплоти, розсіяному за той же час дротом в |
| $d_1 = 0,1 \text{ мм} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}$                                                          |                                                                                                                                                                                                                                       |
| $d_2 = 0,2 \text{ мм} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}$                                                          |                                                                                                                                                                                                                                       |
| $\rho = 0,0172 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2 / \text{м} =$<br>$1,72 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ |                                                                                                                                                                                                                                       |
| $r = ?$                                                                                                     | навколишній простір, тобто потужність струму $P$ повинна дорівнювати потужності $P'$ , що розсіюється,                                                                                                                                |

$$P = P'. \quad (1)$$

Потужність струму виразимо через внутрішній опір джерела та діаметр дроту, скориставшись законом Ома для замкнутого ланцюга та формулою опору провідника:

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2 \rho l}{S \left( \frac{\rho l}{S} + r \right)^2} = \frac{\mathcal{E}^2 \rho l S^2}{S (\rho l + r S)^2} = \frac{\mathcal{E}^2 4 \rho l \pi d^2}{(4 \rho l + r \pi d^2)^2}. \quad (2)$$

Розсіяна потужність пропорційна площині, що випромінює

$$P' = k S' = k \cdot \pi d \cdot l, \quad (3)$$

де  $S'$  – бокова поверхня проволони діаметром  $d$  і довжиною  $l$ ,  $k$  – коефіцієнт пропорційності, що залежить від температури дроту.

Підставивши (2) і (3) в рівняння (1), отримаємо

$$\frac{\mathcal{E}^2 4 \rho l \pi d^2}{(4 \rho l + r \pi d^2)^2} = k \cdot \pi d \cdot l. \quad (4)$$

Після спрощення формула (4) набуває вигляду

$$\frac{d}{(4 \rho l + r \pi d^2)^2} = \frac{k}{4 \rho \mathcal{E}^2}. \quad (5)$$

За умови постійної температури права частина (5) постійна, тому ліву частину можна записати для кожного діаметру дроту і прирівняти одну до одної, зважаючи на те, що дротам відповідає така ж сама температура

$$\frac{d_1}{(4\rho l + r\pi d_1^2)^2} = \frac{d_2}{(4\rho l + r\pi d_2^2)^2}. \quad (6)$$

Перепишімо рівняння (6) і добудемо квадратний корінь з обох його частин

$$\frac{4\rho l + r\pi d_2^2}{4\rho l + r\pi d_1^2} = \pm \sqrt{\frac{d_2}{d_1}}. \quad (7)$$

Усі вирази в лівій частині додатні, тому перед коренем залишаємо тільки знак «ПЛЮС».

Розв'яжімо рівняння відносно  $r$

$$\begin{aligned} 4\rho l + r\pi d_2^2 &= \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} (4\rho l + r\pi d_1^2), \\ r\pi d_2^2 - \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} r\pi d_1^2 &= 4\rho l \left( \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} - 1 \right), \\ r\pi \left( d_2^2 - \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} d_1^2 \right) &= 4\rho l \left( \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} - 1 \right), \\ r &= \frac{4\rho l}{\pi \left( d_2^2 - \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} d_1^2 \right)} \left( \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Підставляємо числові дані з умов задачі:  $l = 1 \text{ м}$ ;

$$d_1 = 0,1 \text{ мм} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \quad d_2 = 0,2 \text{ мм} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \quad \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 10^{-4}}} = \sqrt{2} = 1,41;$$

$$\rho = 0,0172 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2 / \text{м} = 1,72 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м};$$

$$r = \frac{4 \cdot 1,72 \cdot 10^{-8} \cdot 1}{\pi \left[ (2 \cdot 10^{-4})^2 - 1,41 \cdot (1 \cdot 10^{-4})^2 \right]} (1,41 - 1) = 0,35 \text{ Ом}.$$

Перевірка розмірності

$$[r] = \frac{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{м}^2} = \text{Ом}.$$

**Відповідь:**  $r = 0,35 \text{ Ом}$ .



### Задача 10.2.15

До затискачів акумуляторної батареї, що має ЕРС  $\mathcal{E} = 24 \text{ В}$  і внутрішній опір  $r = 1 \text{ Ом}$ , приєднаний нагрівач, що споживає потужність  $P = 80 \text{ Вт}$ . Визначте силу струму в ланцюгу та коефіцієнт корисної дії нагрівача.

|                              |                                                       |
|------------------------------|-------------------------------------------------------|
| <b>Дано:</b>                 | <b>Розв'язання</b>                                    |
| $\mathcal{E} = 24 \text{ В}$ | Запишемо закон Ома для замкнутого кола                |
| $r = 1 \text{ Ом}$           | $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad (1)$             |
| $P = 80 \text{ Вт}$          |                                                       |
| $I = ? \quad \eta = ?$       | і формулу для потужності, що виділяється на нагрівачі |
|                              | $P = I^2 R. \quad (2)$                                |

Об'єднаємо їх в систему, в якій дві невідомих величини: струм і опір нагрівача

$$\begin{cases} I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \\ P = I^2 R. \end{cases} \quad (3)$$

Виразимо опір нагрівача з другого рівняння системи

$$R = \frac{P}{I^2} \quad (4)$$

і підставимо його в перше рівняння. В результаті отримуємо квадратне рівняння відносно струму  $I$ :

$$rI^2 - \mathcal{E}I + P = 0, \quad (5)$$
$$I_{1,2} = \frac{\mathcal{E} \pm \sqrt{\mathcal{E}^2 - 4rP}}{2r} = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 1 \cdot 80}}{2 \cdot 1}.$$

Рівняння (5) задовольняють два корені

$$I_1 = 20 \text{ А} \quad \text{і} \quad I_2 = 4 \text{ А}.$$

Коефіцієнт корисної дії визначається як відношення корисної роботи чи потужності до витраченої. В випадку, що розглядається, корисною є теплова

потужність, що виділяється в нагрівачі, а витраченою є потужність, що виробляється в джерелі струму.

Корисна потужність, що виділяється в нагрівачі, обчислюється як

$$P_{\text{кор}} = I^2 R, \quad (6)$$

а витрачена або повна потужність дорівнює

$$P_{\text{повна}} = I^2 R + I^2 r. \quad (7)$$

Тоді коефіцієнт корисної дії нагрівача становить

$$\eta = \frac{P_{\text{кор}}}{P_{\text{повна}}} = \frac{I^2 R}{I^2 R + I^2 r} = \frac{R}{R + r}. \quad (8)$$

З формули для потужності (4) знайдемо два значення опору:

$$R_1 = \frac{P}{I_1^2} = \frac{80}{20^2} = 0,2 \text{ Ом},$$

$$R_2 = \frac{P}{I_2^2} = \frac{80}{4^2} = 5 \text{ Ом}.$$

Отже, коефіцієнти корисної дії

$$\eta_1 = \frac{R_1}{R_1 + r} = \frac{0,2}{0,2 + 1} = 0,17,$$

$$\eta_2 = \frac{R_2}{R_2 + r} = \frac{5}{5 + 1} = 0,83.$$

Перевірка розмірностей

$$[I] = \frac{B + \sqrt{B^2 - \text{Ом} \cdot B_T}}{\text{Ом}} = \frac{B + \sqrt{B^2 - \text{Ом} \cdot \frac{B^2}{\text{Ом}}}}{\text{Ом}} = \frac{B}{\text{Ом}} = A,$$

$$[\eta] = \frac{\text{Ом}}{\text{Ом}} = 1$$

**Відповідь:**  $I_1 = 20 \text{ А}; I_2 = 4 \text{ А}; \eta_1 = 0,17; \eta_2 = 0,83.$

## 10.4. Задачі для самостійної роботи

**10.4.1.** У мідному провіднику з площею перерізу  $S = 50 \text{ мм}^2$  тече струм. Середня швидкість дрейфу вільних електронів  $v = 0,282 \text{ мм/с}$ , а їх концентрація  $n = 7,9 \cdot 10^{27} \text{ м}^{-3}$ . Знайти силу струму та густину струму в провіднику. З якою силою діє електричне поле в цьому провіднику на кожний носій струму ( $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ).

**Відповідь:**  $I = 17,8 \text{ А}$ ;  $j = 3,56 \cdot 10^5 \text{ А/м}^2$ ;  $F = 9,7 \cdot 10^{-22} \text{ Н}$ .

**10.4.2.** Елемент з ЕРС  $\mathcal{E} = 2,1 \text{ В}$  та внутрішнім опором  $r = 0,2 \text{ Ом}$  з'єднано з реостатом. Визначити силу струму в колі та опір реостата, якщо напруга на клеммах елемента  $U = 2 \text{ В}$ . Якої довжини залізний дріт треба взяти для виготовлення реостата, якщо площа його перерізу  $S = 0,75 \text{ мм}^2$ ? ( $\rho = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ).

**Відповідь:**  $I = 0,5 \text{ А}$ ;  $R = 4 \text{ Ом}$ ;  $l = 25 \text{ м}$ .

**10.4.3.** На скільки однакових ділянок слід розрізати провідник опором  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ , щоб при їх паралельному з'єднанні опір став  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ?

**Відповідь:**  $n = 3$  ділянки.

**10.4.4.** Визначити ЕРС та внутрішній опір батареї, яка вміщує три джерела, електрорушійні сили яких дорівнюють  $\mathcal{E}_1 = 10 \text{ В}$ ;  $\mathcal{E}_2 = 20 \text{ В}$ ;  $\mathcal{E}_3 = 30 \text{ В}$ , а їх внутрішній опір  $r_1 = r_2 = r_3 = 1 \text{ Ом}$ , відповідно. Джерела з  $\mathcal{E}_1$  та  $\mathcal{E}_2$  з'єднані паралельно, а джерело з  $\mathcal{E}_3$  послідовно з ними.

**Відповідь:**  $\mathcal{E} = 45 \text{ В}$ ;  $r = 1,5 \text{ Ом}$ .

**10.4.5.** Паралельно до амперметра, який має опір  $R_A = 0,03 \text{ Ом}$ , під'єднали мідний провідник довжиною  $l = 10 \text{ см}$  та діаметром  $d = 1,5 \text{ мм}$ . Визначити силу струму в колі, якщо амперметр показує  $I_A = 0,4 \text{ А}$  ( $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ).

**Відповідь:**  $I = 13 \text{ А}$ .

**10.4.6.** Вольтметр, розрахований на вимірювання напруги до  $U_V = 20$  В, необхідно ввімкнути в мережу з напругою  $U = 120$  В. Який для цього потрібний додатковий опір, якщо струм у вольтметрі не повинен перевищувати  $I = 5$  А?

**Відповідь:**  $R = 20$  кОм.

**10.4.7.** Визначити ЕРС та внутрішній опір акумулятора, якщо при струмі  $I_1 = 15$  А він віддає у зовнішнє коло потужність  $P_1 = 13$  Вт, а при струмі  $I_2 = 6$  А – потужність  $P_2 = 64,8$  Вт.

**Відповідь:**  $\mathcal{E} = 12$  В;  $r = 0,2$  Ом.

**10.4.8.** Визначити силу струму в колі свинцевого акумулятора, якщо його ЕРС  $\mathcal{E} = 2,2$  В, зовнішній опір  $R = 0,5$  Ом, а коефіцієнт корисної дії дорівнює  $\eta = 65\%$ .

**Відповідь:**  $I = 2,86$  А.

**10.4.9.** К.к.д. акумулятора, який замкнено на деякий опір становить  $\eta_1 = 60\%$ . Яким буде к.к.д., якщо замість цього акумулятора підключити два таких акумулятора з'єднаних паралельно?

**Відповідь:**  $\eta_2 = 75\%$ .

**10.4.10.** Батарея складається з п'ятих послідовно з'єднаних елементів з ЕРС по  $\mathcal{E} = 1,5$  В та внутрішнім опором по  $r = 0,3$  Ом. При якій силі струму потужність, що віддається в зовнішнє коло, буде найбільшою?

**Відповідь:**  $I = 1,63$  А.

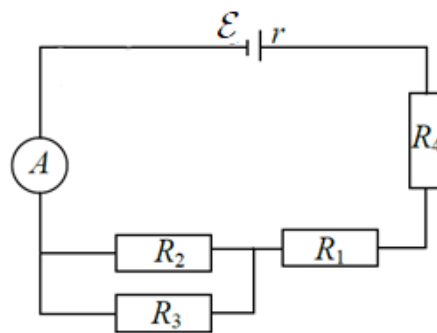
**10.4.11.** Схема виглядає як металевий квадрат з однією діагоналлю. Опір кожної із сторін квадрата та діагоналі  $R = 2$  Ом. Знайти: 1) опір між сусідніми вершинами квадрата; 2) опір між вершинами, які з'єднані діагоналлю.

**Відповідь:**  $R = 1,25$  Ом;  $1$  Ом.

**10.4.12.** Дві електричні лампочки ввімкнені у мережу паралельно. Опори лампочок  $R_1 = 360$  Ом,  $R_2 = 240$  Ом. Яка з цих лампочок споживає більшу потужність? У кілька разів?

**Відповідь:**  $P_2/P_1 = 1,5$ .

**10.4.13.** Визначити силу струму  $I_A$ , якщо ЕРС  $\mathcal{E} = 10$  В,  $r = 1$  Ом, к.к.д.  $= 0,8$  (див. рис.). Чому дорівнює падіння напруги на опорі  $R_2$ , якщо падіння напруги на опорі  $R_1$  дорівнює 4 В, а на опорі  $R_4 - 2$  В?

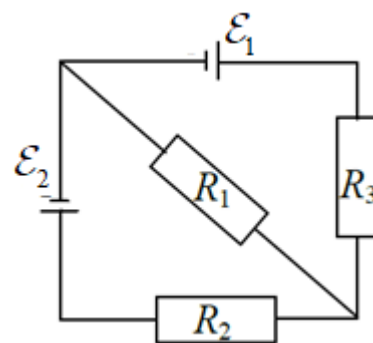


**Відповідь:**  $I_A = 2$  А,  $U = 2$  В.

**10.4.14.** Два джерела струму з ЕРС  $\mathcal{E}_1 = 3$  В і  $\mathcal{E}_2 = 1,5$  В з'єднано паралельно та замкнені на зовнішній опір  $R = 16$  Ом. Визначити силу струму в зовнішньому колі, якщо внутрішній опір джерел  $r_1 = 0,7$  Ом і  $r_1 = 0,5$  Ом.

**Відповідь:**  $I = 0,18$  А.

**10.4.15.** Два джерела струму з ЕРС  $\mathcal{E}_1 = 2,1$  В і  $\mathcal{E}_2 = 1,9$  В та три резистори з опорами  $R_1 = 45$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом,  $R_3 = 10$  Ом з'єднані так, як показано на рис. Визначити сили струмів  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  у резисторах. Внутрішніми опорами джерел струму знехтувати.



**Відповідь:**  $I_1 = 0,04$  А,  $I_2 = 0,1$  А,  $I_3 = 0,06$  А.

**10.4.16.** Визначити максимальну потужність зовнішнього кола, якщо при силі струму  $I_1 = 2$  А потужність у зовнішньому колі дорівнює  $P_1 = 24$  Вт, а при силі струму  $I_2 = 5$  А дорівнює  $P_2 = 30$  Вт.

**Відповідь:**  $P_{\max} = 32$  Вт.

## 11. МАГНІТОСТАТИКА

### 11.1. Теоретичні відомості

#### *11.1.1. Магнітне поле в вакуумі. Принцип суперпозиції. Закон Біо-Савара-Лапласа*

**Магнітне поле** – особливий вид матерії, який існує навколо магнітів і електричних зарядів, що рухаються, і за посередництвом якого відбувається взаємодія між ними.

Силовую характеристикою магнітного поля є **магнітна індукція**  $\vec{B}$ , яка є векторною величиною.

$$[B] = \text{Тесла} = \text{Тл}.$$

Магнітне поле створюється зарядами, що рухаються, або електричними струмами, та впливає тільки на заряди, що рухаються, або електричні струми, і виявляється по дії на струм.

Для магнітних полів справедливий **принцип суперпозиції**: магнітна індукція поля  $\vec{B}$ , що створене кількома джерелами (зарядами або струмами), є векторною сумою магнітних індукцій полів  $\vec{B}_i$ , які створені ними окремо,

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i. \quad (11.1)$$

Для **графічного зображення** магнітного поля використовують лінії магнітної індукції, які проводяться так, щоб дотична до них в кожній точці збігалася з напрямком вектора  $\vec{B}$  в цій точці. Лінії магнітної індукції проводяться з такою щільністю, щоб число ліній, які перетинають нормальну до них площадку одиничної площі чисельно дорівнювало модулю вектора індукції магнітного поля в даному місці простору (рис. 11.1, а). Лінії магнітної індукції не мають ні початку, ні кінця, вони або замикаються навколо провідників зі струмом, або ідуть з нескінченності в нескінченність.

Поле, для якого вектор магнітної індукції  $\vec{B} = \text{const}$ , називається **однорідним** (рис. 11.1, б), а для якого  $\vec{B} \neq \text{const}$  – **неоднорідним** (рис. 11.1, в).

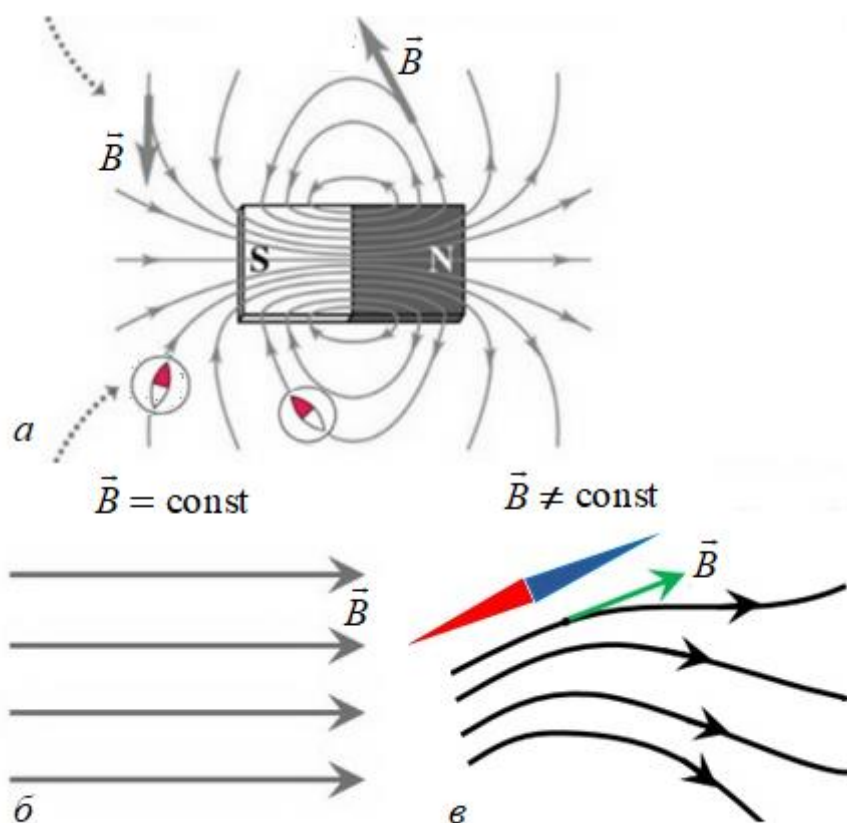


Рисунок 11.1

Напрямок силових ліній магнітного поля відносно струму, що його створює, встановлюється згідно з **правилом правої руки (правилом свердлика)**.

**Правило правої руки:** якщо обхопити правою рукою провідник таким чином, щоб великий палець вказував напрям струму в ньому, то решта пальців вказуватиме напрям вектора магнітної індукції (рис. 11.2, а).

**Правило свердлика:** напрям ліній магнітної індукції збігається з напрямом обертання воротка свердлика (з правою різьбою) (рис. 11.2, б), тоді як вістря свердлика рухається вздовж струму.

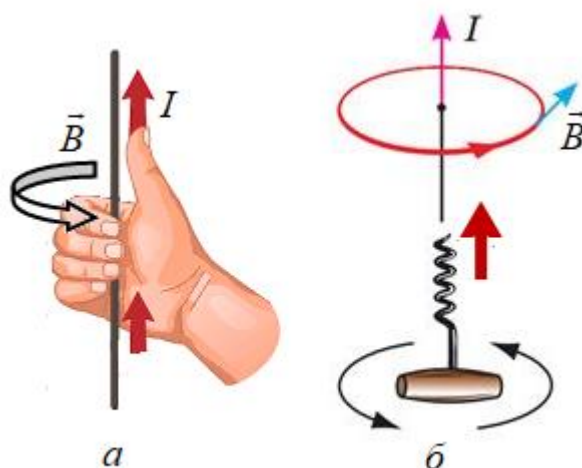
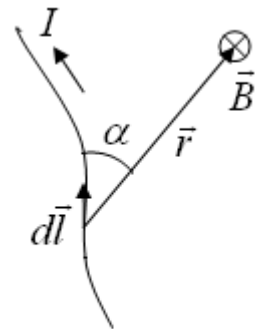


Рисунок 11.2

Коли струм протікає по провіднику, то кожен нескінченно малий елемент струму  $I d\vec{l}$  робить внесок у магнітне поле у обраній точці. Зв'язок між величиною магнітного поля в точці, елементом струму та відстанню від струму до точки визначається **законом Біо-Савара-Лапласа**,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [d\vec{l}, \vec{e}_r]}{r^2}, \quad (11.2)$$

де  $d\vec{l}$  – нескінченно малий елемент провідника з електричним струмом  $I$ ,  $\vec{r}$  – вектор, що визначає положення точки спостереження,  $\vec{e}_r$  – одиничний вектор вздовж напрямку  $\vec{r}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнітна стала (рис. 11.3).



**Рисунок 11.3**

Величина магнітної індукції від елементарної ділянки  $dl$  струму  $I$  становить

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin \alpha}{r^2}, \quad (11.3)$$

де  $\alpha$  – кут, що радіус-вектор  $\vec{r}$  утворює з елементом струму  $I d\vec{l}$ .

Враховуючи принцип суперпозиції, магнітне поле в будь-якій точці

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (11.4)$$

### **11.1.2. Поле прямого струму Поле кругового струмів**

#### **1) Магнітне поле ізолюваного, нескінченно довгого прямого дроту, по якому тече струм**

Для застосування формули закону Біо-Савара-Лапласа, потрібно в підінтегральній функції перейти до змінної, щодо якої можна поставити межі інтегрування в інтегралі (11.4).



Нехай  $\beta$  – кут між векторами  $d\vec{l}$  та  $\vec{r}$  (рис. 11.4). Тоді величина магнітної індукції поля становить

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin \beta}{r^2}. \quad (11.5)$$

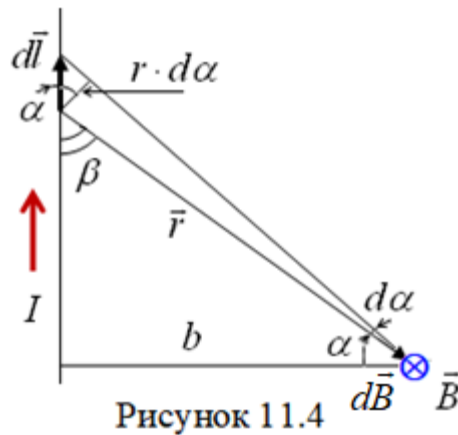


Рисунок 11.4

Зважаючи на те, що  $\sin \beta = \cos \alpha$ , і з урахуванням, що  $r = b / \cos \alpha$ , запишемо вираз у чисельнику як

$$dl \cdot \sin \beta = dl \cdot \cos \alpha = r \cdot d\alpha = \frac{b}{\cos \alpha} d\alpha. \quad (11.6)$$

Отже, враховуючи (11.6), вираз (11.5) набуває вигляду

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \cos \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha}{b}. \quad (11.7)$$

Усі вектори  $d\vec{B}$  мають однаковий напрямок, тому ми можемо скласти їх величини. Інтегруючи в межах від  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  до  $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ , отримуємо

$$B = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{b} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha \cdot d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{b}. \quad (11.8)$$

Тоді, величина магнітного поля нескінченно довгого дроту з постійним струмом становить

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{b} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{b}. \quad (11.9)$$

Напрямок магнітної індукції визначається за правилом правої руки. Силкові лінії поля прямого струму виглядають як концентричні кола з центром в точці протікання струму (рис. 11.5).

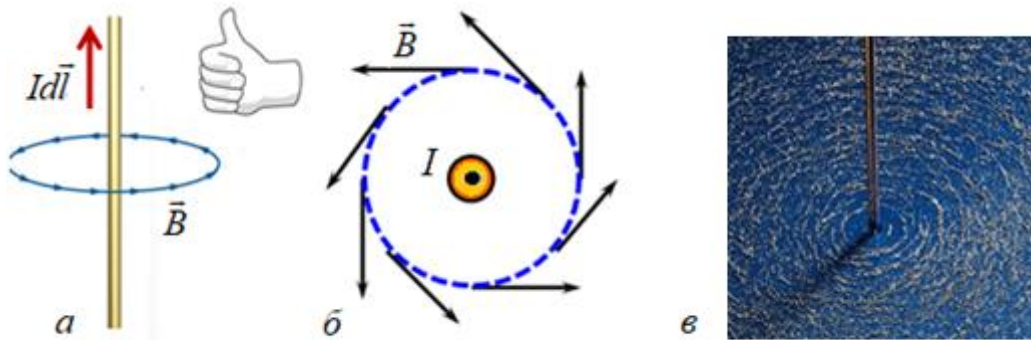


Рисунок 11.5

Формулу

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha \cdot d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{b} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \quad (11.10)$$

можна застосовувати для знаходження магнітної індукції від ділянки прямого дроту  $MN$ , по якій тече струм, в точці спостереження  $P$ . Межі інтегрування  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  визначаються відповідно прикладам на рис. 11.6.

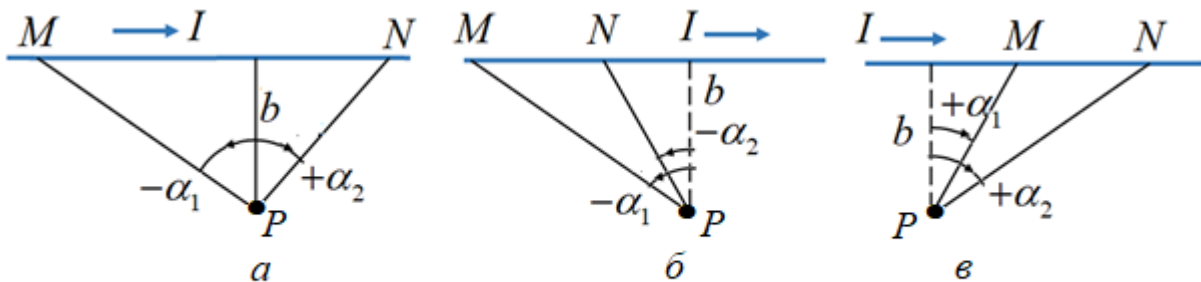


Рисунок 11.6

Для обчислення величини магнітного поля в точці  $P$  можна застосувати формулу

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1), \quad (11.11)$$

яка використовує інші кути ( $\varphi_1, \varphi_2$ ) як межі інтегрування (рис. 11.7).

## 2) Магнітне поле на осі кругового струму

Для визначення магнітної індукції поля в точці  $P$ , яка знаходиться на осі кругового струму на відстані  $z$  від центру кола, по якому протікає струм  $I$ , розіб'ємо провідник (рис. 11.8) на елементарні ділянки  $d\vec{l}$ . Кожен елемент струму  $I d\vec{l}$  створює в точці спостереження  $P$  поле, магнітна індукція якого за законом Біо-Савара-Лапласа перпендикулярна площині, де розташовані вектори  $d\vec{l}$  та  $\vec{r}$ , що визначає положення точки  $P$  відносно елемента  $d\vec{l}$ . Розкладемо вектор  $d\vec{B}$  на дві взаємно перпендикулярні складові  $d\vec{B}_x$  та  $d\vec{B}_z$ . Із геометрії задачі зрозуміло, що компоненти  $d\vec{B}_x$  від симетричних елементів кола  $d\vec{l}$  компенсують одна одну, а компоненти  $d\vec{B}_z$  навпаки додаються одна до одної, так що вектор сумарної магнітної індукції поля, яке створюється у точці  $P$  коловим струмом в цілому, направлений уздовж осі  $z$ .

Оскільки кут між векторами  $d\vec{l}$  та  $\vec{r}$  прямий, то  $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{r^2}$ .

Вертикальна проєкція дорівнює

$$dB_z = dB \cdot \cos \beta = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \cos \beta}{r^2}, \quad (11.12)$$

$$\cos \beta = \frac{R}{r} = \frac{R}{(z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (11.13)$$

З врахуванням (11.13) формула (11.12) набуває вигляду

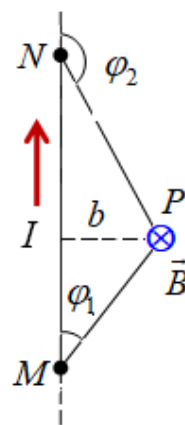


Рисунок 11.7

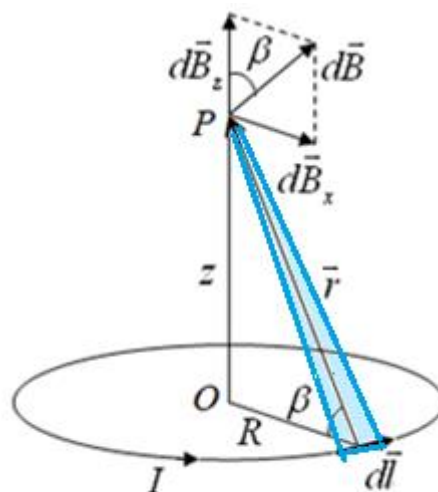


Рисунок 11.8

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot R}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot R}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (11.14)$$

Тоді

$$\begin{aligned} B &= \oint dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot R}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \oint dl = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot R}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi R^2 I}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Отже, величина **магнітної індукції на осі кругового струму** на відстані  $z$  від центру становить

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi R^2 I}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (11.15)$$

а в центрі кругового струму  $I$  радіуса  $R$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I}{R}. \quad (11.16)$$

Напрямок магнітного поля можна визначити за **правилом свердлика** (рис. 11.9, а): якщо обертати ручку свердлика за напрямком струму, то вістря свердлика вкаже напрямок силових ліній магнітного поля; або за **правилом правої руки** (рис. 11.9, б): якщо чотири пальці показують напрямок струму в контурі, то великий палець, відставлений на  $90^\circ$ , вказує напрямок силових ліній кругового витка, які показані на рис. 11.9, в.

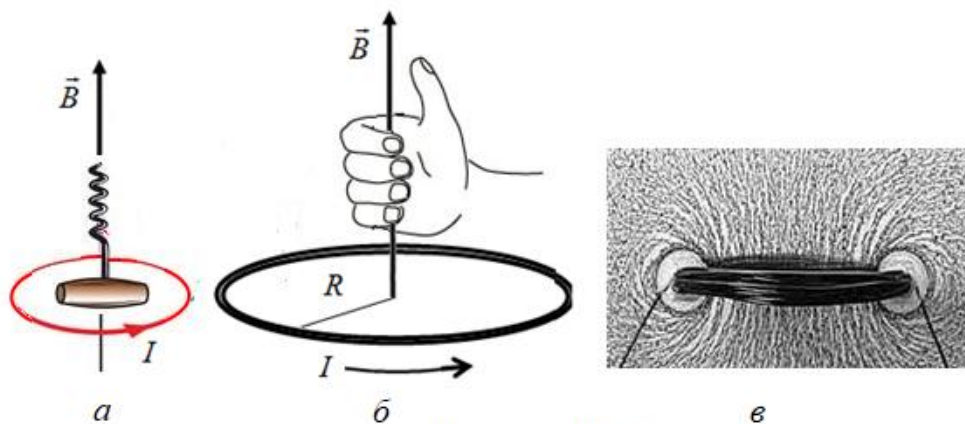


Рисунок 11.9

### 11.1.3. Магнітне поле заряду, що рухається. Співвідношення $\vec{B}$ і $\vec{E}$

Струм – це рух носіїв заряду, зокрема, у провідниках – це спрямований потік електронів, що рухаються зі швидкістю  $\vec{v}$  (швидкістю дрейфу):

$$I = j \cdot S = n \cdot e \cdot v \cdot S,$$

де  $S$  – площа поперечного перерізу провідника,  $n$  – кількість носіїв заряду в одиниці об'єму.

Отже, враховуючи, що вектори  $\vec{v}$  та  $d\vec{l}$  мають однаковий напрямок, а  $S \cdot dl$  – нескінченно малий об'єм елемента провідника (рис. 11.10), маємо:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{n \cdot e \cdot v \cdot S[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{n \cdot e \cdot S \cdot dl[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{dq[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}.$$

*Магнітне поле заряду, що рухається,*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (11.17)$$

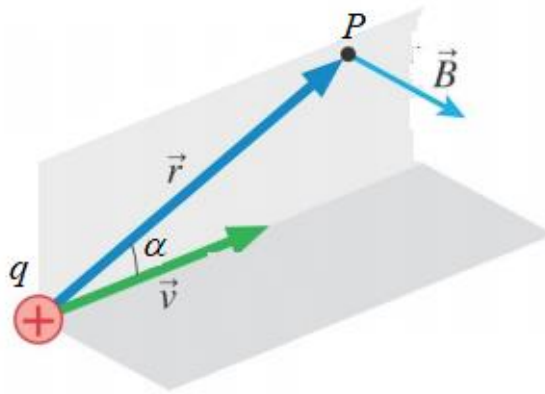


Рисунок 11.10

Електричний заряд, попри те, рухається він чи покоїється, створює електричне поле

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{e}_r, \quad (11.18)$$

звідки величина заряду становить

$$q = 4\pi\epsilon_0 r^2 (\vec{E}, \vec{e}_r). \quad (11.19)$$

Якщо підставити (11.19) в (11.10), то отримуємо зв'язок між векторами магнітної індукції  $\vec{B}$  поля точкового заряду і вектором напруженості його електричного поля  $\vec{E}$ .

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 r^2 (\vec{E}, \vec{e}_r)[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0\epsilon_0 (\vec{E}, \vec{e}_r)[\vec{v}, \vec{r}]}{r} = \\ &= \frac{\mu_0\epsilon_0 (\vec{r}, \vec{e}_r)[\vec{v}, \vec{E}]}{r} = \frac{\mu_0\epsilon_0 r [\vec{v}, \vec{E}]}{r} = \mu_0\epsilon_0 [\vec{v}, \vec{E}] = \frac{[\vec{v}, \vec{E}]}{c^2},\end{aligned}\quad (11.20)$$

де  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 3 \cdot 10^8$  м/с – *електродинамічна константа (швидкість світла у вакуумі)*,  $\epsilon_0$  – електрична стала,  $\mu_0$  – магнітна стала.

#### 11.1.4. Магнітний потік. Теорема Гаусса і теорема о циркуляції магнітного поля

**Магнітний потік**  $\Phi$  (потік ліній магнітного поля) через поверхню  $S$  (рис. 11.11, а) визначається як

$$\Phi = \int d\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B \cdot d\vec{S} \cos \alpha, \quad (11.21)$$

де  $d\Phi$  – елементарний потік,  $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$  – вектор елементарної ділянки поверхні,  $\vec{n}$  – одинична нормаль до поверхні,  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{B}$  і  $d\vec{S}$ .

**Теорема Гаусса:** потік вектора магнітної індукції через довільну замкнуту поверхню дорівнює нулю.

$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (11.22)$$

Цей результат є математичним виразом того факту, що у природі немає магнітних зарядів – джерел магнітного поля, у яких би починалися і закінчувалися лінії магнітної індукції. З рис. 11.11, б видно, що кількість силових ліній поля (ліній вектора  $\vec{B}$ ), що входять у замкнуті гауссові поверхні  $S_I$  та  $S_{II}$ , дорівнює кількості силових ліній, що виходять з них.

Рівняння (11.22) є віддзеркаленням того факту, що лінії магнітного поля є замкнутими, а картини магнітних полів нагадують завихрення. Тому поля із замкнутими силовими лініями називаються вихровими полями, тобто, магнітне поле є **вихровим силовим полем**.

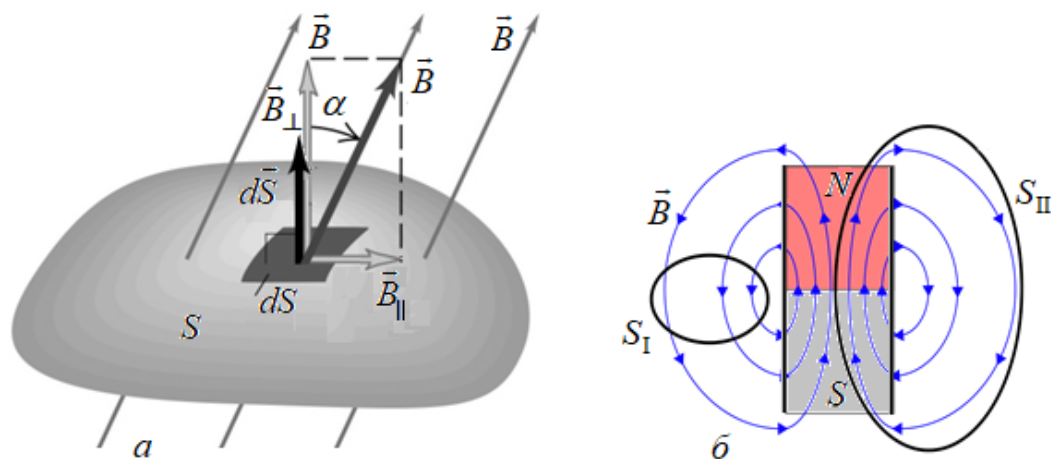


Рисунок 11.11

**Циркуляцією по відрізку** прямої  $d\vec{l}$  однорідного поля  $\vec{B}$  називається скалярний добуток:

$$C_l = \vec{B} d\vec{l} = B l \cos \alpha, \quad (11.23)$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{B}$  та  $d\vec{l}$ .

**Циркуляцією вектора  $\vec{B}$  по замкнутому контуру  $L$**  називається інтеграл

$$C = \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B dl \cos \alpha = \oint_L B_l dl. \quad (11.24)$$

**Теорема про циркуляцію:** циркуляція магнітного поля постійних струмів по кожному замкнутому контуру пропорційна сумі сил струмів, що пронизують контур циркуляції.

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^N I_k, \quad (11.25)$$

де  $N$  – число провідників зі струмом, які охоплюються контуром  $L$  довільної форми (рис. 11.12).

Кожен струм враховується стільки разів, скільки разів він охоплюється контуром; при цьому струм вважається додатним (позитивним), якщо напрямок

його протікання пов'язаний з напрямком обходу контуру **правилом правого гвинта**, а струм протилежного напрямку вважається від'ємним (негативним).

На рис. 11.12 при обході контуру за годинниковою стрілкою струми  $I_1 < 0$ ,  $I_2 > 0$  і  $I_3 > 0$ .

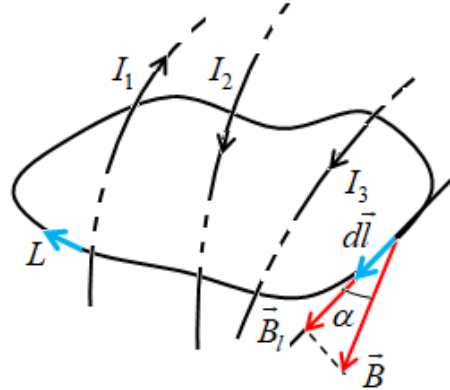


Рисунок 11.12

Теорема про циркуляцію справедлива лише для магнітного **поля в вакуумі**, оскільки для поля в речовині необхідно враховувати **молекулярні струми**, які будуть розглянуті пізніше.

Подібно теоремі Гауса для електричного поля, теорема о циркуляції вектора  $\vec{B}$  дозволяє розраховувати магнітні поля різних конфігурацій струмів (рис. 11.13).

Наведемо формули для розрахунку магнітної індукції:

- **поля ідеального соленоїда** – нескінченної циліндричної котушки, щільно намотаної тонким дротом в один шар, по якій протікає струм  $I$  (рис. 11.13, а, б)

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I = \mu_0 \cdot n \cdot I, \quad (11.26)$$

де  $n$  – кількість витків на одиниці довжини,  $N$  – загальна кількість витків,  $l$  – довжина соленоїда;

- **поля тороїда** – дротяної котушки щільно намотаної в один шар по всій поверхні тора (рис. 11.13, в, г)

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}, \quad (11.27)$$

де  $N$  – загальна кількість витків,  $r$  – радіус осьової лінії тороїда.



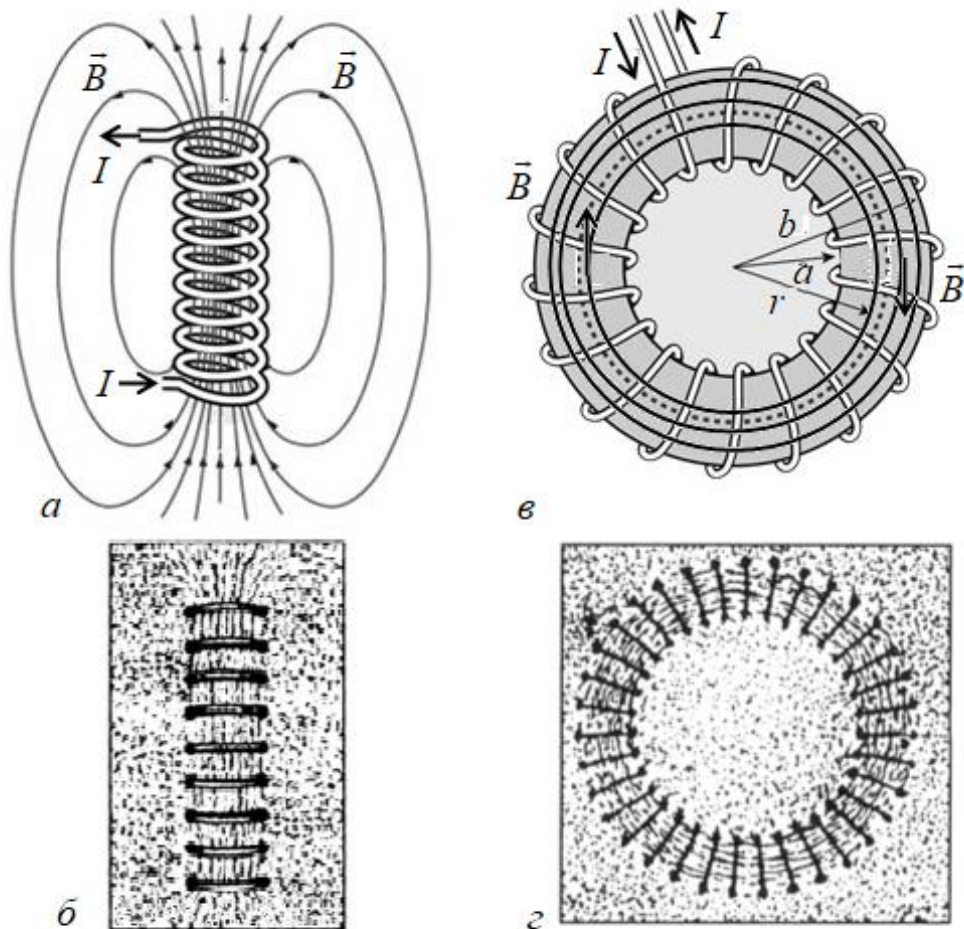


Рисунок 11.13

### 11.1.5. Сила Ампера. Взаємодія паралельних струмів

Якщо провідник зі струмом помістити у зовнішнє магнітне поле, то воно буде діяти на цей провідник.

**Сила Ампера**, що діє на нескінченно малий елемент довжини провідника  $d\vec{l}$  зі струмом  $I$  в магнітному полі  $\vec{B}$ , визначається як

$$d\vec{F} = I [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (11.28)$$

Величина сили Ампера дорівнює

$$dF = IBdl \sin \alpha, \quad (11.29)$$

де  $\alpha$  – кут, між напрямками магнітного поля  $\vec{B}$  та елементом струму  $Id\vec{l}$ .

Напрямок дії сили Ампера можна визначити за правилом лівої руки (рис. 11.14, а) або за правилом Флемінга (рис. 11.14, б).

**Правило лівої руки:** якщо ліву руку розмістити так, щоб лінії магнітної індукції  $\vec{B}$  входили у долоню, а чотири пальці вказували напрямок струму, то відставлений під кутом  $90^\circ$  великий палець покаже напрямок сили, яка діє на провідник зі струмом у магнітному полі (рис. 11.14, а).

**Правило Флемінга:** коли пальці лівої руки знаходяться один до одного під прямим кутом, вони показують: вказівний палець – напрямок поля  $\vec{B}$ , середній – напрямок струму, а великий – напрямок дії сили Ампера  $\vec{F}$  (рис. 11.14, б).

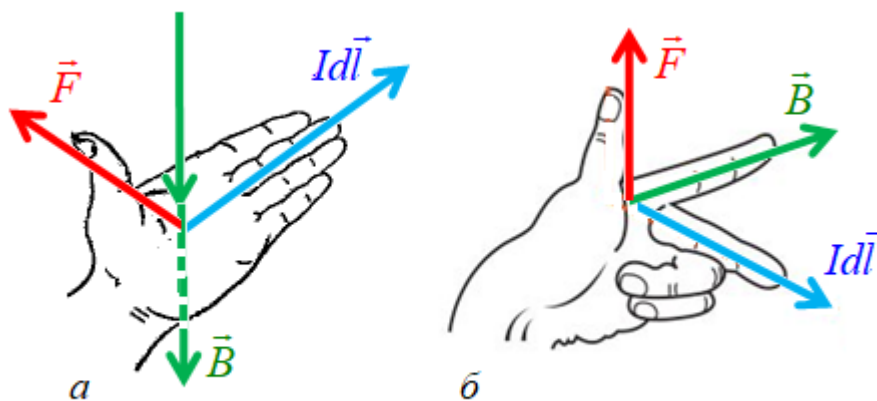


Рисунок 11.14

Сила Ампера, що діє на весь провідник, складається із елементарних сил, які діють на окремі його ділянки, і в загальному випадку визначається інтегруванням виразу (11.28) по всій довжині провідника:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = I \int [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (11.30)$$

Якщо провідник знаходиться в однорідному магнітному полі ( $\vec{B} = \text{const}$ ), величина сили Ампера дорівнює

$$F = IBl \sin \alpha. \quad (11.31)$$

Два паралельних провідники зі струмами у залежності від напрямків струму в них можуть відштовхуватися або притягуватися (рис. 11.15, а, б).

Струм  $I_1$  (рис. 11.15, в) в місці, де розташований другий провідник, створює магнітне поле  $\vec{B}_1$ , яке за законом Біо-Савара-Лапласа спрямоване перпендикулярно площині, де лежать струми, «від нас», що визначається за правилом правої руки. Величина цього поля, припускаючи, що струм нескінченно довгий, є

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{b}, \quad (11.32)$$

де  $b$  – відстань між струмами.

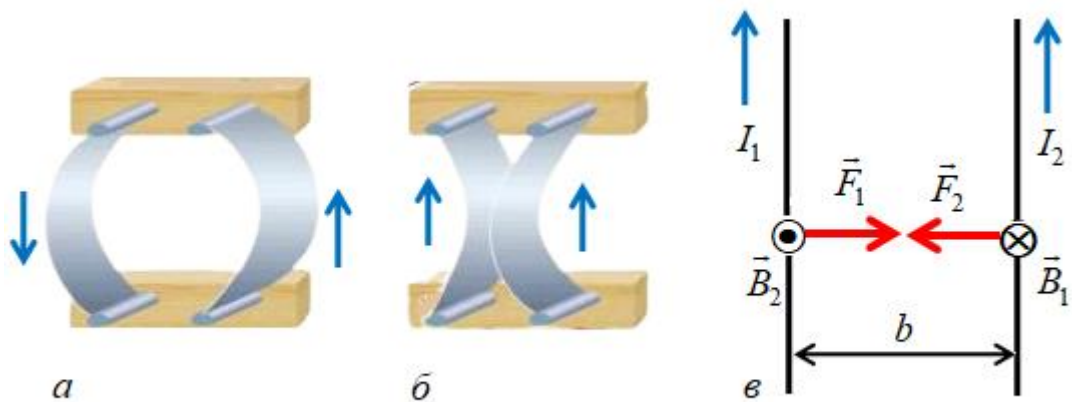


Рисунок 11.15

На кожен елемент струму  $I_2$  довжиною  $\Delta l$  в магнітному полі  $\vec{B}_1$  діє сила Ампера  $\vec{F}_2$ , спрямована вліво. Її напрямок можна визначити за правилом лівої руки, зважаючи на те, що  $\sin \alpha = 1$  в (11.31), оскільки  $\vec{B} \perp Id\vec{l}$ .

$$F_2 = I_2 \cdot \Delta l \cdot B_1, \quad (11.33)$$

Отже, сила взаємодії двох струмів, яка приходить на одиницю довжини, дорівнюватиме

$$F_l = \frac{F}{\Delta l} = \frac{I_2 \cdot \Delta l \cdot B_1}{\Delta l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 \cdot I_2}{b}. \quad (11.34)$$

Формула (11.34) симетрична відносно струмів, тобто сила, з якою перший провідник діє на другий є рівною за величиною і протилежно спрямованою силі,

з якою другий провідник діє на перший. Крім того, формула (11.33) дає величину сили відштовхування провідників.

### 11.1.6. Контур зі струмом в магнітному полі. Магнітний момент

На замкнутий контур довільної форми зі струмом  $I$  діє вислідна сила Ампера

$$\vec{F} = I \oint [d\vec{l}, \vec{B}], \quad (11.35)$$

яка може дорівнювати нулю (в однорідному магнітному полі  $\vec{B} = \text{const}$ ) або бути ненульовою (в неоднорідному полі  $\vec{B} \neq \text{const}$ ).

Якщо контур плоский і його розмір незначний, то векторна величина

$$\vec{p}_m = I\vec{S} = I \cdot S \cdot \vec{n}. \quad (11.36)$$

називається **магнітним моментом** (або **магнітним дипольним моментом**).

Вектор  $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$ , де  $\vec{n}$  – одинична нормаль до контуру (рис. 11.16, а)

$$[p_m] = \text{Ампер} \cdot \text{метр}^2 = \text{А} \cdot \text{м}^2.$$

Попри те, що вислідна сила Ампера дорівнює нулю, магнітне поле діє на контур, і **момент сил Ампера**, що не залежить від точки прикладання сил, становить

$$\vec{M} = \oint [\vec{r}, d\vec{F}], \quad (11.37)$$

$$\text{де } d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}].$$

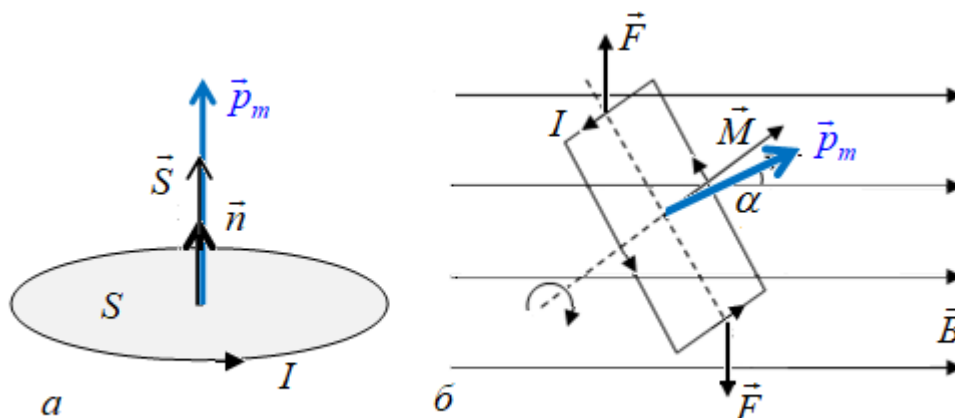


Рисунок 11.16

Механічний момент сил Ампера (рис. 11.16, б) можна виразити через магнітний момент і тоді

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]. \quad (11.38)$$

Величина вектора  $\vec{M}$  становить

$$M = p_m \cdot B \cdot \sin \alpha. \quad (11.39)$$

Таким чином, на контур зі струмом діє крутний момент, величина якого залежить від кута  $\alpha$  між векторами магнітного моменту  $\vec{p}_m$  і магнітної індукції  $\vec{B}$  поля (рис. 11.17, а).

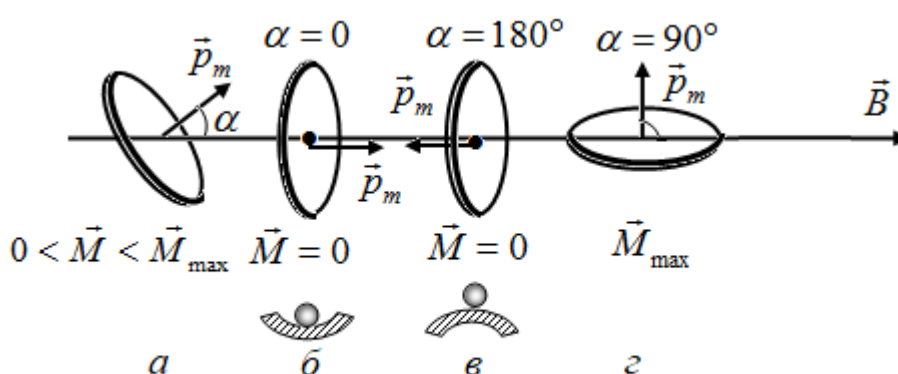


Рисунок 11.17

В залежності від взаємної орієнтації вектора  $\vec{p}_m$  і вектора  $\vec{B}$  магнітного поля можливі наступні окремі випадки:

1) вектори  $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$ ,  $\alpha = 0$ , механічний момент  $M = 0$ . Контур знаходиться у стані стійкої (стабільної) рівноваги (рис. 11.17, б);

2) вектори  $\vec{p}_m \updownarrow \vec{B}$ ,  $\alpha = 180^\circ$ , механічний момент  $M = 0$ . Контур знаходиться у стані нестійкої рівноваги, коли при щонайменшій зміні орієнтації він перевернеться у положення  $\alpha = 0$  (рис. 11.17, в);

3) вектори  $\vec{p}_m \perp \vec{B}$ ,  $\alpha = 90^\circ$ , механічний момент  $M_{\max}$  (рис. 11.17, г).

Останній окремий випадок дозволяє дати визначення магнітної індукції.

**Магнітна індукція** – це векторна характеристика магнітного поля, величина якої чисельно дорівнює максимальному моменту, що діє на контур зі струмом, магнітний момент  $p_m$  якого дорівнює одиниці,

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}, \quad (11.40)$$

а напрямок збігається з положенням вектора магнітного моменту  $\vec{p}_m$  в положенні його стійкої рівноваги в магнітному полі.

Якщо розглянути контур зі струмом  $I$ , в якому є рухома сторона довжиною  $l$  (рис. 11.18), що знаходиться в магнітному полі  $\vec{B}$ , то сила, що діє на цю сторону з врахуванням того, що  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\sin \alpha = 1$ , дорівнює

$$F = IlB \sin \alpha = IlB. \quad (11.41)$$

**Загальна робота**, що визначається як інтеграл

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{x}, \text{ становить}$$

$$A = \int_1^2 IlB dx = I \int_1^2 B dS = I \int_1^2 d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi,$$

де  $dS = ldx$  – приріст площі при русі сторони  $l$ ,  $\Phi_1$  та  $\Phi_2$  – значення магнітного потоку через контур в початковому і кінцевому положеннях.

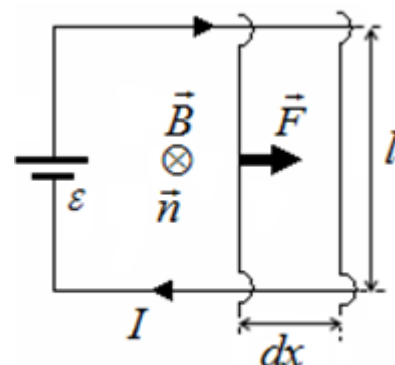


Рисунок 11.18

$$A = I\Delta\Phi. \quad (11.42)$$

Формула (11.42) може бути трансформована з врахуванням зв'язку роботи та зміни потенціальної енергії

$$dA = IBdS = (IdS)B = -d(PE),$$

$$A = -\int_1^2 d(PE) = -\int_1^2 (IdS)B = -(I, S)B = -p_m B.$$

$$A = (\vec{p}_m, \vec{B}). \quad (11.43)$$

Беручи до уваги (11.42), слід зазначити, що **потенціальна енергія контуру** в магнітному полі

$$PE = -p_m B \cos \alpha + \text{const} = -(\vec{p}_m, \vec{B}) + \text{const}. \quad (11.44)$$

Формули (11.42) – (11.44) є дійсними для контурів будь-якої конфігурації та розмірів.

### **11.1.7. Сила, що діє на заряд в магнітному полі. Сила Лоренца. Ефект Холла**

Сила, яка діє на провідник зі струмом, дорівнює  $d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]$ . Струм складається з окремих зарядів. Якщо густина струму  $j = I/S$ , тоді  $I = j \cdot S$  і

$$d\vec{F} = j \cdot S[d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (11.45)$$

Густину струму можна записати, використовуючи дрейфову швидкість носіїв заряду  $v$ , їх концентрацію  $n$  і величину заряду  $e$  (елементарний заряд):

$$j = n \cdot e \cdot v. \quad (11.46)$$

Підставляючи (11.46) в (11.45), отримуємо

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= I[d\vec{l}, \vec{B}] = n \cdot e \cdot v \cdot S[d\vec{l}, \vec{B}] = n \cdot e \cdot S \cdot dl[\vec{v}, \vec{B}] = \\ &= e \cdot n \cdot dV[\vec{v}, \vec{B}] = dq[\vec{v}, \vec{B}]. \end{aligned} \quad (11.47)$$

Магнітна сила, що діє на один заряд (магнітна складова сили Лоренца), дорівнює

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (11.48)$$

а її величина дорівнює

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha. \quad (11.49)$$

В об'єднаному електричному і магнітному полі силу на заряджену частинку діє **сила Лоренца**

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}] = \vec{F}_{\text{ел}} + \vec{F}_{\text{маг}}, \quad (11.50)$$

де  $\vec{F}_{\text{ел}}$  і  $\vec{F}_{\text{маг}}$  – це **електрична** і **магнітна складові** сили Лоренца.

Електрична складова сили Лоренца докладно розглядалася в розділі «Електростатика», тому в цій главі ми будемо розглядати дію магнітної складової і саме її будемо називати силою Лоренца.

Порівнюючи електричну  $F_{\text{ел}} = q \cdot E$  і магнітну складові  $F_{\text{маг}} = q \cdot v \cdot B$ , а також зв'язок між магнітною індукцією і напруженістю електричного поля (11.20)

$$B = \frac{v \cdot E}{c^2}, \text{ отримаємо}$$

$$\frac{F_{\text{маг}}}{F_{\text{ел}}} = \frac{qvB}{qE} = \frac{v \cdot vE}{c^2 E} = \left(\frac{v}{c}\right)^2. \quad (11.51)$$

Цей результат дозволяє зробити такі висновки:

1. Пояснення природи магнітної взаємодії можливе лише на основі сучасної фізики, оскільки в класичній (ньютонівській) фізиці швидкість світла вважається нескінченною;

2. Для звичайних швидкостей  $v \ll c$  магнітна сила в мільйон разів менша за електричну, але при  $v \rightarrow c$  роль магнітної сили різко зростає;

3. Електрична сила під час руху електронів у дротах майже дорівнює нулю через баланс позитивних і негативних зарядів усередині провідника; в цьому випадку магнітна взаємодія набуває більшого значення;

4. Магнітна сила діє виключно на заряди, що рухаються, в той час, коли електрична сила діє як на стаціонарні заряди, так і на ті, що рухаються.

Розглянемо окремий випадок, коли заряджена частинка рухається **перпендикулярно** однорідному магнітному полю ( $\vec{v} \perp \vec{B}$ ) (рис. 11.19, а).

Згідно з 2-м законом Ньютона,

$$ma = F = qvB \sin \alpha. \quad (11.52)$$

Відповідно до (11.48) сила, що діє на заряджену частинку в магнітному полі, завжди перпендикулярна вектору її швидкості, тому заряджена частинка рухається по криволінійній траєкторії з доцентровим (нормальним)



прискоренням  $a_n$ . Враховуючи, що  $\alpha = 90^\circ$  і  $\sin \alpha = 1$ , формула (11.52) набуває вигляду

$$ma_n = qvB,$$

$$m \frac{v^2}{R} = qvB,$$

звідки **радіус кривизни траєкторії**, вздовж якої рухається частинка, становить

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (11.53)$$

**Період обертання** – час, протягом якого частинка робить 1 оберт,

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi mv}{vqB} = \frac{2\pi m}{qB}, \quad (11.54)$$

а **частота обертання** і **кругова частота обертання** дорівнюють

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}, \quad (11.55)$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{qB}{m}. \quad (11.56)$$

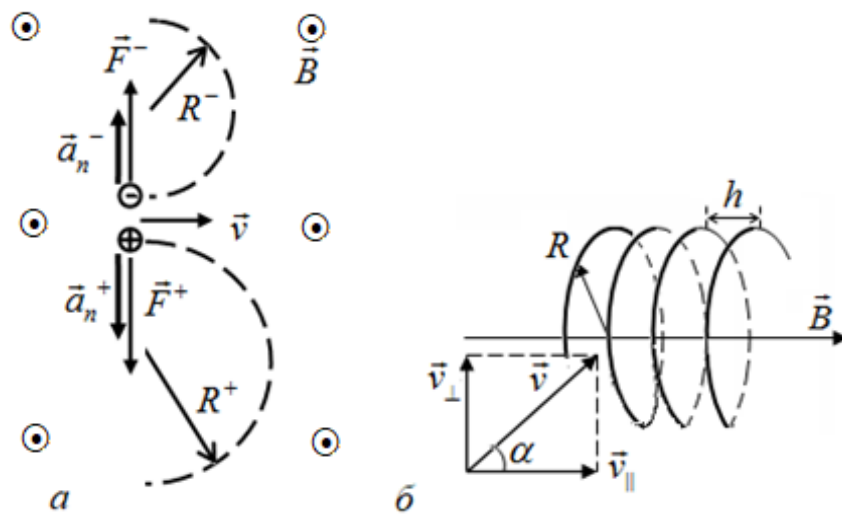


Рисунок 11.19

Якщо швидкість частинки спрямована під довільним кутом до магнітного поля  $\vec{B}$ , то треба розкласти швидкість частинки  $\vec{v}$  на дві складові:  $\vec{v}_{\parallel}$  – вздовж

магнітного поля і  $\vec{v}_\perp$  – перпендикулярно йому (рис. 11.19, б). Ці складові дорівнюють

$$\begin{cases} v_\parallel = v \cos \alpha \\ v_\perp = v \sin \alpha \end{cases} \quad (11.57)$$

Траєкторією руху зарядженої частинки є *гвинтова лінія*, радіус якої визначається перпендикулярною складовою швидкості

$$R = \frac{mv_\perp}{qB}, \quad (11.58)$$

а *крок гвинтової лінії* – паралельною її складовою

$$h = v_\parallel T = \frac{v_\parallel 2\pi m}{qB}. \quad (11.59)$$

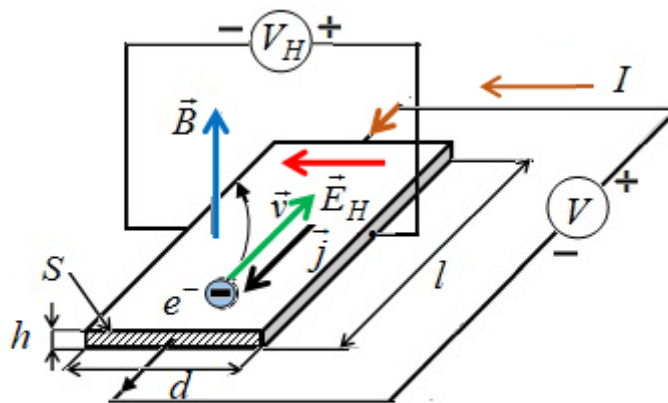


Рисунок 11.20

Одним із проявів дії сили Лоренца на заряди є *ефект Холла* (*гальваномагнітний ефект*). Якщо металеву пластину, вздовж якої тече постійний електричний струм  $I$ , густина якого  $\vec{j}$ , помістити в перпендикулярне до неї магнітне поле  $\vec{B}$ , то у напрямку, що є перпендикулярним  $\vec{B}$  та  $\vec{j}$ , виникає різниця потенціалів  $U_H = \varphi_1 - \varphi_2$  (рис. 11.20).

Холлівська різниця потенціалів  $U_H$  залежить від роду матеріалу пластини, густини струму  $j$ , товщини пластини  $h$  та індукції магнітного поля  $B$ .

Пояснення ефекту Холла можна дати з точки зору класичної електронної теорії металів. Якщо пластина металева, то носіями електричного струму є

електрони. У магнітному полі на електрони діє сила Лоренца, тому на одній грані виникає надлишок електронів, а на іншій – їх брак, а наслідком цього є поперечне електричне поле  $\vec{E}_H$ , спрямоване перпендикулярно  $\vec{B}$ . Якщо напруженість цього поля  $F_{\text{ел}} = eE_H$  досягає такої величини, коли сила, з якою воно діє на електрони, врівноважує дію сили Лоренца  $F_{\text{маг}} = evB$ , тоді заряди більше не будуть відхилятися магнітним полем і в поперечному напрямку встановлюється стаціонарний розподіл зарядів. Це означає, що при  $F_{\text{ел}} = F_{\text{маг}}$ ,  $eE_H = evB$ , а тому

$$E_H = vB. \quad (11.60)$$

З іншого боку, оскільки зв'язок між вектором напруженості електричного поля і потенціалом встановлюється співвідношенням  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ , то для одновимірного випадку, коли різниця потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2 = U_H$  змінюється на відстані  $h$ , маємо

$$E_H = \frac{U_H}{h}. \quad (11.61)$$

Вважаючи на те, що густина струму  $j = nev$ , де  $n$  – концентрація електронів, дрейфова швидкість становить

$$v = \frac{j}{en} = \frac{I}{Sen} = \frac{I}{enhd}, \quad (11.62)$$

де густина струму  $j = \frac{I}{S} = \frac{I}{hd}$ .

Тоді, прирівнюючи праві частини формул (11.60) і (11.61) і враховуючи (11.62), отримаємо вираз для **холлівської різниці потенціалів**

$$U_H = \frac{IBh}{enhd} = \frac{1}{en} \frac{IB}{d} = R_H \frac{IB}{d}, \quad (11.63)$$

де  $R_H = \frac{1}{en}$  – **стала Холла**.

Ефект Холла спостерігається не тільки в металах, але й в напівпровідниках та інших середовищах і є одним із найефективніших методів вивчення

властивостей носіїв заряду та їх рухливості. Він використовується у різних датчиках, у тому числі в тих, що встановлюються в електростартерах двигунів, охолоджувальних системах комп'ютерів, навігаційних системах мобільних телефонів тощо. Пристрої, засновані на відносно простому зв'язку між струмом, магнітним полем та напругою, можуть застосовуватися для вимірювання положення, швидкості та напруженості магнітного поля.

#### ***11.1.8. Поле в магнетику. Намагніченість. Типи магнетиків***

Будь-яка речовина складається з багатьох атомів або молекул, до складу яких входять рухомі електричні заряди. Тому ці мікрооб'єкти можна описувати за допомогою крихітних магнітних дипольних моментів. Зазвичай окремі диполі компенсують один одного через випадкову орієнтацію їхнього напрямку. Однак, коли прикладається магнітне поле, відбувається сумісне вирівнювання цих магнітних диполів, і матеріал намагнічується.

**Магнітне поле  $\vec{B}$  в речовині** складається з двох полів: зовнішнього поля  $\vec{B}_0$  і поля  $\vec{B}'$  намагніченої речовини, що створюється так званими молекулярними струмами,

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \quad (11.64)$$

В деяких матеріалах атоми (або молекули) мають власні магнітні моменти, і їх намагнічування відбувається через орієнтацію цих магнітних диполів у зовнішньому полі. Існує інший тип речовини, в якій власних магнітних моментів зазвичай немає, але вони виникають під впливом зовнішнього магнітного поля. У будь-якому випадку речовина в цілому набуває магнітний момент, і стає джерелом магнітного поля.

Кількісною характеристикою намагнічування речовини є **вектор намагнічування  $\vec{J}$  (намагніченість)**, який дорівнює векторній сумі магнітних моментів усіх молекул в одиниці об'єму речовини:

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i (\vec{p}_m)_i}{\Delta V} = \frac{d\vec{p}_m}{dV}, \quad (11.65)$$

де  $\Delta V$  – це нескінченно малий об'єм,  $\vec{p}_m$  – магнітний дипольний момент молекули.

$$[J] = \frac{A \cdot m^2}{m^3} = \frac{A}{m}.$$

Якщо  $n$  – концентрація молекул в речовині, а  $\langle \vec{p}_m \rangle$  – середній магнітний момент молекули, то намагніченість становить

$$\vec{J} = n \langle \vec{p}_m \rangle. \quad (11.66)$$

На рис. 11.21 показаний однорідний магнетик, в молекулах якого протікають мікроскопічні струми, які компенсують один одного у середині, але створюють **струм намагнічування (магнетизації)**  $I'$ , що протікає по поверхні. Струми, що пов'язані з рухом носіїв заряду (вільних електронів) в матеріалі, називаються **струмами провідності**  $I$ .

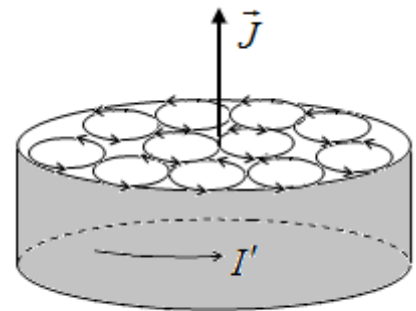


Рисунок 11.21

В неоднорідному магнетику розподіл струмів намагнічування є більш складним, бо струми не компенсуються, і поле, зв'язане з ними, залежить від зовнішнього поля  $\vec{B}$ .

**Циркуляція вектора намагнічування** визначається алгебраїчною сумою струмів магнетизації

$$\oint \vec{J} d\vec{l} = I', \quad (11.67)$$

де  $I' = \int \vec{j}' d\vec{S}$ , і  $\vec{j}'$  – це густина струмів намагнічування.

Взагалі вектор  $\vec{J}$  залежить від усіх струмів (намагнічування і провідності), але в деяких окремих випадках від визначається лише струмами намагнічування.

Якщо магнетик знаходиться в магнітному полі, циркуляція вектора магнітної індукції (11.25) залежить від усіх струмів

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I + I').$$

Проведемо перестановку доданків і з урахуванням (11.65) отримаємо

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \vec{B} d\vec{l} = I + \oint \vec{J} d\vec{l}. \quad (11.68)$$

Об'єднаємо два інтеграли

$$\oint \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = I,$$

і введемо **допоміжний вектор**

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}, \quad (11.69)$$

який часто називають **напруженістю магнітного поля**.

Його особливістю є то, що він визначається виключно струмами провідності

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I. \quad (11.70)$$

Формула (11.70) є **теорема про циркуляцію вектора  $\vec{H}$** .

$$[H] = \text{А/м}.$$

Для більшості речовин вектор намагнічування  $\vec{J}$  лінійно залежить від прикладеного магнітного поля

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (11.71)$$

де  $\chi$  – безрозмірний коефіцієнт, який називається **магнітна сприйнятливість**.

Магнітна сприйнятливість може бути додатною та від'ємною, а для вакуума  $\chi = 0$ . Для більшості речовин вона становить декілька одиниць.

Підстановка (11.71) в (11.56) дає

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H},$$

$$\vec{H} (1 + \chi) = \frac{\vec{B}}{\mu_0}.$$

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}.$$

Якщо ввести параметр – **магнітну проникність (відносну магнітну проникність)**

$$\mu = 1 + \chi, \quad (11.72)$$

то зв'язок між магнітною індукцією і напруженістю магнітного поля набуває вигляду

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}. \quad (11.73)$$

Відносна магнітна проникність середовища визначає, у скільки разів індукція даного магнітного поля в даному середовищі відрізняється від індукції цього поля в вакуумі.

Іноді вводиться **абсолютна магнітна проникність**, яка описує магнітні властивості середовища і визначається як

$$\mu_{\text{абс}} = \mu\mu_0. \quad (11.74)$$

Розмірності

- магнітної сталої

$$[\mu_0] = \text{Генрі/м} = \text{Гн/м};$$

- відносної магнітної проникності

$$[\mu] - \text{безрозмірна величина};$$

- абсолютної магнітної проникності

$$[\mu_{\text{абс}}] = \text{Генрі/м} = \text{Гн/м}.$$

Для вакуума магнітна проникність (відносна)  $\mu = 1$ , а абсолютна магнітна проникність  $\mu_{\text{абс}} = 1,2566 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ .

Одиниця виміру абсолютної магнітної проникності є 1 Гн/м (або Ньютон на Ампер в квадраті, Н/м<sup>2</sup>), тобто це магнітна проникність такого середовища, де за напруженості  $H$  магнітного поля, що дорівнює 1 А/м, виникає магнітна індукція  $B$  величиною 1 Тл.

В залежності від величин магнітної сприйнятливості і відносної магнітної проникності магнетики поділяються на **діамагнетики**, **парамагнетики** і **ферромагнетики** (табл. 11.1, табл. 11.2).

Таблиця 11.1 – Типи магнетиків

| Тип магнетика | Магнітна<br>сприйнятливість, $\chi$ | Магнітна<br>проникність<br>(відносна), $\mu$ | Залежність<br>$\vec{J}(\vec{H})$ |
|---------------|-------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------|
| Діамагнетики  | $\chi < 0$                          | $\mu < 1$                                    | лінійна                          |
| Парамагнетики | $\chi > 0$                          | $\mu > 1$                                    | лінійна                          |
| Феромагнетики | $\chi \gg 0$                        | $\mu \gg 1$                                  | нелінійна                        |

Таблиця 11.2 – Властивості пара- і діамагнетиків

|                                                  |                     | Парамагнетики                                                                   | Діамагнетики                                                                         |
|--------------------------------------------------|---------------------|---------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Приклади                                         |                     | Na, Mg, K, Ca, Al, Pt,<br>O <sub>2</sub> , розчини солей                        | Bi, Cu, Ag, Au, Hg,<br>Be, Ce, інертні гази                                          |
| Магнітна сприйнятливість                         |                     | $\chi > 0$                                                                      | $\chi < 0$                                                                           |
| Магнітна<br>проникність<br>(відносна)            |                     | $\mu > 1$                                                                       | $\mu < 1$                                                                            |
| Магнітний дипольний момент<br>$p_m$              |                     | Атоми мають<br>власний момент                                                   | Власний момент<br>відсутній                                                          |
| Поведінка у<br>зовнішньому<br>магнітному<br>полі |                     |                                                                                 | Виникає індукований<br>магнітний момент                                              |
|                                                  | Однорідне поле      | Магнітні моменти<br>орієнтуються по<br>полю $\vec{J} \uparrow \uparrow \vec{H}$ | Магнітні моменти<br>орієнтуються проти<br>поля $\vec{J} \uparrow \downarrow \vec{H}$ |
|                                                  | Неоднорідне<br>поле | Втягуються в поле                                                               | Виштовхуються з<br>поля                                                              |

### 11.1.9. Феромагнетизм і феромагнетики

**Феромагнетики** – це речовини (як правило, тверді кристалічні), які при не дуже високих температурах мають **мимовільну (спонтанну) намагніченість**,



яка сильно змінюється під впливом зовнішнього магнітного поля, деформації, зміни температури тощо.

На відміну від слабомагнітних діа- і парамагнетиків, внутрішнє магнітне поле в феромагнетиках може в сотні і тисячі разів перевершувати зовнішнє поле.

Феромагнетики – залізо, кобальт, нікель, деякі рідкоземельні метали, ряд сплавів.

Крива намагнічування феромагнетика має складний характер (рис. 11.22, а), тоді як для парамагнетиків вона є прямою з додатнім кутовим коефіцієнтом, а для діамагнетиків – прямою з від'ємним кутовим коефіцієнтом. На кривій

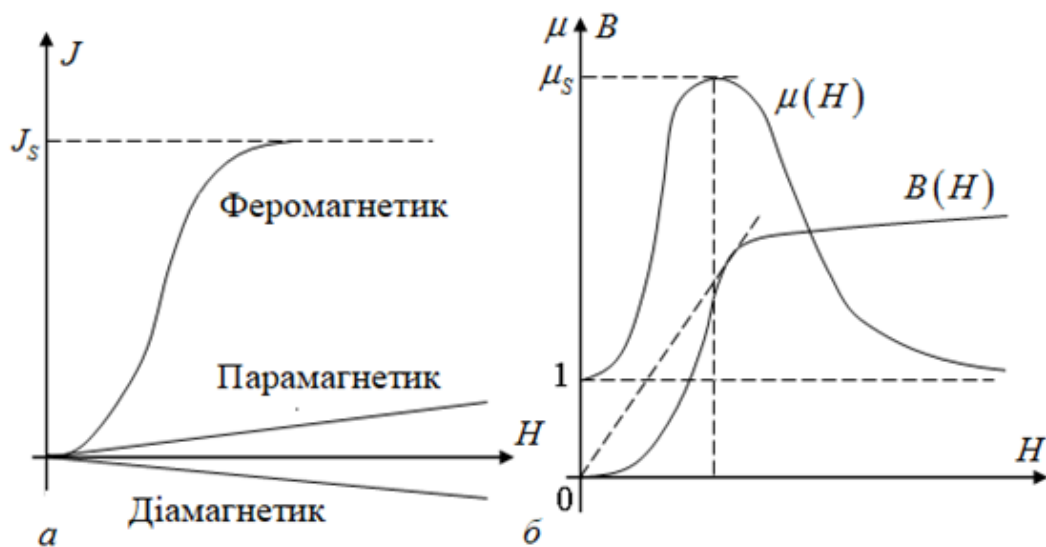


Рисунок 11.22

намагнічування феромагнетика спостерігається **магнітне насичення**  $J_s$ , тобто  $J = J_s = \text{const}$  незалежно від значення  $H$ .

Магнітна проникність  $\mu$  феромагнетиків залежить від напруженості поля; і вона також має складний характер (рис. 11.22, б), причому максимальні значення  $\mu$  дуже великі  $\mu_{\text{max}} \sim 10^3 - 10^6$ .

Особливістю феромагнетиків є часткова необоротність процесу намагнічування – **явище магнітного гістерезису** (з грецької – відставання або спізнання). На рис. 11.23 показана крива повного циклу перемагнічування феромагнетика (**петля гістерезису**):  $B_s$  – індукція насичення,  $H_c$  – коерцитивна

сила (величина поля, що розмагнічує феромагнетик),  $B_r$  – остаточна намагніченість.

При нагріванні феромагнетиків їхні магнітні властивості змінюються. Для кожного феромагнетика існує певна температура – **температура** (або **точка Кюрі**), вище за яку феромагнітні властивості зникають і речовина стає парамагнетиком. У заліза, наприклад, температура Кюрі дорівнює  $770^{\circ}\text{C}$ , у кобальту –  $1130^{\circ}\text{C}$ , у нікелю –  $360^{\circ}\text{C}$ .

Феромагнітні матеріали діляться на дві великі групи – на **магніто-м'які** (рис. 11.24, а) і **магніто-жорсткі** (рис. 11.24, б) матеріали.

Площа петлі гістерезису характеризує роботу, яку витрачає зовнішнє поле на одноразове перемагнічування феромагнетика і яка виділяється у феромагнетика у вигляді тепла. Тому в приладах змінного струму, в яких відбувається безперервне перемагнічування, тобто зміна напрямку магнітного поля (трансформатори, електродвигуни тощо), застосовуються магніто-м'які феромагнітні матеріали. А для виготовлення сталих магнітів,

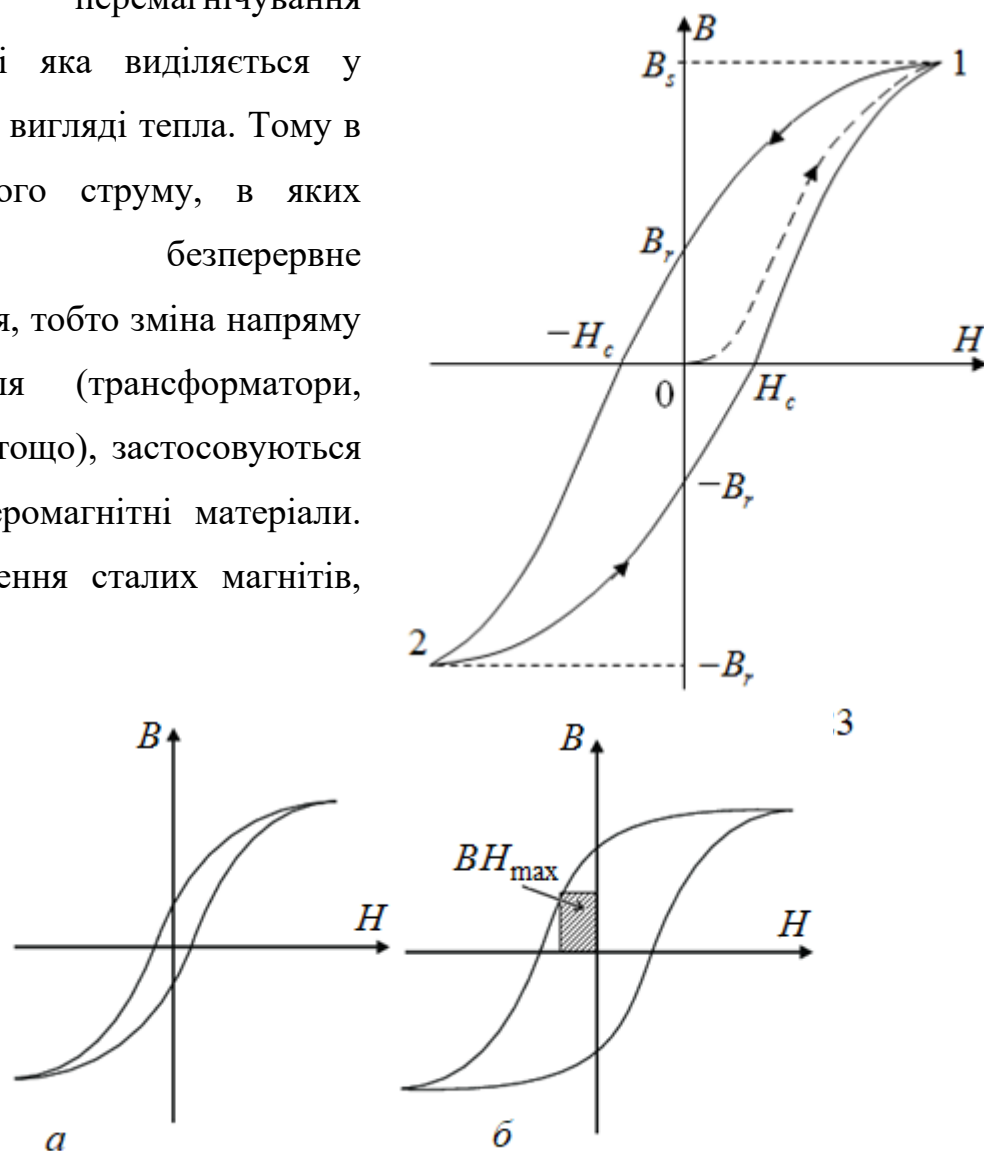


Рисунок 11.24

навпаки, потрібні магніто-жорсткі матеріали з великим значенням коерцитивної сили  $H_c$ .

Магнітна жорсткість характеризується показником  $BH_{\max}$ , що є найбільшим квадратом, що можна накреслити в другому квадранті  $B(H)$  залежності (рис. 11.24, б).

Властивості феромагнетиків пов'язані з існуванням в їх структурі значних за об'ємом, самовільно намагнічених до насичення областей – **доменів**, лінійні розміри яких досягають  $10^{-5} — 10^{-4}$  м. В межах одного домена всі магнітні моменти орієнтовані однаково (рис. 11.25). Без зовнішнього поля феромагнетик

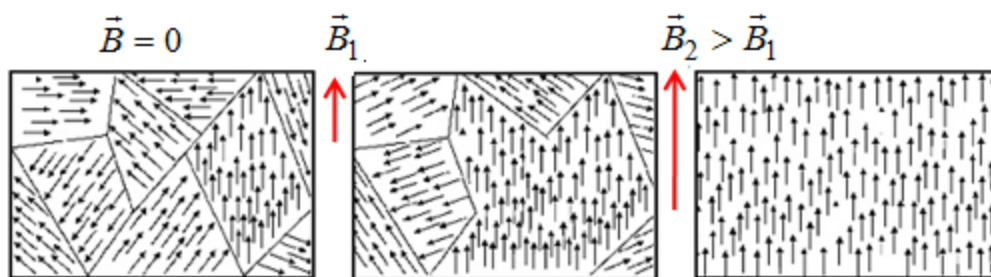


Рисунок 11.25

в цілому не має магнітних властивостей. Зовнішнє поле орієнтує всі домени в напрямку поля. Тепловий рух не може дезорієнтувати домени. І тільки при температурі, вищій за точку Кюрі, тепловий рух порушує магнітну орієнтацію всередині самих доменів, внаслідок чого феромагнетик перетворюється на парамагнетик.

Існують два магніто механічні ефекти, властиві феромагнетикам. Перший – це **магнітострикція** – зміна форми і розмірів тіла за його намагнічування.

Другий – **магніто механічний ефект** – зміна і навіть зникнення залишкової намагніченості тіла при його струсі або деформації (ефект Віллари). Саме через це постійні магніти слід оберігати від ударів.

## 11.2. Приклади розв'язання задач

### Задача 11.2.1

По двох довгих паралельних провідниках, розташованих на відстані  $d = AB = 10 \text{ см}$ , протікають струми  $I_1 = 20 \text{ А}$  і  $I_2 = 30 \text{ А}$ . Визначити магнітну індукцію поля в точках: 1)  $M_1 (M_1A = 2 \text{ см})$ ; 2)  $M_2 (M_2A = 2 \text{ см})$ ; 3)  $M_3 (BM_3 = 3 \text{ см})$ ; 4)  $M_4 (AM_4 = 6 \text{ см}, BM_4 = 8 \text{ см})$ ; 5)  $M_5 (AM_5 = BM_5 = 10 \text{ см})$ ; 6) Знайти точку  $M_6$  на прямій  $AB$ , магнітна індукція в якій дорівнює нулю.

| Дано:                    | Розв'язання                                                                                                                                                                      |
|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $d = AB = 10 \text{ см}$ | Магнітне поле у точці $M_1$ згідно із принципом суперпозиції полів дорівнює векторній сумі магнітних індукцій тих полів, що створює кожен із струмів незалежно від іншого, тобто |
| $I_1 = 20 \text{ А}$     |                                                                                                                                                                                  |
| $I_2 = 30 \text{ А}$     |                                                                                                                                                                                  |
| $F = ?$                  |                                                                                                                                                                                  |

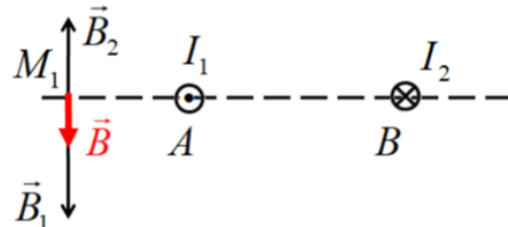
$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2. \quad (1)$$

Індукцію магнітного поля кожного зі струмів можна знайти, використовуючи закон Біо-Савара-Лапласа.

Струм  $I_1$  в точці  $M_1$  створює поле, вектор магнітної індукції якого перпендикулярний площині, в якій лежать вектор  $d\vec{l}$ , що збігається із напрямком дроту, по якому тече струм  $I_1$ , та радіус-вектор  $\vec{r}$ , що визначає положення точки  $M_1$  відносно елемента  $d\vec{l}$ :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Отже, вектор  $\vec{B}_1$  перпендикулярний прямій  $AB$ , згідно із правилом правої



руки, спрямований вниз. Модуль вектора магнітної індукції  $B_1$  нескінченно довгого прямого струму  $I_1$  на відстані  $AM_1$  від провідника дорівнює

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi \cdot AM_1}. \quad (2)$$

Аналогічно, вектор  $\vec{B}_2$  спрямований перпендикулярно лінії  $AB$  вгору, а його модуль дорівнює

$$B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi \cdot BM_1} = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi \cdot (AM_1 + AB)}. \quad (3)$$

Виходячи з того, що вектори  $\vec{B}_1$  та  $\vec{B}_2$  спрямовані протилежно, модуль вектора, що є їх векторною сумою, в скалярному вигляді є різницею модулів  $B_1$  (2) і  $B_2$  (3)

$$\begin{aligned} B &= B_1 - B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{AM_1} - \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{(AM_1 + AB)} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2 \cdot \left( \frac{20}{2 \cdot 10^{-2}} - \frac{30}{12 \cdot 10^{-2}} \right) = 10^{-7} \cdot 2 \cdot (1000 - 250) = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.} \end{aligned}$$

Отриманий додатний результат означає, що величина  $B_1$  більше величини  $B_2$ , тому вислідний вектор спрямований донизу відносно лінії  $AB$ .

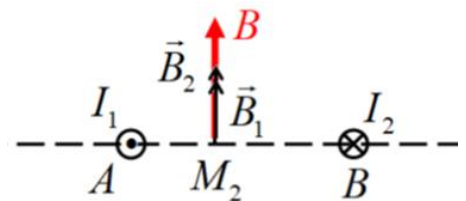
2) В точці  $M_2$  магнітна індукція є векторною сумою векторів  $\vec{B}_1$  і  $\vec{B}_2$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

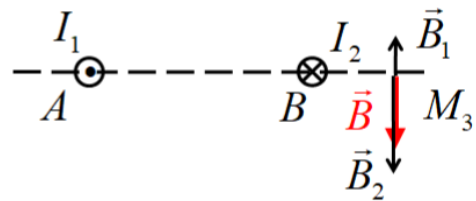
За правилом правої руки обидва вектори спрямовані перпендикулярно  $AB$  вгору. Тому їх вислідний вектор є сумою їх модулів

$$\begin{aligned} B &= B_1 + B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{AM_2} + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{(AB - AM_2)} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2 \cdot \left( \frac{20}{4 \cdot 10^{-2}} + \frac{30}{6 \cdot 10^{-2}} \right) = 10^{-7} \cdot 2 \cdot (500 + 500) = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.} \end{aligned}$$

Отже, вектор  $\vec{B}$  магнітного поля двох струмів направлений вгору відносно лінії  $AB$ .



3) В точці  $M_3$  вектори  $\vec{B}_1$  і  $\vec{B}_2$ , як і в попередніх випадках, перпендикулярні лінії  $AB$ , причому вектор  $\vec{B}_1$  спрямований догори, а  $\vec{B}_2$  – донизу, тому модуль їх векторної суми



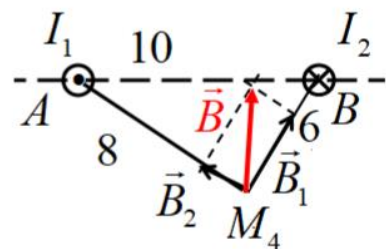
визначається різницею модулів цих векторів, а напрямок – донизу відносно  $AB$ .

$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{BM_3} - \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{(AB + BM_3)} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2 \cdot \left( \frac{30}{3 \cdot 10^{-2}} - \frac{20}{13 \cdot 10^{-2}} \right) = 10^{-7} \cdot 2 \cdot (1000 + 154) = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

4) Точок, які віддалені на відстань 6 см від точки  $A$  і на 8 см від точки  $B$ , дві: вони є точками перетину двох кіл, кожне з яких є геометричним місцем точок, рівновіддалених від центрів  $A$  і  $B$ . Ці точки перетину – вершини трикутників, основою яких є відрізок  $AB$ .

Розглянемо одну з таких точок –  $M_4$ , що лежить нижче  $AB$ . Слід зазначити, що в відповідності до відношення сторін  $AB:BM_4:AM_4=10:8:6$ , трикутник  $ABM_4$  є так званим «єгипетським» трикутником, тобто

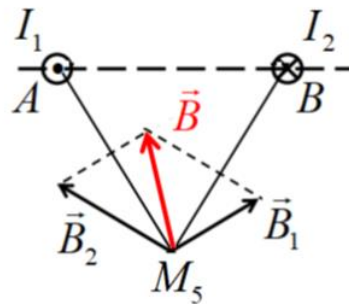


таким, у якого один кут  $\angle AM_4B$  – прямий. Вектор  $\vec{B}_1$  спрямований перпендикулярно відрізку  $AM_4$ , а  $\vec{B}_2$  – відрізку  $BM_4$ . Ці вектори утворюють кут  $90^\circ$ , тому модуль вислідного вектора  $\vec{B}$  можна знайти за теоремою Піфагора, врахувавши, що  $B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{AM_4}$  та  $B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{BM_4}$ :

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{\left( \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{AM_4} \right)^2 + \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{BM_4} \right)^2} =$$

$$= \frac{2\mu_0}{4\pi} \sqrt{\left( \frac{I_1}{AM_4} \right)^2 + \left( \frac{I_2}{BM_4} \right)^2} = 2 \cdot 10^{-7} \sqrt{\left( \frac{20}{6 \cdot 10^{-2}} \right)^2 + \left( \frac{30}{8 \cdot 10^{-2}} \right)^2} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

5) Якщо точка  $M_5$ , в якій треба знайти індукцію магнітного поля, віддалена від точки  $A$ , так само як і від точки  $B$ , причому  $AB = AM_5 = BM_5 = 10$  см, то ця точка є вершиною рівнобічного трикутника. Взагалі таких точок дві: вище та нижче лінії  $AB$ . Розглянемо одну з них –  $M_5$ .

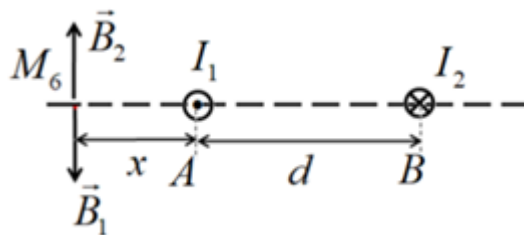


Оскільки вектор  $\vec{B}_1$  спрямований перпендикулярно відрізку  $AM_5$ , а  $\vec{B}_2$  – відрізку  $BM_5$ , то гострий кут  $\alpha$  у трикутнику індукцій дорівнює куту  $\alpha$  при вершині трикутника  $ABM_5$ , а саме,  $\alpha = 60^\circ$ .

Модуль вислідного вектора можна знайти за допомогою теореми косинусів

$$\begin{aligned}
 B &= \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2 \cos \alpha} = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{AM_5}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{BM_5}\right)^2 - 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{AM_5} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{BM_5} \cos \alpha} = \\
 &= \frac{2\mu_0}{4\pi} \sqrt{\left(\frac{I_1}{AM_5}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{BM_5}\right)^2 - 2 \cdot \frac{I_1}{AM_5} \cdot \frac{I_2}{BM_5} \cos \alpha} = \\
 &= 2 \cdot 10^{-7} \sqrt{\left(\frac{20}{10 \cdot 10^{-2}}\right)^2 + \left(\frac{30}{10 \cdot 10^{-2}}\right)^2 - 2 \frac{20}{10 \cdot 10^{-2}} \frac{30}{10 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{1}{2}} = 5,3 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}
 \end{aligned}$$

6) Виходячи з аналізу перших трьох випадків даної задачі, можна дійти висновку, що точка, в якій індукція магнітного поля дорівнює нулю, лежить зовні відрізку  $AB$ , а саме, з урахуванням величин струмів, лівіше



точки  $A$ . Позначимо  $AM_6 = x$ . Оскільки  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 0$ , то  $B_1 = B_2$ . Тоді

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{AM_6} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{BM_6}$$

та

$$\frac{I_1}{x} = \frac{I_2}{d+x},$$

$$x = \frac{I_1 d}{I_2 - I_1} = \frac{20 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{30 - 20} = 0,2 \text{ м.}$$

Наприкінці слід зазначити, що в усіх шістьох розглянутих випадках, вислідний вектор  $\vec{B}$  згідно із принципом суперпозиції є векторною сумою векторів магнітних індукцій тих полів, що створюються кожним зі струмом окремо, тобто  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ . Але в залежності від розташування точки, в який треба визначити магнітну індукцію, модуль вислідного вектора може бути знайдений як сума, різниця, за теоремою Піфагора, за теоремою косинусів, а також він може дорівнювати нулю.

### Задача 11.2.2

*Нескінченно довгий провідник створює коловий виток радіусом  $R = 5$  см, дотичний до провідника. Провідники знаходиться в одній площині. Сила струму у провіднику  $I = 2$  А. Визначити магнітну індукцію і напруженість магнітного поля у центрі витка  $M$ , якщо провідник знаходиться у повітрі.*

| Дано:           | Розв'язання                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $R = 5$ см      | Можливі два варіанти створення кругового витка: струм тече по першому напівнескінченному провіднику 1-2, обтікає виток за годинниковою стрілкою (а) або проти годинникової стрілки (б), а потім протікає по другому напівнескінченному провіднику 2-3. В обох випадках струм створює магнітне поле, магнітна індукція якого знаходиться за принципом суперпозиції полів |
| $I = 2$ А       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| $B = ?$ $H = ?$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

$$\vec{B} = \vec{B}_{12} + \vec{B}_{23} + \vec{B}_0.$$

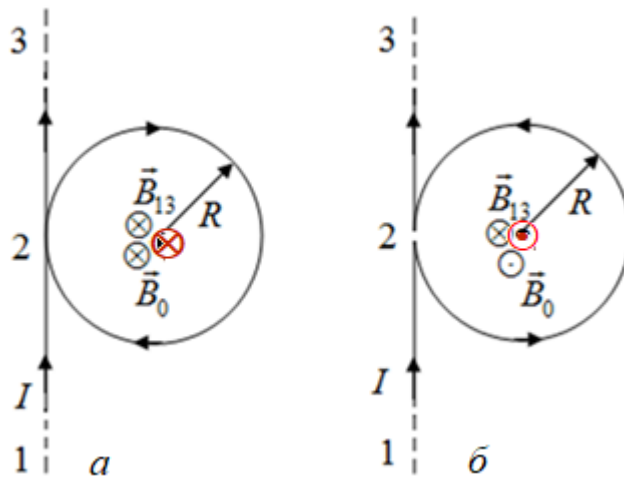
Магнітне поле струму, що тече по прямолінійним ділянкам можна знайти за формулою



$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha \cdot d\alpha.$$

Тоді

$$\begin{aligned} B_{13} = B_{12} + B_{23} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos \alpha \cdot d\alpha + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \cdot d\alpha = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \cdot d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{R}. \end{aligned} \quad (1)$$



Отриманий результат збігається з величиною поля нескінченно довгого провідника зі струмом.

Величину поля кругового витка знайдемо за формулою

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (2)$$

Поле прямолінійного струму за правилом правої руки направлено перпендикулярно площині рисунка «від нас», а поле кругового витка для струму, що тече за годинниковою стрілкою – «від нас», а проти годинникової стрілки – «до нас». Тоді, шукана величина поля в центрі витка становить

$$B = B_{13} \pm B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \pm \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left( \frac{1}{\pi} \pm 1 \right).$$

Підставляючи дані задачі, отримуємо

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \left( \frac{1}{\pi} \pm 1 \right)}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = \begin{cases} 2,83 \cdot 10^{-3} \text{ Тл,} \\ -1,71 \cdot 10^{-3} \text{ Тл.} \end{cases}$$

Аналізуючи отриманий результат, можна дійти висновку, що в магнітне поле в центрі витка внесок кругового струму є більшим за внесок від прямолінійного струму.

Отже, величини магнітної індукції дорівнюють  $B_1 = 2,83 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$  і  $B_2 = -1,71 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$ .

Для визначення напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  слід використати її зв'язок з магнітною індукцією  $\vec{B}$

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H},$$

де  $\mu$  – магнітна проникність, яка для вакууму (повітря)  $\mu = 1$ .

Зважаючи на те, що напрямки  $\vec{H}$  і  $\vec{B}$  збігаються, величини напруженості в залежності від напрямку струму в витку становлять

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} = \frac{2,83 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 2,25 \cdot 10^3 \text{ А/м,}$$

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0} = \frac{-1,71 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = -1,36 \cdot 10^3 \text{ А/м.}$$

$$\text{Розмірність результатів } [\Gamma_{\text{H}}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2} \quad [\text{Тл}] = \frac{\text{Н}}{\text{А}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}}$$

$$[B] = \frac{\Gamma_{\text{H}} \cdot \text{А}}{\text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}} = \text{Тл}; \quad [H] = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}}{\Gamma_{\text{H}}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}} \frac{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

**Відповідь:**  $B_1 = 2,83 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$ ;  $B_2 = -1,71 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$ .  $H_1 = 2,25 \cdot 10^3 \text{ А/м}$ ,

$$H_2 = -1,36 \cdot 10^3 \text{ А/м.}$$

### Задача 11.2.3

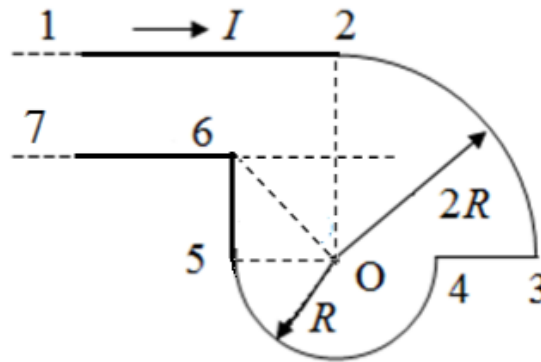
Визначити магнітну індукцію  $\vec{B}$  у центрі  $O$  провідника складної форми, по якому протікає струм  $I = 100\text{ А}$ ,  $R = 0,2\text{ м}$ .

| Дано:              | Розв'язання                                                                                                                                                                     |
|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $I = 100\text{ А}$ | Магнітна індукція – це векторна величина і тому, як вектор, вона характеризується модулем і напрямком. Ці характеристики можна визначити за допомогою закону Біо-Савара-Лапласа |
| $R = 0,2\text{ м}$ |                                                                                                                                                                                 |
| $\vec{B} = ?$      |                                                                                                                                                                                 |

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} [d\vec{l}, \vec{r}]. \quad (1)$$

Контур, що розглядається в даній задачі, складається із декількох ділянок, які мають різну форму. Виходячи з принципу суперпозиції полів, магнітна індукція в точці  $O$  визначається векторною сумою магнітних індукцій від кожної з ділянок

$$\vec{B} = \vec{B}_{12} + \vec{B}_{23} + \vec{B}_{34} + \vec{B}_{45} + \vec{B}_{56} + \vec{B}_{67}. \quad (2)$$



Визначимося з величинами магнітних індукцій полів, що створюються кожною ділянкою.

1-2 – ділянка прямого напівнескінченного струму

$$B_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{2R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot 2R} \left( \sin 0 - \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\mu_0 \cdot I}{8\pi \cdot R}; \quad (3)$$

2-3 – чверть кругового струму радіуса  $2R$ , тому

$$B_{23} = \frac{1}{4} \frac{\mu_0 \cdot I}{2(2R)} = \frac{\mu_0 \cdot I}{16R}; \quad (4)$$

3-4 – відрізок прямолінійного провідника, продовження якого проходить через точку О, в якій ми шукаємо індукцію, тому

$$\vec{B}_{34} = 0; \quad (5)$$

4-5 – половина кругового струму радіуса  $R$

$$B_{45} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2R} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4R}; \quad (6)$$

5-6 – відрізок прямолінійного провідника, індукція якого

$$B_{56} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R} \left( \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 \right) = \frac{\mu_0 \cdot I \sqrt{2}}{4\pi \cdot R \cdot 2} = \frac{\mu_0 \cdot I \sqrt{2}}{8\pi \cdot R}; \quad (7)$$

8-7 – ділянка прямого напівнескінченного струму

$$\begin{aligned} B_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R} \left( \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) - \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = \frac{\mu_0 \cdot I (2 - \sqrt{2})}{8\pi \cdot R}. \end{aligned} \quad (8)$$

Усі елементи струмів і радіуси-вектори, що вказують положення точки, де визначається магнітна індукція, відносно струмів, що її створюють, лежать в площині рисунка, тому згідно із законом Біо-Савара-Лапласа (1) і правилом правої руки напрямки магнітних індукцій від визначених вище ділянок будуть

$$\vec{B} = \vec{B}_{12} + \vec{B}_{23} + \vec{B}_{34} + \vec{B}_{45} + \vec{B}_{56} + \vec{B}_{67}. \quad (8)$$

Відповідно до визначених напрямків магнітної індукції запишемо величину магнітної індукції

$$B = B_{12} + B_{23} + B_{45} + B_{56} - B_{67}. \quad (9)$$

Підставимо в формулу (9) усі знайдені раніше величини магнітних індукцій від окремих ділянок (3) - (8), враховуючи їх знаки

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot 2R} + \frac{\mu_0 \cdot I}{16R} + \frac{\mu_0 \cdot I}{4R} + \frac{\mu_0 \cdot I\sqrt{2}}{8\pi \cdot R} - \frac{\mu_0 \cdot I(2 - \sqrt{2})}{8\pi \cdot R} = \\
&= \frac{\mu_0 \cdot I}{4R} \left( \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} - \frac{2}{2\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \right) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4R} \cdot \frac{19,37}{4\pi} = \\
&= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^2 \cdot 19,37}{4 \cdot 0,2 \cdot 4\pi} = 2,42 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}
\end{aligned}$$

Магнітна індукція від складного контуру в точці О спрямована перпендикулярно площині рисунка «від нас».

**Відповідь:**  $B = 2,42 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$

#### Задача 11.2.4

Провідник завдовжки  $l = 0,2 \text{ м}$ , підвішений на двох невагомих гнучких дротах, має масу одиниці довжини  $m_0 = 0,05 \text{ кг/м}$  і знаходиться в магнітному полі  $B = 2,1 \text{ Тл}$ , яке спрямоване перпендикулярно провіднику. 1) Знайдіть силу і напрямок струму в провіднику, щоб натяг дротів був нульовим? 2) Яким буде натяг в кожному дроті, якщо змінити напрямок струму, зберігаючи напрямок магнітного поля?

| Дано:                     | Розв'язання                                                                                                                                       |
|---------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $l = 0,2 \text{ м}$       | 1) Магнітне поле діє на кожен нескінченно малий елемент дроту зі струмом. Якщо струм дорівнює $I$ , магнітна сила Ампера визначається за формулою |
| $m_0 = 0,05 \text{ кг/м}$ |                                                                                                                                                   |
| $B = 2,1 \text{ Тл}$      |                                                                                                                                                   |
| $I = ? \quad T = ?$       | $d\vec{F} = I[\vec{dl}, \vec{B}].$                                                                                                                |

На провідник довжини  $l$  діє сила Ампера  $\vec{F} = I[\vec{l}, \vec{B}]$  і сила тяжіння  $m\vec{g}$ , що направлена донизу. Для того щоб у дротах не було натягу, ці сили повинні бути рівними за величиною і протилежними за напрямком, тобто,

$$m\vec{g} + \vec{F}_A = 0.$$

звідки

$$mg = IlB \sin \alpha.$$

зважаючи на те, що  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\sin \alpha = 1$  і  $mg = (m_0 l)g$ ,

$$(m_0 l)g = IlB.$$

Отже, струм у провіднику повинен бути

$$I = \frac{m_0 g}{B} = \frac{0,05 \cdot 9,8}{2,1} = 0,23 \text{ А.}$$

Напрямок струму можна знайти за правилом лівої руки: якщо ліву руку розмістити так, що силові лінії входили у долонь, великий палець направити за напрямком сили (на рис. – вгору), то пальці руки покажуть напрямок струму зліва направо.

2) Якщо змінити напрямок струму, то напрямок сили Ампера зміниться на протилежний. Тоді сила Ампера і сила тяжіння будуть спрямовані донизу, а сили натягу дротів – вгору. Провідник знаходиться у стані спокою, тому за 1-м законом Ньютона

$$m\vec{g} + 2\vec{T} + \vec{F}_A = 0.$$

Проекції на вертикальну вісь  $y$ , спрямовану донизу,

$$mg + F_A - 2T = 0,$$

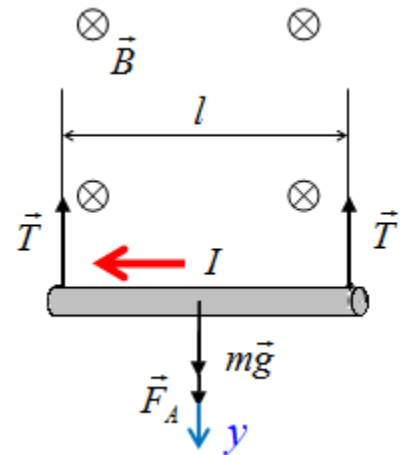
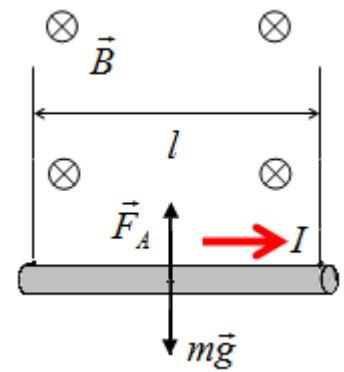
звідки

$$T = \frac{mg + F}{2} = \frac{l(m_0 g + IB)}{2} = \frac{0,2(0,05 \cdot 9,8 + 0,23 \cdot 2,1)}{2} \approx 0,1 \text{ Н.}$$

Перевірка розмірностей:

$$[T_{\text{Л}}] = \frac{\text{Н}}{\text{А}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}},$$

$$[I] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{Тл} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{А}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} = \text{А}$$



$$[T] = \text{м} \left( \frac{\text{кг}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} + \text{А} \cdot \text{Тл} \right) = \text{м} \left( \frac{\text{кг}}{\text{с}^2} + \frac{\text{А} \cdot \text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}} \right) = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

**Відповідь:**  $I = 0,23 \text{ А}$ ;  $T \approx 0,1 \text{ Н}$ .

### Задача 11.2.5

Алюмінієвий провідник довжиною  $l = 20 \text{ см}$  і площею поперечного перерізу  $S_0 = 70 \text{ мм}^2$  підвішений на двох тонких провідних дротах в однорідному магнітному полі  $B = 5 \text{ мТл}$ . Знайти кут  $\alpha$ , на який відхиляється провідник при протіканні по ньому струму  $I = 11,7 \text{ А}$ .

| Дано:                   | Розв'язання                                                          |
|-------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| $l = 20 \text{ см}$     | На провідник зі струмом в магнітному полі діє сила Ампера,           |
| $S_0 = 70 \text{ мм}^2$ | напрямок якої можна визначити за правилом лівої руки, а              |
| $B = 5 \text{ мТл}$     | величину розрахувати за формулою $\vec{F}_A = I[\vec{l}, \vec{B}]$ . |
| $I = 11,7 \text{ А}$    | Якщо провідник знаходиться у стані спокою, рівнодійна сил,           |
| $\alpha = ?$            | що діють на нього, за 1 законом Ньютона дорівнює нулю                |

$$m\vec{g} + 2\vec{T} + \vec{F}_A = 0.$$

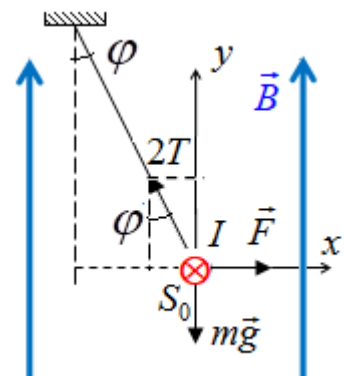
Спроектуємо сили на обрані осі

$$\begin{cases} x: -2T \sin \varphi + F_A = 0, \\ y: 2T \cos \varphi - mg = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Сила Ампера дорівнює  $F_A = IlB \sin \alpha = IlB$ , оскільки кут  $\alpha$  між напрямком струму (провідника) і напрямком магнітного поля  $\alpha = 90^\circ$ , тому  $\sin \alpha = 1$ . Маса провідника може бути виражена через густину алюмінію  $\rho_{Al} = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  і об'єм провідника  $V = S_0 l$ .

$$m = \rho_{Al} V = \rho_{Al} S_0 l.$$

Поділивши перше рівняння системи (1) на друге, отримаємо



$$\frac{\sum T \sin \varphi}{\sum T \cos \varphi} = \frac{F_A}{mg},$$

звідки

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_A}{mg} = \frac{IB}{\rho_{Al} S_0 g} = \frac{IB}{\rho_{Al} S_0 g} = \frac{11,7 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{2,7 \cdot 10^3 \cdot 70 \cdot 10^{-6} \cdot 9,8} = 0,032,$$

тоді шуканий кут становить  $\varphi = \operatorname{arctg} 0,032 = 1,8^\circ$ .

Перевірка розмірності:

$$[T_L] = \frac{H}{A} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}}$$

$$[\operatorname{tg} \varphi] = \frac{A \cdot T_L}{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \text{м}^2 \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \frac{A \cdot \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}}}{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \text{м}^2 \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 1$$

**Відповідь:**  $\varphi = \operatorname{arctg} 0,032 = 1,8^\circ$ .

### Задача 11.2.6

Мідний стрижень розташований на двох паралельних рейках в магнітному полі, яке спрямоване перпендикулярно стрижню і рейкам. Стрижень знаходиться під прямим кутом до рейок, відстань між якими  $l = 15 \text{ см}$ . Коефіцієнт тертя між стрижнем і рейками  $\mu = 0,2$ . Щоб стрижень рухався рівномірно, необхідно прикласти до нього напругу  $U = 4,55 \cdot 10^{-4} \text{ В}$ . Знайти індукцію магнітного поля.

**Дано:**

$$l = 15 \text{ см}$$

$$\mu = 0,2$$

$$U = 4,55 \cdot 10^{-4} \text{ В}$$

$$B = ?$$

**Розв'язання**

Напруга викликає струм у провіднику і тоді на провідник зі струмом в магнітному полі діє сила Ампера

$$\vec{F} = I [\vec{l}, \vec{B}].$$

Якщо стрижень рухається з постійною швидкістю, то



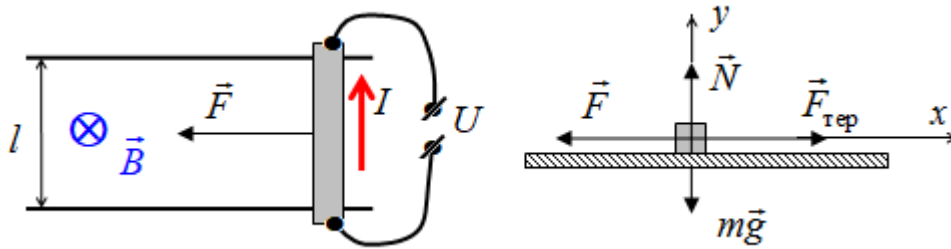
з 1-м законом Ньютона рівнодійна сил, що діють на нього, дорівнює нулю

$$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}} = 0, \quad (1)$$

де  $m\vec{g}$  – сила тяжіння,  $\vec{N}$  – нормальна реакція опори,  $\vec{F}_{\text{тер}}$  – сила тертя.

Проекція векторного рівняння (1) на обрані  $x$ - і  $y$ - осі

$$\begin{cases} x: F_{\text{тер}} - F = 0, \\ y: N - mg = 0. \end{cases} \quad (2)$$



Сила тертя з урахуванням другого рівняння системи (2)  $F_{\text{тер}} = \mu N = \mu mg$ , а величина сили Ампера  $F = IlB \sin \alpha = IlB$ , оскільки  $\sin \alpha = 1$ .

Згідно з законом Ома, струм зв'язаний з напругою

$$I = U/R,$$

де  $R = \rho \frac{l}{S_0}$ ,  $\rho$  – питомий опір міді, з якої виготовлений стрижень,  $l$  – довжина

і  $S_0$  – площа поперечного перерізу стрижня.

Масу стрижня виразимо через його густину  $D$  і об'єм  $m = DV = DS_0 l$ .

Тоді перше рівняння системи (2) можна записати як

$$\begin{aligned} \mu N - IlB &= 0, \\ \mu DS_0 l g - \frac{US_0}{\rho l} l B &= 0. \end{aligned}$$

Отже, підставляючи табличні дані для міді: густину  $D = 8,93 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  і питомий опір  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ , отримуємо

$$B = \frac{\mu D l g \rho}{U} = \frac{0,2 \cdot 8,93 \cdot 10^3 \cdot 0,15 \cdot 9,8 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8}}{4,55 \cdot 10^{-4}} = 9,81 \cdot 10^{-2} \text{ Тл}.$$

Розмірність результату

$$[\text{Тесла}] = \frac{\text{Н}}{\text{А}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}}, \quad [B] = \frac{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \text{м} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{Ом} \cdot \text{м}}{\text{В}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}} = \text{Тл}.$$

**Відповідь:**  $B = 9,81 \cdot 10^{-2} \text{ Тл}.$

### Задача 11.2.7

Сила струму в довгому прямому нескінченному дроті дорівнює  $I_1 = 5 \text{ А}$ . Прямокутна рамка, по якій тече струм  $I_2 = 10 \text{ А}$ , лежить у площині дроту на відстані  $a = 0,15 \text{ м}$  так, що довга сторона  $c = 0,5 \text{ м}$  паралельна дроту, а коротка  $b = 0,1 \text{ м}$  перпендикулярна йому. Знайдіть величину та напрямок сили, яка діє на рамку.

| Дано:                                   | Розв'язання                                                            |
|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| $I_1 = 5 \text{ А}, I_2 = 10 \text{ А}$ | Кожен елемент струму, що протікає по прямому                           |
| $a = 0,15 \text{ м}, b = 0,1 \text{ м}$ | дроту, створює навколо себе магнітне поле, яке за                      |
| $c = 0,5 \text{ м}$                     | законом Біо-Савара-Лапласа дорівнює                                    |
| $F = ?$                                 | $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}.$ |

Якщо дріт прямий і нескінченно довгий, то величина магнітної індукції залежить від відстані до дроту та становить

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \quad \text{та} \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi (a + b)}.$$

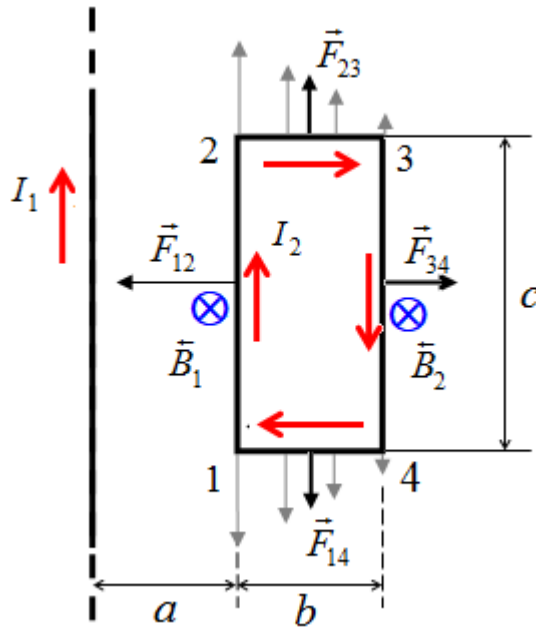
Тоді на сторони рамки 1-2 і 3-4 діють сили Ампера

$$\vec{F}_{12} = I_2 [\vec{l}_{12}, \vec{B}_1] \quad \text{та} \quad \vec{F}_{34} = I_2 [\vec{l}_{34}, \vec{B}_2].$$

Величини цих сил з урахуванням того, що кут  $\alpha = 90^\circ$ , а  $\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1$  становлять

$$F_{12} = I_2 l_{12} B_1 \sin \alpha = \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi a},$$

$$F_{34} = I_2 l_{34} B_2 \sin \alpha = \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi(a+b)}.$$



Напрямки цих сил за правилом лівої руки протилежні:  $\vec{F}_{12}$  спрямована наліво, а  $\vec{F}_{34}$  – направо (див. рисунок). Крім того,  $F_{12} > F_{34}$ , тому що сторона 1-2 розташована ближче до джерела магнітного поля – прямого дроту.

Сили, що діють на сторони 2-3 і 1-4, є змінними за величиною вздовж сторін прямокутника: вони зменшуються в міру віддалення від прямого дроту. Рівнодійні цих сил  $\vec{F}_{23}$  і  $\vec{F}_{14}$  рівні за величиною, але спрямовані у протилежні боки. Вони не викликають зміщення рамки як цілого, а тільки створюють механічні напруження в матеріалі рамки.

Отже, рівнодійна сила визначається співвідношенням сил, що діють на сторони рамки довжиною  $c$

$$F = F_{12} - F_{34} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi a} - \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi(a+b)} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 c b}{2\pi a(a+b)}.$$

Підставлення даних задачі дає

$$F = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10 \cdot 0,5 \cdot 0,1}{2\pi \cdot 0,15 \cdot (0,15 + 0,1)} = 1,33 \cdot 10^{-5} \text{ Н.}$$

Розмірність результату:  $[\text{Генрі}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2}$

$$[F] = \frac{\text{Гн} \cdot \text{А} \cdot \text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Гн} \cdot \text{А}^2}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

**Відповідь:**  $F = 1,33 \cdot 10^{-5} \text{ Н}.$

### Задача 11.2.8

Котушка з площею витка  $S = 200 \text{ см}^2$  розміщена в однорідному магнітному полі  $B = 8 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$ . Через котушку, яка має  $N = 25$  витків, тече струм  $I = 20 \text{ А}$ . Знайти обертальний момент, що діє на котушку в момент часу, коли площина котушки становить кут  $\beta = 60^\circ$  з напрямком поля.

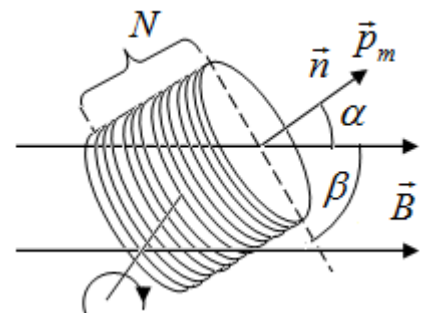
| Дано:                            | Розв'язання                                                                  |
|----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $S = 200 \text{ см}^2$           | Обертальний момент, що діє на контур в магнітному полі                       |
| $B = 8 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$ | $\vec{B}$ становить                                                          |
| $N = 25$                         | $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}],$                                            |
| $I = 20 \text{ А}$               | де $\vec{p}_m = IS\vec{n}$ – магнітний момент контуру зі струмом $I$ , площа |
| $\beta = 60^\circ$               | якого $S$ , $\vec{n}$ – одинична нормаль к контуру.                          |
| $M = ?$                          |                                                                              |

У випадку, коли контур є котушкою, що складається з  $N$  витків, магнітний момент  $\vec{p}_m = NIS\vec{n}$ , а його величина  $p_m = NIS$ .

Напрямок магнітного моменту зв'язаний з напрямком протікання струму правилом правої руки: пальці обертають контур за струмом, а великий палець показує напрямок вектора  $\vec{p}_m$ .

Величина механічного обертового моменту становить

$$M = p_m B \sin \alpha = ISNB \sin \alpha,$$



де  $\alpha$  – це кут, який створює вектор магнітного моменту з магнітною індукцією поля, що діє на котушку.

Оскільки в задачі заданий кут  $\beta$  між площиною витка і напрямком поля, тоді кут  $\alpha = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

Отже,

$$M = NISB \sin \alpha = 20 \cdot 0,02 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot \sin 30^\circ = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Перевірка розмірності:

$$[\text{Тесла}] = \frac{\text{Н}}{\text{А}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}}, \quad [M] = \text{А} \cdot \text{м}^2 \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}} = \frac{\text{кгм}^2}{\text{с}^2} = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

**Відповідь:**  $M = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}.$

### Задача 11.2.9

*Знайти відношення магнітного моменту  $p_m$  та моменту імпульсу  $L$  електрона, що обертається в атомі навколо ядра.*

| Дано:                                 | Розв'язання                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|---------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$   | У класичній моделі будови атома вважається, що електрон рухається з постійною за величиною швидкістю по круговій орбіті радіуса $r$ навколо ядра. Якщо він долає відстань, що дорівнює довжині кола $2\pi r$ , за проміжок часу, що дорівнює періоду обертання $T$ , тоді його лінійна швидкість обертання становить $v = 2\pi r/T$ . |
| $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| $\frac{p_m}{L} = ?$                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

Струм, пов'язаний з обертанням електрона, який має заряд  $e$ , дорівнює

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi} = \frac{ev}{2\pi r},$$

де період обертання  $T = 2\pi/\omega$ , а кутова швидкість  $\omega = v/r$ .

Магнітний момент  $\vec{p}_m = I\vec{S} = IS\vec{n}$ , де  $S = \pi r^2$  – це площа, яку охоплює орбіта електрона, а  $\vec{n}$  – одинична нормаль до площини орбіти.

$$p_m = IS = \frac{ev}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{evr}{2}.$$

Момент імпульсу електрона  $L = m_e vr$ . Тоді відношення магнітного моменту і моменту імпульсу (як іноді кажуть, орбітального моменту) буде

$$\frac{p_m}{L} = \frac{evr}{2mvr} = \frac{e}{2m}.$$

Величина  $\frac{p_m}{L}$  має назву гіромагнітне співвідношення або магнітомеханічне співвідношення і грає важливу роль в описанні руху в фізиці елементарних частинок і квантовій фізиці.

Для електрона гіромагнітне співвідношення становить

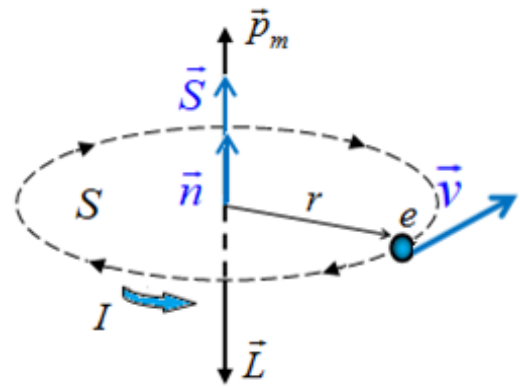
$$\frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \approx 8,8 \cdot 10^{10} \text{ Кл/кг.}$$

Треба зазначити, що вектори  $\vec{p}_m$  і  $\vec{L}$  спрямовані у протилежні боки, тому що електрон є негативно зарядженою частинкою, а за напрямок струму прийнятий протилежний напрямок.

**Відповідь:**  $\frac{p_m}{L} \approx 8,8 \cdot 10^{10} \text{ Кл/кг.}$

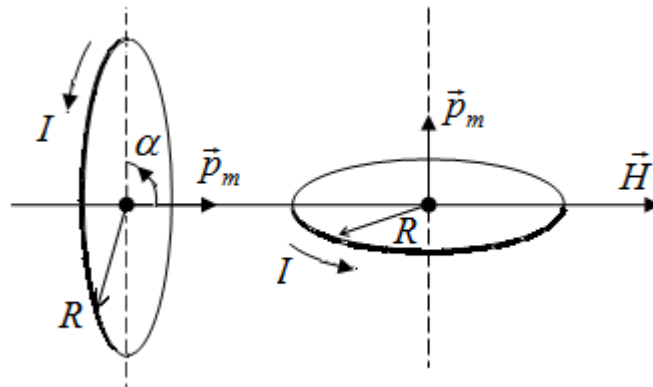
### Задача 11.2.10

Кругова рамка радіусом  $R = 2 \text{ см}$  розташована перпендикулярно напрямку однорідного магнітного поля напруженістю  $H = 150 \text{ А/м}$ . Сила струму в рамці  $I = 2 \text{ А}$ . Знайти роботу, яка потрібна для повороту рамки на кут  $\alpha = 90^\circ$



відносно осі, що збігається з її діаметром. Вважати, що сила струму під час повороту не змінюється.

|                                                                                          |                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Дано:</b>                                                                             | <b>Розв'язання</b>                                                                       |
| $R = 2 \text{ см}$                                                                       | Застосуємо для розв'язання задачі два підходи.                                           |
| $H = 150 \text{ А/м}$                                                                    | 1) Крутний (механічний) момент сили, що діє на рамку, є                                  |
| $I = 2 \text{ А}$                                                                        | $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}],$                                                        |
| $\alpha = 90^\circ$                                                                      | де $\vec{p}_m = I\vec{S} = IS\vec{n}$ – магнітний момент, $S$ – площа рамки, $\vec{n}$ – |
| $A = ?$                                                                                  | одичина нормаль до площини рамки.                                                        |
| Індукція магнітного поля $\vec{B}$ пов'язана з напруженістю магнітного поля $\vec{H}$ як |                                                                                          |



$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , де  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  – магнітна стала (або магнітна проникність вакууму). Тому величина магнітної індукції  $B = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 150 = 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$ .

Величина крутного моменту дорівнює

$$M = p_m B \sin \alpha,$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$ .

У початковому положенні, коли вектори  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$  збігаються за напрямком, кут між ними  $\alpha = 0$ ,  $\sin \alpha = 0$ , крутний момент  $M = 0$ , тому контур знаходиться в стані рівноваги. Щоб повернути контур з цього стану, роботу повинна виконати зовнішня сила.

Елементарна робота зовнішньої сили є

$$dA = M d\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha = I S B \sin \alpha d\alpha = I \pi R^2 B \sin \alpha d\alpha.$$

Робота, яка виконується при повороті на скінченний кут, дорівнює

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{90^\circ} I \pi R^2 B \sin \alpha d\alpha = I \pi R^2 B \int_0^{90^\circ} \sin \alpha d\alpha = I \pi R^2 B (-\cos \alpha) \Big|_0^{90^\circ} = I \pi R^2 B = \\ &= I \pi R^2 \mu_0 H = 2\pi \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 150 = 4,74 \cdot 10^{-7} \text{ Дж.} \end{aligned}$$

2) Роботу можна визначити іншим способом за допомогою виразу для роботи магнітного поля. Елементарна робота є  $dA = Id\Phi$ , а робота при переході рамки з одного положення в інше

$$A = \int_1^2 dA = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} Id\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

де  $\Phi = BS \cos \alpha$  – магнітний потік,  $\alpha$  – кут між  $\vec{B}$  (або  $\vec{H}$ ) і нормаллю до рамки.

У початковому положенні магнітний потік максимальний  $\Phi_1 = BS$ , тому що площа рамки перпендикулярна магнітному полю ( $\alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = 1$ ), а в кінцевому  $\Phi_2 = 0$ . Тоді,

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I(0 - BS) = -IBS = -I \pi R^2 \mu_0 H = -4,74 \cdot 10^{-7} \text{ Дж.}$$

Ми отримали таке ж значення роботи, що при застосуванні першого методу, але з протилежним знаком, тому що в першому випадку ми знайшли роботу зовнішньої сили (вона позитивна), а в другому – роботу магнітного поля. Ця робота є негативною, тому що вона була виконана зовнішньою силою.

**Відповідь:**  $A = \pm 4,74 \cdot 10^{-7} \text{ Дж.}$

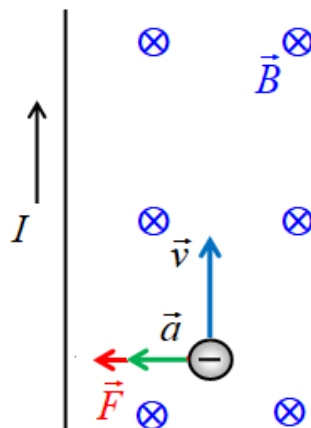
### Задача 11.2.11

*Електрон, прискорений зі стану спокою в електростатичному полі різницею потенціалів  $U = 270 \text{ В}$ , рухається паралельно тонкому довгому прямолінійному провіднику, що знаходиться у вакуумі, на відстані  $b = 5 \text{ мм}$  від нього. Визначте модуль сили  $F$ , яка почне діяти на електрон, якщо по провіднику пустити*



електричний струм, а також радіус кривизни траєкторії  $R$  на початку викривленої ділянки при силі струму в провіднику  $I = 10\text{ A}$ .

| Дано:               | Розв'язання                                                |
|---------------------|------------------------------------------------------------|
| $U = 270\text{ В}$  | Електрон під час руху в електричному полі збільшує свою    |
| $b = 5\text{ мм}$   | кінетичну енергію внаслідок роботи електричного поля, тому |
| $I = 10\text{ А}$   | його швидкість може бути знайдена з співвідношення         |
| $F = ? \quad R = ?$ | $\Delta KE = A,$ (1)                                       |



де приріст кінетичної енергії  $\Delta KE = KE_2 - KE_1 = \frac{mv^2}{2} - 0 = \frac{mv^2}{2}$ , а робота електричного поля з прискорення електрона  $A = qU = eU$ . Тому вираз (1) набуває вигляду

$$\frac{mv^2}{2} = eU.$$

Отже, електрон влітає в магнітне поле зі швидкістю

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \quad (2)$$

Струм, що протікає у прямолінійному провіднику, створює магнітне поле, величина якого за законом Біо-Савара-Лапласа становить

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}, \quad (3)$$

а напрямок, що визначений за правилом правої руки, перпендикулярний

площині, де розташований провідник і вектор, що вказує точку спостереження відносно елемента струму провідника. Таким чином, електрон рухається паралельно провіднику, а його швидкість перпендикулярна напрямку магнітного поля. Тоді на нього діє магнітна складова сили Лоренца

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (4)$$

Зважаючи на те, що кут  $\alpha$  між напрямком швидкості та вектором магнітної індукції прямий, то величина магнітної складової сили Лоренца

$$F = qvB \sin \alpha = evB. \quad (5)$$

Числове значення отримаємо, підставивши (2) і (3) в (5)

$$\begin{aligned} F = evB &= e \sqrt{\frac{2eU}{m}} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi b} = \\ &= 1,6 \cdot 10^{-19} \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 270}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 6,2 \cdot 10^{-16} \text{ Н.} \end{aligned}$$

За 2-м законом Ньютона сила, що діє на частинку, є магнітною складовою сили Лоренца, яка викликає її прискорення. Враховуючи, що сила діє перпендикулярно швидкості (4), це нормальне (доцентрове) прискорення

$a_n = \frac{v^2}{R}$ , яке завжди притаманне руху по круговій траєкторії.

$$F = ma_n = m \frac{v^2}{R} = \frac{m}{R} \left( \sqrt{\frac{2eU}{m}} \right)^2 = \frac{2eU}{R}.$$

Отже, радіус кривизни траєкторії

$$R = \frac{2eU}{F} = \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 270}{6,2 \cdot 10^{-16}} = 0,14 \text{ м.}$$

**Відповідь:**  $F = 6,2 \cdot 10^{-16} \text{ Н; } R = 0,14 \text{ м.}$

### Задача 11.2.12

Заряджена частинка масою  $m = 6 \cdot 10^{-12} \text{ кг}$  та зарядом  $q = 3 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}$  рухається в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 10 \text{ Тл}$ . Кінетична енергія частинки  $KE = 10^{-6} \text{ Дж}$ . Який шлях пройде частинка за час, протягом якого її швидкість змінить напрямок на протилежний? Магнітне поле перпендикулярне швидкості частинки.

| Дано:                             | Розв'язання                                                          |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| $m = 6 \cdot 10^{-12} \text{ кг}$ | Частинка на момент, коли вона влетіла в магнітне поле,               |
| $q = 3 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}$ | мала кінетичну енергію $KE = \frac{mv^2}{2}$ , тому вона рухалася зі |
| $B = 10 \text{ Тл}$               | швидкістю                                                            |
| $KE = 10^{-6} \text{ Дж}$         |                                                                      |
| $s = ?$                           | $v = \sqrt{\frac{2 \cdot KE}{m}}. \quad (1)$                         |

В магнітному полі на частинку діє магнітна складова сили Лоренца

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}],$$

модуль якої з урахуванням того, що швидкість частинки спрямована перпендикулярно напрямку магнітного поля, дорівнює

$$F = qvB \sin \alpha = qvB \sin 90^\circ = qvB. \quad (2)$$

Магнітна складова сили Лоренца діє перпендикулярно швидкості, тому викликає нормальне (доцентрове) прискорення.

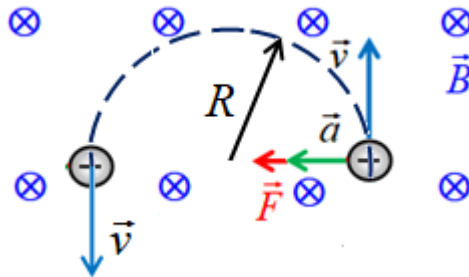
$$ma_n = m \frac{v^2}{R} = F.$$

В результаті частинка в магнітному полі рухається вздовж кругової траєкторії, радіус якої визначається з врахуванням (2) із 2-го закону Ньютона

$$m \frac{v^2}{R} = qvB,$$

$$R = \frac{mv^2}{qvB} = \frac{mv}{qB}.$$

Виходячи з того, що швидкість повинна змінити напрямок на протилежний, то зрозуміло, що, рухаючись по колу, частинка повинна пройти півкола, саме тоді її швидкість матиме протилежний напрямок.



Тому шлях, що пройшла заряджена частинка в магнітному полі, дорівнює довжині півкола

$$s = \pi R = \pi \frac{mv}{qB} = \frac{\pi m}{qB} \sqrt{\frac{2 \cdot KE}{m}} = \frac{\pi}{qB} \sqrt{2m \cdot KE}.$$

Підставляючи дані задачі, отримуємо

$$s = \frac{\pi}{qB} \sqrt{2m \cdot KE} = \frac{\pi \sqrt{2 \cdot 6 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-6}}}{3 \cdot 10^{-10} \cdot 10} = 3,63 \text{ м.}$$

Перевірка розмірності

$$[s] = \frac{\sqrt{\text{кг} \cdot \text{Дж}}}{\text{Кл} \cdot \text{Тл}} = \frac{\sqrt{\text{кг} \cdot \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}}}{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{кг}} = \text{м}.$$

**Відповідь:**  $s = 3,63 \text{ м.}$

### Задача 11.2.13

*В однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 2 \text{ Тл}$  рухається протон. Траєкторією його руху є гвинтова лінія з радіусом  $R = 10 \text{ см}$  і кроком  $h = 60 \text{ см}$ . Визначити швидкість і кінетичну енергію протона. Яку прискорювальну різницю потенціалів  $U$  пройшов протон перед тим, як влетіти в магнітне поле?*

**Дано:**

$B = 2 \text{ Тл}$

$R = 10 \text{ см}$

$h = 60 \text{ см}$

$v = ? \quad KE = ?$

$U = ?$

**Розв'язання**

Для того щоб визначити шукану різницю потенціалів  $U$ , треба знайти швидкість протона, яку він набув в електричному полі перед тим, як влетів у магнітне поле.

Рух частинки вздовж гвинтової лінії є складним рухом, що складається з обертального руху по колу зі швидкістю  $\vec{v}_\perp$ , яка перпендикулярна індукції магнітного поля  $\vec{B}$ , і рівномірного руху вздовж вектора  $\vec{B}$  зі швидкістю  $\vec{v}_\parallel$ . Тоді швидкість протона можна визначити за формулою  $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$ , а її величину

$$v = \sqrt{v_\perp^2 + v_\parallel^2}.$$

Для визначення складової швидкості  $v_\perp$  запишемо рівняння 2-го закону

Ньютона  $ma_n = F$ , де  $a_n = \frac{v_\perp^2}{R}$  – нормальне прискорення, а  $F = qvB \sin \alpha$  – магнітна складова сили Лоренца, у виразі для якої  $\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1$ ,

$$\frac{mv_\perp^2}{R} = qv_\perp B.$$

Звідки

$$v_\perp = \frac{qBR}{m}.$$

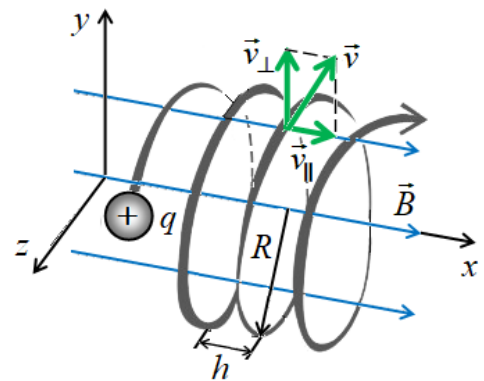
Період обертання дорівнює

$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi Rm}{qBR} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

За час  $T$  протон, рухаючись рівномірно зі швидкістю  $\vec{v}_\parallel$ , проходить шлях  $h = v_\parallel T$ , тому складова швидкості, що є паралельною силовим лініям магнітного поля, становить

$$v_\parallel = \frac{h}{T} = \frac{hqB}{2\pi m}.$$

Таким чином, швидкість протона є



$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2} = \sqrt{\left(\frac{qBR}{m}\right)^2 + \left(\frac{hqB}{2\pi m}\right)^2} = \frac{qB}{m} \sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} =$$

$$= \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2}{1,66 \cdot 10^{-27}} \sqrt{0,1^2 + \left(\frac{0,6}{2\pi}\right)^2} = 2,66 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$$

Кінетична енергія протона дорівнює

$$KE = \frac{mv^2}{2} = \frac{1,66 \cdot 10^{-27} \cdot (2,66 \cdot 10^7)^2}{2} = 5,9 \cdot 10^{-13} \text{ Дж.}$$

Цю кінетичну енергію протон отримав під час руху в електричному полі внаслідок роботи цього поля. Тому

$$eU = KE$$

і шукана різниця потенціалів становить

$$U = \frac{KE}{e} = \frac{5,9 \cdot 10^{-13}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 3,7 \cdot 10^6 \text{ В} = 3,7 \text{ МВ.}$$

Розмірність результату:

$$[v_{\perp}] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Тл} \cdot \text{м}}{\text{кг}} = \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{кг}} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$[v_{\parallel}] = \frac{hqB}{2\pi m} = \frac{m\text{КлТ}}{\text{кг}} = \frac{\text{м} \cdot \text{А} \cdot \text{с}}{\text{кг}} \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

**Відповідь:**  $v = 2,66 \cdot 10^7 \text{ м/с}$ ;  $KE = 5,9 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$ ;  $U = 3,7 \cdot 10^6 \text{ В} = 3,7 \text{ МВ}$ .

### Задача 11.2.14

*Електрон влітає зі швидкістю  $v_0 = 5 \cdot 10^6 \text{ м/с}$  під кутом  $\alpha = 45^\circ$  до паралельно спрямованих однорідних електричного і магнітного полів. Напруженість електричного поля  $E = 10^4 \text{ В/м}$ , а індукція магнітного поля  $B = 10^2 \text{ Тл}$ . Скільки обертів зробить електрон до зміни напрямку руху вздовж полів?*

| Дано:                            | Розв'язання                                                                              |
|----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| $v_0 = 5 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ | Електрон, потрапляючи в область, де є електричне і                                       |
| $\alpha = 45^\circ$              | магнітне поля, відчуває дію обох полів, що визначається                                  |
| $E = 10^4 \text{ В/м}$           | силою Лоренца, яка є векторною сумою електричної $\vec{F}_{\text{ел}}$ і                 |
| $B = 10^2 \text{ Тл}$            | магнітної $\vec{F}_{\text{маг}}$ складових                                               |
| $N = ?$                          | $\vec{F} = \vec{F}_{\text{ел}} + \vec{F}_{\text{маг}} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}].$ |

Швидкість електрона можна розкласти на дві складові: вздовж напрямку полів  $\vec{v}_{0\parallel}$  і перпендикулярно  $\vec{v}_{0\perp}$  їм, величини яких дорівнюють

$$\begin{cases} v_{0\parallel} = v_0 \cos \alpha, \\ v_{0\perp} = v_0 \sin \alpha. \end{cases} \quad (1)$$

Під дією електричної складової сили Лоренца електрон буде рухатися у напрямку силових ліній  $\vec{E}$  уповільнено, адже електрон має негативний заряд. Тому його швидкість буде зменшуватися згідно із

$$v = v_{0\parallel} - a_{\text{ел}} t,$$

доки не стане дорівнювати нулю  $v = 0$ .

$$0 = v_{0\parallel} - a_{\text{ел}} t. \quad (2)$$

Прискорення завдяки дії електричного поля можна знайти із 2-го закону Ньютона

$$ma_{\text{ел}} = eE.$$

Воно складатиме

$$a_{\text{ел}} = \frac{eE}{m}. \quad (3)$$

Підставляючи прискорення (3) в (2), можна отримати час руху електрона

$$t = \frac{v_{0\parallel}}{a_{\text{ел}}} = \frac{v_0 \cos \alpha \cdot m}{eE}. \quad (4)$$

На електрон у магнітному полі діє магнітна складова сили Лоренца, яка перпендикулярна його швидкості, під дією якої електрон буде обертатися навколо лінії  $\vec{B}$ . Згідно з 2-м законом Ньютона рівняння його руху в напрямку перпендикулярному  $\vec{B}$  буде

$$ma_n = ev_{0\perp} B,$$

де  $a_n = \frac{v_{0\perp}^2}{R}$ .

Тому

$$m \frac{v_{0\perp}^2}{R} = ev_{0\perp} B,$$

звідки радіус кругової траєкторії вздовж якої рухається електрон становить

$$R = \frac{mv_{0\perp}}{eB}.$$

Період обертання електрона дорівнює

$$T = \frac{2\pi R}{v_{0\perp}} = \frac{2\pi}{v_{0\perp}} \frac{mv_{0\perp}}{eB} = \frac{2\pi m}{eB}. \quad (5)$$

Кількість обертів, що електрон зробить до зміни напрямку руху, тобто доки його швидкість вздовж поля стане рівною нулю, з врахуванням (4) і (5) становить

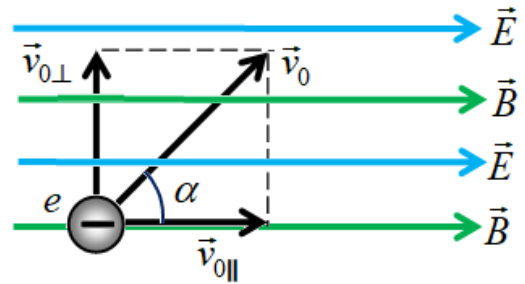
$$N = \frac{t}{T} = \frac{v_0 \cos \alpha \cdot meB}{eE2\pi m} = \frac{Bv \cos 45^\circ}{2\pi E} = \frac{10^2 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 0,707}{2\pi \cdot 10^4} = 225.$$

Перевірка розмірності:

$$[N] = \frac{(\text{м/с}) \text{Тл}}{(\text{В/м})} = \frac{\text{м} \cdot \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{м}}{\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{В}} = 1$$

**Відповідь:**  $N = 225$ .

**Задача 11.2.15**





Заряджена частинка рухається прямолінійно зі швидкістю  $v=10^4 \text{ м/с}$  перпендикулярно схрещеним під прямим кутом однорідним електричному і магнітному полям. Визначити напруженість електричного поля, якщо магнітна індукція  $B=10 \text{ мТл}$ .

| Дано:                | Розв'язання                                                                              |
|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| $v=10^4 \text{ м/с}$ | На заряджену частинку в схрещених електричному і магнітному полях діє сила Лоренца       |
| $B=10 \text{ мТл}$   |                                                                                          |
| $E=?$                | $\vec{F} = \vec{F}_{\text{ел}} + \vec{F}_{\text{маг}} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}].$ |

Якщо частинка проходить в полях без відхилення від прямолінійного руху, то сила електричного поля, повинна врівноважуватися силою магнітного поля, тобто сили мають дорівнювати одна одній за величиною

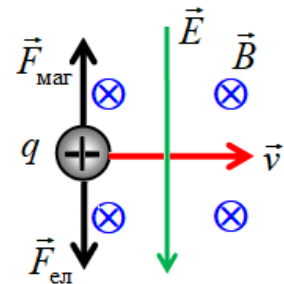
$$F_{\text{ел}} = F_{\text{маг}}, \quad (1)$$

і мати протилежні напрямки.

Враховуючи, що швидкість перпендикулярна магнітному полю, то  $F_{\text{маг}} = qvB \sin \alpha = qvB \sin 90^\circ = qvB$ .

Тоді (1) набуває вигляду

$$qE = qvB,$$



звідки

$$E = vB = 10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 100 \text{ В/м}.$$

Перевірка розмірності:

$$[E] = \frac{\text{м} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

**Відповідь:**  $E = 100 \text{ В/м}$ .

**Задача 11.2.16**

Протон, що прискорюється електричним полем зі стану спокою, через  $t = 0,05 \text{ с}$  влітає в магнітне поле з індукцією  $B = 10^{-3} \text{ Тл}$ , що перпендикулярно електричному. Знайти відношення нормальної  $a_n$  і тангенціальної  $a_\tau$  складових прискорення протона в цей момент.

| Дано:                    | Розв'язання                                                                              |
|--------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| $t = 0,05 \text{ с}$     | На протон, що рухається у схрещених електричному і магнітному полях, діє сила Лоренца    |
| $B = 10^{-3} \text{ Тл}$ |                                                                                          |
| $a_n/a_\tau = ?$         | $\vec{F} = \vec{F}_{\text{ел}} + \vec{F}_{\text{маг}} = e\vec{E} + e[\vec{v}, \vec{B}].$ |

Модуль електричної складової  $F_{\text{ел}} = eE$ , а її напрямок збігається з напрямком вектора  $\vec{E}$ . Ця сила задає прискорення у напрямку швидкості, тому викликане цією силою тангенціальне прискорення дорівнює

$$a_\tau = \frac{F_{\text{ел}}}{m} = \frac{eE}{m}.$$

Магнітна складова сили Лоренца  $\vec{F}_{\text{маг}} = e[\vec{v}, \vec{B}]$  діє перпендикулярно вектору швидкості, її модуль  $F_{\text{маг}} = evB \sin \alpha = evB \sin 90^\circ = evB$ , тому вона визначає нормальну складову прискорення протона

$$a_n = \frac{F_{\text{маг}}}{m} = \frac{evB}{m}.$$

Відношення складових прискорення становить

$$\frac{a_n}{a_\tau} = \frac{evB}{m} \frac{m}{eE} = \frac{vB}{E}.$$

Швидкість протона під час руху в електричному полі зі стану спокою можна визначити за формулою кінематики

$$v = a_\tau t = \frac{eE}{m} t.$$

Отже, шукане відношення складових прискорення становить

$$\frac{a_n}{a_\tau} = \frac{vB}{E} = \frac{eEB}{mE}t = \frac{eB}{m}t.$$

Підставляючи дані задачі, а також заряд і масу протона, отримуємо

$$\frac{a_n}{a_\tau} = \frac{eBt}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3} \cdot 0,05}{1,66 \cdot 10^{-27}} = 4819.$$

Перевірка розмірності:

$$\left[ \frac{a_n}{a_\tau} \right] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Тл} \cdot \text{с}}{\text{Кг}} = \frac{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{Кг} \cdot \text{с}}{\text{Кг} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{А}} = 1$$

**Відповідь:**  $\frac{a_n}{a_\tau} = 4819.$

### Задача 11.2.17

Знайти нормальне, тангенціальне та повне прискорення  $\alpha$ -частинки, що влітає зі швидкістю  $v = 10^6 \text{ м/с}$  в однорідні однаково спрямовані електричне  $E = 8 \text{ кВ/м}$  та магнітне  $B = 0,1 \text{ мТл}$  поля. Задачу розв'язати для двох випадків, коли швидкість  $\alpha$ -частинки спрямована: 1) паралельно і 2) перпендикулярно силовим лініям полів.

**Дано:**

$$v = 10^6 \text{ м/с}$$

$$E = 8 \text{ кВ/м}$$

$$B = 0,1 \text{ мТл}$$

$$a_n = ? a_\tau = ? a = ?$$

діє сила Лоренца

**Розв'язання**

Альфа-частинка ( $\alpha$ -частинка) – ядро атома гелію – має позитивний заряд  $q_\alpha = 2e = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$  та масу  $m_\alpha \simeq 4m_p = 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ Кг}$ .

На  $\alpha$ -частинку в електричному та магнітному полях

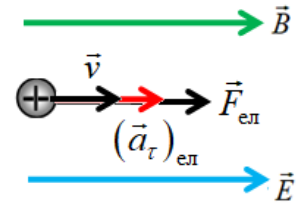
$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{ел}} + \vec{F}_{\text{маг}} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}],$$

яка в загальному випадку має дві складові – електричну  $\vec{F}_{\text{ел}} = q\vec{E}$  та магнітну

$$\vec{F}_{\text{маг}} = q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Розглянемо вплив електричного та магнітного полів окремо для кожного з випадків.

1) В електричному полі на позитивно заряджену частинку діє сила, модуль якої  $F_{\text{ел}} = q_{\alpha} E$ , а напрямок збігається з напрямком напруженості електричного поля  $\vec{E}$ . Оскільки  $\vec{v} \parallel \vec{E}$ , то прискорення, що викликане



електричною силою, збігається за напрямком зі швидкістю, а значить, це – тангенціальна складова прискорення. За 2-м законом Ньютона

$$m \vec{a}_{\tau} = \vec{F}_{\text{ел}} = q_{\alpha} \vec{E}.$$

Тоді

$$a_{\tau} = \frac{q_{\alpha} E}{m} = \frac{3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 8 \cdot 10^3}{6,64 \cdot 10^{-27}} = 4 \cdot 10^{11} \text{ м/с}^2.$$

Модуль магнітної складової сили Лоренца  $F_{\text{маг}} = q_{\alpha} v B \sin \alpha$ . Коли  $\vec{v} \parallel \vec{B}$ , кут  $\alpha$  між векторами  $\vec{v}$  та  $\vec{B}$  дорівнює нулю, отже,  $\sin \alpha = 0$ , і магнітна складова сили Лоренца дорівнюватиме нулю. Отже, магнітне поле на частинку не діє і не створює прискорення.

Таким чином, повне прискорення  $\alpha$ -частинки визначається лише тангенціальною складовою  $a_{\tau}$  і обумовлене воно дією виключно електричного поля  $\vec{a} = \vec{a}_{\tau}$ :

$$a = a_{\tau} = 4 \cdot 10^{11} \text{ м/с}^2.$$

2) Якщо  $\vec{v} \perp \vec{E}$ , то сила електричного поля, забезпечує прискорення, яке направлене перпендикулярно швидкості, тому є нормальним. Тоді, згідно із 2 законом Ньютона,

$$m \vec{a}_n = \vec{F}_{\text{ел}} = q_{\alpha} \vec{E},$$

звідки нормальна складова прискорення, яку забезпечує електричне поле, є

$$(a_n)_{\text{ел}} = a_n = \frac{q_{\alpha} E}{m} = \frac{3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 8 \cdot 10^3}{6,64 \cdot 10^{-27}} = 4 \cdot 10^{11} \text{ м/с}^2.$$

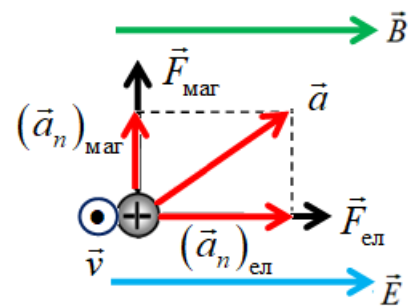
В магнітному полі діє сила  $F_{\text{маг}} = q_{\alpha} v B \sin \alpha$ . Оскільки  $\vec{v} \perp \vec{B}$ , то  $\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1$  та  $F_{\text{маг}} = q_{\alpha} v B$ . Ця сила та прискорення, завдане нею, спрямовані перпендикулярно швидкості, тому це прискорення є нормальним. Тоді за 2-м законом Ньютона

$$ma_n = F_{\text{маг}} = q_{\alpha} v B,$$

звідки

$$(a_n)_{\text{маг}} = a_n = \frac{q_{\alpha} v B}{m} = \frac{3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6 \cdot 10^{-2}}{6,64 \cdot 10^{-27}} = 4,82 \cdot 10^{11} \text{ м/с}^2.$$

Прискорення, що пов'язані з дією електричного  $(a_n)_{\text{ел}}$  та магнітного  $(a_n)_{\text{маг}}$  полів, перпендикулярні одне одному, а повне прискорення є їх векторною сумою  $\vec{a} = (\vec{a}_n)_{\text{ел}} + (\vec{a}_n)_{\text{маг}}$ . Модуль повного прискорення можна знайти за допомогою теореми Піфагора:



$$a = \sqrt{(a_n)_{\text{ел}}^2 + (a_n)_{\text{маг}}^2} = \sqrt{(4 \cdot 10^{11})^2 + (4,82 \cdot 10^{11})^2} = 6,26 \cdot 10^{11} \text{ м/с}^2.$$

Перевірка розмірності:

$$[a_{\tau}] = \frac{\text{КлВ}}{\text{кгм}} = \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м}} \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{с}^3 \cdot \text{А}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$[a_n] = \frac{q_{\alpha} v B}{m} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м} \cdot \text{Тл}}{\text{кг} \cdot \text{с}} = \frac{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{кг}}{\text{кг} \cdot \text{с} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{А}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

**Відповідь:**  $a = 4 \cdot 10^{11} \text{ м/с}^2$ ;  $a = 6,26 \cdot 10^{11} \text{ м/с}^2$ .

### 11.3. Задачі для самостійної роботи

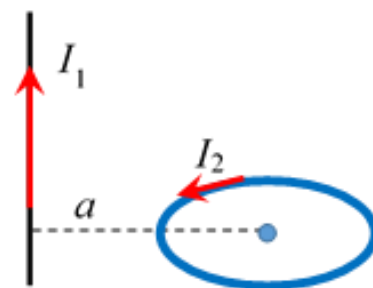
**11.3.1.** По двом прямим нескінченно довгим паралельним провідникам в одному напрямку протікають постійні струми  $I_1 = 4$  А,  $I_2 = 7$  А. Відстань між провідниками 12 см. Провідники знаходяться у повітрі. Визначити магнітну індукцію  $B$  результуючого магнітного поля у точці  $M$ , яка знаходиться поза першим провідником на відстані  $d = 2$  см від нього на лінії, перпендикулярній до провідників.

**Відповідь:**  $B = 50$  мкТл.

**11.3.2.** Два колових контури з постійними струмами розташовані в одній площині так, що їхні центри співпадають. Сили струмів у контурах  $I_1 = 5$  А,  $I_2 = 10$  А; радіуси контурів відповідно  $R_1 = \pi$  см,  $R_2 = 2\pi$  см відповідно. Струми течуть в одному напрямку. Контури знаходяться у вакуумі. Визначити магнітну індукцію  $B$  поля у центрі контурів.

**Відповідь:**  $B = 200$  мкТл.

**11.3.3.** Коловий контур із постійним струмом розташований так, що його площа перпендикулярна прямому нескінченно довгому провіднику з постійним струмом. Радіус контуру  $R = 1$  см. Сили струмів  $I_1 = 9\pi$  А,  $I_2 = 4$  А. Відстань від провідника до центра контуру  $a = 3$  см. Система провідників



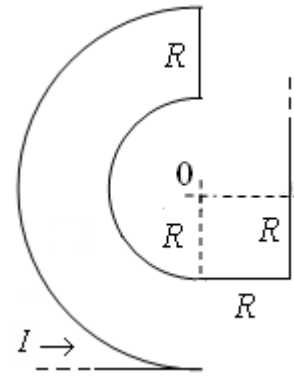
знаходиться у вакуумі. Визначити магнітну індукцію  $B$  у центрі кільця для напрямків струмів, що задані на рисунку. Відповідь надати у вигляді  $B/\pi$ .

**Відповідь:**  $B/\pi = 100$  мкТл.

**11.3.4.** Потрібно отримати напруженість магнітного поля  $H = 1$  кА/м в соленоїді довжиною  $l = 20$  см і діаметром  $D = 5$  см. Визначити кількість ампер-витків  $IN$  цього соленоїда і різницю потенціалів  $U$ , яку треба прикласти до кінців обмотки, яка виготовлена із мідного дроту діаметром 0,5 мм. Вважати соленоїд довгим.

**Відповідь:**  $IN = 200 \text{ А} \cdot \text{витків}$ ,  $U = 2,72 \text{ В}$ .

**11.3.5.** Визначити магнітну індукцію  $\vec{B}$  у центрі  $O$  провідника складної форми, по якому протікає струм  $I = 100 \text{ А}$ ,  $R = 0,2 \text{ м}$ .



**Відповідь:**  $B = 1,24 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$ .

**11.3.6.** Круговий і квадратний контури зроблені із шматків мідного дроту довжиною  $40 \text{ см}$  кожний. Обидва контури розташовані в однорідному магнітному полі індукцією  $20 \text{ мкТл}$  під кутом  $60^\circ$  до силових ліній поля. По кожному контуру протікає струм силою  $2 \text{ А}$ . Визначити обертальні моменти  $M_1$  та  $M_2$ , що діють на квадратний і круглий контур, відповідно.

**Відповідь:**  $M_1 = 0,20 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $M_2 = 0,26 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

**11.3.7.** В однорідному магнітному полі рухається вертикально з прискоренням  $0,2 \text{ м/с}^2$  прямолінійний алюмінієвий провідник з площею поперечного перетину  $1 \text{ мм}^2$ . По провіднику протікає струм силою  $5 \text{ А}$ , а напрямок його руху перпендикулярний силовим лініям поля. Визначити магнітну індукцію поля. Густина алюмінію  $\rho = 2,71 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Прискорення вільного падіння взяти  $10 \text{ м/с}^2$ .

**Відповідь:**  $B = 5,5 \text{ мТл}$ .

**11.3.8.** Контур із рухомою перетинкою довжиною  $l = 15 \text{ см}$  міститься в однорідному магнітному полі з напруженістю  $H = 10^5 \text{ А/м}$ , силові лінії якого перпендикулярні площині контуру. По контуру протікає струм силою  $1 \text{ А}$ . Визначити роботу  $A$  переміщення провідника за  $20 \text{ с}$  на відстань  $10 \text{ см}$  і потужність  $P$ , що витрачена на переміщення.

**Відповідь:**  $A = 3,8 \text{ мДж}$ ,  $P = 0,19 \text{ мВт}$ .

**11.3.9.** Круговий контур радіусом  $2 \text{ см}$  розташований в однорідному магнітному полі з індукцією  $10 \text{ мТл}$  так, що його площина паралельна силовим лініям. По контуру протікає постійний струм силою  $I = 2 \text{ А}$ . Визначити роботу,

яку виконує магнітне поле при повороті контуру у положення, коли його площа стає перпендикулярною силовим лініям поля.

**Відповідь:**  $A = 25 \text{ мкДж}$ .

**11.3.10.** В однорідному магнітному полі індукцією  $45 \text{ мкТл}$  розташована кругла рамка, площа якої утворює з силовими лініями магнітного поля кут  $\alpha = 30^\circ$ . Радіус рамки  $5 \text{ см}$ . Визначити магнітний потік через рамку.

**Відповідь:**  $\Phi = 176,63 \text{ нВб}$ .

**11.3.11.** Електрон рівномірно рухається зі швидкістю  $v = 2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$  паралельно нескінченно довгому провіднику на відстані  $a = 5 \text{ мм}$ . Визначити силу, що діє на електрон при протіканні по провіднику струму  $I = 1 \text{ А}$ .

**Відповідь:**  $F = 1,28 \cdot 10^{-17} \text{ Н}$ .

**11.3.12.** Протон влітає із швидкістю  $10^6 \text{ м/с}$  в однорідне магнітне поле індукцією  $15 \text{ мТл}$  перпендикулярно до силових ліній. Визначити тангенціальне і нормальне прискорення електрона.

**Відповідь:**  $a_\tau = 0$ ;  $a_n = 1,44 \cdot 10^{12} \text{ м/с}^2$ .

**11.3.13.** Точковий заряд  $q = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}$  влітає зі швидкістю  $v_0 = 5 \text{ м/с}$  в однорідне магнітне поле з індукцією  $B = 2 \text{ Тл}$ . Вектори швидкості та магнітної індукції складають кут  $\alpha = 45^\circ$ . Визначити модуль та напрямок сили, що діє на заряд.

**Відповідь:**  $F = 0,141 \text{ мН}$ .

**11.3.14.** В однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 100 \text{ мкТл}$  рухається електрон по гвинтовій лінії. Визначити швидкість електрона, якщо крок  $h$  гвинтової лінії дорівнює  $20 \text{ см}$ , а радіус  $5 \text{ см}$ .

**Відповідь:**  $v = 1,04 \text{ Мм/с}$ .

**11.3.15.** Магнітне поле з індукцією  $B = 0,1 \text{ Тл}$  перпендикулярно електричному полю напруженістю  $E = 100 \text{ кВ/м}$ . Перпендикулярно обом полям рухається, не відхиляючись від прямолінійної траєкторії, заряджена частинка. Знайти швидкість частинки.

**Відповідь:**  $v = 1 \text{ Мм/с}$ .



## 12. ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ. РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА

### 12.1. Теоретичні відомості

#### 12.1.1. Закон електромагнітної індукції. Правило Ленца

**Електромагнітною індукцією** називається явище виникнення електрорушійної сили (ЕРС) в провідному контурі при будь-якій зміні магнітного потоку, що пронизує цей контур. При цьому неістотно, чим саме викликана зміна магнітного потоку. Це може бути деформація або переміщення контуру в зовнішньому полі, або зміна магнітного поля в часі.

ЕРС, що виникає, називається **електрорушійною силою електромагнітної індукції**  $\mathcal{E}_i$ . Якщо провідник замкнутий, то виникає струм, який називають **індукційним**.

**Закон Фарадея:** ЕРС електромагнітної індукції в контурі чисельно дорівнює та протилежна за знаком швидкості зміни магнітного потоку через поверхню, обмежену цим контуром:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} . \quad (12.1)$$

Знак «-» в цій формулі зв'язаний із **правилом Ленца**: індукційний струм в контурі завжди спрямований так, що створюваний ним магнітний потік через поверхню, обмежену контуром, перешкоджає тій зміні магнітного потоку, яка викликала появу цього струму (рис. 12.1).

$$[\mathcal{E}_i] = \text{Вольт} = \text{В}.$$

Якщо замкнутий контур складається з  $N$  витків, то  $\mathcal{E}_i$  дорівнює сумі ЕРС, індукованих в кожному з витків:

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(N\Phi)}{dt} = -N \frac{d\Psi}{dt} . \quad (12.2)$$

$$\Psi = N\Phi , \quad (12.3)$$

де  $\Psi$  – потокозчеплення,  $\Phi$  – потік, що пронизує один виток.

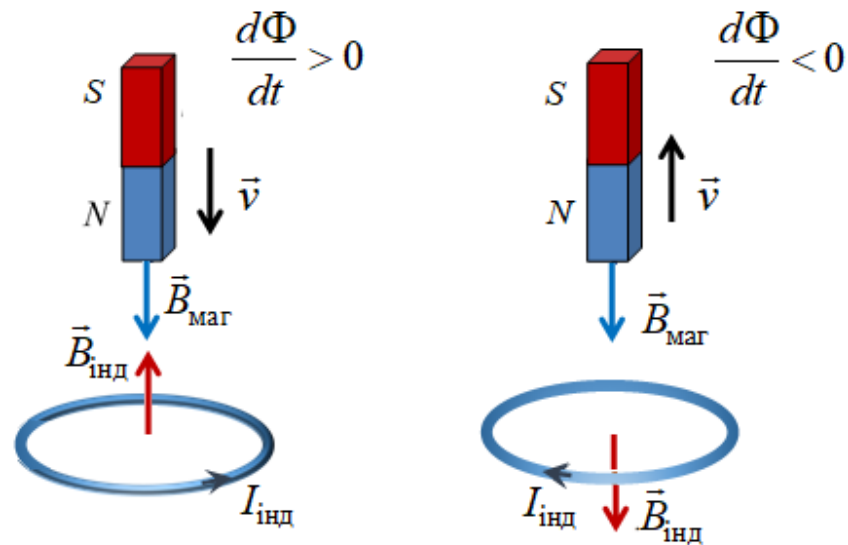


Рисунок 12.1

Якщо контур рівномірно обертається в магнітному полі (рис. 12.2), то магнітний потік, що його пронизує, описується як

$$\Phi = NBS \cos \alpha t, \quad (12.4)$$

де  $\alpha = \omega t$  – кут повороту контуру в момент часу  $t$ ,  $N$  – кількість витків.

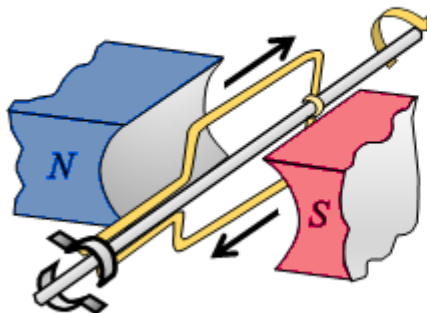


Рисунок 12.2

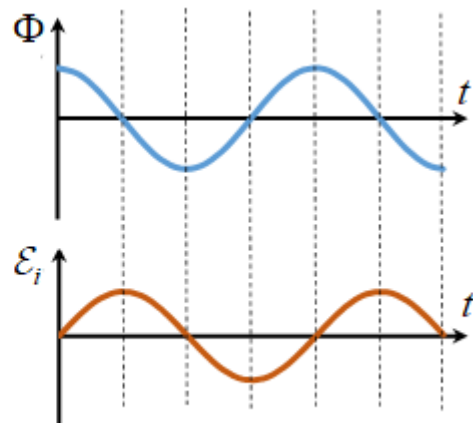


Рисунок 12.3

ЕРС індукції  $\mathcal{E}_i$ , що виникає в контурі, який обертається в однорідному магнітному полі,

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{d(BS \cos \omega t)}{dt} = NBS \omega \sin \omega t = \mathcal{E}_{i\max} \sin \omega t, \quad (12.5)$$

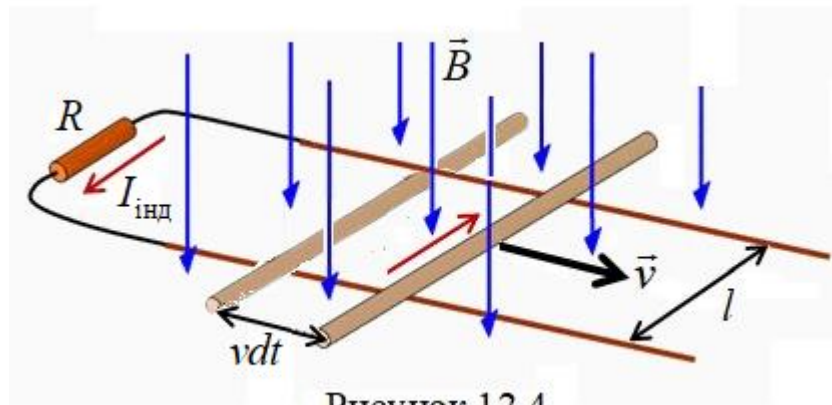
де  $\omega$  – частота обертання,  $N$  – кількість витків,  $t$  – час.

Отже, магнітний потік змінюється з часом за законом косинуса (12.4), тоді як ЕРС індукції змінюється за законом синуса (12.5). Це означає, що в той момент часу, коли магнітний потік досягає максимального (за модулем) значення, ЕРС індукції дорівнює нулю і навпаки (рис. 12.3).

Якщо прямолінійний провідник рухається перпендикулярно силовим лініям магнітного поля (рис. 12.4), то ЕРС індукції визначається наступним співвідношенням:

$$\mathcal{E}_i = Blv \sin \alpha, \quad (12.6)$$

де  $B$  – магнітна індукція,  $l$  – довжина провідника,  $v$  – його швидкість,  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{v}$  та  $\vec{B}$ .



В результаті руху провідника в магнітному полі, якщо його кінці замкнуті, то у контурі виникає індукційний струм

$$I_{\text{інд}} = \frac{\mathcal{E}_i}{R}. \quad (12.7)$$

а якщо кінці не замкнуті, то на кінцях провідника виникає різниця потенціалів

$$U = \mathcal{E}_i = Blv \sin \alpha. \quad (12.8)$$

Заряд, що проходить по провіднику, можна визначити із  $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$  (12.1) та

закону Ома  $\mathcal{E}_i = IR = \frac{dq}{dt} R$ , відповідно. Тоді

$$\frac{dq}{dt} R = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

$$q = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}. \quad (12.9)$$

### 12.1.2. Явище самоіндукції. Індуктивність

Електричний струм, який тече у замкнутому контурі, створює навколо себе магнітне поле, величина індукції якого  $B$  згідно із законом Біо-Савара-Лапласа пропорційна струму  $B \sim I$ . Зчеплений з контуром магнітний потік  $\Phi$  пропорційний магнітній індукції, тому прямо пропорційний й струму  $I$  в контурі:  $\Phi \sim I$ .

При зміні в контурі сили струму також змінюватиметься і зчеплений з ним магнітний потік. Отже, в контурі буде виникати (індукуватися) ЕРС, яку називають **ЕРС самоіндукції**  $\mathcal{E}_s$ . Виникнення ЕРС самоіндукції у провідному контурі за зміни у ньому сили струму називають **явищем самоіндукції**.

Залежність потоку від струму можна записати як

$$\Phi = LI, \quad (12.10)$$

де коефіцієнт пропорційності  $L$  називається **індуктивністю контуру**.

Індуктивність будь-якого провідника залежить від його форми та розмірів, а також від магнітних властивостей навколишнього середовища (магнітної проникності  $\mu$ ).

$$[L] = \text{Генрі} = \text{Гн}.$$

**Закон Фарадея для явища самоіндукції** має вигляд

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (12.11)$$

При замиканні кола, що містить сталу ЕРС, сила струму внаслідок ЕРС самоіндукції встановлюється не миттєво, а через деякий проміжок часу (рис. 12.5, крива 1). При виключенні джерела (розмиканні кола) струм не припиняється миттєво (рис. 12.5, крива 2). Це пояснюється тим, що в контурі з'являється індукційний струм, який за правилом Ленца протидіє зміні струму у

колі, що викликав явище самоіндукції. Індукційний струм, накладаючись на основний струм, уповільнює його зростання або перешкоджає його спаданню.

Сила струму при замиканні кола описується рівнянням

$$I = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (12.12)$$

де  $I_0$  – стале значення сили струму,  $t$  – час,  $\tau = \frac{L}{R}$  – **час релаксації** – час, протягом якого сила струму зменшується в  $e$  ( $e = 2,72$ ) разів.

Сила струму при розмиканні кола описується рівнянням

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (12.13)$$

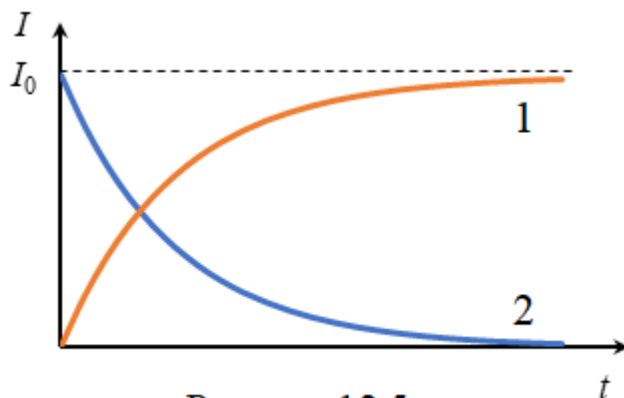


Рисунок 12.5

**Соленоїд** – довга, тонка котушка, довжина якої набагато більша, ніж її діаметр, а товщина обмотки набагато менша, ніж діаметр котушки. За цих умов і без використання магнітного матеріалу магнітна індукція  $B$  всередині котушки є фактично постійною і дорівнює (11.26)

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l} = \mu_0 n I,$$

де  $\mu_0$  – магнітна стала,  $n$  – кількість витків на одиниці довжини,  $N$  – загальна кількість витків,  $l$  – довжина соленоїда.

Нехтуючи крайовими ефектами на кінцях соленоїда, отримаємо, що потокозчеплення через котушку дорівнює

$$\Psi = NBS = \frac{\mu_0 N^2 IS}{l} = \mu_0 n^2 IV. \quad (12.14)$$

де  $V$  – об'єм соленоїда, а  $S$  – площа його перерізу.

Тоді **індуктивність соленоїда**

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 IS}{lI} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} = \mu_0 n^2 V. \quad (12.15)$$

Якщо котушка має осердя, тобто всередині вона повністю заповнена магнітним матеріалом з магнітною проникністю  $\mu$ , то індуктивність такого соленоїда

$$L = \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l} = \mu_0 \mu n^2 V. \quad (12.16)$$

### 12.1.3. Послідовне та паралельне з'єднання котушок

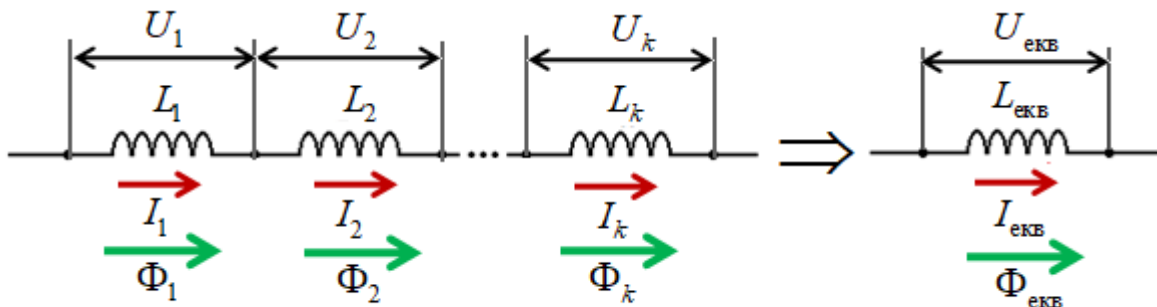


Рисунок 12.6

При **послідовному з'єднанні** (рис. 12.6) кінець однієї котушки з'єднується з початком іншої. Оскільки всі котушки належать одному дроту і на ньому немає розгалужень, то через будь-яку з котушок протікає той самий струм  $I_{\text{екв}} = I_1 = I_2 = \dots = I_k$ , а загальна напруга на них складатиметься з напруг на кожній котушці  $U_{\text{екв}} = U_1 + U_2 + \dots + U_k$ . Загальний магнітний потік, що пронизує всі котушки, складатиметься з магнітних потоків, що пронизують кожну з котушок  $\Phi_{\text{екв}} = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_k$ . Тоді,  $k$  послідовно з'єднаних котушок можна

замінити однією еквівалентною котушкою, через яку протікає струм  $I_{\text{екв}}$  і її пронизує потік  $\Phi_{\text{екв}}$ , а еквівалентна індуктивність становить

$$L_{\text{екв}} = L_1 + L_2 + \dots + L_k. \quad (12.17)$$

При *паралельному з'єднанні* (рис. 12.7) котушки з'єднані так, що одні кінці

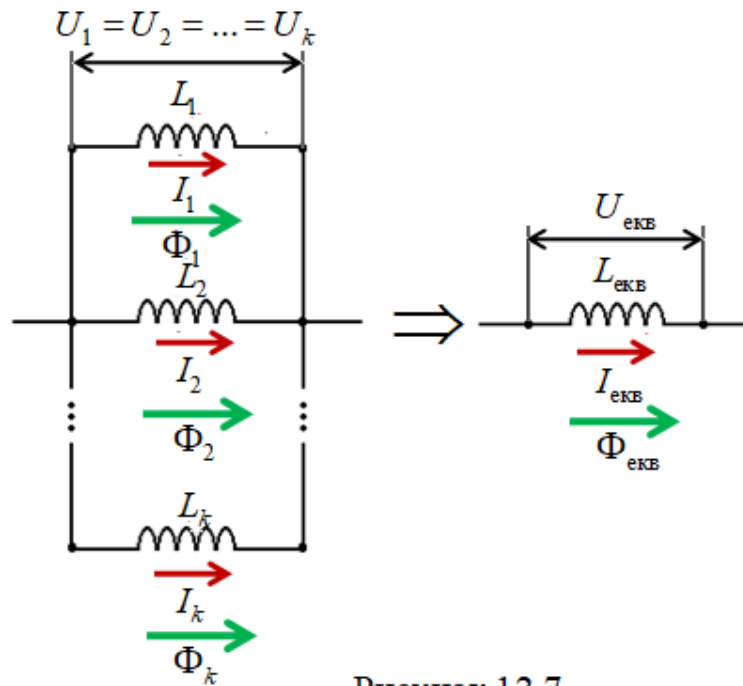


Рисунок 12.7

всіх котушок з'єднані в одну точку, інші кінці – в іншу точку. Це призводить до того, що на котушках однакова напруга  $U_{\text{екв}} = U_1 = U_2 = \dots = U_k$ , їх пронизує однаковий магнітний потік  $\Phi_{\text{екв}} = \Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_k$ , але кожен провідник належить своєму дроту, тому через кожен з них протікає свій струм, при цьому  $I_{\text{екв}} = I_1 + I_2 + \dots + I_k$ .

Якщо  $k$  паралельно з'єднаних котушок замінити однією еквівалентною котушкою, через яку протікає струм  $I_{\text{екв}}$  і проходить потік  $\Phi_{\text{екв}}$ , то еквівалентна індуктивність становить

$$\frac{1}{L_{\text{екв}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_k}. \quad (12.18)$$

#### 12.1.4. Взаємна індукція. Трансформатори

**Взаємною індукцією** називається явище збудження ЕРС електромагнітної індукції в одному електричному контурі при зміні електричного струму в іншому контурі або при зміні взаємного розташування цих двох контурів.

Розглянемо два близько розташованих контури 1 і 2 (рис. 12.8). В контурі 1 тече струм  $I_1$ , який створює магнітний потік  $\Phi_{21}$ , що пронизує контур 2:

$$\Phi_{21} = L_{21}I_1. \quad (12.19)$$

Коефіцієнт пропорційності  $L_{21}$  називається **взаємною індуктивністю** або коефіцієнтом взаємної індукції контурів 1 і 2.

Аналогічно, при протіканні в контурі 2 струму  $I_2$  виникає магнітний потік  $\Phi_{12}$ , зчеплений з контуром 1:

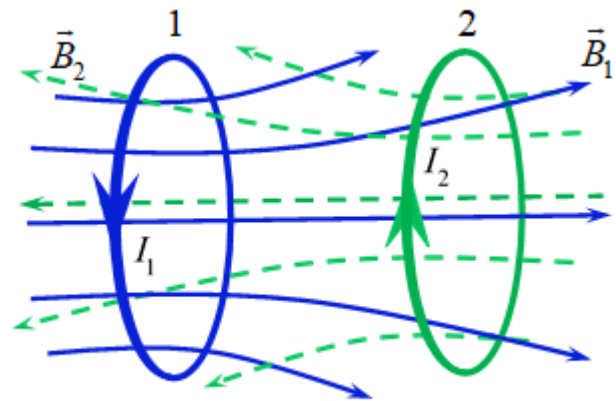


Рисунок 12.8

$$\Phi_{12} = L_{12}I_2, \quad (12.20)$$

де  $L_{12}$  – коефіцієнт взаємної індукції контурів 2 та 1.

Взаємна індуктивність залежить від розмірів і форми контурів 1 і 2, відстані між ними, від їх взаємного розташування, а також від магнітної проникності середовища, що їх оточує.

Згідно із законом електромагнітної індукції при зміні струму  $I_1$  в контурі 2 індукується ЕРС:

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (12.21)$$

При зміні струму  $I_2$  в контурі 1 індукується ЕРС:

$$\mathcal{E}_{i1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (12.22)$$



Якщо контури знаходяться в неферомагнітному середовищі, то  $L_{12} = L_{21}$ .  
Тому взаємна індуктивність двох контурів дорівнює

$$L_{21} = L_{12} = \frac{\mu\mu_0 N_1 N_2 S}{l}, \quad (12.23)$$

де  $S$  – площа поперечного перерізу осердя,  $l$  – довжина осердя,  $N_1$  і  $N_2$  – кількість витків у першому та другому контурах, відповідно.

На явищі взаємної індукції заснована робота трансформатора. **Трансформатор** – це пристрій, призначений для перетворення напруги та сили змінного струму. Він має осердя (зазвичай замкнутої форми) з м'якого заліза або іншого магніто-м'якого феромагнетика, який несе на собі дві обмотки – первинну та вторинну (рис. 12.9). Кінці первинної обмотки (вхід трансформатора) підключені до мережі змінного струму  $I_1$ , а кінці вторинної обмотки (вихід) – до споживачів електричної енергії  $I_2$ . ЕРС електромагнітної індукції (самоіндукції),

$$\mathcal{E}_{i1} = -\frac{d\Phi}{dt} N_1, \quad (12.24)$$

і у вторинній обмотці

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi}{dt} N_2, \quad (12.25)$$

пропорційні числу витків  $N_1$  і  $N_2$  в них.

Застосовуючи закон Ома для ділянки з ЕРС  $U = Ir \pm \mathcal{E}$ , знайдемо напругу на вході трансформатора

$$U_1 = I_1 r_1 - \mathcal{E}_{i1} = I_1 r_1 + \frac{d\Phi}{dt} N_1, \quad (12.26)$$

і на його виході

$$U_2 = I_2 r_2 - \mathcal{E}_{i2} = I_2 r_2 + \frac{d\Phi}{dt} N_2, \quad (12.27)$$

де  $r_1$  та  $r_2$ ,  $I_1$  та  $I_2$  – опори первинної та вторинної обмоток і струми в них, відповідно.

Якщо вторинна обмотка розімкнена  $I_2 = 0$ ,  $I_1 r_1 \ll \mathcal{E}_{i1}$ , то поділивши (12.26) на (12.27), отримуємо

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (12.28)$$

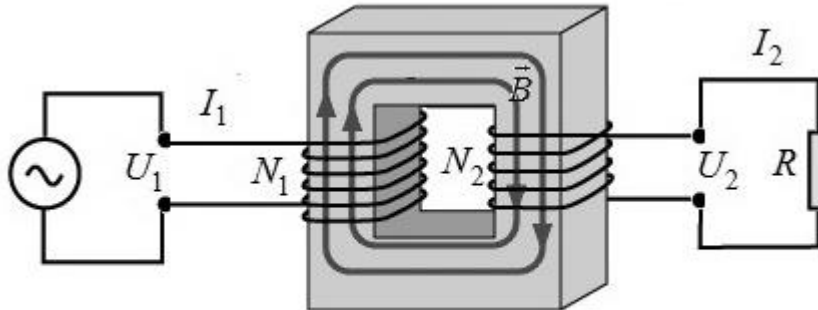


Рисунок 12.9

Величина, що вказує, у скільки разів вторинна напруга більше первинної напруги у режимі холостого ходу, називається **коефіцієнтом трансформації**:

$$k = \frac{U_2}{U_1}. \quad (12.29)$$

Якщо трансформатор навантажений (вторинна обмотка замкнута), то падінням напруги  $I_1 r_1$  порівняно з ЕРС індукції  $\mathcal{E}_{i1}$  нехтувати не можна.

**Підвищувальний трансформатор**, для якого  $\frac{N_2}{N_1} > 1$ , збільшує напругу та знижує величину струму  $I_2$ , а **понижувальний**, для якого  $\frac{N_2}{N_1} < 1$ , зменшує напругу і збільшує силу струму  $I_2$ .

Коефіцієнт трансформації може бути виражений через інші параметри

$$k = \frac{\mathcal{E}_{i2}}{\mathcal{E}_{i1}} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (12.30)$$

Ефективність роботи трансформатора можна оцінити як відношення потужності, яку трансформатор віддає в навантаження, до потужності, що споживається з мережі, яка називається **коефіцієнтом корисної дії**  $\eta$  трансформатора

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \approx \frac{I_2 U_2}{I_1 U_1}. \quad (12.31)$$

### 12.1.5. Енергія магнітного поля

Якщо у контурі з індуктивністю  $L$  тече струм  $I$ , то в момент розмикання ланцюга виникає індукційний струм і він здійснює роботу. Ця робота здійснюється за рахунок енергії зниклого під час розмикання ланцюга магнітного поля. З закону збереження і перетворення енергії енергія магнітного поля перетворюється головним чином в енергію електричного поля, внаслідок чого відбувається нагрівання провідників. Робота може бути визначена із закону Джоуля-Ленца, вважаючи, що  $U = \mathcal{E}_s$ :

$$dA = UI dt = \mathcal{E}_s I dt. \quad (12.32)$$

Якщо підставити ЕРС самоіндукції (12.11)  $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$  в вираз (12.32), то отримуємо

$$dA = -L I dI. \quad (12.33)$$

Зменшення енергії магнітного поля дорівнює роботі струму, тому

$$W_{\text{маг}} = \int_I^0 dA = -L \int_I^0 I dI = \frac{LI^2}{2}. \quad (12.34)$$

Формула справедлива для будь-якого контуру і показує, що енергія магнітного поля залежить від індуктивності контуру  $L$  та сили струму  $I$ , що протікає по ньому. **Енергію магнітного поля** можна виразити з врахуванням співвідношення  $\Phi = LI$ :

$$W_{\text{маг}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}. \quad (12.35)$$

Енергія магнітного поля соленоїда (катушки), індуктивність якого (12.16) дорівнює  $L = \mu_0 \mu n^2 V$ , а об'єм  $V$ , становить

$$W_{\text{маг}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu n^2 I^2 V}{2}. \quad (12.36)$$

Індукція магнітного поля всередині соленоїда (11.26)  $B = \mu_0 \mu n I$ , звідки

$$I = \frac{B}{\mu_0 \mu n}. \quad (12.37)$$

Якщо підставити (12.37) в (12.36), отримаємо

$$W_{\text{маг}} = \frac{\mu_0 \mu n^2 I^2 V}{2} = \frac{\mu_0 \mu n^2 V}{2} \left( \frac{B}{\mu_0 \mu n} \right)^2 = \frac{B^2 V}{2 \mu_0 \mu}. \quad (12.38)$$

Енергію магнітного поля можна записати з урахуванням (11.70)  $B = \mu \mu_0 H$  в вигляді

$$W_{\text{маг}} = \frac{B^2 V}{2 \mu_0 \mu} = \frac{\mu_0 \mu H^2 V}{2} = \frac{B H V}{2}. \quad (12.39)$$

Оскільки поле соленоїда однорідне і майже повністю локалізоване в його об'ємі, можна визначити *густина енергії магнітного поля*, тобто енергію, розраховану на одиницю об'єму поля:

$$w = \frac{W_{\text{маг}}}{V}. \quad (12.40)$$

З урахуванням (12.39) формула (12.40) набуває вигляду

$$w = \frac{B^2}{2 \mu_0 \mu} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{B H}{2}. \quad (12.41)$$

#### **12.1.6. Рівняння Максвелла, їх зміст і властивості**

Рівняння Максвелла є узагальненням основних законів електричних і магнітних явищ. Система рівнянь описує абсолютно усі електромагнітні явища, пояснює характер будь-яких електромагнітних полів, взаємозв'язку струмів та електричних зарядів у будь-яких середовищах.

Рівняння Максвелла можуть бути записані у диференційній чи інтегральній формі. Кожне рівняння найповніше виражається як диференціальне рівняння у

частинних похідних, що зв'язує варіації електричного та магнітного полів залежно від варіацій положення або часу, а також густини заряду та струму у просторі. Щоб розуміти деякі математичні символи, що використовуються в диференціальних формах рівнянь Максвелла, спочатку визначимо, що таке оператор набла.

**Оператор набла** (або **оператор Гамільтона**) – це векторний диференціальний оператор, компоненти якого є частинними похідними за координатами. Для тривимірного простору (в декартовій системі координат) оператор набла визначається таким чином:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \quad (12.42)$$

де  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  і  $\vec{k}$  – одиничні координатні вектори.

Оператор набла, застосований до поля тим чи іншим математичним чином, дає три можливі комбінації, тобто виражає основні операції векторного аналізу. Ці комбінації називаються: градієнт, дивергенція і ротор.

### 1. Градієнт

Якщо скалярно помножити вектор  $\nabla$  на скалярну функцію, то вийде вектор градієнта відповідної функції. Наприклад,

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = \text{grad} \varphi. \quad (12.43)$$

Градієнт – вектор, що своїм напрямком вказує напрямок найбільшого зростання деякої величини, значення якої змінюється від однієї точки простору до іншої (скалярного поля), а за величиною (модулем) дорівнює швидкості зростання цієї величини в цьому напрямку.

### 2. Дивергенція (розбіжність)

Якщо вектор  $\nabla$  скалярно помножити на вектор, то вийде скаляр – дивергенція вектора. Наприклад,

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \text{div} \vec{a}. \quad (12.44)$$

Дивергенція (розбіжність) – диференціальний оператор, що відображає векторне поле на скалярне (тобто, в результаті застосування до векторного поля операції диференціювання виходить скалярне поле), який визначає (для кожної точки), «наскільки розходиться з малого околу даної точки вхідне та вихідне поле», точніше, наскільки розходяться вхідний та вихідний потоки.

### 3. **Ротор** (вихор)

Якщо вектор  $\nabla$  векторно помножити на вектор, то вийде ротор вектора

$$\nabla \times \vec{a} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \text{rot} \vec{a}. \quad (12.45)$$

Ротор (вихор) – векторний диференціальний оператор над векторним полем. Цей векторний оператор показує, наскільки й у якому напрямку поле “закручується” в кожній точці, тобто він міряє локальну "обертальність" поля ніби мініатюрний вихор-крильчатка, поставлений в відповідну точку поля.

Тепер розглянемо рівняння Максвелла в інтегральній і диференціальній формах.

$$1. \oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S}, \quad \text{rot} \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (12.46)$$

Інтегральна форма: циркуляція вектора напруженості електричного поля за довільним замкнутим контуром прямо пропорційна швидкості зміни магнітного потоку через площу, обмежену цим контуром.

Диференціальна форма: при будь-якій зміні магнітного поля виникає вихрове електричне поле, пропорційне швидкості зміни індукції магнітного поля.

Фізичний зміст: будь-яка зміна магнітного поля у часі викликає появу вихрового електричного поля.

$$2. \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad \text{div} \vec{B} = 0. \quad (12.47)$$

Інтегральна форма: потік індукції магнітного поля через довільну замкнуту поверхню дорівнює нулю. Це означає, що у природі немає магнітних зарядів.

Диференціальна форма: потік силових ліній індукції магнітного поля з нескінченного елементарного обсягу дорівнює нулю, оскільки це вихрове поле.

Фізичний зміст: джерела магнітного поля у вигляді магнітних зарядів у природі відсутні.

$$3. \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{J} d\vec{S} + \int_S \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{S}, \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (12.48)$$

Інтегральна форма: циркуляція вектора напруженості магнітного поля по довільному замкнутому контуру прямо пропорційна сумарному струму, що перетинає поверхню, яка охоплюється цим контуром.

Диференціальна форма: навколо будь-якого провідника зі струмом та навколо будь-якого змінного електричного поля існує вихрове магнітне поле.

Фізичний зміст: протікання струму провідності вздовж провідника і зміни електричного поля в часі призводять до появи вихрового магнітного поля.

$$4. \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV, \quad \text{div} \vec{D} = \rho. \quad (12.49)$$

Інтегральна форма: потік вектора електростатичної індукції через довільну замкнуту поверхню, що охоплює заряди, прямо пропорційний сумарному заряду, розташованому всередині цієї поверхні.

Диференціальна форма: потік вектора індукції електростатичного поля з нескінченного елементарного об'єму прямо пропорційний сумарному заряду, що знаходиться в цьому об'ємі.

Фізичний зміст: джерелом електричного поля є електричний заряд.

Система даних рівнянь може бути доповнена системою так званих **матеріальних рівнянь**, які характеризують властивості матеріального середовища, що заповнює простір:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{j}_{\text{пров}} = \sigma \vec{E}. \quad (12.50)$$

### ***Властивості рівнянь Максвелла:***

1. Рівняння Максвелла лінійні. Вони містять лише перші похідні полів  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  за часом та за просторовими координатами та перші ступені густини електричних зарядів  $\rho$  і струмів  $j$ . Властивість лінійності рівнянь Максвелла пов'язана з принципом суперпозиції, якщо два які-небудь поля задовольняють рівнянням Максвелла, то це стосується і суми цих полів.

2. Рівняння Максвелла містять рівняння безперервності, що виражають закон збереження заряду. Щоб отримати рівняння безперервності, необхідно взяти дивергенцію від обох частин першого з рівнянь Максвелла в диференціальній формі запису.

3. Рівняння Максвелла виконуються у всіх інерційних системах відліку. Вони є релятивістськими інваріантами. Це є наслідком принципу відносності, за яким усі інерційні системи відліку фізично еквівалентні одна одній. Вигляд рівнянь Максвелла при переході від однієї інерційної системи відліку до іншої не змінюється, проте величини, що входять до них, перетворюються за певними правилами. Тобто, рівняння Максвелла є правильними релятивістськими рівняннями на відміну, наприклад, від рівнянь механіки Ньютона.

4. Рівняння Максвелла несиметричні щодо електричного та магнітного полів. Це пов'язано з тим, що у природі існують електричні заряди, а магнітних зарядів немає.

З рівнянь Максвелла випливає важливий висновок існування принципово нового явища – ***електромагнітного поля***, яке здатне існувати самотійно, без електричних зарядів і струмів. При цьому зміна його обов'язково має хвильовий характер. Ці поля називають ***електромагнітними хвилями***. Електромагнітні хвилі отримали свою назву тому, що при їхньому поширенні електричне і магнітне поля змінюються хвилеподібно, а їхнє математичне описання (через рівняння Максвелла) дійсно приводить до хвильового рівняння, аналогічного до того, що використовується для механічних хвиль (наприклад, звукових або хвиль на струні). Різниця у тому, що механічні хвилі — це коливання частинок



середовища, а електромагнітні хвилі — це коливання самих полів, вони не потребують матеріального середовища (можуть поширюватися у вакуумі). У вакуумі вони завжди поширюються зі швидкістю, що дорівнює швидкості світла.

Теорія Максвелла передбачила існування електромагнітних хвиль і дозволила встановити всі їх основні властивості. Розв'язуючи рівняння Максвелла для вільної електромагнітної хвилі, можна отримати вигляд її розповсюдження у просторі. Більш того, висновок щодо існування електромагнітних хвиль дозволив Максвеллу пояснити хвильову природу світла, оскільки світло — це електромагнітні хвилі.

### **Властивості електромагнітних хвиль**

1. Швидкість поширення електромагнітної хвилі в нейтральному непровідному та неферомагнітному середовищі

$$v = c / \sqrt{\epsilon\mu}, \quad (12.51)$$

де  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  — швидкість світла в вакуумі.

2. Електромагнітні хвилі є поперечними: вектори  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  та  $\vec{v}$  взаємно перпендикулярні і утворюють правоґвинтову систему (рис. 12.10). У цьому проявляється внутрішня властивість електромагнітної хвилі, яка не залежить від вибору координатної системи.

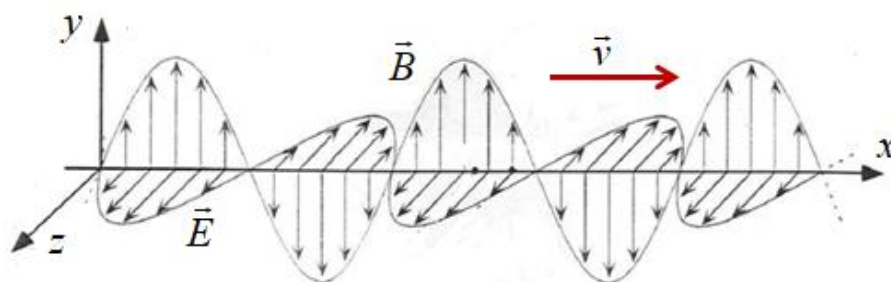


Рисунок 12.10

3. В електромагнітній хвилі вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  завжди коливаються в однакових фазах (рис. 12.10), причому між миттєвими значеннями  $E$  та  $B$  у будь-якій точці простору існує зв'язок, а саме,

$$E = vB \quad \text{або} \quad \sqrt{\epsilon\epsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H. \quad (12.52)$$

### 12.1.7. Потік енергії електромагнітного поля. Вектор Пойнтінга

Електромагнітні хвилі, коли поширюються у просторі та часі, несуть із собою енергію. Вона міститься в електричному і магнітному полях, які взаємно перетворюються.

В лінійному ізотропному середовищі об'ємна густина енергії електричного поля (9.36), напруженість якого  $E$ :

$$w_{\text{ел}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}, \quad (12.53)$$

а об'ємна густина енергії магнітного поля (12.41), магнітна індукція якого  $B$ ,

$$w_{\text{маг}} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (12.54)$$

Отже, об'ємна густина енергії електромагнітного поля в тій області простору, де знаходиться у довільний момент часу електромагнітна хвиля, становить

$$w = w_{\text{ел}} + w_{\text{маг}}. \quad (12.55)$$

Враховуючи те, що  $E = cB$ ,  $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$  і  $B = \mu\mu_0 H$ , об'ємна густина енергії електромагнітного поля становить

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2 = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} EH. \quad (12.56)$$

Вектор густини потоку електромагнітної енергії називають **вектором Пойнтінга**:

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (12.57)$$

Модуль вектора Пойнтінга дорівнює кількості енергії, що переноситься через одиничну площадку, перпендикулярну до  $\vec{S}$ , в одиницю часу, а його напрямок збігається з напрямком поширення електромагнітної хвилі, тобто з напрямком перенесення енергії. Швидкість перенесення енергії дорівнює фазовій швидкості хвилі. Модуль середнього значення вектора Пойнтінга називається **інтенсивністю** хвилі.

## 12.2. Приклади розв'язання задач

### Задача 12.2.1

Круговий виток обертається в магнітному полі, індукція якого  $B=1$  мТл. Вісь обертання знаходиться в площині витка і перпендикулярна силовим лініям магнітного поля. Максимальне значення магнітного потоку  $\Phi_{\max}=0,2$  мВб. Визначити радіус витка.

| Дано:                 | Розв'язання                                       |
|-----------------------|---------------------------------------------------|
| $B=1$ мТл             | Магнітний потік однорідного магнітного поля через |
| $\Phi_{\max}=0,2$ мВб | плоску поверхню:                                  |
| $R=?$                 | $\Phi = BS \cos \alpha, \quad (1)$                |

де  $B$  – індукція магнітного поля,  $S$  – площа контуру,  $\alpha$  – кут між  $\vec{B}$  та нормаллю  $\vec{n}$  до  $S$ .

Потік (1), що залежить від косинуса кута  $\alpha$ , має максимальне значення при  $\cos \alpha = 1$ , яке дорівнює

$$\Phi_{\max} = BS, \quad (2)$$

звідки площа витку становить

$$S = \frac{\Phi_{\max}}{B}. \quad (3)$$

З формули площі кола  $S = \pi R^2$ , радіус контуру  $R$

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}. \quad (4)$$

Підставимо (3) в (4) і отримаємо

$$R = \sqrt{\frac{\Phi_{\max}}{\pi B}} = \sqrt{\frac{0,02 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 10^{-3}}} = 0,25 \text{ м}.$$

Перевірка розмірності:

$$[R] = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{А} \cdot \text{кг}}} = \text{м}.$$

**Відповідь:**  $S = 10^2 \text{ см}^2$ .

### Задача 12.2.2

Прямокутна рамка зі сторонами  $a = 8 \text{ см}$ ,  $b = 10 \text{ см}$ , яка містить  $N = 100$  витків, рівномірно обертається в однорідному магнітному полі. Визначити індукцію магнітного поля, якщо при частоті обертання рамки  $\omega = 5 \text{ рад/с}$ , в ній індукується максимальна ЕРС  $\mathcal{E}_{i \max} = 6 \text{ В}$ .

| Дано:                                | Розв'язання                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|--------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a = 8 \text{ см}$                   | Повний магнітний потік, що пронизує рамку, у будь-який момент часу визначається співвідношенням                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $b = 10 \text{ см}$                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $N = 100$                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $\omega = 5 \text{ рад/с}$           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $\mathcal{E}_{i \max} = 6 \text{ В}$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $B = ?$                              | $\Phi = NBS \cos \alpha, \quad (1)$ <p>де <math>N</math> – кількість витків, <math>B</math> – індукція магнітного поля, <math>S</math> – площа контуру, <math>\alpha</math> – кут між <math>\vec{B}</math> та нормаллю <math>\vec{n}</math> до <math>S</math>. Під час рівномірного обертання кут змінюється як <math>\alpha = \omega t</math>.</p> |

Електрорушійна сила індукції (ЕРС), що виникає в рамці при її обертанні, за законом Фарадея дорівнює

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(NBS \cos \omega t)}{dt} = NBS\omega \sin \omega t. \quad (2)$$

Максимальна ЕРС індукції відповідає максимальному значенню кута у формулі (2) і становить

$$\mathcal{E}_{i \max} = NBS\omega, \quad (3)$$

звідки величина індукції магнітного поля з урахуванням того, що площа прямокутного контуру  $S = ab$ , буде

$$B = \frac{\mathcal{E}_{i \max}}{NS\omega} = \frac{\mathcal{E}_{i \max}}{Nab\omega} = \frac{6}{100 \cdot 0,08 \cdot 0,1 \cdot 5} = 1,5 \text{ Тл}. \quad (4)$$

Перевірка розмірності:

$$[B] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}} = \text{Тл}.$$

**Відповідь:**  $B = 1,5 \text{ Тл}$ .

### Задача 12.2.3

Соленоїд, що має діаметр  $d = 8 \text{ см}$ , складається з  $N = 100$  витків мідного дроту з площею поперечного перерізу  $s = 1 \text{ мм}^2$  і знаходиться в однорідному магнітному полі, індукція якого  $B = 70 \text{ мТл}$ . Соленоїд повертається на кут  $\Delta\alpha = 180^\circ$  протягом  $\Delta t = 0,2 \text{ с}$ . Знайти індукційний заряд і середнє значення ЕРС, що виникає у соленоїді, якщо його вісь до і після повороту спрямована вздовж поля (питомий електричний опір міді  $\rho = 0,017 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ).

**Дано:**

$$N = 100$$

$$d = 8 \text{ см}$$

$$B = 70 \text{ мТл}$$

$$\Delta\alpha = 180^\circ$$

$$\Delta t = 0,2 \text{ с}$$

$$s = 1 \text{ мм}^2$$

$$\rho = 0,017 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$$

$$\mathcal{E}_i = ? \quad q = ?$$

**Розв'язання**

Внаслідок повороту соленоїда відбувається зміна зчепленого магнітного потоку  $\Delta\Psi$ , що проходить через соленоїд. Це викликає виникнення ЕРС індукції у соленоїді, середня величина якої може бути визначена за законом Фарадея

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Psi}{\Delta t}, \quad (1)$$

де  $\Delta\Psi$  – зміна магнітного потоку через соленоїд за час  $\Delta t$ .

Своєю чергою, зміна зчепленого магнітного потоку становить

$$\Delta\Psi = \Psi_2 - \Psi_1 = BSN \cos\alpha_2 - BSN \cos\alpha_1. \quad (2)$$

Оскільки  $\alpha$  – це кут між вектором магнітної індукції  $\vec{B}$  і нормаллю до площини контуру, то згідно з умовами задачі  $\cos\alpha_2 = \cos 180^\circ = -1$ , а

$\cos \alpha_1 = \cos 0^\circ = 1$ . З врахуванням того, що площа соленоїда  $S = \frac{\pi d^2}{4}$ , формула (2)

набуває вигляду

$$\Delta \Psi = B \frac{\pi d^2}{4} N (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) = BN \frac{\pi d^2}{4} (-1 - 1) = -BN \frac{\pi d^2}{2}. \quad (3)$$

Підставимо значення потоку (3) в (1)

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta \Psi}{\Delta t} = BN \frac{\pi d^2}{2 \Delta t} = \frac{70 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot \pi \cdot (0,08)^2}{2 \cdot 0,2} = 0,35 \text{ В.}$$

Під час зміни  $\Delta \Psi$  магнітного потоку ЕРС  $\mathcal{E}_i$ , що виникає в соленоїді, впливає на заряди в обмотці, тому, з одного боку,

$$\mathcal{E}_i = IR = \frac{dq}{dt} R, \quad (4)$$

з іншого,

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (5)$$

Тому,

$$\frac{dq}{dt} R = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (6)$$

Заряд протікає весь час, коли змінюється потік, отже,

$$dq = -\frac{1}{R} d\Psi. \quad (7)$$

Щоб визначити заряд, треба проінтегрувати (7)

$$\begin{aligned} \int_0^q dq &= -\frac{1}{R} \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi. \\ q &= -\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{R} = \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{R}. \end{aligned} \quad (8)$$

Опір обмотки соленоїда з врахуванням того, що дріт, який на ньому намотаний, має довжину  $l = N\pi d$ , становить

$$R = \frac{N\pi \rho d}{s}. \quad (9)$$

З використанням результатів (3) і (9) формула (8) набуває вигляду

$$q = \frac{BN\pi d^2}{2} \cdot \frac{s}{N\pi\rho d} = \frac{Bsd}{2\rho} = \frac{70 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6} \cdot 0,08}{2 \cdot 0,017 \cdot 10^{-6}} = 0,16 \text{ Кл.}$$

Слід звернути увагу на те, що індукований заряд не залежить від швидкості зміни магнітного потоку та кількості витків у соленоїді.

Перевірка розмірності

$$[\mathcal{E}_i] = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{с}^3 \cdot \text{А}} = \text{В}$$

$$[q] = \frac{Bsd}{2\rho} = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м}}{\text{Ом} \cdot \text{м}} = \frac{(\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}) \cdot \text{м}^2}{(\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}^{-2} \cdot \text{с}^{-3})} = \text{А} \cdot \text{с}$$

**Відповідь:**  $\mathcal{E}_i = 0,35 \text{ В}$ ,  $q = 0,16 \text{ Кл}$ .

#### Задача 12.2.4

Коротка котушка, що містить  $N=10^3$  витків, рівномірно обертається з частотою  $n=10 \text{ с}^{-1}$  навколо осі, що лежить в площині котушки перпендикулярно лініям однорідного магнітного поля, величина індукції якого  $B=0,04 \text{ Тл}$ . Визначити миттєві значення ЕРС індукції для тих моментів часу, коли площина котушки складає кут  $\beta=60^\circ$  з лініями поля. Площа котушки  $S=100 \text{ см}^2$ .

**Дано:**

$$N=10^3$$

$$n=10 \text{ с}^{-1}$$

$$B=0,04 \text{ Тл}$$

$$\beta=60^\circ$$

$$S=100 \text{ см}^2$$

$$\mathcal{E}_i=?$$

**Розв'язання**

Миттєве значення ЕРС індукції визначається законом Фарадея

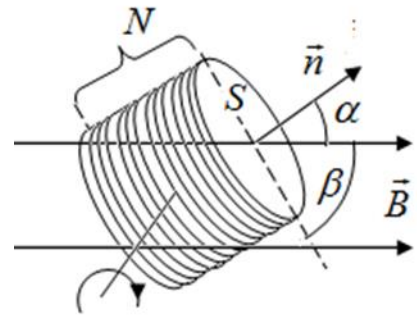
$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

де  $\Psi = N\Phi$  – потокозчеплення.

При обертанні котушки магнітний потік  $\Phi$ , що пронизує кожен виток котушки в момент часу  $t$ , змінюється згідно із законом

$$\Phi = BS \cos \omega t = BS \cos 2\pi n t, \quad (2)$$

де  $B$  – магнітна індукція;  $S$  – площа перерізу котушки;  $\omega = 2\pi n$  – кутова швидкість котушки. Підставивши у формулу (1) вираз для магнітного потоку (2) та продиференціювавши за часом, знайдемо миттєве значення ЕРС індукції



$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(NBS \cos 2\pi nt)}{dt} = NBS 2\pi n \sin 2\pi nt.$$

(3)

Миттєве значення ЕРС визначається для того положення котушки, коли її площа утворює кут  $\beta = 60^\circ$  з лініями магнітного поля  $\vec{B}$ . Оскільки в вираз для потоку (2) входить кут між напрямком вектора  $\vec{B}$  і нормаллю до площини, то для розрахунків треба узяти  $\omega t = \frac{\pi}{2} - \beta$ , і, відповідно  $\sin \omega t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ .

Зважаючи на це, миттєва ЕРС дорівнює

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= NBS 2\pi n \sin 2\pi nt = NBS 2\pi n \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = NBS 2\pi n \cos \beta = \\ &= 10^3 \cdot 0,04 \cdot 100 \cdot 10^{-4} \cdot 2\pi \cdot 10 \cos 60^\circ = 12,6 \text{ В.} \end{aligned}$$

Перевірка розмірності:

$$[\mathcal{E}_i] = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{с}^3 \cdot \text{А}} = \text{В.}$$

**Відповідь:**  $\mathcal{E}_i = 12,6 \text{ В.}$

### Задача 12.2.5

Тонкий металевий стрижень довжиною  $l = 1,2 \text{ м}$  обертається з частотою  $\omega = 2 \text{ рад/с}$  в однорідному магнітному полі навколо осі, що проходить на відстані  $l_1 = 0,95 \text{ м}$  від одного з його кінців. Вектор магнітної індукції

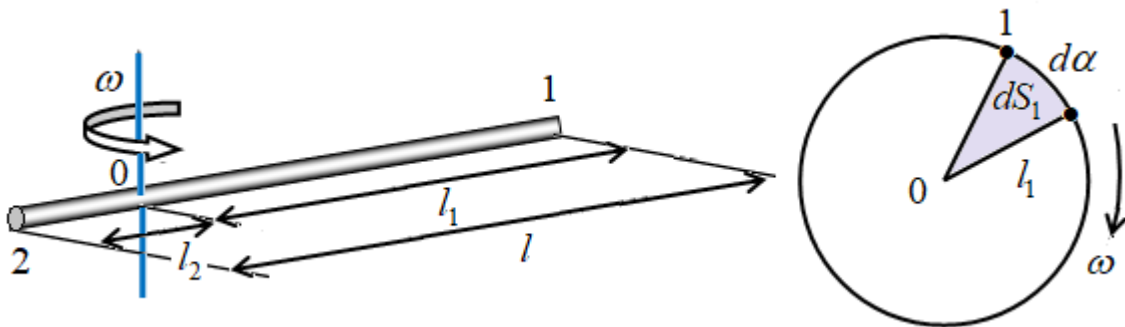


паралельний осі обертання і його величина дорівнює  $B=1\text{ мТл}$ . Знайти різницю потенціалів на кінцях стрижня.

| Дано:                       | Розв'язання                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $l=1,2\text{ м}$            | Під час обертання стрижня в магнітному полі на електрони в ньому діє сила Лоренца, яка призводить до розподілу зарядів у стрижні, в результаті чого на кінцях його виникає різниця потенціалів. Різниця потенціалів між точками 0-1 за умови незамкнутого провідника дорівнює ЕРС індукції |
| $\omega=2\text{ рад/с}$     |                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| $l_1=0,95\text{ м}$         |                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| $B=1\text{ мТл}$            |                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| $\varphi_1 - \varphi_2 = ?$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                            |

$$\varphi_1 - \varphi_0 = -\frac{d\Phi_1}{dt}, \quad (1)$$

де  $d\Phi_1 = BdS_1$ .



Під час обертання частина стрижня довжиною  $l_1$  перетинає площу кругового сектора, яка за визначенням, дорівнює половині довжини дуги (в радіанах), помноженій на квадрат радіуса. У нашому випадку, дуга – це шлях, який здійснює кінець 1 стрижня,  $d\alpha = d(\omega t) = \omega dt$ , а радіус дорівнює  $l_1$ . Тому площа кругового сектору становить  $dS_1 = \frac{l_1^2 \omega dt}{2}$ .

Тоді, на ділянці 0-1 різниця потенціалів буде

$$\varphi_1 - \varphi_0 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{BdS_1}{dt} = -\frac{Bl_1^2 \omega dt}{2dt} = -\frac{Bl_1^2 \omega}{2}. \quad (2)$$

Аналогічно, для частини 0-2 стрижня, довжина якої

$$l_2 = l - l_1 = 1,2 - 0,95 = 0,25 \text{ м},$$

різниця потенціалів становить

$$\varphi_2 - \varphi_0 = -\frac{Bl_2^2 \omega}{2}. \quad (3)$$

Отже, різниця потенціалів між кінцями стрижня 1-2 з урахуванням (2) і (3) дорівнює

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= (\varphi_1 - \varphi_0) - (\varphi_2 - \varphi_0) = \left( -\frac{Bl_1^2 \omega}{2} \right) - \left( -\frac{Bl_2^2 \omega}{2} \right) = \frac{B(l_2^2 - l_1^2) \omega}{2} = \\ &= \frac{10^{-3} (0,25^2 - 0,95^2) \cdot 2}{2} = -8,4 \cdot 10^{-4} \text{ В}. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $\varphi_1 - \varphi_2 = -8,4 \cdot 10^{-4} \text{ В}$ .

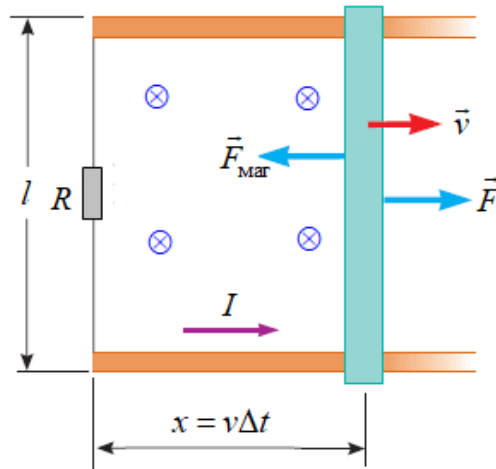
### Задача 12.2.6

Рухомий провідний стрижень довжиною  $l = 0,5 \text{ м}$  ковзає зі швидкістю  $v = 2 \text{ м/с}$  вздовж двох рейок в магнітному полі, величина індукції якого  $B = 0,25 \text{ Тл}$ , а напрямок  $\vec{B}$  перпендикулярний швидкості. Вважаючи, що опір контуру  $R = 0,5 \text{ Ом}$ , знайти струм і потужність на резисторі. Знайти величину магнітної сили, що діє на стрижень, а також величину сили, що рухає стрижень.

| Дано:                                                                                       | Розв'язання                                                                                                                                                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $l = 0,5 \text{ м}$<br>$v = 2 \text{ м/с}$<br>$B = 0,25 \text{ Тл}$<br>$R = 0,5 \text{ Ом}$ | <p>Коли стрижень під дією сили <math>\vec{F}</math> рухається по рейках, він перетинає лінії поля <math>\vec{B}</math>, тому у контурі згідно із законом Фарадея</p> $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$ |
| $I_i = ?$ $P = ?$<br>$F_{\text{маг}} = ?$ $F = ?$                                           | <p>індукується ЕРС індукції, яка у випадку <math>\vec{v} \perp \vec{B}</math>, дорівнює</p> $\mathcal{E}_i = Blv. \quad (2)$                                                                                       |

Отже, ЕРС індукції становить

$$\mathcal{E}_i = Blv = 0,25 \cdot 0,5 \cdot 2 = 0,25 \text{ В.}$$



Завдяки цій ЕРС у замкнутому контурі виникає індукційний струм, величину якого можна знайти за допомогою закону Ома для повного ланцюга

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{0,25}{0,5} = 0,5 \text{ А.} \quad (3)$$

Потужність, що витрачається резистором, перетворюючись в теплоту, буде

$$P = IU = I_i \mathcal{E}_i = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125 \text{ Вт.} \quad (4)$$

Якщо провідник довжиною  $l$  зі струмом  $I_i$  рухається у магнітному полі  $\vec{B}$ , то на нього діє сила Ампера,

$$\vec{F}_{\text{маг}} = I_i [\vec{l}, \vec{B}],$$

величина якої за умов, що  $\vec{l} \perp \vec{B}$ ,  $\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1$ , становить

$$F_{\text{маг}} = I_i l B \sin \alpha = I_i l B = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = 6,25 \cdot 10^{-2} \text{ Н.} \quad (5)$$

Напрямок дії сили Ампера визначається за правилом лівої руки: силові лінії магнітного поля входять у долоню, пальці спрямовані за струмом вздовж стрижня (індукційний струм в контурі протікає проти годинникової стрілки), тоді великий палець вказує напрямок дії магнітної сили. Як видно, магнітна сила направлена проти руху стрижня.

Робота сили, що викликає рух стрижня зі швидкістю  $\vec{v}$ , зв'язана із потужністю

$$A = P\Delta t, \quad (6)$$

де  $\Delta t$  – час, протягом якого рухається стрижень.

З іншого боку, робота за визначенням

$$A = F \cdot x = F \cdot v\Delta t. \quad (7)$$

Прирівнюючи (6) і (7) можна знайти силу, що викликає рух стрижня,

$$P\Delta t = F \cdot v\Delta t,$$

звідки

$$F = \frac{P\Delta t}{v\Delta t} = \frac{P}{v} = \frac{0,125}{2} = 6,25 \cdot 10^{-2} \text{ Н}. \quad (8)$$

Відповісти на останнє питання задачі можна було також й за допомогою першого закону Ньютона для тіла, що рухається з постійною швидкістю: дві вертикальні сили – тяжіння і нормальної реакції опори, і дві горизонтальні –  $F$ , що викликає рух, і  $F_{\text{маг}}$  взаємно урівноважують одна одну, відповідно. Тому результати, отримані в (5) і (8) дорівнюють за величиною, але протилежні за напрямками.

**Відповідь:**  $I_i = 0,5 \text{ А}$ ,  $P = 0,125 \text{ Вт}$ ,  $F_{\text{маг}} = 6,25 \cdot 10^{-2} \text{ Н}$ ,  $F = 6,25 \cdot 10^{-2} \text{ Н}$ .

### Задача 12.2.7

*Тонкий мідний дріт масою  $m = 5 \text{ г}$  зігнутий у вигляді квадрата, кінці якого замкнуті. Квадрат поміщений в однорідне магнітне поле  $B = 0,2 \text{ Тл}$  так, що його площина перпендикулярна до ліній поля. Визначити заряд, що протікає по провіднику, якщо квадрат, потягнувши за кінці, витягнути у лінію.*

| Дано:                | Розв'язання                                                          |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------|
| $m = 5 \text{ г}$    | За законом Фарадея ЕРС індукції                                      |
| $B = 0,2 \text{ Тл}$ | $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BS \cos \alpha)}{dt}.$ |
| $q = ?$              | За умов задачі площина контуру перпендикулярна лініям                |

індукції, отже, кут  $\alpha$  між вектором  $\vec{B}$  та нормаллю до контуру дорівнює нулю, тому  $\cos \alpha = 1$ .

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d(BS)}{dt}. \quad (1)$$

ЕРС індукції викликає виникнення індукційного струму  $I_i$ , причому ці величини пов'язані законом Ома

$$\mathcal{E}_i = I_i R = \frac{dq}{dt} R. \quad (2)$$

Тоді об'єднуючи (1) і (2), отримаємо

$$\mathcal{E}_i = \frac{dq}{dt} R = -\frac{d(BS)}{dt}. \quad (3)$$

Нескінченно малий заряд, що пройде через провідник за час  $dt$ , дорівнює:

$$dq = -\frac{1}{R} \frac{d(BS)}{dt} dt = -\frac{d(BS)}{R}.$$

Заряд, що протече за час зміни форми, знайдемо інтегруванням, визначивши межі інтегрування як  $S_1$  і  $S_2$  і, зважаючи на те, що  $S_2 = 0$ , отримуємо

$$q = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = -\frac{B}{R} \int_{S_1}^{S_2} dS = -\frac{B(S_2 - S_1)}{R} = -\frac{B(0 - a^2)}{R} = \frac{Ba^2}{R}. \quad (4)$$

Масу провідника можна виразити через густину міді  $D$  і об'єм  $V = \pi r^2 l$ , де  $r$  – радіус поперечного перерізу дроту, а  $l$  – його довжина. З формули  $m = D \cdot \pi r^2 l$ , довжина дроту є

$$l = \frac{m}{D\pi r^2}. \quad (5)$$

Сторона квадрата  $a = \frac{l}{4} = \frac{m}{4D\pi r^2}$ , а його площа

$$a^2 = \frac{m^2}{16D^2\pi^2 r^4}. \quad (6)$$

Опір провідника

$$R = \rho \frac{l}{s}, \quad (7)$$

де  $\rho$  – питомий опір міді,  $l$  – довжина провідника,  $s = \pi r^2$  – площа поперечного перерізу дроту.

Підставимо (5) в (7), і знайдемо опір провідника

$$R = \rho \frac{m}{D\pi r^2 \cdot \pi r^2}. \quad (8)$$

Отже, заряд, що пройшов по провіднику, з урахуванням (6) і (8) становить

$$q = \frac{Ba^2}{R} = \frac{Bm^2 \cdot D\pi r^2 \cdot \pi r^2}{16D^2\pi^2 r^4 \cdot \rho m} = \frac{Bm}{16D\rho}.$$

Для міді густина  $D = 8,93 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, а питомий опір  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м.

Шуканий заряд, що протік по контуру, є

$$q = \frac{0,2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{16 \cdot 8,93 \cdot 10^3 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8}} = 0,411 \text{ Кл} = 411 \text{ мКл}.$$

Перевірка розмірності:

$$[q] = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{Ом}} = \frac{(\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}) \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}^{-2} \cdot \text{с}^3} = \text{А} \cdot \text{с} = \text{Кл}.$$

**Відповідь:**  $q = 411$  мКл.

### Задача 12.2.8

Квадратна дротяна рамка зі стороною  $a = 5$  см і опором  $R = 10$  мОм знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 40$  мТл. Нормаль до площини рамки становить кут  $\alpha = 30^\circ$  з лініями магнітної індукції. Визначити заряд, який пройде по рамці, якщо вимкнути магнітне поле.

**Дано:**

$$a = 5 \text{ см}$$

$$R = 10 \text{ мОм}$$

$$B = 40 \text{ мТл}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

**Розв'язання**

При вимиканні магнітного поля станеться зміна магнітного потоку. Внаслідок цього у рамці виникне ЕРС індукції, яка

$$\text{згідно із законом Фарадея } \mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

$$q = ?$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

З іншого боку, ЕРС індукції можна виразити за допомогою закону Ома як

$$\mathcal{E}_i = I_i R = \frac{dq}{dt} R. \quad (2)$$

Отже, прирівнявши праві частини рівнянь (1) і (2), отримуємо

$$\frac{dq}{dt} R = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3)$$

Зважаючи на те, що заряд протікає під час зміни потоку, і проінтегрувавши вираз (3), знайдемо шуканий заряд

$$\int_0^q dq = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi.$$

$$q = -\frac{1}{R} \int_{B_1}^{B_2} d(BS \cos \alpha) = -\frac{S \cos \alpha}{R} \int_{B_1}^{B_2} dB = \frac{S \cos \alpha (B_1 - B_2)}{R}. \quad (4)$$

Площа квадратної рамки  $S = a^2$ ,  $\cos \alpha = \cos 30^\circ$ ,  $B_1 = 40 \cdot 10^{-3} \text{ Т}$ ,  $B_2 = 0$ .

Заряд, що пройшов провідником завдяки зміні поля, становить

$$q = \frac{a^2 B \cos 30^\circ}{R} = \frac{0,05^2 \cdot 40 \cdot 10^{-3} \cdot 0,866}{10 \cdot 10^{-3}} = 8,66 \cdot 10^{-3} \text{ Кл} = 8,66 \text{ мКл}.$$

Перевірка розмірності:

$$[q] = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{Ом}} = \frac{(\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}) \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}^{-2} \cdot \text{с}^3} = \text{А} \cdot \text{с} = \text{Кл}.$$

**Відповідь:**  $q = 8,66 \text{ мКл}$ .

### Задача 12.2.9

*Дві довгі паралельні провідні шини розташовані вертикально на відстані  $l$  одна від одної, а зверху замкнуті коротко. Однорідне магнітне поле з індукцією  $\vec{B}$  направлено перпендикулярно площині шин. По шинах ковзає донизу рухомий*

стрижень масою  $m$  і опором  $R$ . Нехтуючи тертям і опором контактів, знайти залежність швидкості падіння стрижня, якщо у початковий момент він знаходився у стані спокою.

| Дано:                         | Розв'язання                                                                                                     |
|-------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $l, \quad B,$<br>$m, \quad R$ | Під дією сили тяжіння $mg$ провідник починає рухатися вниз в магнітному полі, тому в ньому виникає ЕРС індукції |
| $v(t) = ?$                    | $\mathcal{E}_i = Blv. \quad (1)$                                                                                |

В результаті у замкнутому контурі, утвореному шинами та провідником, потече індукційний струм

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{Blv}{R}. \quad (2)$$

На провідник зі струмом, що рухається у магнітному полі діє сила Ампера

$$\vec{F} = I[\vec{l}, \vec{B}]. \quad (3)$$

Напрямок індукційного струму за правилом Ленца буде зліва направо (див. рисунок). При цьому сила Ампера, напрямок якої можна визначити за правилом лівої руки, направлена вгору і перешкоджає руху, гальмуючи його. Величина сили Ампера з урахуванням того, що  $\vec{l} \perp \vec{B}$ , а значить,  $\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1$ , становить

$$F = I_i l B \sin \alpha = I_i l B = \frac{\mathcal{E}_i}{R} l B = \frac{B^2 l^2 v}{R}.$$

Рівняння 2 закону Ньютона, що описує рух стрижня

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}.$$



Направимо вісь  $y$  донизу і спроектуємо рівняння руху,

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{B^2 l^2 v}{R},$$

$$mR \frac{dv}{dt} = mgR - B^2 l^2 v,$$

$$\frac{mR}{B^2 l^2} \frac{dv}{dt} = v - \frac{mgR}{B^2 l^2}.$$

Розділимо змінні та проінтегруємо

$$\frac{dv}{\frac{mgR}{B^2 l^2} - v} = \frac{B^2 l^2}{mR} dt,$$

$$\int_0^v \frac{dv}{\frac{mgR}{B^2 l^2} - v} = -\frac{B^2 l^2}{mR} \int_0^t dt,$$

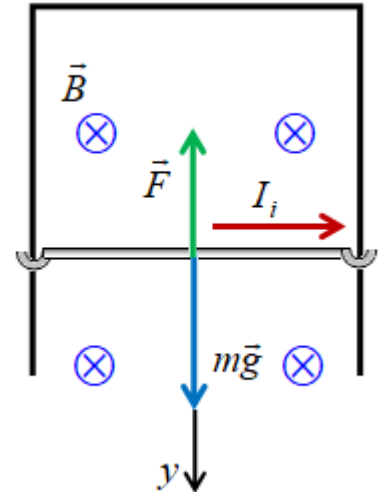
$$\ln \left( \frac{\frac{mgR}{B^2 l^2} - v}{\frac{mgR}{B^2 l^2}} \right) = -\frac{B^2 l^2}{mR} t,$$

$$\frac{\frac{mgR}{B^2 l^2} - v}{\frac{mgR}{B^2 l^2}} = e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t}.$$

Швидкість руху провідника становить

$$v = \frac{mgR}{B^2 l^2} \left( 1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} \right).$$

**Відповідь:**  $v(t) = \frac{mgR}{B^2 l^2} \left( 1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} \right).$



**Задача 12.2.10**

Соленоїд, осердя якого виготовлено з немагнітного матеріалу, містить  $N = 1200$  витків дроту, які щільно прилягають один до одного. При силі струму  $I = 4$  А магнітний потік  $\Phi = 6$  мкВб. Визначити індуктивність  $L$  соленоїда та енергію  $W_{\text{маг}}$  магнітного поля соленоїда.

| Дано:                        | Розв'язання                                              |
|------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $N = 1200$                   | Індуктивність $L$ пов'язана з потокозчепленням $\Psi$ і  |
| $I = 4$ А                    | силою струму $I$ співвідношенням                         |
| $\Phi = 6$ мкВб              | $\Psi = LI$ , (1)                                        |
| $L = ?$ $W_{\text{маг}} = ?$ | а потокозчеплення залежить від потоку $\Phi$ через кожен |

виток і кількості витків  $N$ , якщо вони щільно прилягають один до одного, згідно з

$$\Psi = N\Phi. \quad (2)$$

Об'єднуючи (1) і (2) можна виразити індуктивність соленоїда

$$L = \frac{N\Phi}{I}. \quad (3)$$

Підставлення даних задачі дає

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{1200 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{4} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 1,8 \text{ мГн}.$$

Енергія магнітного поля соленоїда

$$W_{\text{маг}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{N\Phi I^2}{2} = \frac{1,8 \cdot 10^{-3} \cdot 4^2}{2} = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ Дж} = 14,4 \text{ мДж}.$$

Перевірка розмірності

$$[L] = \frac{\text{Вб}}{\text{А}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}}{\text{А}} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2} = \text{Гн},$$

$$[W_{\text{маг}}] = \text{Гн} \cdot \text{А}^2 = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2} \cdot \text{А}^2 = \text{Дж}.$$

**Відповідь:**  $L = \Gamma_H = 1,8 \text{ мГн}$ ,  $W_{\text{маг}} = 14,4 \text{ мДж}$ .

### Задача 12.2.11

Дві котушки намотані на загальне осердя. Індуктивність першої котушки  $L_1 = 0,16 \text{ Гн}$ , другої  $L_2 = 1 \text{ Гн}$ , опір другої котушки  $R_2 = 400 \text{ Ом}$ . Визначити силу струму  $I_2$  у другій котушці, якщо струм  $I_1 = 0,4 \text{ А}$ , що протікає в першій котушці, вимкнути протягом  $\Delta t = 0,002 \text{ с}$ .

#### Дано:

$$L_1 = 0,16 \text{ Гн}$$

$$L_2 = 1 \text{ Гн}$$

$$R_2 = 400 \text{ Ом}$$

$$I_1 = 0,4 \text{ А}$$

$$\Delta t = 0,002 \text{ с}$$

$$I_2 = ?$$

#### Розв'язання

Якщо дві котушки, які мають різну кількість витків, намотані на загальне осердя, то силові лінії магнітного поля, що утворюються струмом у першій котушці, замикаються всередині осердя. При зміні струму в цій котушці змінне магнітне поле, що існує всередині осердя, пронизує витки другої котушки, створюючи в ній ЕРС індукції, і навпаки. Це є явищем взаємної індукції. Сила струму в другій котушці

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_{i2}}{R_2}, \quad (1)$$

де  $\mathcal{E}_{i2}$  – це ЕРС, що індукується в другій котушці при зміні сили струму в першій.

Ця ЕРС за законом Фарадея дорівнює

$$\mathcal{E}_{i2} = -L \frac{dI_1}{dt}, \quad (2)$$

де  $L$  – взаємна індуктивність котушок, що намотані на загальне осердя, яка становить

$$L = \frac{\mu\mu_0 N_1 N_2 S}{l}, \quad (3)$$

де  $\mu_0$  – магнітна стала,  $\mu$  – магнітна проникність середовища,  $l$  і  $S$  – довжина і площа поперечного перерізу осердя,  $N_1$  і  $N_2$  – кількості витків в першій і другій котушці, відповідно.

З формул для індуктивностей котушок

$$L_1 = \frac{\mu\mu_0 N_1^2 S}{l} \quad \text{і} \quad L_2 = \frac{\mu\mu_0 N_2^2 S}{l}$$

можна виразити кількості витків

$$N_1 = \sqrt{\frac{L_1 l}{\mu\mu_0 S}} \quad \text{і} \quad N_2 = \sqrt{\frac{L_2 l}{\mu\mu_0 S}} \quad (4)$$

і підставити їх в (3)

$$L = \frac{\mu\mu_0 N_1 N_2 S}{l} = \frac{\mu\mu_0 S}{l} \cdot \sqrt{\frac{L_1 l}{\mu\mu_0 S}} \cdot \sqrt{\frac{L_2 l}{\mu\mu_0 S}} = \sqrt{L_1 L_2}. \quad (5)$$

Струм у першій котушці змінюється з  $I_1$  до нуля, тому зміна струму (приріст) у першій котушці становить  $\Delta I_1 = I_1' - I_1 = 0 - 0,4 = -0,4$  А. Вважаючи, що кінцева зміна струму здійснюється протягом кінцевого проміжку часу  $\Delta t$ , формулу (2) можна написати у вигляді

$$\mathcal{E}_{i2} = -L \frac{\Delta I_1}{\Delta t}. \quad (6)$$

Тоді струм в другій котушці з урахуванням (1), (5) і (6) дорівнює

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_{i2}}{R_2} = -\frac{L}{R} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = -\frac{\sqrt{L_1 L_2} \cdot \Delta I_1}{R \cdot \Delta t}. \quad (7)$$

Підставляючи дані задачі, отримуємо значення сили струму в другій котушці

$$I_2 = -\frac{\sqrt{L_1 L_2} \cdot \Delta I_1}{R \cdot \Delta t} = -\frac{\sqrt{0,16 \cdot 1} (-0,4)}{400 \cdot 0,002} = 0,2 \text{ А.}$$

Слід зазначити, що цей струм протікає протягом часу, коли змінюється струм в першій котушці.

Перевірка розмірності:

$$[I_2] = \frac{\sqrt{\Gamma_H \cdot \Gamma_H} \cdot A}{\text{Ом} \cdot \text{с}} = \frac{\Gamma_H \cdot A}{\text{Ом} \cdot \text{с}} = \frac{(\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}) \text{А}}{(\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}^{-2} \cdot \text{с}^{-3}) \cdot \text{с}} = \text{А}.$$

**Відповідь:**  $I_2 = 0,2 \text{ А}$ .

### Задача 12.2.12

Через який час струм у контурі досягне половини максимального значення, якщо індуктивність контуру  $L = 10 \text{ мГн}$ , опір  $R = 1 \text{ Ом}$  і він приєднаний до батареї  $\mathcal{E} = 6 \text{ В}$ . Знайти падіння напруги на опорі відразу після замикання ланцюга, максимальне значення струму  $I_0$  і час релаксації  $\tau$ . Визначити величину струму через час  $\tau$ .

| Дано:                                                                | Розв'язання                                            |
|----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| $L = 10 \text{ мГн}$                                                 | Струм при замиканні кола наростає згідно із залежністю |
| $R = 1 \text{ Ом}$                                                   |                                                        |
| $\mathcal{E} = 6 \text{ В}$                                          |                                                        |
| $I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right),$ | (1)                                                    |
| $t = ? \Delta U = ?$                                                 | Падіння напруги на опорі можна розрахувати із          |
| $\tau = ? I_0 = ?$                                                   |                                                        |
|                                                                      | $\Delta U = IR,$                                       |
|                                                                      | (2)                                                    |

вважаючи, що  $t = 0$  в рівнянні (1):

$$I(0) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R(0)}{L}} \right) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - 1) = 0,$$

а це означає, що падіння напруги  $\Delta U$  на резисторі згідно з (2) також дорівнює нулю.

Максимальне значення сили струму становить

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{6}{1} = 6 \text{ А.}$$

За визначенням, час релаксації  $\tau$  – це час, протягом якого сила струму зменшується в  $e$  ( $e = 2,72$ ) разів

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{1} = 10^{-2} \text{ с.}$$

Час, за який струм сягне половини максимального значення, знайдемо з (1), прийнявши  $I = \frac{I_0}{2}$ .

$$\frac{I_0}{2} = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right),$$

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Звідки  $e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{2}$  і  $e^{\frac{t}{\tau}} = 2$ . Прологарифмуємо та отримаємо

$$\frac{t}{\tau} = \ln 2.$$

Отже, час, за який струм досягне половини максимального значення дорівнює

$$t = \tau \ln 2 = 10^{-2} \cdot 0,693 = 6,93 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 6,93 \text{ мс.}$$

Величина струму після часу, що дорівнює  $\tau$ , розрахуємо за допомогою (1)

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}} \right) = I_0 \left( 1 - \frac{1}{e} \right) = 6 \left( \frac{e-1}{e} \right) = 3,8 \text{ А}$$

**Відповідь:**  $t = 6,93 \text{ мс}$ ;  $\Delta U = 0$ ;  $\tau = 10^{-2} \text{ с}$ ;  $I_0 = 6 \text{ А}$ .

### Задача 12.2.13

До первинної обмотки понижувального трансформатора, що має  $N_1 = 3000$  витків, підведена напруга  $U_1 = 6 \cdot 10^3$  В, її опором можна знехтувати. Трансформатор має понизити напругу до  $U_2 = 220$  В. Опір вторинної обмотки  $R_2 = 0,5$  Ом, опір навантаження у вторинній обмотці  $R = 12$  Ом. Яка кількість витків  $N_2$  повинна мати вторинна обмотка трансформатора?

| Дано:                                           | Розв'язання                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $N_1 = 3000$                                    | Зважаючи на те, що опір первинної обмотки відсутній, то ЕРС первинної обмотки дорівнює напрузі, що підводиться до трансформатора |
| $U_1 = 6 \cdot 10^3$<br>В                       |                                                                                                                                  |
| $U_2 = 220$ В                                   | $\mathcal{E}_1 = U_1.$ (1)                                                                                                       |
| $R_2 = 0,5$ Ом                                  | Струм во вторинній обмотці                                                                                                       |
| $R = 12$ Ом                                     |                                                                                                                                  |
| $N_2 = ?$                                       | $I_2 = \frac{U_2}{R_2 + R}$ (2)                                                                                                  |
| Тоді ЕРС індукції во вторинній обмотці дорівнює | $\mathcal{E}_2 = U_2 + \Delta U,$ (3)                                                                                            |

де  $\Delta U$  – падіння напруги во вторинній обмотці.

Це падіння напруги можна виразити за допомогою закону Ома, враховуючи формулу (2)

$$\Delta U = I_2 R_2 = \frac{U_2 R_2}{R_2 + R}. \quad (4)$$

Тоді вираз (2) набуває вигляду

$$\mathcal{E}_2 = U_2 + \Delta U = U_2 + \frac{U_2 R_2}{R_2 + R} = \frac{U_2 (2R_2 + R)}{R_2 + R}. \quad (5)$$

Коефіцієнт трансформації

$$k = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{U_1(R_2 + R)}{U_2(2R_2 + R)} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (6)$$

Отже, кількість витків у вторинній обмотці становить із (6)

$$N_2 = N_1 \frac{U_2(2R_2 + R)}{U_1(R_2 + R)}. \quad (7)$$

Підставлення даних задачі дає

$$N_2 = 3000 \cdot \frac{220(2 \cdot 0,5 + 12)}{3 \cdot 10^3(0,5 + 12)} = 114.$$

**Відповідь:**  $N_2 = 114$ .

### Задача 12.2.14

Соленоїд без осердя з одношаровою обмоткою із дроту діаметром  $d = 0,4$  мм має довжину  $l = 0,5$  м та площу поперечного перерізу  $S = 60$  см<sup>2</sup>. За який час при напрузі  $U = 10$  В і силі струму  $I = 1,5$  А в обмотці виділиться кількість теплоти, що дорівнює енергії поля всередині соленоїда? Поле вважати однорідним.

| Дано:                    | Розв'язання                                                                                                               |
|--------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $d = 0,4$ мм             | При протіканні струму $I$ і напрузі $U$ в обмотці за час $t$ виділяється згідно із законом Джоуля-Ленца кількість теплоти |
| $l = 0,5$ м              |                                                                                                                           |
| $S = 60$ см <sup>2</sup> |                                                                                                                           |
| $U = 10$ В               |                                                                                                                           |
| $I = 1,5$ А              | Енергія магнітного поля всередині соленоїду становить                                                                     |
| $W_{\text{маг}} = Q$     |                                                                                                                           |
|                          | $Q = IUt. \quad (1)$                                                                                                      |
|                          | $W_{\text{маг}} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} Sl. \quad (2)$                                          |
| $t = ?$                  | Своєю чергою, індукція магнітного поля всередині соленоїда, що містить $N$ витків, дорівнює                               |
|                          | $B = \frac{\mu\mu_0 NI}{l}. \quad (3)$                                                                                    |



Якщо витки щільно прилягають один до одного, то

$$l = NI,$$

звідки кількість витків становить

$$N = \frac{l}{d}. \quad (4)$$

З врахуванням (3) і (4) вираз (2) набуває вигляду

$$W_{\text{маг}} = \frac{\mu\mu_0 I^2}{2d^2} Sl. \quad (5)$$

За умовами задачі  $W_{\text{маг}} = Q$ , тому прирівнюємо праві частини (1) і (5)

$$IUt = \frac{\mu\mu_0 I^2}{2d^2} Sl,$$

звідки шуканий час при  $\mu = 1$  і  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м є

$$t = \frac{\mu\mu_0 I}{2d^2 U} Sl = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,5 \cdot 60 \cdot 10^{-4} \cdot 0,5}{2 \cdot (0,4 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10} = 1,77 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 1,77 \text{ мс.}$$

Перевірка розмірності

$$[t] = \frac{\text{Гн} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{В}} = \frac{(\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}^{-1}) \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{А} \cdot \text{м}}{\text{В}} = \text{с}.$$

**Відповідь:**  $t = 1,77$  мс.

### Задача 12.2.15

*Котушка без осердя довжиною  $l = 50$  см містить  $N = 200$  витків. По котушці протікає струм  $I = 1$  А. Знайти об'ємну густину енергії магнітного поля всередині котушки*

**Дано:**

$$l = 50 \text{ см}$$

$$N = 200$$

$$I = 1 \text{ А}$$

**Розв'язання**

Об'ємна густина енергії магнітного поля

$$w = \frac{W_{\text{маг}}}{V}. \quad (1)$$

$w = ?$

Енергія магнітного поля визначається за формулою

$$W_{\text{маг}} = \frac{LI^2}{2}. \quad (2)$$

Індуктивність соленоїда (котушки) об'ємом  $V$  і щільністю витків  $n = \frac{N}{l}$ ,

становить

$$L = \mu_0 \mu n^2 V. \quad (3)$$

Магнітна індукція поля всередині соленоїда

$$B = \mu_0 \mu n I. \quad (4)$$

З формули (4), струм дорівнює

$$I = \frac{B}{\mu_0 \mu n}. \quad (5)$$

Якщо підставити (3) і (5) в (2), то отримаємо

$$W_{\text{маг}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu n^2 I^2 V}{2} = \frac{\mu_0 \mu N^2 I^2 V}{2l^2}. \quad (6)$$

Отже, з врахуванням (1) і (6) об'ємна густина енергії магнітного поля (енергія одиниці об'єму) становить

$$w = \frac{W_{\text{маг}}}{V} = \frac{\mu_0 \mu N^2 I^2}{2l^2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 200^2 \cdot 1^2}{2 \cdot 0,5^2} = 0,1 \text{ Дж/м}^3.$$

Перевірка розмірності:

$$[w] = \frac{(\text{Гн} \cdot \text{м}^{-1}) \cdot \text{А}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{А}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

**Відповідь:**  $w = 0,1 \text{ Дж/м}^3$ .

### 12.3. Задачі для самостійної роботи

**12.3.1.** Круговий контур діаметром  $D = 10$  см має чотири витки, по яким тече струм  $I = 20$  А. Контур вільно встановився в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 0,016$  Тл. Визначити роботу  $A$ , яку потрібно зробити, щоб повернути виток щодо осі, що збігається з діаметром, на кут 1)  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  і 2)  $\alpha = 2\pi$

**Відповідь:**  $A_1 = 10^{-2}$  Дж;  $A_2 = 0$  Дж.

**12.3.2.** В однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 0,2$  мТл знаходиться квадратна рамка зі стороною  $a = 5$  см. Рамка складається з 200 витків і може обертатися навколо осі, яка перпендикулярна силовим лініям поля. Якщо по виткам пропустити струм  $I = 1$  А, рамка встановлюється перпендикулярно силовим лініям поля. Яку роботу треба здійснити, щоб повернути рамку на  $45^\circ$ , на  $90^\circ$ , на  $360^\circ$ ?

**Відповідь:**  $A_1 = 7 \cdot 10^{-5}$  Дж;  $A_2 = 10^{-4}$  Дж,  $A_3 = 0$  Дж.

**12.3.3.** Круговий контур площею  $S = 0,4$  м<sup>2</sup> розташований в однорідному магнітному полі так, що його вісь обертання перпендикулярна напрямку магнітного поля. Який заряд пройде через контур, якщо його повернути на  $90^\circ$  в магнітному полі з індукцією  $B = 2$  мТл. Опір контуру  $R = 1$  Ом.

**Відповідь:**  $q = 8 \cdot 10^{-4}$  Кл.

**12.3.4.** Круговий контур вільно встановився в однорідному магнітному полі. При повороті контуру на  $180^\circ$  через нього пройшов заряд  $q = 5 \cdot 10^{-3}$  Кл. Визначити величину магнітного потоку, що пронизує контур в початковому положенні. Опір контуру  $R = 2$  Ом.

**Відповідь:**  $\Phi_1 = 5$  мВб.

**12.3.5.** Рамка з одного витка рівномірно обертається в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 4$  мТл з кутовою швидкістю  $\omega = 5$  рад/с. Площа рамки  $S = 20$  см<sup>2</sup>. Вісь обертання рамки лежить в її площині і перпендикулярна

вектору індукції магнітного поля. Знайти максимальну ЕРС індукції, що виникає в рамці при її обертанні.

**Відповідь:**  $E = 40 \text{ мкВ}$ .

**12.3.6.** Котушка радіусом 10 см знаходиться в однорідному магнітному полі  $B = 1 \text{ мТл}$  і розташована так, що її площа перпендикулярна силовим лініям поля. При повороті котушки на кут  $\alpha$  протікає заряд  $q = 10^{-5} \text{ Кл}$ . Визначити кут  $\alpha$ . Катушка має  $N = 10$  витків, опір котушки  $R = 2 \text{ Ом}$ .

**Відповідь:**  $\alpha = 71^\circ$ .

**12.3.7.** В однорідному магнітному полі ( $B = 0,2 \text{ Тл}$ ) рівномірно обертається прямокутна рамка, яка містить  $N = 200$  витків, які щільно прилягають один до одного. Площа рамки  $S = 100 \text{ см}^2$ . Визначити частоту обертання рамки, якщо максимальна ЕРС, яка індукується в ній  $\mathcal{E}_{i\text{max}} = 6 \text{ В}$ .

**Відповідь:**  $\omega = 15 \text{ рад/с}$ .

**12.3.8.** Дротяна квадратна рамка зі стороною  $a = 8 \text{ см}$  знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 4 \text{ мТл}$ . Рамка розташована так, що її площа перпендикулярна до силових ліній поля. Який заряд протече у рамці, якщо її видалити з магнітного поля?

**Відповідь:**  $q = 2,56 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}$ .

**12.3.9.** Стрижень довжиною  $l = 1 \text{ м}$  обертається в однорідному магнітному полі навколо осі, що проходить через кінець стрижня паралельної лінії магнітної індукції. Знайти магнітну індукцію поля. Якщо стрижень перетинає за один оберт потік  $\Phi = 2 \text{ Вб}$ .

**Відповідь:**  $B = 0,64 \text{ мТл}$ .

**12.3.10.** Прямолінійний провідник довжиною  $l = 50 \text{ см}$  обертається в магнітному полі з індукцією  $B = 0,1 \text{ Тл}$ . Визначити різницю потенціалів на кінцях провідника при його обертанні з кутовою швидкістю  $\omega = 5 \text{ рад/с}$  у площині перпендикулярній лініям магнітної індукції. Вісь обертання проходить через середину провідника.

**Відповідь:**  $\Delta\varphi = 0,016 \text{ В}$ .

**12.3.11.** Соленоїд без осердя має  $N = 120$  витків на кожний сантиметр довжини, площа його перерізу  $S = 4 \text{ см}^2$ , а довжина  $l = 2 \text{ см}$ . Який струм пустили по соленоїду, якщо енергія магнітного поля в осерді  $W_{\text{маг}} = 3 \text{ мДж}$ .

**Відповідь:**  $I = 4 \text{ А}$ .

**12.3.12.** Індуктивність соленоїда довжиною  $l = 5 \text{ см}$  і площею поперечного перерізу  $S = 1 \text{ см}^2$  дорівнює  $L = 0,4 \text{ мГн}$ . Визначити силу струму в соленоїді, при якій об'ємна густина енергії магнітного поля всередині соленоїда дорівнює  $w = 0,1 \text{ Дж/см}^3$ .

**Відповідь:**  $I = \text{А}$ .

**12.3.13.** При зміні струму від  $I_1 = 5 \text{ А}$  до  $I_2 = 10 \text{ А}$  за  $t = 0,1 \text{ с}$  у котушці виникає ЕРС самоіндукції, що дорівнює  $\mathcal{E}_i = 10 \text{ В}$ . Визначити індуктивність котушки та енергію магнітного поля при струмі  $I = 10 \text{ А}$ .

**Відповідь:**  $L = 0,2 \text{ Гн}$ ,  $W_{\text{маг}} = 10 \text{ Дж}$ .

**12.3.14.** Котушку індуктивністю  $L = 0,2 \text{ Гн}$  та опором  $R = 12 \text{ Ом}$  підключають до джерела струму. Знайти час  $t$ , впродовж якого струм у котушці, зростаючи, досягне тридцяти відсотків від максимального значення.

**Відповідь:**  $t = 0,006 \text{ с}$ .

**12.3.15.** Котушка має індуктивність  $L = 2 \text{ мГн}$  і опір  $R = 1,5 \text{ Ом}$ . Через який час  $t$  після розмикання струм в котушці буде дорівнювати половині встановленого (максимального) струму?

**Відповідь:**  $t = 9,24 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ .

## 13. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ. ЗМІННИЙ СТРУМ

### 13.1. Теоретичні відомості

#### 13.1.1. Коливальний контур. Рівняння коливального контуру

**Електромагнітними коливаннями** називають періодичні взаємопов'язані зміни зарядів, струмів, напруг електричного і магнітного полів.

Найпростішою системою, в якій виникають електромагнітні коливання, є коливальний контур. **Коливальний контур** – це електричний ланцюг, який у загальному випадку складається з послідовно з'єднаних між собою котушки індуктивності  $L$ , конденсатора ємності  $C$ , провідника з опором  $R$  та джерела електрорушійної сили (ЕРС)  $\mathcal{E}$  (рис. 13.1).

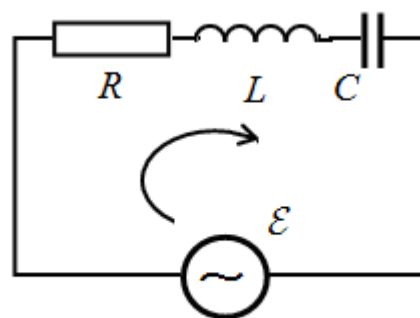


Рисунок 13.1

В **ідеальному коливальному контурі** (з нульовим активним опором) присутні тільки послідовно підключені конденсатор і котушка індуктивності. Якщо зарядити конденсатор, під'єднати до нього котушку і замкнути ланцюг, то в контурі почнуть здійснюватися електромагнітні коливання – періодичні зміни заряду на конденсаторі та струму в котушці. **Вільними електромагнітними коливаннями** називають такі коливання, які здійснюються без зовнішньої дії, але коштом раніше накопиченої енергії. У випадку ідеального коливального контуру в ньому відбуватимуться **вільні незгасаючі коливання**.

Для отримання рівняння коливань розглянемо коливальний контур (рис. 13.1). Виберемо позитивний напрямок обходу контуру за годинниковою стрілкою. Тоді згідно з 2-м правилом Кірхгофа сума падінь напруг дорівнюватиме сумі ЕРС, що діють у контурі.

$$IR + (\varphi_1 - \varphi_2) = \mathcal{E}_s + \mathcal{E}, \quad (13.1)$$

де  $IR$  – падіння напруги на резисторі,  $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C}$  – падіння напруги на конденсаторі,  $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$  – ЕРС самоіндукції, що виникає у котушці та  $\mathcal{E}$  – періодична ЕРС.

У загальному випадку рівняння коливального контуру має вигляд

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \mathcal{E}. \quad (13.2)$$

### 13.1.2. Вільні незгасаючі коливання і їх характеристики

Розглянемо коливання в ідеальному контурі (так званому  $LC$ -контурі), в якому немає активного опору  $R = 0$  і джерела ЕРС  $\mathcal{E} = 0$ . За таких умов рівняння (13.2) набуває вигляду

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (13.3)$$

Це диференціальне рівняння другого порядку

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (13.4)$$

має розв'язок, що визначає *миттєву величину заряду* в залежності від  $t$ .

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (13.5)$$

де

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (13.6)$$

є *власною частотою* вільних незгасаючих коливань,  $\alpha$  – початкова фаза коливань, а  $q_m$  – максимальна (амплітудна) величина заряду.

*Період власних коливань* визначається як

$$T_0 = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (13.7)$$

Вираз (13.7) має назву **формула Томсона**.

Виходячи з визначення ємності  $C = \frac{q}{U}$ ,

поділивши рівняння (13.5) на величину ємності конденсатора, отримаємо **миттєву величину напруги** на конденсаторі в залежності від часу  $t$

$$U = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (13.8)$$

де **максимальне (амплітудне) значення напруги**

$$U_m = \frac{q_m}{C}. \quad (13.9)$$

**Миттєву величину струму** в контурі одержимо шляхом диференціювання за часом формули (13.5)

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = -I_m \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (13.10)$$

де **максимальне (амплітудне) значення струму**

$$I_m = q_m \omega_0. \quad (13.11)$$

Графіки залежностей величин заряду, напруги та струмі від часу наведені на рис. 13.3.

Процеси, що відбуваються у коливальному контурі, як видно з рівнянь (13.5), (13.8) та (13.9) є **гармонічними** коливаннями, оскільки описуються законами синуса або косинуса. За математичним описанням вони подібні гармонічним коливанням маятників в механіці.

Розглянемо ці процеси і їх аналогію із коливанням маятника (рис. 13.4).

Спочатку конденсатор заряджають до величини заряду  $q_m$  та від'єднують від джерела енергії. В цей момент струм через котушку відсутній. Попри те, що опір котушки дорівнює нулю, струм не зростає миттєво (рис. 13.4, а). Як тільки струм почне збільшуватися, у котушці виникне ЕРС індукції.

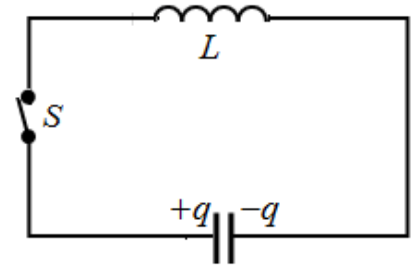


Рисунок 13.2



**Перша чверть періоду.** Конденсатор розряджається, його заряд зараз дорівнює  $Q$ , а струм  $I$  через котушку наростає. Збільшення струму відбувається поступово: вихрове електричне поле котушки перешкоджає наростанню струму і спрямоване проти струму. Наприкінці першої чверті конденсатор повністю розряджений, сила струму досягла максимального значення  $I_m$  (рис. 13.4, б). Починається перезаряджання конденсатора. Напруга на котушці дорівнює нулю, але струм не зникне миттєво. Як тільки струм почне зменшуватися, в котушці виникне ЕРС самоіндукції, що перешкоджає зменшенню струму.

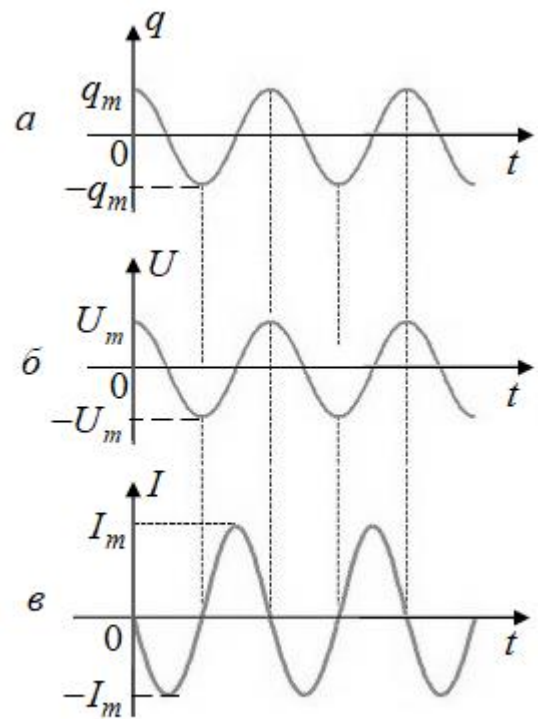


Рисунок 13.3

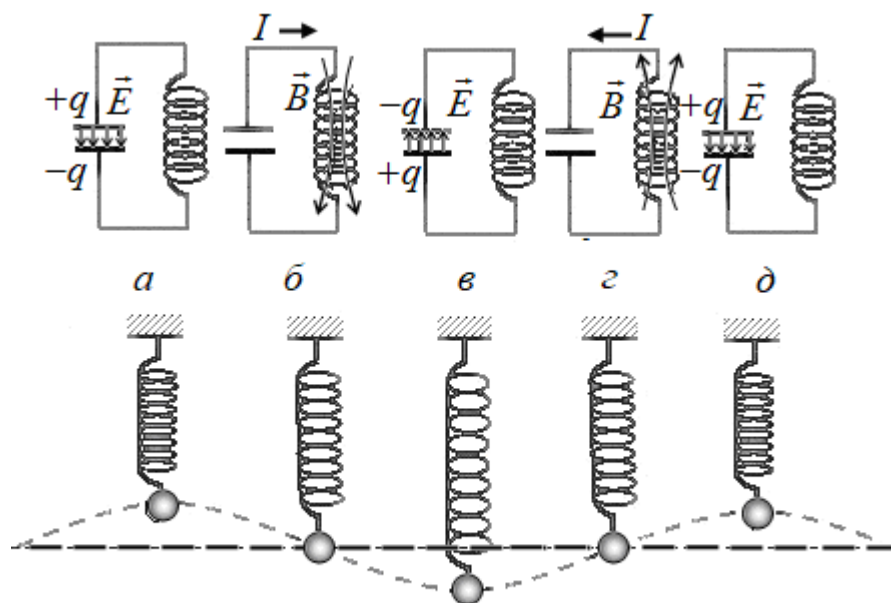


Рисунок 13.4

**Друга чверть періоду.** Конденсатор перезаряджається і на його обкладках з'являється заряд протилежного знаку, порівняно з тим, що був спочатку. Сила струму поступово зменшується: вихрове електричне поле котушки, підтримуючи струм, що спадає, має той же напрямок, що і струм. Наприкінці

другої чверті конденсатор повністю перезарядився, його заряд знову дорівнює  $q_m$  (але полярність інша). Сила струму дорівнює нулю (рис. 13.4, в). Починається зворотне перезарядження конденсатора.

**Третя чверть періоду.** Почалася друга половина періоду коливань; процеси пішли у зворотному напрямку. Конденсатор розряджається. Наприкінці третьої чверті конденсатор повністю розряджений, струм максимальний  $I_m$ , але цього разу має інший напрямок (рис. 13.4, г).

**Четверта чверть періоду.** Струм зменшується, конденсатор заряджається.

Наприкінці четвертої чверті та всього періоду завершується зворотне перезарядження конденсатора, а струм дорівнює нулю (рис. 13.4, д).

Цей момент ідентичний початковому моменту, оскільки відбулося одне повне коливання. Далі процес повторюється.

Якщо елементи ланцюга не мають опору, то у кожному циклі здійснюється взаємні перетворення між енергією електричного поля та енергією магнітного поля, аналогічно тому, як в механічній коливальній системі кінетична енергія перетворюється в потенціальну. Оскільки теплових втрат немає, енергія з контуру не йде: вона постійно перерозподіляється між конденсатором та котушкою.

Коли конденсатор заряджений, то енергія магнітного поля котушки в цей момент дорівнює нулю. Вся енергія контуру зосереджена в конденсаторі

$$(W_{\text{ел}})_m = \frac{q_m^2}{2C}. \quad (13.12)$$

Коли струм максимальний і дорівнює  $I_m$ , а конденсатор розряджений, то енергія конденсатора дорівнює нулю. Вся енергія контуру запасена в котушці

$$(W_{\text{маг}})_m = \frac{LI_m^2}{2}. \quad (13.13)$$

В довільний момент часу, коли заряд конденсатора дорівнює  $q$ , а через котушку протікає струм  $I$ , енергія контуру є

$$W = W_{\text{ел}} + W_{\text{маг}} = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}. \quad (13.14)$$

Слід пам'ятати, що

$$W = W_{\text{ел}} + W_{\text{маг}} = (W_{\text{ел}})_m = (W_{\text{маг}})_m. \quad (13.15)$$

В реальному коливальному контурі котушка має опір і може бути підключений активний опір, тому енергія, що була спочатку запасена у контурі, виділиться у вигляді тепла на опорі котушки та з'єднувальних проводів, а тому коливання будуть згасаючими.

### 13.1.3. Вільні згасаючі коливання і їх характеристики

У випадку, коли в контурі є активний опір  $R \neq 0$ , а зовнішнє джерело енергії відсутнє  $\mathcal{E} = 0$ , рівняння (13.2) набуває вигляду

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0. \quad (13.16)$$

Якщо позначити  $2\beta = \frac{R}{L}$  та  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , то диференціальне рівняння другого порядку

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (12.17)$$

має розв'язок – **рівняння вільних згасаючих коливань**

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (13.18)$$

де  $q_0$  – початкова амплітуда заряду (у момент часу  $t_0 = 0$ ),  $q$  – миттєве значення заряду.

Амплітуда згасаючих коливань змінюється за експоненціальним законом

$$q_m = q_0 e^{-\beta t}, \quad (13.19)$$

а величина заряду – за гармонічним законом (рис. 13.5)

Величина в рівнянні (13.17)

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad (13.20)$$

називається **коефіцієнтом згасання коливань**.

$$[\beta] = \text{с}^{-1}.$$

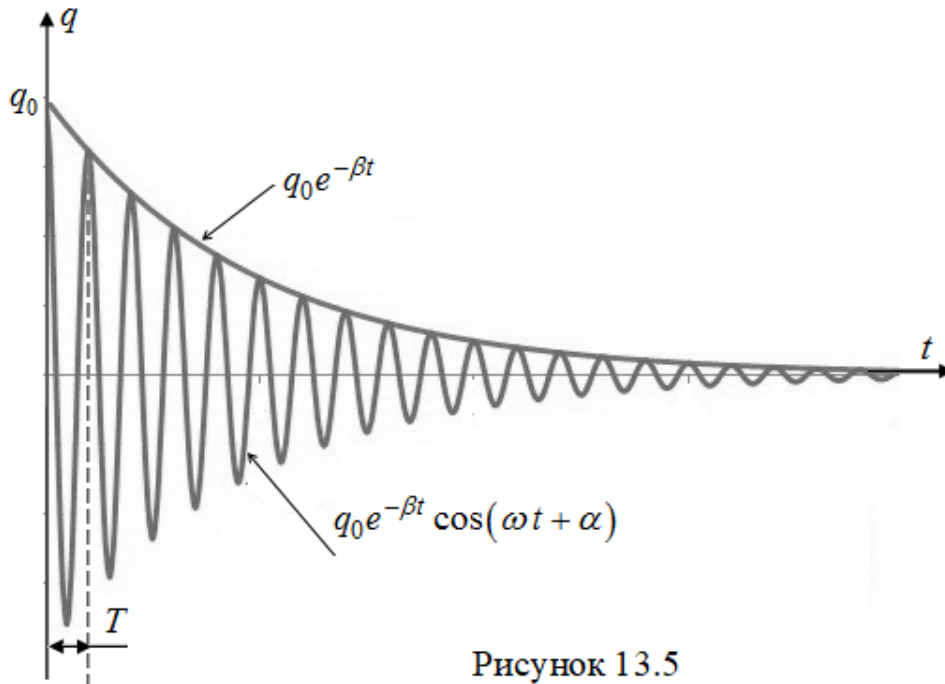


Рисунок 13.5

**Кутова (кругова) частота згасаючих коливань  $\omega$**  пов'язана з власною частотою  $\omega_0$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (13.21)$$

**Період згасаючих коливань**

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (\beta/\omega_0)^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (13.22)$$

де  $T_0$  і  $\omega_0$  – період і частота вільних незгасаючих коливань, відповідно.

**Напруга на конденсаторі** змінюється як

$$U = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (13.23)$$

а **струм через котушку** індуктивності

$$\begin{aligned} I &= \frac{dq}{dt} = q_0 e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha)] = \\ &= q_0 \omega e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \phi) = I_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \phi), \end{aligned} \quad (13.24)$$

де зсув фаз  $\phi$  вводиться відповідно до  $\cos \phi = -\beta/\omega_0$ , а  $\sin \phi = \omega/\omega_0$ .

**Декремент згасання** коливань – відношення амплітуд заряду (напруги, струму) згасаючих коливань, взятих через період

$$D = \frac{q_0}{q_T} = \frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta(t+T)}} = \frac{U_0 e^{-\beta t}}{U_0 e^{-\beta(t+T)}} = \frac{I_0 e^{-\beta t}}{I_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}. \quad (13.25)$$

**Логарифмічний декремент** згасання коливань – це величина, що дорівнює натуральному логарифму декременту згасання коливань

$$\delta = \ln D = \beta T = \frac{R}{2L} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{R}{2L} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (13.26)$$

**Добротність** контуру

$$Q = \frac{\pi}{\delta}. \quad (13.27)$$

**Час релаксації**  $\tau$  – це період часу, за який амплітуда заряду (напруги, струму) зменшується в  $e = 2,718$  разів

$$e = \frac{q_0}{q_\tau} = \frac{q_0}{q_0 e^{-\beta \tau}} = e^{\beta \tau},$$

$$\tau = \frac{1}{\beta}. \quad (13.28)$$

Зв'язок добротності та часу релаксації становить

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi \omega}{\beta 2\pi} = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{\omega}{2} \tau. \quad (13.29)$$

**Кількість коливань за час релаксації** становить

$$N_e = \frac{1}{\delta} = \frac{Q}{\pi}. \quad (13.30)$$

#### 13.1.4. Вимушені коливання. Резонанс

При здійсненні коливань в контурі з опором енергія при відповідних взаємних перетвореннях виділяється у вигляді тепла на активному опорі під час коливального процесу. При підключенні до контуру джерела змінної ЕРС (рис.

13.1), його можна розглядати як елемент, що ініціює в контурі вимушені коливання з частотою  $\omega$ . Отже, якщо в рівнянні

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_m \cos \omega t$$

ввести позначення  $2\beta = \frac{R}{L}$  і  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , то його можна перетворити на

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \cos \omega t. \quad (13.31)$$

Часткове розв'язання цього рівняння дає залежність заряду конденсатора від часу

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi), \quad (13.32)$$

де  $\psi = \varphi + \pi/2$  – різниця фаз між коливаннями заряду і зовнішній ЕРС,

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}. \quad (13.33)$$

**Амплітудне (максимальне) значення заряду** на конденсаторі

$$q_m = \frac{\mathcal{E}_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \quad (13.34)$$

**Струм через котушку індуктивності**

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) = I_m \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (13.35)$$

де  $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$  – різниця фаз між струмом і зовнішній ЕРС. Тоді

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (13.36)$$

**Амплітудне (максимальне) значення струму**, як видно з формули (13.35) дорівнює

$$I_m = \omega q_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (13.37)$$

Величина, що стоїть в знаменнику (13.34), позначається як

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (13.38)$$

і називається **модулем комплексного опору** ланцюга.

Вона складається з активного опору резистора  $R$ , **індуктивного опору**

$$X_L = \omega L \quad (13.39)$$

і **ємнісного опору**

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (13.40)$$

Величина

$$Z = R + X_L + X_C \quad (13.41)$$

називається **комплексним опором** або **імпедансом** і визначається як

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + i(X_L - X_C) = R + iX, \quad (13.42)$$

де  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця.

Уявну частину  $iX$  комплексного опору  $Z$  називають **реактивним опором**, а дійсну  $R$  – **активним**.

**Напруга на опорі  $R$**

$$U_R = RI = RI_m \cos(\omega t - \varphi). \quad (13.43)$$

**Напруга на ємності  $C$**

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \psi) = \frac{I_m}{\omega C} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (13.44)$$

**Амплітудне (максимальне) значення напруги на ємності**

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (13.45)$$

### Напруга на котушці $L$

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t - \varphi) = \omega L I_m \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (13.46)$$

З рівнянь (13.37) - (13.40) видно, що напруга  $U_R$  на активному опорі перебуває в одній фазі зі струмом  $I$ , напруга  $U_C$  на ємності відстає по фазі від струму на  $\frac{\pi}{2}$ , а напруга  $U_L$  на індуктивності випереджає по фазі струм на  $\frac{\pi}{2}$ . Це можна наочно уявити за допомогою векторної діаграми (рис.13.6), зобразивши на ній  $U_{Rm} = RI_m$ ,  $U_{Cm} = \frac{I_m}{\omega C}$ ,  $U_{Lm} = \omega L I_m$  та їх векторну суму, величина якої є  $\mathcal{E}_m$ .

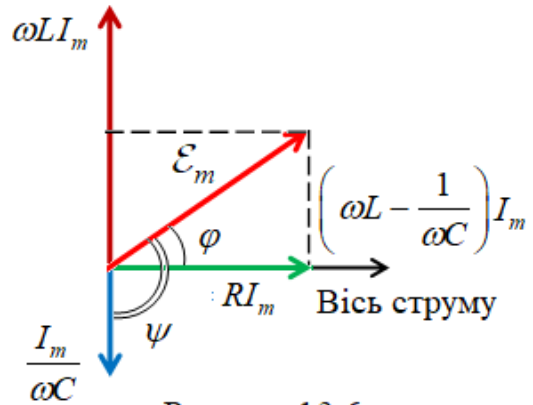


Рисунок 13.6

З прямокутного трикутника векторної діаграми можна вирахувати значення  $\varphi$  і  $I_m$ , які збігаються з (13.36) та (13.37).

**Резонансом** називається явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань сили струму, коли частота вимушених коливань збігається із власною частотою вільних коливань коливального контуру. В електриці коливальним контуром служить ланцюг, що складається з опору, ємності та індуктивності. Залежно від того, як вони з'єднані, розрізняють резонанс напруг і резонанс струмів. У **послідовному коливальному контурі**, коли резистор, котушка і конденсатор з'єднані послідовно, ємнісний опір конденсатора  $X_C$  та індуктивний опір котушки  $X_L$  залежать від частоти струму живлення:  $X_C$  з підвищенням частоти

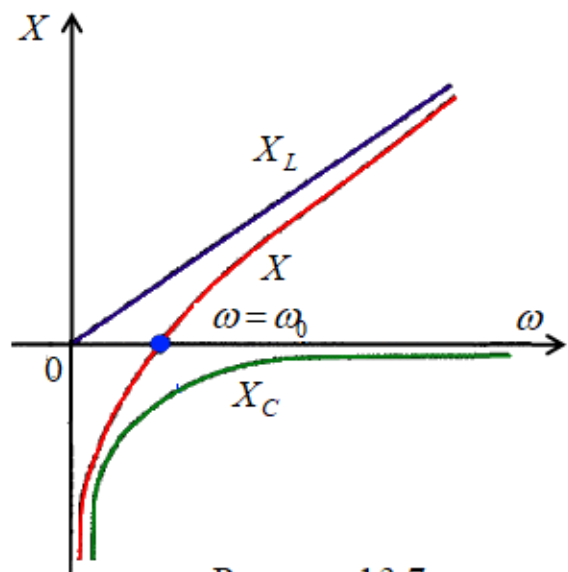


Рисунок 13.7



зменшується, а  $X_L$  збільшується (рис. 13.7). Як було показано згодом, у послідовному ланцюгу напруга на котушці та конденсаторі компенсують одна одну. При цьому ємнісний та індуктивний опори мають різні знаки: індуктивний опір вважається позитивним, а ємнісний – негативним. При частоті генератора, що дорівнює *власній частоті контуру*  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , ці опори виявляються чисельно рівними  $X_L = X_C$ . Режим, що виникає в ланцюзі послідовного контуру при рівності ємнісного та індуктивного опорів, називають **режимом резонансу напруги** (рис. 13.8).

Під час резонансу напруги  $U_C$  та  $U_L$  можуть бути набагато більшими за напругу джерела, що, до речі, небезпечно для ланцюга.

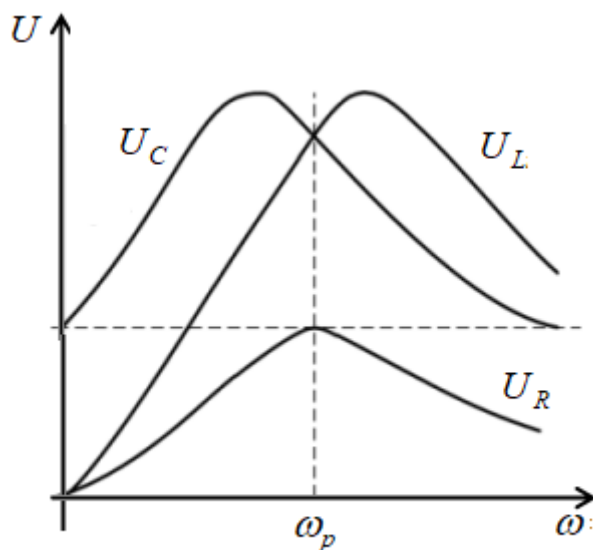


Рисунок 13.8

Резонансну частоту для заряду  $q$  і напруги на конденсаторі  $U_C$  можна знайти з формули (13.34)  $q_m = \frac{\mathcal{E}_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$ . Для цього треба знайти максимум функції, або, що теж саме, мінімум виразу, що стоїть під коренем. Продиференціюємо підкореневий вираз і прирівняємо його нулю

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0.$$

Це рівняння має три корені:  $\omega = 0$  (відповідає максимуму знаменника) і  $\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ , з яких негативний не має фізичного смислу. Тоді резонансна частота є

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (13.47)$$

Одним із найважливіших параметрів коливального контуру є його характеристичний опір. **Характеристичним опором контуру** називається величина модуля реактивного опору ємності та індуктивності контуру на резонансній частоті  $\rho = |X_L| = |X_C|$  при  $\omega = \omega_p$ . У загальному випадку характеристичний опір може бути обчислений за такою формулою:

$$\rho = |X_L| = |X_C| = \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (13.48)$$

Характеристичний опір  $\rho$  є кількісною мірою оцінки енергії, запасеної реактивними елементами контуру: котушкою індуктивності (енергія магнітного поля) та конденсатором (енергія електричного поля).

Для характеристики інтенсивності згасання коливань використовується поняття **загасання контуру**

$$\alpha = \frac{R}{\rho} = \frac{R}{X_L} = \frac{R}{X_C} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{R}{(1/\omega_0 C)}. \quad (13.49)$$

Тоді добротність контуру (13.27) можна виразити як

$$Q = \frac{1}{\alpha} = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C}. \quad (13.50)$$

У **паралельному** коливальному контурі, де резистор, котушка індуктивності та конденсатор підключені паралельно, при резонансній частоті (13.47) виникає **резонанс струмів**. Явище резонансу струмів полягає в різкому збільшенні амплітуди струму  $I = I_L + I_C$  у зовнішньому ланцюгу в паралельному коливальному контурі при наближенні частоти  $\omega$  прикладеної напруги до резонансної частоти  $\omega_p$ , так що величини амплітуд струмів  $I_L$  та  $I_C$  значно перевищують амплітуду струму  $I$ .

### 13.1.5. Змінний струм. Закон Ома для змінного струму. Потужність змінного струму

**Змінним струмом** називається електричний струм, що змінюється за величиною і напрямком періодично через рівні проміжки часу. Якщо зміни здійснюються за гармонічним законом, то змінний струм називається синусоїдальним. **Миттєві** величини змінного струму  $i$  та напруги  $u$  визначаються згідно з

$$\begin{cases} i = I_m \cos(\omega t - \varphi), \\ u = U_m \cos(\omega t - \varphi). \end{cases} \quad (13.51)$$

де  $I_m$  і  $U_m$  – **амплітудні** (максимальні) значення струму і напруги,  $(\omega t + \varphi)$  – фаза, а  $\varphi$  – початкова фаза синусоїдального струму,  $\omega$  – кругова (циклічна) частота, зворотня до періоду  $T$  та зв'язана з частотою  $\nu$ , що вимірюється в Герцах,

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \quad (13.52)$$

Коливальний контур із джерелом ЕРС є найпростішим прикладом кола змінного струму. Сила змінного струму залежить не тільки від активного опору, але й від індуктивного та ємнісного опорів. Повний опір у колі змінного струму та опори на його окремих елементах визначаються за формулою (13.38) - (13.42).

Закон Ома для змінного струму виконується для амплітудних значень і не виконується для миттєвих значень струму і напруги. Це пояснюється тим, що вони набувають своїх амплітудних значень у різні моменти часу.

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}. \quad (13.53)$$

Можливість отримання корисної енергії в електричному пристрої визначається роботою і потужністю на окремих ділянках та в усьому ланцюгу змінного струму.

**Потужність на активному опорі** визначається як

$$P_R = iu_R = I_m U_{Rm} \cos^2(\omega t - \varphi). \quad (13.54)$$

**Середня потужність** на резисторі дорівнює

$$\langle P_R \rangle = \frac{P_m}{2} = \frac{I_m U_m}{2} = \frac{I_m^2 R}{2} = \frac{U_m^2}{2R}. \quad (13.55)$$

У зв'язку із цими формулами вводяться так звані діючі (ефективні) значення струмів і напруг, які по суті є середнє квадратичними значеннями струму і напруги.

**Діюче** (ефективне) **значення змінного струму** дорівнює величині такого постійного струму, який за час, що дорівнює одному періоду змінного струму, здійснить таку ж роботу (тепловий або електродинамічний ефект), що і змінний струм, що розглядається.

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m. \quad (13.56)$$

Аналогічно, **діюче значення напруги** становить

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m. \quad (13.57)$$

З урахуванням формул (13.58) і (13.57) середня потужність (13.55) набуває вигляду

$$\langle P_R \rangle = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (13.58)$$

**Миттєва потужність на котушці** індуктивності дорівнює

$$P = UI = -U_m I_m \sin \omega t \cos \omega t = -\frac{1}{2} U_m I_m \sin 2\omega t = -P_m \sin 2\omega t, \quad (13.59)$$

а **миттєва потужність на конденсаторі** становить

$$P = UI = U_m I_m \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} U_m I_m \sin 2\omega t = P_m \sin 2\omega t. \quad (13.60)$$

**Середні значення потужностей** на котушці та на конденсаторі

$$\langle P_L \rangle = \langle P_C \rangle = 0. \quad (13.61)$$

**Миттєве значення повної потужності** у колі змінного струму

$$p = iu = I_m U_m \cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t. \quad (13.62)$$

Застосовуючи формули тригонометрії вираз (13.62) можна переписати у вигляді

$$p = \frac{1}{2} I_m U_m (\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)) = \frac{I_m U_m}{2} \cos \varphi + \frac{I_m U_m}{2} \cos(2\omega t - \varphi). \quad (13.63)$$

З (13.63) видно, що миттєва потужність, яка виділяється в колі, коливається навколо рівня  $\frac{I_m U_m}{2} \cos \varphi$  з подвоєною частотою струму.

На практиці під **потужністю змінного струму** розуміють середнє значення величини (13.63), яку можна записати через діючі значення струму і напруги враховуючи те, що середнє значення  $\cos(2\omega t - \varphi)$  дорівнює нулю, у вигляді

$$P = IU \cos \varphi. \quad (13.64)$$

Як видно з (13.64), потужність, що виділяється в контурі змінного струму, залежить не тільки від сили струму і напруги, але й от зсуву фаз між ними. Величина  $\cos \varphi$  називається **коефіцієнтом потужності** («косинусом фі»)

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}. \quad (13.65)$$

Коефіцієнт потужності визначає ефективність використання електричної енергії, тому його треба максимально підвищувати, наближаючи імпеданс  $Z$  до величини активного опору  $R$  кола.

## 13.2. Приклади розв'язання задач

### Задача 13.2.1

Ідеальний коливальний контур складається з котушки індуктивності з  $L = 10 \text{ мГн}$  та конденсатора ємністю  $C = 400 \text{ пФ}$ , максимальне значення напруги на якому  $U_m = 500 \text{ В}$ . Визначте максимальні значення сили струму  $I_m$  і заряду  $q_m$  у контурі, а також частоту і довжину хвилі, на які налаштований контур.

| Дано:                   | Розв'язання                                                                                                                                                                              |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $C = 400 \text{ пФ}$    | Для визначення зв'язку між максимальними значеннями напруги, струму і заряду, скористаємося виразами для електричної енергії зарядженого конденсатора і магнітного поля котушки, а саме, |
| $L = 10 \text{ мГн}$    |                                                                                                                                                                                          |
| $U_m = 500 \text{ В}$   |                                                                                                                                                                                          |
| $I_m = ? \quad q_m = ?$ |                                                                                                                                                                                          |
|                         | $(W_{\text{ел}})_m = \frac{CU_m^2}{2}, \quad (1)$                                                                                                                                        |
|                         | $(W_{\text{маг}})_m = \frac{LI_m^2}{2}. \quad (2)$                                                                                                                                       |

Оскільки в ідеальному коливальному контурі повна енергія зберігається, то  $(W_{\text{ел}})_m = (W_{\text{маг}})_m$ . Тоді прирівнюючи праві частини (1) і (2), отримаємо

$$\frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}. \quad (3)$$

Звідки

$$I_m = U_m \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (4)$$

Підставляючи дані задачі, отримуємо максимальну величину струму

$$I_m = 500 \sqrt{\frac{400 \cdot 10^{-12}}{10 \cdot 10^{-3}}} = 0,1 \text{ А}.$$

Для заходження максимального заряду можна скористуватися виразом для енергії електричного поля конденсатора, записаним через заряд і ємність

$$(W_{\text{ел}})_m = \frac{q_m^2}{2C}. \quad (5)$$

Прирівняємо праві частини (2) і (5)

$$\frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} \quad (6)$$

і виразимо максимальний заряд на конденсаторі

$$q_m = I_m \sqrt{LC}, \quad (7)$$

$$q_m = 0,1 \sqrt{10 \cdot 10^{-3} \cdot 400 \cdot 10^{-12}} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Кл.}$$

Частота власних коливань ідеального контуру

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-3} \cdot 400 \cdot 10^{-12}}} = 5 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}.$$

Довжина електромагнітної хвилі становить

$$\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^5} = 3,8 \cdot 10^3 \text{ м.}$$

Перевірка розмірностей:

$$[I_m] = B \sqrt{\frac{\Phi}{\Gamma_H}} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{с}^3 \cdot \text{А}} \sqrt{\frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}}{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}}} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{с}^3 \cdot \text{А}} \sqrt{\frac{\text{А}^4 \cdot \text{с}^6}{\text{кг}^2 \cdot \text{м}^4}} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{с}^3 \cdot \text{А}} \cdot \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^3}{\text{кг} \cdot \text{м}^2} = \text{А}$$

$$[q_m] = \text{А} \sqrt{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2} \cdot \text{А}^2 \cdot \text{с}^4 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}} = \text{А} \cdot \text{с} = \text{Кл.}$$

**Відповідь:**  $I_m = 0,1 \text{ А}$ ;  $q_m = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$ ;  $\omega_0 = 5 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ ;  $\lambda = 3,8 \cdot 10^3 \text{ м}$ .

### Задача 13.2.2

В ідеальному коливальному контурі амплітуда коливань сили струму в котушці індуктивності  $I_m = 5 \text{ мА}$ , а амплітуда коливань заряду конденсатора  $q_m = 2,5 \text{ нКл}$ . На момент часу  $t$  сила струму в котушці дорівнює  $I = 3 \text{ мА}$ . Знайдіть заряд конденсатора в цей час.

**Дано:**

$$I_m = 5 \text{ мА}$$

$$q_m = 2,5 \text{ нКл}$$

$$I = 3 \text{ мА}$$

$$q = ?$$

**Розв'язання**

Енергія зарядженого конденсатора визначається за формулою

$$W_{\text{ел}} = \frac{q^2}{2C}, \quad (1)$$

а енергія магнітного поля у котушці

$$W_{\text{маг}} = \frac{LI^2}{2}. \quad (2)$$

В ідеальному коливальному контурі сумарна енергія конденсатора та котушки зберігається, але періодично переходить з електричної енергії конденсатора в магнітну енергію котушки та навпаки, тому

$$W = W_{\text{ел}} + W_{\text{маг}} = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}. \quad (3)$$

Тоді

$$\frac{q^2}{2C} = W - \frac{LI^2}{2},$$

звідки

$$q = \sqrt{2CW - LI^2}. \quad (4)$$

Коли струм у котушці обертається на нуль  $I = 0$ , заряд конденсатору сягає свого максимального значення  $q_m$ , а його енергія дорівнює повній енергії контуру

$$(W_{\text{ел}})_m = W = \frac{q_m^2}{2C}. \quad (5)$$

З (5) отримуємо

$$q_m^2 = 2CW. \quad (6)$$

При коливаннях в контурі в певний момент часу заряд конденсатора перетворюється на нуль  $q = 0$ , а струм через котушку  $I_m$  досягає максимального



значення. При цьому енергія магнітного поля котушки дорівнює повній енергії системи:

$$(W_{\text{маг}})_m = W = \frac{LI_m^2}{2}. \quad (7)$$

З (5) і (7)

$$\frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}, \quad (8)$$

$$2LCI_m^2 = 2q_m^2, \quad (9)$$

$$LC = \frac{q_m^2}{I_m^2}. \quad (10)$$

З урахуванням (6) і (10) формула (4) набуває вигляду

$$q = \sqrt{q_m^2 - \frac{q_m^2}{I_m^2} I^2} = \sqrt{q_m^2 \left(1 - \frac{I^2}{I_m^2}\right)} = q_m \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_m}\right)^2}. \quad (11)$$

Підставляючи в (11) дані задачі, отримуємо заряд конденсатора в момент часу  $t$

$$q = 2,5 \cdot 10^{-9} \sqrt{1 - \left(\frac{3 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}}\right)^2} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} = 2 \text{ нКл}.$$

**Відповідь:**  $q = 2 \text{ нКл}.$

### Задача 13.2.3

*Зміна з часом напруги на обкладках конденсатора в коливальному контурі має вигляд:  $U = 50 \cos(10^4 \pi t) \text{ В}$ . Ємність конденсатора  $C = 0,1 \text{ мкФ}$ . Знайти період коливань  $T$ , індуктивність контуру  $L$  та довжину хвилі  $\lambda$ , що відповідає цьому контуру.*

**Дано:**

$$U = 50 \cos(10^4 \pi t) \text{ В}$$

$$C = 0,1 \text{ мкФ}$$

$$T = ? \quad L = ? \quad \lambda = ?$$

**Розв'язання**

Якщо час відраховувати від моменту, коли напруга на конденсаторі максимальна, то рівняння коливань напруги можна записати як

$$U = U_m \cos \omega_0 t. \quad (1)$$

Тоді з рівняння, що задано в задачі та (1), робимо висновок, що кругова частота власних коливань становить  $\omega_0 = 10^4 \pi \text{ рад/с}$ .

Період власних коливань, зв'язаний з круговою частотою за формулою, дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{10^4 \pi} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ с}.$$

Індуктивність контуру можна знайти з допомогою формули Томсона

$$T = 2\pi \sqrt{LC},$$

звідки

$$L = \frac{T^2}{4\pi^2 C} = \frac{(2 \cdot 10^{-4})^2}{4\pi^2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}.$$

Довжина хвилі, на яку налаштований коливальний контур, становить

$$\lambda = cT = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 6 \cdot 10^4 \text{ м}.$$

Перевірка розмірності

$$[T] = \sqrt{\text{Гн} \cdot \text{Ф}} = \sqrt{(\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}) \cdot (\text{А}^2 \cdot \text{с}^4 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-2})} = \text{с}.$$

$$[L] = \frac{\text{с}^2}{\text{Ф}} = \frac{\text{с}^2}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2} = \text{Гн}$$

**Відповідь:**  $T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ ;  $L = 1 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$ ;  $\lambda = 6 \cdot 10^4 \text{ м}$

### Задача 13.2.4

Коливальний контур, що складається з конденсатора ємністю  $C = 7 \text{ мкФ}$ , котушки індуктивності  $L = 0,23 \text{ Гн}$  та активного опору  $R = 40 \text{ Ом}$ , заряджений до заряду  $q_0 = 0,56 \text{ мКл}$ . Знайти: 1) період коливань у контурі; 2) логарифмічний декремент згасання коливань; 3) записати рівняння залежності різниці потенціалів на обкладках конденсатора від часу.

| Дано:                    | Розв'язання                                                                                                                                                                                           |
|--------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $L = 0,23 \text{ Гн}$    | В коливальному контурі, що складається з ємності, індуктивності та активного опору, здійснюються вільні згасаючі коливання, період яких становить                                                     |
| $R = 40 \text{ Ом}$      |                                                                                                                                                                                                       |
| $q_0 = 0,56 \text{ мКл}$ |                                                                                                                                                                                                       |
| $T = ? \quad \delta = ?$ |                                                                                                                                                                                                       |
| $U(t) = ?$               | $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{0,23 \cdot 7 \cdot 10^{-6}} - \left(\frac{40}{2 \cdot 0,23}\right)^2}} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$ |

Для визначення логарифмічного декременту згасання коливань треба знайти коефіцієнт згасання:

$$\beta = \frac{R}{2L} = \frac{40}{2 \cdot 0,23} = 87 \text{ с}^{-1}.$$

Тоді логарифмічний коефіцієнт згасання коливань становить

$$\delta = \beta T = 87 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 0,7.$$

Рівняння залежності різниці потенціалів на конденсаторі від часу має вигляд

$$U = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

де  $U_0$  – максимальне значення напруги на конденсаторі в початковий момент часу, яке визначається за формулою

$$U_0 = \frac{q_0}{C} = \frac{0,56 \cdot 10^{-3}}{7 \cdot 10^{-6}} = 80 \text{ В},$$

а частота згасаючих коливань

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8 \cdot 10^{-3}} = 250\pi = 785 \text{ с}^{-1}.$$

Заряд та напруга конденсатора знаходяться в одній фазі. Якщо в початковий момент часу конденсатор був заряджений, то в цей момент і напруга на конденсаторі була максимальною. Отже, початкова фаза  $\alpha = 0$ . Тоді рівняння залежності різниці потенціалів на обкладках конденсатора від часу має вигляд

$$U(t) = 80e^{-0,7t} \cos(250\pi t) \text{ (В)}.$$

**Відповідь:**  $T = 8 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ ,  $\delta = 0,7$ ,  $U(t) = 80e^{-0,7t} \cos(250\pi t) \text{ (В)}$ .

### Задача 13.2.5

Знайти кількість коливань, яка потрібна для того, щоб амплітуда заряду у контурі з логарифмічним декрементом згасання  $\delta = 0,0004$  зменшилася вп'ятеро. Записати закони зміни заряду, напруги та струму у залежності від часу, якщо спочатку конденсатор був заряджений до напруги  $U_0 = 100 \text{ В}$ . Частота згасаючих коливань дорівнює  $\nu = 2 \cdot 10^3 \text{ Гц}$ , індуктивність котушки  $L = 0,5 \text{ мГн}$ .

| Дано:                           | Розв'язання                                                               |
|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $\delta = 0,0004$               | Якщо за певний час амплітуда заряду зменшилась                            |
| $\frac{q_0}{q_t} = 5$           | вп'ятеро, то                                                              |
| $U_0 = 100 \text{ В}$           | $5 = \frac{q_0}{q_t} = \frac{q_0}{q_0 \cdot e^{-\beta t}} = e^{\beta t},$ |
| $\nu = 2 \cdot 10^3 \text{ Гц}$ | $\beta t = \ln 5.$                                                        |
| $L = 0,5 \text{ мГн}$           | Зважаючи на те, що час зменшення амплітуди                                |
| $N = ? \quad q(t) = ?$          | складається з $N$ періодів коливань, тобто $t = NT$ ,                     |
| $U(t) = ? \quad I(t) = ?$       | $\ln 5 = \beta t = \beta NT = N\delta. \quad (1)$                         |
|                                 | Із (1) кількість коливань дорівнює                                        |

$$N = \frac{\ln 5}{\delta} = \frac{1,609}{0,0004} = 4020.$$

Ця кількість коливань здійснюється за час  $t$ , який є

$$t = NT = \frac{N}{\nu} = \frac{4020}{2 \cdot 10^3} = 2,01 \text{ с.}$$

З огляду на це, коефіцієнт згасання коливань становитиме

$$\beta = \frac{\ln 5}{t} = \frac{1,609}{2,01} = 0,8 \text{ с}^{-1}.$$

Закон зміни в часі напруги на конденсаторі має вигляд

$$U(t) = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (2)$$

Для того щоб записати цю функціональну залежність для процесу коливань, що розглядається в цій задачі, треба визначитися з максимальним (амплітудним) значенням напруги  $U_0$  в початковий момент часу та початковою фазою  $\alpha$ . Виходячи з даних задачі, конденсатор спочатку був заряджений до напруги 100 В, а це означає, що  $U_0 = 100 \text{ В}$ . Тоді в момент часу  $t = 0$  миттєве значення напруги  $U = U_0$ , а це є можливим за умов, що початкова фаза  $\alpha = 0$ .

Кругова частота становить

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 = 4\pi \cdot 10^3 \text{ рад/с.}$$

Отже, залежність напруги на конденсаторі від часу є

$$U(t) = 100 \cdot e^{-0,126t} \cdot \cos 4\pi \cdot 10^3 t \text{ (В)}. \quad (3)$$

Закон зміни заряду конденсатора в залежності від часу має вигляд

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (4)$$

Зважаючи на те, що  $C = \frac{q}{U}$ , максимальний заряд конденсатора в момент  $t = 0$

$$\text{є } q_0 = CU_0.$$

Для визначення ємності конденсатора використаємо те, що власна частота незгасаючих коливань  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ . В задачі задана частота згасаючих коливань  $\omega$ , яка зв'язана з  $\omega_0$  співвідношенням

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Тоді

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \beta^2.$$

Виходячи з того, що  $\omega = 4\pi \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ , а  $\beta = 0,8 \text{ с}^{-1}$ ,

$$\omega_0^2 = (4\pi \cdot 10^3)^2 + (0,8)^2 \approx \omega^2.$$

Тобто, при дуже слабкому згасанні коливань можна вважати, що власна частота дорівнює частоті згасаючих коливань. Тому вважатиме, що  $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ , і тоді

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{16\pi^2 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}} = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ Ф}.$$

Початкове значення заряду конденсатора становить

$$q_0 = CU_0 = 1,3 \cdot 10^{-5} \cdot 100 = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ Кл},$$

а залежність заряду на конденсаторі від часу набуває вигляду

$$q(t) = 1,3 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-0,126t} \cdot \cos 4\pi \cdot 10^3 t \text{ (Кл)}. \quad (5)$$

Для отримання залежності від часу струму через котушку треба продиференціювати функцію  $q(t)$  (4).

$$\begin{aligned} I = \frac{dq}{dt} &= q_0 e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha)] = \\ &= q_0 \omega e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \phi) = I_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \phi), \end{aligned}$$

де  $I_0 = \omega q_0$ ,  $\cos \phi = -\beta / \omega$ ,  $\sin \phi = \omega / \omega_0$ .

Початкова амплітуда струму дорівнює

$$I_0 = q_0 \omega = 1,3 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 = 2,6 \text{ А},$$

початкова фаза  $\alpha = 0$ , а зсув фаз  $\phi$  знайдемо з

$$\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \operatorname{tg} \phi = -\frac{\omega \cdot \omega_0}{\omega_0 \cdot \beta} = -\frac{\omega}{\beta} = -\frac{4\pi \cdot 10^3}{0,128} = -9,8 \cdot 10^4,$$

$$\phi = \operatorname{arctg}(-9,8 \cdot 10^4) \approx -\frac{\pi}{2}.$$

Тоді

$$I = I_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \delta) = I_0 e^{-\beta t} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -I_0 e^{-\beta t} \sin \omega t.$$

Остаточно, залежність струму через котушку від часу має вигляд:

$$I(t) = -2,6 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin 4\pi \cdot 10^3 t \text{ (A)}.$$

**Відповідь:**  $N = 4020$ ;  $U(t) = 100 \cdot e^{-0,126t} \cdot \cos 4\pi \cdot 10^3 t \text{ (В)}$ ;

$$q(t) = 1,3 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-0,126t} \cdot \cos 4\pi \cdot 10^3 t \text{ (Кл)}; \quad I(t) = -2,6 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin 4\pi \cdot 10^3 t \text{ (A)}.$$

### Задача 13.2.6

Власна частота коливань контуру  $\nu_0 = 8 \text{ кГц}$ , добротність  $Q = 72$ . В контурі збуджують згасаючі коливання. Записати закон зменшення запасеної (повної) енергії з часом  $W(t)$  і визначити, яка частина початкової енергії залишиться в контурі по закінченні часу  $t = 1 \text{ мс}$ .

| Дано:                                | Розв'язання                                                               |
|--------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $\nu_0 = 8 \text{ кГц}$              | Вважатиме, що коливання в контурі починаються із                          |
| $Q = 72$                             | зарядки конденсатора максимальним зарядом $q_0$ . При                     |
| $t = 1 \text{ мс}$                   | цьому енергія зарядженого конденсатора дорівнюватиме                      |
| $W(t) = ? \quad \frac{W_0}{W_t} = ?$ | $W_{0C} = \frac{q_0^2}{2C}$ . При $t = 0$ струму в контурі ще немає, отже |

немає і магнітного поля котушки, тобто,  $W_{0L} = \frac{LI^2}{2} = 0$ , а повна енергія контуру

дорівнює енергії зарядженого конденсатора  $W_0 = W_{0C} = \frac{q_0^2}{2C}$ . З часом

максимальний заряд конденсатора буде зменшуватися згідно із законом  $q(t) = q_0 e^{-\beta t}$ . Таким чином, повна енергія спадатиме згідно з

$$W_t = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{(q_0 e^{-\beta t})^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \cdot e^{-2\beta t} = W_0 \cdot e^{-2\beta t}. \quad (1)$$

Ця залежність виконується за умови  $\beta \ll \omega_0$ .

Розрахуємо коефіцієнт згасання  $\beta$ . Для цього спочатку знайдемо логарифмічний декремент згасання коливань

$$\delta = \frac{\pi}{Q} = \frac{\pi}{72} = 0,0436.$$

$$\text{З іншого боку: } \delta = \beta T = \beta \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Виразимо звідси  $\beta$ , для чого піднесемо цей вираз до квадрата:

$$\delta^2 = \frac{(2\pi\beta)^2}{\omega_0^2 - \beta^2},$$

$$\delta^2 \omega_0^2 - \delta^2 \beta^2 = 4\pi^2 \beta^2,$$

$$\delta^2 \omega_0^2 = \beta^2 (4\pi^2 + \delta^2),$$

$$\beta = \frac{\delta \omega_0}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}}.$$

$$\beta = \frac{\delta 2\pi \nu_0}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}} = \frac{0,0436 \cdot 2\pi \cdot 8 \cdot 10^3}{\sqrt{(0,0436)^2 + 4\pi^2}} = 319 \text{ с}^{-1}.$$

Якщо власна кругова частота коливань дорівнює

$$\omega_0 = 2\pi \nu_0 = 2\pi \cdot 8 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1},$$

то умова  $\beta \ll \omega_0$  виконується, оскільки  $319 \ll 5 \cdot 10^4$ .



Тоді вважатиме, що повна енергія спадає згідно

$$W_t = W_0 \cdot e^{-2\beta t}.$$

Енергія після часу  $t=1$  мс складає деяку частку початкової енергії, для знаходження якої визначимо відношення

$$\frac{W_t}{W_0} = \frac{W_0 \cdot e^{-2\beta t}}{W_0} = e^{-2\beta t}.$$

Остаточно,

$$\frac{W_t}{W_0} = e^{-2\beta t} = e^{-2 \cdot 319 \cdot 0,001} \approx 0,5.$$

Таким чином, після скінчення проміжку часу  $t = 1$  мс у контурі залишиться половина початкової енергії.

**Відповідь:**  $W_t = W_0 \cdot e^{-2\beta t}; \frac{W_t}{W_0} = 0,5.$

### Задача 13.2.7

*Знайти добротність контуру, якщо власна частота  $\omega_0$  коливального контуру відрізняється на 3% від частоти  $\omega$  згасаючих коливань.*

|                         |                                                        |
|-------------------------|--------------------------------------------------------|
| <b>Дано:</b>            | <b>Розв'язання</b>                                     |
| $\omega_0 = 1,03\omega$ | Частота згасаючих коливань зв'язана з частотою вільних |
| $Q = ?$                 | незгасаючих коливань як                                |
|                         | $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (1)$      |

де  $\beta$  – коефіцієнт згасання коливань.

Добротність контуру становить

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi \omega}{\beta 2\pi} = \frac{\omega}{2\beta}. \quad (2)$$

Виразимо коефіцієнт згасання із (2) і підставимо в (1)

$$\beta = \frac{\omega}{2Q},$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2Q}\right)^2}. \quad (3)$$

Піднесемо обидві частини (3) до квадрата і виразимо добротність  $Q$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2Q}\right)^2 = \omega_0^2 - \frac{\omega^2}{4Q^2},$$

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{1,03\omega}{\omega}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{2\sqrt{1,03^2 - 1}} = 2,03.$$

**Відповідь:**  $Q = 2,03$ .

### Задача 13.2.8

У коливальному контурі відбуваються вимушені гармонічні коливання. При частотах змушувальної ЕРС  $\omega_1 = 300 \text{ с}^{-1}$  і  $\omega_2 = 600 \text{ с}^{-1}$  амплітуда сили струму дорівнює половині свого максимального значення. Визначити власну частоту контуру і частоту ЕРС, при якій амплітуда напруги на обкладках конденсатора максимальна.

| Дано:                             | Розв'язання                                                                                        |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\omega_1 = 300 \text{ с}^{-1}$   | Коли у контурі відбуваються вимушені коливання, то амплітудне значення сили струму дорівнює        |
| $\omega_2 = 600 \text{ с}^{-1}$   |                                                                                                    |
| $\omega_0 = ? \quad \omega_p = ?$ |                                                                                                    |
|                                   | $I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (1)$ |

З виразу (1) видно, що за умов  $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ , амплітуда струму набуває найбільшого значення  $I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R}$ . Половина максимального значення становить  $\frac{\mathcal{E}_m}{2R}$ . Відповідно до умов задачі запишемо для частот  $\omega_1$  і  $\omega_2$

$$\frac{\mathcal{E}_m}{2R} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2}}, \quad (2)$$

$$\frac{\mathcal{E}_m}{2R} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2}}. \quad (3)$$

Піднесемо (2) до квадрата після скорочення на  $\mathcal{E}_m$  в обох частинах рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4R^2} &= \frac{1}{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2}, \\ 3R^2 &= \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогічно, для другої частоти

$$3R^2 = \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2. \quad (5)$$

З рівності лівих частин рівнянь (4) і (5) випливає, що їх праві частини дорівнюють одна одній

$$\left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2 = \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2.$$

А це означає, що для підкоренових виразів можна записати

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \pm \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right).$$

Візьмемо вираз зі знаком мінус і зробимо декілька алгебраїчних перетворень.

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L,$$

$$\frac{\omega_1^2 LC - 1}{\omega_1^2} = \frac{1 - \omega_2^2 LC}{\omega_2^2}. \quad (6)$$

Власна частота коливань контуру є  $\omega_0^2 = LC$ , тому вираз (6) набуває вигляду

$$\frac{\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} - 1}{\omega_1^2} = \frac{1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2}}{\omega_2^2},$$

$$\frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2 \cdot \omega_1^2} = \frac{\omega_0^2 - \omega_2^2}{\omega_0^2 \cdot \omega_2^2},$$

$$\omega_2 \omega_1^2 + \omega_1 \omega_2^2 = \omega_1 \omega_0^2 - \omega_2 \omega_0^2,$$

$$\omega_1 \omega_2 (\omega_1 + \omega_2) = \omega_0^2 (\omega_1 + \omega_2).$$

Остаточно, резонансна частота для струму у контурі становить

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}. \quad (7)$$

Для знаходження резонансної частоти для напруги на конденсаторі, перетворимо формулу (5). Її права частина

$$\left( \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} \right)^2 = \left[ \left( \omega_2 - \frac{1}{\omega_2 LC} \right) \cdot L \right]^2 = \left( \omega_2 - \frac{\omega_0^2}{\omega_2} \right)^2 \cdot L^2. \quad (8)$$

З урахуванням (8) формула (5) набуває вигляду

$$3 \frac{R^2}{L^2} = \left( \omega_2 - \frac{\omega_0^2}{\omega_2} \right)^2. \quad (9)$$

Щоб в правій частині формули (9) виділити коефіцієнт згасання  $\beta = \frac{R}{2L}$ ,

помножимо і поділимо її на 4. В результаті отримуємо

$$12 \left( \frac{R}{2L} \right)^2 = \left( \omega_2 - \frac{\omega_0^2}{\omega_2} \right)^2.$$

Врахувавши (7), а саме, що  $\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2$ , запишемо

$$12\beta^2 = \left( \omega_2 - \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2^2} \right)^2 = (\omega_2 - \omega_1)^2.$$

Остаточно, квадрат коефіцієнта згасання становить

$$\beta^2 = \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{12}. \quad (10)$$

Резонансна частота для напруги на конденсаторі з формули (13.47) є

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Підставимо вираз (10) і отримаємо

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega_1 \omega_2 - \frac{2(\omega_2 - \omega_1)^2}{12}} = \sqrt{\omega_1 \omega_2 - \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{6}} \quad (11)$$

Застосовуючи дані задачі, розрахуємо власну частоту коливального контуру і частоту ЕРС, за якої амплітуда напруги на обкладках конденсатора максимальна

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2} = \sqrt{300 \cdot 600} = 424,3 \text{ рад/с}, \\ \omega_p &= \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2 - \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{6}} = \sqrt{300 \cdot 600 - \frac{(600 - 300)^2}{6}} = 406,2 \text{ рад/с}. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $\omega_0 = 424,3 \text{ рад/с}$ ;  $\omega_p = 406,2 \text{ рад/с}$ .

### Задача 13.2.9

*Коливальний контур містить котушку індуктивності  $L = 0,1 \text{ мГн}$ , резистор з опором  $R = 3 \text{ Ом}$ , а також конденсатор ємністю  $C = 10 \text{ нФ}$ . Визначити середню потужність, яку споживає контур для підтримки в ньому незгасаючих коливань з амплітудним значенням напруги конденсатора  $U_m = 2 \text{ В}$ .*

| Дано:                   | Розв'язання                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $L = 0,1 \text{ мГн}$   | За наявності активного опору $R$ повна енергія контуру, що складається з енергії електричного поля, зосередженого в конденсаторі, і енергії магнітного поля, зосередженого в котушці, зменшується безперервно внаслідок виділення теплоти відповідно до закону Джоуля-Ленца. |
| $R = 3 \text{ Ом}$      |                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| $C = 10 \text{ нФ}$     |                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| $U_m = 2 \text{ В}$     |                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| $\langle P \rangle = ?$ |                                                                                                                                                                                                                                                                              |

$$dQ = I^2 R dt . \quad (1)$$

Щоб підтримувати незгасаючі коливання, контур повинен отримувати енергію ззовні, причому середня споживана потужність дорівнює відношенню джоулевої теплоти  $Q$ , що виділяється на опорі  $R$  протягом деякого проміжку часу, до тривалості  $\Delta t$  цього проміжку часу

$$\langle P \rangle = \frac{Q}{\Delta t} . \quad (2)$$

З формули (1)

$$Q = \int_1^2 dQ = \int_t^{t+\Delta t} I^2 R dt . \quad (3)$$

Слід зазначити, що характер незагасаючих коливань, отже, і вибір проміжку часу залежить від того, як відбувається подача енергії ззовні. Якщо припустити, що незгасаючі коливання, що виникають, близькі до гармонічних, то проміжок часу слід брати рівним періоду коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} . \quad (4)$$

Заряд на обкладках конденсатора змінюється за законом

$$q = q_m \cos \omega t = U_m C \cos \omega t , \quad (5)$$

де

$$q_m = U_m C . \quad (6)$$

Для знаходження струму треба продиференціювати за часом функцію (5)

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \sin \omega t. \quad (7)$$

У випадку слабо згасаючих коливань циклічна частота майже не відрізняється від власної частоти коливань, тобто,  $\omega \simeq \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Підставляючи (4) і (7) в (3), отримуємо

$$Q = \int_t^{t+T} (\omega q_m)^2 R \sin^2 \omega t dt = \omega^2 q_m^2 R \int_t^{t+T} \sin^2 \omega t dt. \quad (8)$$

Підінтегральний вираз дорівнює

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} \sin^2 \omega t dt &= \frac{\omega t - \frac{\sin(2\omega t)}{2}}{2\omega} = \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \Big|_t^{t+T} = \\ &= \frac{t+T-t}{2} - \frac{\sin(2\omega(t+T)) - \sin 2\omega t}{4\omega} = \frac{T}{2} - \frac{\sin 2\omega t - \sin 2\omega t}{4\omega} = \frac{T}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Тоді з урахуванням (9) кількість теплоти, що виділилася, є

$$Q = \omega^2 q_m^2 R \int_t^{t+T} \sin^2 \omega t dt = \omega^2 q_m^2 R \frac{T}{2}. \quad (10)$$

Середня потужність за період, враховуючи (2) і (10), дорівнює

$$\langle P \rangle = \frac{Q}{T} = \frac{\omega^2 q_m^2 R T}{2T} = \frac{\omega^2 q_m^2 R}{2} = \frac{\omega^2 C^2 U_m^2 R}{2} = \frac{C^2 U_m^2 R}{2LC} = \frac{C U_m^2 R}{2L}. \quad (11)$$

Підставляючи дані задачі в (11), отримуємо величину середньої потужності

$$\langle P \rangle = \frac{10 \cdot 10^{-9} \cdot 2^2 \cdot 3}{2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Вт.}$$

Перевірка розмірності

$$\begin{aligned} [P] &= \frac{\Phi \cdot \text{В}^2 \cdot \text{Ом}}{\Gamma_{\text{Н}}} = \frac{(\text{А}^2 \cdot \text{с}^4 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}) (\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1})^2 (\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}^{-2} \cdot \text{с}^{-3})}{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}} = \\ &= \text{с}^{-1} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2 = \frac{\text{кгм}}{\text{с}^2} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} = \text{Вт}. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $\langle P \rangle = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Вт.}$

### Задача 13.2.10

Реостат з резистивним опором  $R = 100 \text{ Ом}$ , котушка з індуктивністю  $L = 5 \text{ мГн}$  та конденсатор ємністю  $C = 0,05 \text{ мкФ}$  з'єднані послідовно. Обчислити резонансну частоту  $\omega_p$ , характеристичний опір  $\rho$ , згасання контуру  $\alpha$ , добротність  $Q$  контуру, напруги  $U_L$  і  $U_C$  при резонансній частоті, якщо змінна напруга на вході становить  $U = 10 \text{ В}$ .

| Дано:                                          | Розв'язання                                                                                                                                                                     |
|------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $R = 100 \text{ Ом}$                           | Резонансна частота контуру $\omega_p$ збігається с частотою власних незгасаючих коливань $\omega_0$ , при якій реактивний опір індуктивності дорівнює реактивному опору ємності |
| $L = 5 \text{ мГн}$                            |                                                                                                                                                                                 |
| $C = 0,05 \text{ мкФ}$                         |                                                                                                                                                                                 |
| $U = 10 \text{ В}$                             |                                                                                                                                                                                 |
| $\omega_p = ? \quad \rho = ? \quad \alpha = ?$ |                                                                                                                                                                                 |
| $Q = ? \quad U_L = ? \quad U_C = ?$            |                                                                                                                                                                                 |

$$\omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,05 \cdot 10^{-6}}} = 6,32 \cdot 10^4 \text{ рад/с.}$$

Характеристичний опір, що дорівнює опору реактивних елементів контуру при резонансі, становить

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-3}}{0,05 \cdot 10^{-6}}} = 316 \text{ Ом.} \quad (1)$$

Для характеристики інтенсивності згасання вільних коливань використовується поняття “загасання контуру” – відношення активного опору  $R$  до характеристичного опору  $\rho$  (1). Для контуру, що розглядається, затухання контуру становить

$$\alpha = \frac{R}{\rho} = \frac{100}{316} = 0,316. \quad (2)$$

Добротність контуру як величина зворотна  $\alpha$  (2) дорівнює



$$Q = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,316} = 3,16. \quad (3)$$

Максимальні значення (при резонансі) напруги на котушці  $U_L$  і напруги на конденсаторі  $U_C$  можна знайти зі співвідношень для добротності

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad \text{і} \quad Q = \frac{U_C}{U} = \frac{1}{R\omega_0 C}, \quad (4)$$

де  $U$  – змінна вхідна напруга.

Тоді з (4) напруги на індуктивності і ємності становлять

$$U_L = \frac{U\omega_0 L}{R} = \frac{10 \cdot 6,32 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{100} = 31,6 \text{ В}, \quad (5)$$

$$U_C = \frac{U}{R\omega_0 C} = \frac{10}{100 \cdot 6,32 \cdot 10^4 \cdot 0,05 \cdot 10^{-6}} = 31,6 \text{ В}. \quad (6)$$

Напруги на індуктивності та ємності при резонансі дорівнюють одна одній за величиною та знаходяться у протифазі, тобто зсунуті по фазі одна відносно одній ( $U_L = -U_C$ ). Їхня сума в будь-який момент часу дорівнює нулю, але кожне з них може бути істотно більше, ніж напруга на вході. Це явище має назву резонансу напруг. Як і передбачалося, отримані величини (5) і (6) дорівнюють одне одній.

**Відповідь:**  $U_L = U_C = 31,6 \text{ В}$ .

### Задача 13.2.11

*У ланцюзі змінного струму з діючим значенням напруги  $U = 220 \text{ В}$  та частотою  $\nu = 50 \text{ Гц}$  з'єднані послідовно ємність  $C = 35,4 \text{ мкФ}$ , опір  $R = 100 \text{ Ом}$  та індуктивність  $L = 0,7 \text{ Гн}$ . Знайти діюче значення струму  $I$  в ланцюзі і діючі значення напруг  $U_C$ ,  $U_R$  та  $U_L$  на ємності, опорі та індуктивності.*

**Дано:**

$$U = 220 \text{ В}$$

$$\nu = 50 \text{ Гц}$$

$$C = 35,4 \text{ мкФ}$$

$$R = 100 \text{ Ом}$$

$$L = 0,7 \text{ Гн}$$

$$I = ? \quad U_C = ?$$

$$U_R = ? \quad U_L = ?$$

**Розв'язання**

У коливальному контурі діюче значення струму зв'язане з напругою на вході ланцюга

$$U = I|Z|, \quad (1)$$

де  $|Z|$  – модуль комплексного опору ланцюга

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (2)$$

Кругова частота  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 50 = 100\pi = 314 \text{ рад/с}$ .

Реактивний опір котушки

$$X_L = \omega L = 314 \cdot 0,7 = 219,8 \text{ Ом},$$

а реактивний опір конденсатора

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 35,4 \cdot 10^{-6}} = 90 \text{ Ом}.$$

Тоді модуль комплексного опору є

$$|Z| = \sqrt{100^2 + (219,8 - 90)^2} = 164 \text{ Ом}. \quad (3)$$

З формули (1) і з урахуванням (3) діюче значення струму становить

$$I = \frac{U}{|Z|} = \frac{220}{164} = 1,34 \text{ А}.$$

Діючі значення напруги на резисторі, на конденсаторі та котушці дорівнюють, відповідно,

$$U_R = IR = 1,34 \cdot 100 = 134 \text{ В},$$

$$U_C = IX_C = 1,34 \cdot 90 = 120,6 \text{ В},$$

$$U_L = IX_L = 1,34 \cdot 219,8 = 294,5 \text{ В}.$$

**Відповідь:**  $I = 1,34 \text{ А}$ ;  $U_R = 134 \text{ В}$ ;  $U_C = 120,6 \text{ В}$ ;  $U_L = 294,5 \text{ В}$ .

### Задача 13.2.12

До ланцюга змінного струму з частотою  $\nu = 50$  Гц приєднана котушка довжиною  $l = 20$  см і діаметром  $d = 5$  см, що містить  $N = 500$  витків мідного дроту з площею поперечного перерізу  $S_0 = 0,6$  мм<sup>2</sup>. Знайти, яка частина повного опору котушки припадає на реактивний опір. Питний опір міді  $\rho = 17$  нОм·м.

#### Дано:

$$\nu = 50 \text{ Гц}$$

$$l = 20 \text{ см}$$

$$d = 5 \text{ см}$$

$$N = 500$$

$$S_0 = 0,6 \text{ мм}^2$$

$$\rho = 17 \text{ нОм} \cdot \text{м}$$

$$\frac{X}{Z} = ?$$

#### Розв'язання

Величина (модуль) опору ланцюга  $Z$  складається з активного опору  $R$  і реактивного опору  $X$ ,

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}. \quad (1)$$

Реактивний опір  $X$ , своєю чергою, складається з індуктивного опору

$$X_L = \omega L \quad (2)$$

і ємнісного опору

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (3)$$

В ланцюзі, що розглядається, відсутній конденсатор, тому реактивний опір  $X$  дорівнює виключно опору котушки індуктивності  $X_L = \omega L$ . Для його треба знайти індуктивність котушки

$$L = \frac{\mu \mu_0 N^2 S}{l}, \quad (4)$$

де  $\mu = 1$ , оскільки котушка без осердя,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнітна стала,

$$S = \frac{\pi d^2}{4} - \text{площина витка котушки.}$$

Кругова частота струму дорівнює

$$\omega = 2\pi \nu. \quad (5)$$

Підставляючи (4) і (5) в (2), знайдемо

$$X_L = \omega L = 2\pi\nu \cdot \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{l} = 2\pi\nu \cdot \frac{\mu_0 N^2 \pi d^2}{4l} = \frac{\mu_0 \nu N^2 \pi^2 d^2}{2l} =$$

$$= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 500^2 \cdot \pi^2 \cdot 0,05^2}{2 \cdot 0,2} = 0,97 \text{ Ом.} \quad (6)$$

Активний опір дорівнює

$$R = \rho \frac{l}{S_0}. \quad (7)$$

Довжини дроту котушки, що складається з  $N = 500$  витків, кожний з яких має довжину  $l_0 = \pi d$ , дорівнює  $l = Nl_0 = N\pi d$ . Тоді формула (7) набуває вигляду

$$R = \rho \frac{l}{S_0} = \rho \frac{N\pi d}{S_0} = \frac{17 \cdot 10^{-9} \cdot 500 \cdot \pi \cdot 0,05}{0,6 \cdot 10^{-6}} = 2,23 \text{ Ом.} \quad (8)$$

Розрахуємо повний опір за формулою (1)

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{2,23^2 + 0,97^2} = 2,43 \text{ Ом.}$$

Отже, на реактивний опір припадає

$$\frac{X}{Z} = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{0,97}{2,43} = 0,4.$$

**Відповідь:**  $\frac{X}{Z} = 0,4$

### Задача 13.2.13

*Ланцюг змінного струму складається з послідовно з'єднаних котушки, конденсатора та резистора. Амплітудне значення сумарної напруги на котушці та конденсаторі  $U_{LCm} = 173 \text{ В}$ , а амплітудне значення напруги на резисторі  $U_{Rm} = 100 \text{ В}$ . Визначте зсув фаз  $\varphi$  між струмом та зовнішньою напругою.*

**Дано:**

$$U_{LCm} = 173 \text{ В}$$

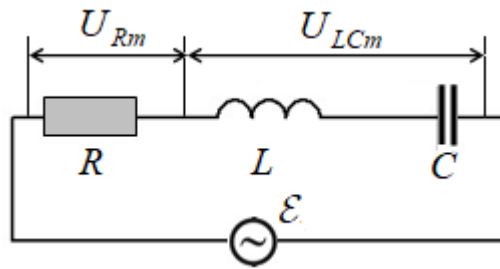
$$U_{Rm} = 100 \text{ В}$$

$$\varphi = ?$$

**Розв'язання**

Зсув фаз між струмом і зовнішній ЕРС (зовнішньою напругою) можна визначити із формули (13.36)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (1)$$



Падіння напруги на котушці і конденсаторі

$$U_{LCm} = U_{Lm} - U_{Cm}. \quad (2)$$

Знак мінус у формулі (2) можна пояснити за допомогою векторної діаграми. Векторні діаграми – метод графічного розрахунку напруги та струмів у ланцюгах змінного струму, в яких змінні напруги та струми символічно (умовно) зображуються за допомогою векторів. Будь-яку змінну напругу (або змінний струм), що змінюється за синусоїдальним законом, можна зображати за допомогою такого вектора, що обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ , що дорівнює кутовій частоті струму, причому довжина вектора в певному масштабі зображує амплітуду напруги, а кут – початкову фазу. Напруга джерела дорівнюватиме сумі падінь напруги на елементах ланцюга, тому

$$U = U_R + U_L + U_C. \quad (3)$$

Для активного опору величина  $U_R$  визначається виключно властивостями провідника; вона не залежить ні від струму, ні від моменту часу. Отже, напруга  $U_R$  та струм збігається по фазі

$$U_R = I_m R \cos \omega t. \quad (4)$$

Конденсатор в ланцюзі змінного струму має реактивний ємнісний опір, і напруга на конденсаторі весь час відстає по фазі від струму на  $\frac{\pi}{2}$ ,

$$X_C = \frac{1}{\omega C}; \quad U_C = I_m X_C \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (5)$$

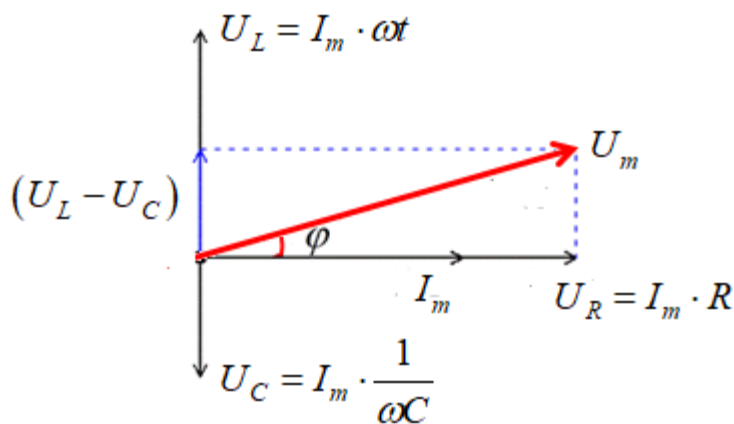
Котушка індуктивності має реактивний індуктивний опір, а напруга на котушки в будь-який момент часу випереджає по фазі струм на  $\frac{\pi}{2}$ ,

$$X_L = \omega L; \quad U_L = I_m X_L \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (6)$$

Видно, що тут відбувається певний зсув фаз, пов'язаний з реактивною складовою загального опору ланцюга при протіканні змінного струму.

Якщо вважати, що фаза струму дорівнює нулю, то падіння напруги на резисторі збігається за фазою зі струмом, отже ці вектори будуть одного напрямку вздовж горизонтальної осі (осі струмів).

Напруга на конденсаторі відстає на  $\frac{\pi}{2}$  від струму, отже відкладаємо його під прямим кутом донизу, перпендикулярно вектору напруги на активному опорі, а напруга на котушці випереджає на  $\frac{\pi}{2}$  струм, отже



відкладаємо його під прямим кутом вгору, перпендикулярно вектору напруги на активному опорі. Вважатиме, наприклад, що  $U_L > U_C$ . Оскільки ми маємо справу з векторним рівнянням, складемо вектори напруги на реактивних елементах, і отримаємо різницю  $(U_L - U_C)$ . Вона буде для нашого прикладу (ми прийняли, що  $U_L > U_C$ ) спрямована вгору. Якщо додати вектор напруги на активному опорі, то за правилом векторного додавання, отримаємо вектор сумарної напруги  $U_m$ .

Оскільки ми брали максимальні значення, то отримаємо вектор амплітудного значення загальної напруги.

З векторної діаграми добре видно, що

$$I_m = U_m Z = \sqrt{(I_m R)^2 + (I_m X_C - I_m X_L)^2}, \quad (7)$$

що ми і використали при написанні виразу (2).

З формул (5) і (6) максимальні значення напруг на котушці та конденсаторі дорівнюють, відповідно,

$$U_{Lm} = I_m \omega L, \quad U_{Cm} = \frac{I_m}{\omega C},$$

$$U_{LCm} = I_m \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (8)$$

З (4) максимальне падіння напруги на активному опорі становить

$$U_{Rm} = I_m R. \quad (9)$$

Отже,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{LCm} I_m}{I_m U_{Rm}} = \frac{U_{LCmm}}{U_{Rm}} = \frac{173}{100} = 1,73,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}(1,73) = 60^\circ.$$

**Відповідь:**  $\varphi = 60^\circ$ .

### Задача 13.2.14

*Обчислити ємність невідомого конденсатора та амплітуду сили струму в коливальному контурі, якщо цей конденсатор, резистор з опором  $R = 50 \text{ Ом}$  і котушку з індуктивністю  $L = 0,10 \text{ Гн}$  з'єднати послідовно з джерелом змінного струму частотою  $\nu = 50 \text{ Гц}$  і амплітудою напруги  $U_m = 300 \text{ В}$ . Відношення амплітуд напруги у двох частинах кола, які позначені на рисунку,  $\frac{U_{m1}}{U_{m2}} = \frac{1}{2}$ .*

**Дано:**

$R = 50 \text{ Ом}$

$L = 0,10 \text{ Гн}$

$\nu = 50 \text{ Гц}$

$U_m = 300 \text{ В}$

$$\frac{U_{m1}}{U_{m2}} = \frac{1}{2}$$

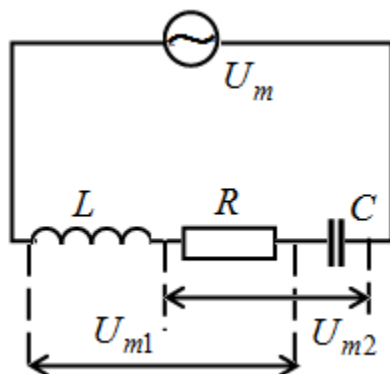
$C = ? \quad I_m = ?$

**Розв'язання**

У схемі послідовно з'єднані котушка, активний опір і конденсатор, тому струм, який протікає через кожен із компонентів ланцюга, однаковий. Амплітуда напруги на кожній частині ланцюга відома, тому ми можемо розглядати кожен частину як окремий ланцюг. Використаємо закон Ома для кола змінного струму. Оскільки струм однаковий в обох цих ділянках, ми можемо визначити ємність зі співвідношення

напруг. В тій частині кола, що складається з котушки з індуктивністю  $L$  і резистора з опором  $R$ , які з'єднані послідовно, падіння напруги становить  $U_{m1}$ .

Опір цієї частини  $Z_1 = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ , оскільки в ній немає ємності, а значить, і її реактивного опору  $X_C$ .



Тоді падіння напруги на цій ділянці згідно із законом Ома буде

$$U_{m1} = I_m Z_1 = I_m \sqrt{R^2 + X_L^2} = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}.$$

В іншій частині кола, де послідовно з'єднані резистор з опором  $R$  і конденсатор з ємністю  $C$ , опор і напруга становлять, відповідно,

$$Z_2 = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X_C^2},$$

$$U_{m2} = I_m Z_2 = I_m \sqrt{R^2 + X_C^2} = I_m \sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}.$$

Застосуємо дані задачі щодо співвідношення напруг



$$\frac{U_{m1}}{U_{m2}} = \frac{Y_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{Y_m \sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}} = \frac{1}{2}.$$

Після відповідних математичних перетворень

$$\frac{1}{4} = \frac{R^2 + (\omega L)^2}{R^2 + 1/(\omega C)^2},$$

$$R^2 + 1/(\omega C)^2 = 4[R^2 + (\omega L)^2],$$

$$(\omega C)^2 = \frac{1}{3R^2 + 4(\omega L)^2}.$$

отримаємо ємність конденсатора, що знаходиться у ланцюзі:

$$C = \frac{1}{\omega \sqrt{3R^2 + 4(\omega L)^2}} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \sqrt{3 \cdot 50^2 + 4(2\pi \cdot 50 \cdot 0,1)^2}} = 30 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 30 \text{ мкФ}.$$

Амплітудну величину сили струму визначимо з закону Ома для змінного струму

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}},$$

$$I_m = \frac{300}{\sqrt{50^2 + \left(2\pi \cdot 50 \cdot 0,1 - \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 30 \cdot 10^{-6}}\right)^2}} = 3,3 \text{ А}.$$

**Відповідь:**  $C = 30 \text{ мкФ}$ ;  $I_m = 3,3 \text{ А}$ .

### Задача 13.2.15

У мережу змінного струму з частотою  $\nu = 50 \text{ Гц}$  послідовно під'єднані котушка індуктивністю  $L = 0,4 \text{ Гн}$ , резистор з опором  $R = 16 \text{ Ом}$  і конденсатор ємністю  $C = 400 \text{ мкФ}$ . Повне падіння напруги у ланцюзі  $U = 500 \text{ В}$ . Визначте

струм у ланцюгу, напруги на котушці, конденсаторі та резисторі, а також активну потужність у ланцюгу.

**Дано:**

$$\nu = 50 \text{ Гц}$$

$$L = 0,4 \text{ Гн}$$

$$R = 16 \text{ Ом}$$

$$C = 400 \text{ мкФ}$$

$$U = 500 \text{ В}$$

$$I = ? \quad U_L = ?$$

$$U_C = ? \quad U_R = ?$$

$$P = ?$$

**Розв'язання**

Струм в ланцюзі можна визначити із закону Ома:

$$I = \frac{U}{Z}, \quad (1)$$

де  $U$  – повне падіння напруги у ланцюзі, а  $Z$  – його повний опір, який складається з активного опору резистора  $R$  і реактивних опорів котушки  $X_L$  і конденсатора  $X_C$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \quad (2)$$

Знайдемо реактивні опори котушки з індуктивністю  $L$

$$X_L = \omega L = 2\pi\nu L = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,4 = 125,7 \text{ Ом},$$

і конденсатора з ємністю  $C$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 400 \cdot 10^{-6}} = 8 \text{ Ом}.$$

Розрахуємо повний опір ланцюга за формулою (2)

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{16^2 + (125,7 - 8)^2} = 118,8 \text{ Ом}.$$

Струм у ланцюзі за формулою (1) дорівнює

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{500}{118,8} = 4,2 \text{ А}.$$

Падіння напруги на котушці

$$U_L = X_L I = 125,7 \cdot 4,2 = 527,9 \text{ В},$$

на конденсаторі

$$U_C = X_C I = 8 \cdot 4,2 = 33,6 \text{ В},$$

на резисторі

$$U_R = RI = 16 \cdot 4,2 = 67,2 \text{ В}.$$

При розрахунку активної потужності треба враховувати кут зсуву фаз, а точніше, косинус цього куту – коефіцієнт  $\cos \varphi$ .

$$P = UI \cos \varphi. \quad (3)$$

Для визначення кута  $\varphi$  скористаємося векторною діаграмою, з якою

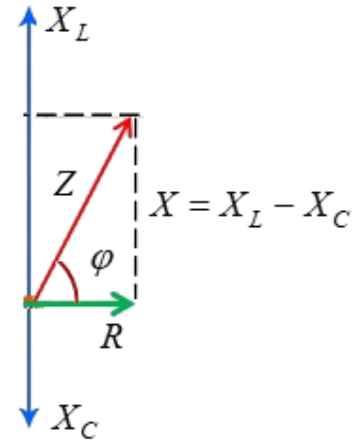
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{125,7 - 8}{16} = 7,36,$$

звідки кут зсуву фаз становить

$$\varphi = \operatorname{arctg}(7,36) = 82,3^\circ.$$

Отже, активна потужність (3) дорівнює

$$P = UI \cos \varphi = 500 \cdot 4,2 \cdot \cos 82,3^\circ = 282,7 \text{ Вт.}$$



**Відповідь:**  $I = 4,2 \text{ А}$ ;  $U_L = 527,9 \text{ В}$ ;  $U_C = 33,6 \text{ В}$ ;  $U_R = 67,2 \text{ В}$ ;  $P = 282,7 \text{ Вт}$ .

### 13.3. Задачі для самостійної роботи

**13.3.1.** Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 1 мкФ та котушки індуктивністю 4 Гн. Амплітуда коливань заряду на конденсаторі становить 100 мкКл. Написати залежності  $q(t)$ ,  $U(t)$  і  $I(t)$ . Визначити амплітуди коливань сили струму та напруги.

**Відповідь:**  $q = 10^{-4} \cos 500t$  Кл,  $U = 100 \cos 500t$  В,  $I = -0,05 \sin 500t$  А,  $I_m = 0,05$  А,  $U_m = 100$  В.

**13.3.2.** У коливальному контурі з індуктивністю  $L$  і електроємністю  $C$  конденсатор заряджений до максимальної напруги  $U_m$ . Якою буде сила струму у момент, коли напруга на конденсаторі зменшиться у 2 рази? Коливання вважати незгасаючими.

**Відповідь:**  $I = U_m \sqrt{\frac{3C}{4L}}$ .

**13.3.3.** Коливальний контур радіоприймача налаштований на частоту  $\nu = 6$  МГц. У скільки разів треба змінити ємність конденсатора контуру, щоб налаштуватися на довжину хвилі  $\lambda = 150$  м?

**Відповідь:** збільшити у 9 разів.

**13.3.4.** Рівняння зміни з часом струму в коливальному контурі має вигляд:  $I = -0,02 \sin(400\pi t)$  А. Індуктивність контуру дорівнює  $L = 1$  Гн. Знайти період коливань, ємність контуру, максимальну енергію електричного поля та максимальну енергію магнітного поля.

**Відповідь:**  $T = 5$  мс;  $C = 0,63$  мкФ;  $W_{\text{маг}} = 0,2$  мДж;  $W_{\text{ел}} = 0,2$  мДж.

**13.3.5.** Яку індуктивність треба підключити у коливальний контур, щоб при ємності  $C = 2$  мкФ отримати частоту  $\nu = 1000$  Гц.

**Відповідь:**  $L = 12,7$  мГн.

**13.3.6.** Коливальний контур складається з котушки індуктивності  $L = 0,2$  Гн та конденсатора ємності  $C = 10$  мкФ. У момент, коли напруга на конденсаторі

дорівнює  $U = 1$  В, струм у котушці дорівнює  $I = 10$  мА. Визначте значення сили струму  $I_1$  у контурі, коли енергія контуру виявиться порівну розподіленою між електричним та магнітним полями.

**Відповідь:**  $I_1 = 8,66$  мА

**13.3.6.** Визначити діюче значення сили струму на всіх ділянках кола, що складається з паралельно включених  $C, R, L$  та  $\mathcal{E}$ , якщо  $R = 1$  Ом,  $L = 1$  мГн,  $C = 0,110$  мкФ,  $\mathcal{E} = 30$  В,  $\omega = 1 \cdot 10^5$  с<sup>-1</sup>.

**Відповідь:**  $I = 0,03$  А.

**13.3.7.** Котушка індуктивності  $L = 1$  мкГн та повітряний конденсатор, що складається з двох круглих пластин діаметром 20 см кожна, з'єднані паралельно. Відстань між пластинами  $d = 1$  см. Визначити період  $T$  коливань.

**Відповідь:**  $T = 33,2$  нс.

**13.3.8.** Знайти співвідношення енергії магнітного поля коливального контуру до енергії його електричного поля  $W_{\text{маг}} / W_{\text{ел}}$  для моменту часу  $t = \frac{T}{8}$ , де  $T$  – період коливань.

**Відповідь:**  $W_{\text{маг}} / W_{\text{ел}} = 1$ .

**13.3.9.** Котушка з індуктивністю  $L = 30$  мкГн приєднана до плоского конденсатора з площею пластин  $S = 0,01$  м<sup>2</sup> та відстанню між ними  $d = 0,1$  мм. Знайти діелектричну проникність середовища  $\varepsilon$ , яке заповнює простір між пластинами, якщо контур налаштований на довжину хвилі  $\lambda = 750$  м.

**Відповідь:**  $\varepsilon = 6$ .

**13.3.10.** Коливальний контур складається з котушки індуктивності  $L = 0,2$  Гн та конденсатора ємності  $C = 20$  мкФ. Конденсатор заряджений до напруги  $U_m = 4$  В. Якими будуть струм, напруга та заряд у моменти часу, коли відношення енергії електричного та магнітного поля дорівнює  $W_{\text{маг}} / W_{\text{ел}} = 1/2$ ?

**Відповідь:**  $I = -3,24 \cdot 10^{-2}$  А,  $U = -2,35$  В,  $q = 4,7 \cdot 10^{-5}$  Кл.

**13.3.11.** У коливальному контурі, який складається з індуктивності та ємності, максимальний струм у котушці  $I_m = 1$  А, а максимальна напруга на

конденсаторі  $U_m = 1$  кВ. Через час  $1,57 \cdot 10^{-6}$  с, відлічуючи його від того моменту, коли напруга дорівнювала нулю, енергія у котушці дорівнюватиме енергії у конденсаторі. Обчислити період коливань контуру і його енергію (вважати омичний опір дуже малим, яким можна знехтувати).

**Відповідь:**  $T = 12,6 \cdot 10^{-6}$  с,  $W = 0,001$  Дж.

**13.3.12.** Період коливань контуру, який складається з індуктивності та ємності, становить  $10^{-5}$  с. Чому дорівнює максимальний струм у котушці, якщо максимальна різниця потенціалів на обкладках конденсатора становить 900 В? Максимальна енергія електричного поля дорівнює  $W_{\text{ел}} = 9 \cdot 10^{-4}$  Дж.

**Відповідь:**  $I_m = 1,256$  А.

**13.3.13.** Максимальна енергія магнітного поля коливального контуру дорівнює  $W_{\text{маг}} = 10^{-3}$  Дж при силі струму 0,8 А. Чому дорівнює частота коливань контуру, якщо максимальна різниця потенціалів на обкладках конденсатора становить 1200 В?

**Відповідь:**  $\nu = 0,76 \cdot 10^{-5}$  с $^{-1}$ .

**13.3.14.** Коливальний контур, підключений до генератора, містить резистор, опір якого  $R = 5$  Ом, котушку з індуктивністю  $L = 5$  Гн та конденсатор. Визначте електроємність конденсатора, якщо у контурі при частоті 1 кГц виникає резонанс. Знайдіть показання амперметра, включеного у коло, при резонансі, якщо діюча напруга на генераторі 220 В.

**Відповідь:**  $C = 8 \cdot 10^{-6}$  Ф,  $I = 44$  А.

**13.3.15.** У коло змінного струму частотою  $\nu = 50$  Гц послідовно включені резистор з опором  $R = 21$  Ом, котушка з індуктивністю  $L = 0,07$  Гн та конденсатор ємністю  $C = 82$  мкФ. Визначте індуктивний, ємнісний та повний опір кола, а також зсув фаз між силою струму та напругою.

**Відповідь:**  $X_L = 22$  Ом;  $X_C = 39$  Ом;  $Z = 27$  Ом;  $\varphi = 39^\circ$ .

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кучерук І. М. Загальний курс фізики, у трьох томах. Том 1. Механіка. Молекулярна фізика. Термодинаміка / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. Л. Луцик. – Київ : Техніка, 2007. – 269 с.
2. Кучерук І. М. Загальний курс фізики, у трьох томах. Том 2. Електрика і магнетизм / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. Л. Луцик. – Київ : Техніка, 2006. – 452 с.
3. Галушак М.О., Федоров О.Є. Курс фізики. Механіка, молекулярна фізика і термодинаміка. Івано-Франківськ, ІФНТУНГ, 2012, 610 с.
4. Галушак М.О., Федоров О.Є. Курс фізики. Електромагнетизм. Івано-Франківськ, ІФНТУНГ, 2016, 405 с.
5. 7. М.О. Галушак. Курс загальної фізики. Практичні заняття: У трьох книгах. Кн. 1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка: навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Місто НВ, 2003. – 156 с.
6. М.О. Галушак, Т.І. Луцишин, Ю.Б. Басараба. Курс загальної фізики. Практичні заняття: У трьох книгах. Кн. 2. Електромагнетизм: навчальний посібник. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2014. – 195 с.
7. Збірник задач з фізики: навч. посіб. / Андрейко А. М. [та ін.] ; за ред. І. Є. Лопатинського та А. М. Андрейка. – Львів : Вид-во Нац. ун-ту "Львів. політехніка", 2010. - 316 с.
8. Ігнатенко В.М. Посібник до практичних занять із фізики: у 3 ч. Част. 1/ В. М. Ігнатенко, В. Ф. Нефедченко, А. С. Опанасюк. – Суми : Сум. держ. ун-т, 2023. – 296 с.
9. Ігнатенко, В.М. Посібник до практичних занять з фізики : навч. посіб.; У 3-х ч. Ч.2 / В.М. Ігнатенко, В.Ф. Нефедченко, А.С. Опанасюк. - Суми : СумДУ, 2008. - 124 с.
10. Артеменко Ю.А. Фізика : навч. посіб. для студентів вищ. навч. закл. Ч. 1 / Артеменко Ю. А., Любименко О. М. – Луцьк : ДВНЗ "ДонНТУ", 2022. – 259 с.

## ЗМІСТ

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| ВСТУП                                            | 3   |
| 7. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА                            | 5   |
| 7.1. Теоретичні відомості                        | 5   |
| 7.2. Приклади розв'язання задач                  | 26  |
| 7.3. Задачі для самостійної роботи               | 57  |
| 8. ТЕРМОДИНАМІКА                                 | 59  |
| 8.1. Теоретичні відомості                        | 59  |
| 8.2. Приклади розв'язання задач                  | 75  |
| 8.3. Задачі для самостійної роботи               | 108 |
| 9. ЕЛЕКТРОСТАТИКА                                | 110 |
| 9.1. Теоретичні відомості                        | 110 |
| 9.2. Приклади розв'язання задач                  | 128 |
| 9.3. Задачі для самостійної роботи               | 160 |
| 10. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ                  | 163 |
| 10.1. Теоретичні відомості                       | 163 |
| 10.2. Приклади розв'язання задач                 | 180 |
| 10.3. Задачі для самостійної роботи              | 210 |
| 11. МАГНІТОСТАТИКА                               | 213 |
| 11.1. Теоретичні відомості                       | 213 |
| 11.2. Приклади розв'язання задач                 | 243 |
| 11.3. Задачі для самостійної роботи              | 277 |
| 12. ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ. РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА | 280 |
| 12.1. Теоретичні відомості                       | 280 |
| 12.2. Приклади розв'язання задач                 | 298 |
| 12.3. Задачі для самостійної роботи              | 322 |
| 13. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ. ЗМІННИЙ СТРУМ     | 325 |
| 13.1. Теоретичні відомості                       | 325 |
| 13.2. Приклади розв'язання задач                 | 341 |
| 13.3. Задачі для самостійної роботи              | 372 |
| СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ                                | 375 |



Навчальне видання

АНДРЕЄВ Олександр Миколайович  
ВЕРЕТЕННІКОВА Юлія Ігорівна  
ВОДОРІЗ Ольга Станіславівна  
ТАВРІНА Тетяна Володимирівна  
ГАПОЧЕНКО Світлана Дмитрівна  
ШЕЛЕСТ Тетяна Миколаївна  
ДРОЗДОВА Ганна Анатоліївна

## **ПОСІБНИК З ФІЗИКИ**

### **Частина 2**

## **МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА. ТЕРМОДИНАМІКА. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ**

Навчальний посібник у 3-х частинах  
для студентів першого бакалаврського рівня освіти  
усіх технічних спеціальностей

за редакцією О. А. Любченко

Відповідальна за випуск проф. Любченко О. А.  
Роботу до видання рекомендував доц. Дроздов А. М.

В авторській редакції

План 2023 р., поз. 131

Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 23,5.

---

Видавничий центр НТУ «ХПІ»  
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.  
61002, м. Харків, вул. Кирпичова, 2

---

Електронне видання