



Кафедра Фізики



Національний технічний університет
"Харківський політехнічний інститут"

ПОСІБНИК З ФІЗИКИ

Частина 3

ОПТИКА. АТОМНА І ЯДЕРНА ФІЗИКА

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

І. В. Галушак, О. А. Любченко, Ю. В. Меньшов, К. В. Мартинова,
А. О. Савченко, О. Б. Алмазова, Г. А. Дроздова, О. Г. Багмут

ПОСІБНИК З ФІЗИКИ
Частина 3
ОПТИКА.
АТОМНА І ЯДЕРНА ФІЗИКА

Навчальний посібник у 3-х частинах
для студентів першого бакалаврського рівня освіти
усіх технічних спеціальностей

За редакцією О. А. Любченко

Затверджено
редакційно-видавничою
радою НТУ «ХПІ»,
протокол № 3 від 24.10.2023 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2025

УДК 535+539.1(075.8)
П 61

Рецензенти:

Є. С. Сиркін, д-р фіз.-мат. наук, провідний науковий
співробітник, ФТІНТ НАНУ;
Д. Б. Глушкова, д-р техн. наук, проф., завідувачка кафедри
технології металів і матеріалознавства, ХНАДУ

П 61 **Посібник** з фізики. Частина 3. Оптика. Атомна і ядерна фізика :
навчальний посібник у 3-х частинах для студентів першого
бакалаврського рівня освіти усіх технічних спеціальностей /
І. В. Галушак, О. А. Любченко, Ю. В. Меньшов, К. В. Мартинова,
А. О. Савченко, О. Б. Алмазова, Г. А. Дроздова, О. Г. Багмут;
за ред. О. А. Любченко. – Харків : НТУ «ХПІ», 2025. – 359 с.

ISBN 978-617-05-0574-3

Навчальний посібник з курсу «Фізика» містить теоретичний матеріал, методичні
вказівки до розв'язання задач з прикладами розв'язаних задач та контрольні задачі з
відповідями з розділів, що розглядаються в курсі «Фізика» в НТУ «ХПІ».

Призначено для студентів першого бакалаврського рівня освіти усіх технічних
спеціальностей.

Іл. 89. Табл. 5. Бібліогр. 6 назв.

УДК 536+537(075.8)

© Галушак І. В., Любченко О. А., Меньшов Ю. В.,
Мартинова К. В., Савченко А. О., Алмазова О. Б.,
Дроздова Г. А., Багмут О. Г., 2025

ISBN 978-617-05-0574-3 © НТУ «ХПІ», 2025

ВСТУП

Основною ідеєю посібника, що пропонується, є намагання органічно поєднати в одному виданні висвітлення принципів теорії та практику розв'язання задач. Він пропонується студентам в якості одного з основних джерел, що може бути використаним під час вивчення курсу фізики. Його головна мета – ознайомити студентів з основними поняттями та методами фізики, роз'яснити зміст фізичних законів і явищ, навчити свідомо застосовувати отримані знання на практиці.

Посібник складається з трьох частин: Частина 1 «Механіка. Коливання та хвилі», Частина 2 «Молекулярна фізика. Термодинаміка. Електромагнетизм», Частина 3 «Оптика. Атомна і ядерна фізика» і містить 21 розділ. Він охоплює більшість тем, що розглядаються в основному курсі фізики в технічному університеті. На початку кожного розділу наводиться теоретичний матеріал з відповідної теми, для зручності використання поділений на підрозділи. Матеріал супроводжується ілюстраціями та практичними прикладами, основні поняття і визначення виділені жирним шрифтом. Наскільки це можливо, автори намагалися уникнути зайвої математизації, переносячи основний акцент на фізичну сутність питань, що розглядаються. В процесі підготовки посібника велика увага приділялася коректному застосуванню україномовної фізичної термінології на основі нової редакції Українського правопису, що був затверджений Постановою Кабінету Міністрів України у 2019 році

В другій частині кожного розділу пропонуються розібрані задачі, зміст яких тісно пов'язаний з теоретичною частиною. Задачі, що розглядаються, здебільшого є доповненням теоретичного матеріалу, його розвитком. Вони допомагають краще засвоїти матеріал і опанувати навички застосування математичних знань для прикладних цілей.

Третя частина кожного розділу, яка містить задачі для самостійної роботи з відповідями, дозволяє студентам перевірити своє розуміння тем і рівень

засвоєння теоретичного матеріалу і практичних методик, попрактикуватися в умінні розв'язувати фізичні задачі.

Усі викладки теоретичного матеріалу і розрахунки, що містяться у посібнику, проведені із використанням одиниць СІ (Системи Інтернаціональної). Застосування деяких загальноприйнятих несистемних одиниць оговорювалося окремо. В багатьох задачах, особливо коли розмірність результату не є очевидною, наведені перевірки розмірностей.

Підбір задач, що розглядаються у посібнику, проводився авторами протягом багатьох років викладання фізики: використовувалися задачі, взяті з численних джерел як вітчизняних, так і закордонних, зокрема, англомовних, а також з інтернету.

Така побудова посібника робить його дуже корисним для роботи в рамках онлайн навчання, самостійного освоєння матеріалу, підготовки до іспитів і заліків, а також для застосування як бази при вивченні предметів професійної підготовки. Він може бути застосованим для усіх тих, хто цікавиться фізикою і бажає поліпшити свій рівень її розуміння.

Матеріал посібника є узагальненням багаторічного досвіду колективу кафедри фізики НТУ «ХПІ». В редагуванні та написанні усіх розділів Посібника брала участь Любченко О.А. Авторами розділів, що увійшли в «Посібник з фізики. Частина 3. Оптика. Атомна та ядерна фізика» є

14	Хвильова оптика	Галушак І.В.
15	Елементи спеціальної теорії відносності	Любченко О.А.
16	Квантова оптика	Меньшов Ю.В., Мартинова К.В.
17	Атомна фізика. Борівська теорія атома	Савченко А.О.
18	Елементи квантової механіки	Любченко О.А.
19	Будова атомів і молекул	Любченко О.А.
20	Ядерна фізика. Радіоактивність	Алмазова О.Б.
21	Елементи фізики твердого тіла	Любченко О.А., Дроздова Г.А. Багмут О.Г.

14. ХВИЛЬОВА ОПТИКА

14.1. Теоретичні відомості

14.1.1. Оптика і її розділи. Геометрична оптика

Оптикою називається розділ фізики, в якому вивчаються властивості та взаємодія світла з речовиною. Вона поділяється на три основні частини: геометричну, хвильову і квантову оптики.

Якщо розповсюдження світла розглядається, відволікаючись від його природи та вважаючи, що світло розповсюджується вздовж ліній, які називаються світловими променями, то цей розділ називається **геометричною оптикою**.

В розділі, який називається **хвильова** або **фізична оптика**, розглядаються явища, які обумовлені хвильовою природою світла, припускаючи, що світло – це електромагнітна хвиля.

У **квантовій оптиці** вважається, що світло випромінюється, розповсюджується та поглинається у вигляді особливих частинок – фотонів.

В геометричній оптиці вивчаються закони поширення світла на основі уявлень про світлові промені. Під **світловим променем** розуміють геометричну лінію, що вказує напрямок перенесення світлової енергії, тобто це пучок світла малого поперечного перерізу.

Основними поняттями геометричної оптики є **абсолютний показник заломлення** (n) – відношення швидкості світлової хвилі (c) у вакуумі до швидкості світла (v) у деякому середовищі

$$n = \frac{c}{v}. \quad (14.1)$$

Оскільки $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, а $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}}$, то

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\varepsilon \mu} \approx \sqrt{\varepsilon}, \quad (14.2)$$

де ε_0 та μ_0 – електрична і магнітна сталі, ε і μ – діелектрична та магнітна проникності речовини, при цьому для більшості речовин $\mu \sim 1$.

Довжина світлової хвилі пов'язана зі швидкістю хвилі і її частотою (ν) через співвідношення: у вакуумі $\lambda = c/\nu$ і в середовищі $\lambda_{\text{сер}} = v/\nu$. Тоді,

$$n = \frac{\lambda}{\lambda_{\text{сер}}}. \quad (14.3)$$

Основні закони геометричної оптики

1. Закон прямолінійного поширення світла: в однорідному середовищі світло розповсюджується прямолінійно.

2. Закон незалежного поширення світлових променів: у потоці світла промені не впливають один на одного і поширюються незалежно так, ніби інших променів не існує (*принцип суперпозиції хвиль*).

3. Закон відбивання світла: відбитий промінь (2) лежить в одній площині з променем (1), що падає, і перпендикуляром, поставленим в точку падіння променя O , причому кут падіння дорівнює куту відбиття: $\alpha = \beta$ (рис. 14.1). Кути падіння α і відбивання β відраховуються від перпендикуляра, проведеного в точку падіння променя.

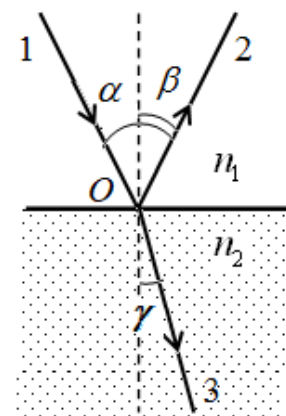


Рисунок 14.1

4. Закон заломлення світла (закон Снеліуса): падаючий (1) та заломлений (3) промені лежать в одній площині з перпендикуляром, поставленим в точку падіння променя O , причому відношення синуса кута падіння (α) до синуса кута заломлення (γ) є величиною сталою для цих двох середовищ и називається *відносним показником заломлення* (n_{21}) другого середовища відносно першого:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (14.4)$$

де n_1 та n_2 – абсолютні показники заломлення.

Показник заломлення середовища відносно вакууму називають **абсолютним показником заломлення** цього середовища. Як видно з (14.4), відносний показник заломлення можна виразити через абсолютні показники заломлення n_1 та n_2 першого і другого середовища.

5. Принцип зворотності світла. З симетрії виразу (14.4) $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \gamma$ випливає зворотність світлових променів. Якщо обернути промінь 3 та примусити його падати на межу розділу під кутом γ , тоді заломлений промінь в першому середовищі буде розповсюджуватися під кутом α , тобто буде спрямований у зворотному напрямку вздовж променя 1.

6. Принцип Ферма: світло поширюється по такому шляху, при якому час, необхідний для його проходження від однієї точки до іншої, має найменше значення.

14.1.2. Інтерференція світлових хвиль

Якщо два промені, розповсюджуючись у двох середовищах з показниками заломлення n_1 та n_2 , проходять відстані s_1 та s_2 , то ці відстані називаються **геометричними довжинами шляху**.

Оптична довжина шляху (L) – величина, що дорівнює добутку показника заломлення середовища та геометричної довжини шляху (s):

$$L = n \cdot s. \quad (14.5)$$

Оптична різниця ходу (Δ) – різниця оптичних довжин шляху

$$\Delta = L_1 - L_2. \quad (14.6)$$

Оптична різниця ходу двох хвиль пов'язана з різницею фаз ($\Delta\varphi$) двох світлових хвиль співвідношенням

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta. \quad (14.7)$$

Когерентність – узгоджене протікання в просторі та часі декількох коливальних або хвильових процесів, при якому різниця їхніх фаз залишається сталою. **Когерентними** називаються **монохроматичні** (тобто ті, які мають однакову частоту) хвилі, які характеризуються незмінною в часі різницею фаз.

Хвилі від незалежних джерел не є когерентними. При складанні хвиль від двох і більше незалежних джерел різниці фаз коливань світлового вектора змінюються швидко і довільно. Інтенсивність, яка спостерігається при накладенні некогерентних хвиль, дорівнює сумі інтенсивностей, що створюються кожною з хвиль окремо. При одночасному розповсюдженні декількох хвиль коливання в деякій точці середовища є геометричною сумою коливань, які здійснювалися б у цій точці при розповсюдженні кожної з хвиль окремо, тобто, хвилі накладаються одна на одну без відшкодування (**принцип суперпозиції**).

Якщо коливання, обумовлені окремими хвилями в кожній з точок середовища, мають постійну різницю фаз, тобто хвилі є когерентними, то при їх накладенні виникає **явище інтерференції**.

Нехай хвилі, що йдуть від двох близько розташованих джерел, в деякій точці, значно віддаленій від них, викликають коливання одного напрямку, амплітуда яких

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi. \quad (14.8)$$

Оскільки інтенсивність I хвиль пропорційна A^2 , то

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos \Delta\varphi. \quad (14.9)$$

Якщо інтенсивності хвиль, що йдуть від джерел, рівні $I_1 = I_2 = I_0$, то результуюча інтенсивність дорівнює

$$I = 2I_0 + 2I_0 \cos \Delta\varphi. \quad (14.10)$$

Інтенсивність у тих точках, куди приходять хвилі з різницями ходу Δ , для яких косинус різниці фаз $\Delta\varphi$ набуває максимального та мінімального значень ± 1 , становлять:

$$1. \cos \Delta\varphi = 1 \Rightarrow \Delta\varphi = \pm 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$3 \text{ (14.7)} \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \pm 2\pi k, \text{ звідки різниця ходу дорівнює}$$

$$\Delta = \pm k\lambda = \pm 2k \frac{\lambda}{2}. \quad (14.11)$$

Умова **інтерференційного максимуму** – точки, де інтенсивність $I = 4I_0$, в оптичній різниці ходу двох когерентних хвиль має укладатися **парна** кількість півхвиль.

$$2. \Delta\varphi = -1 \Rightarrow \Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \pm(2k+1)\pi.$$

Різниця ходу дорівнює

$$\Delta = \pm(2k+1) \frac{\lambda}{2}. \quad (14.12)$$

Умова **інтерференційного мінімуму** – точки, де інтенсивність $I = 0$, в оптичній різниці ходу двох когерентних хвиль має укладатися **непарна** кількість півхвиль.

Інтерференція – явище перерозподілу інтенсивності світлового потоку, що виникає при накладанні когерентних хвиль, в результаті якого в одних місцях виникають максимуми інтенсивності, а в інших – мінімуми інтенсивності.

Необхідною умовою інтерференції хвиль є когерентність – узгоджений перебіг в часі та просторі.

Для отримання когерентних хвиль необхідно розділити хвилю від одного джерела на дві чи більше хвиль, примусити їх пройти різні оптичні шляхи та накласти одна на одну. Це можна зробити за допомогою екранів та щілин, дзеркал та заломлюючих тіл.

Для розуміння того, як можна отримати когерентні хвилі на практиці, розглянемо принцип Гюйгенса.

Принцип Гюйгенса: кожна точка хвильового фронту є джерелом вторинних хвиль, а обвідна цих хвиль дає положення хвильового фронту через інтервал часу Δt (рис. 14.2).

Оскільки для отримання інтерференційної картини необхідно мати два (або більше) когерентних джерела, а природні джерела не є когерентними, тому для реалізації явища інтерференції необхідно «змусити хвилю інтерферувати саму з собою». Всі методи отримання когерентних хвиль базуються на двох основних принципах: отриманням когерентних хвиль шляхом *поділу хвильового фронту* та шляхом *поділу амплітуди*.

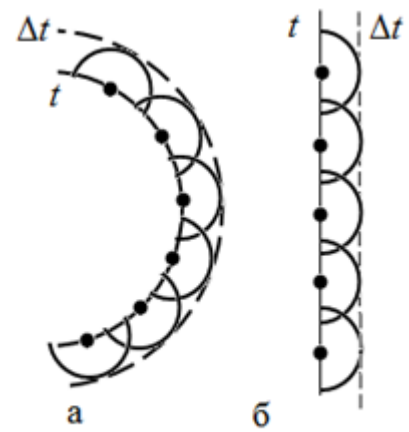


Рисунок 14.2

До першого методу належать: двощілинний метод Юнга (рис. 14.3), дзеркала Френеля, біпризма Френеля тощо. Для них загальним є те, що джерело світла за допомогою отворів або дзеркал поділяється на два когерентних джерела, вторинні хвилі від яких можуть інтерферувати.

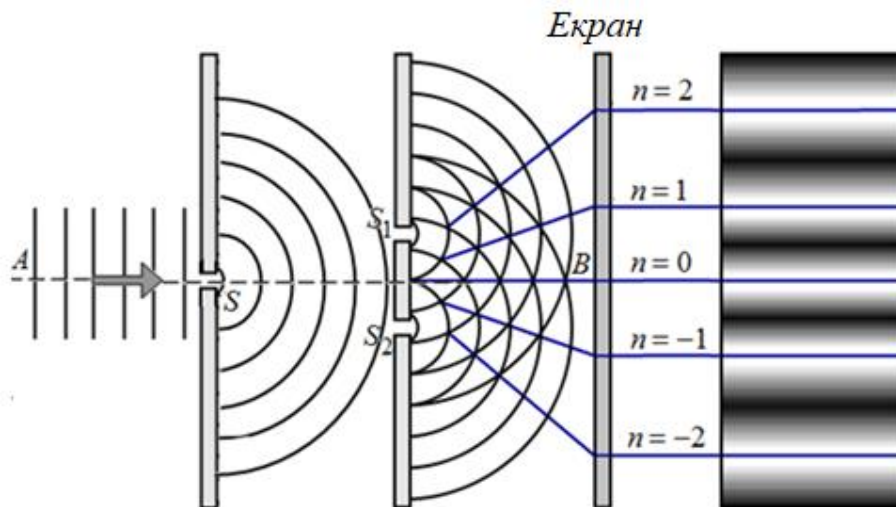


Рисунок 14.3

Метод поділу амплітуди реалізується тоді, коли падаючий промінь частково відбивається від верхньої, а частково – від нижньої поверхні тонкого прозорого матеріалу. Бувши отриманими з однієї падаючої хвилі, відбиті хвилі мають однакову частоту і постійну різницю фаз з падаючою. Саме ці хвилі формують інтерференційну картину. Таке явище спостерігається в тонких плівках.

14.1.3. Інтерференція від двох джерел. Двощілинний метод Юнга

Від джерела світла S – яскраво освітленої щілини (рис. 14.4) – світлова хвиля падає на екран з двома вузькими рівновіддаленими від джерела щілинами S_1 та S_2 . Ці щілини стають джерелами когерентних хвиль, при накладанні яких на екрані спостерігається інтерференційна картина. Цей метод називається **двощілинний метод Юнга**.

Знайдемо координати точок на екрані, розташованому в області перекриття цих хвиль (в полі інтерференції), в яких спостерігаються інтерференційні максимуми та мінімуми.

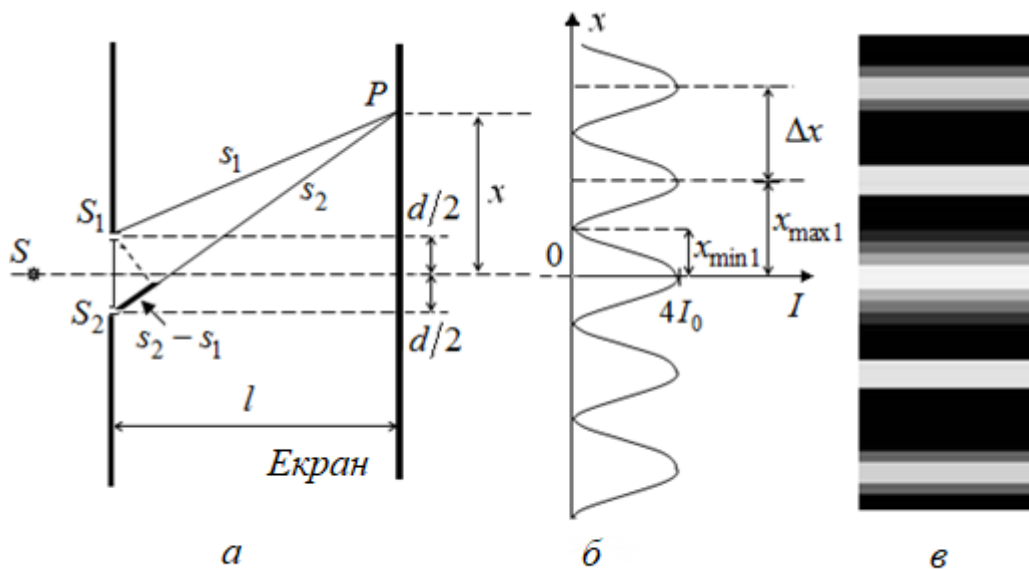


Рисунок 14.4

Позначимо d – відстань між джерелами, l – відстань до екрана, x – координати точки.

$$\begin{cases} s_1^2 = l^2 + \left[x - (d/2) \right]^2, \\ s_2^2 = l^2 + \left[x + (d/2) \right]^2, \end{cases}$$

$$s_2^2 - s_1^2 = l^2 + x^2 + xd + (d^2/4) - l^2 - x^2 + xd - (d^2/4) = 2xd,$$

$$s_2^2 - s_1^2 = 2xd.$$

Розкладемо різницю квадратів $s_2^2 - s_1^2 = (s_2 + s_1) \cdot (s_2 - s_1)$. Оскільки $d \ll l$ та $x \ll l$, то будемо вважати, що $(s_2 + s_1) \approx 2l$. Тоді,

$$s_2^2 - s_1^2 = (s_2 + s_1) \cdot (s_2 - s_1) \approx 2l(s_2 - s_1) = 2xd.$$

Помножимо обидві частини виразу $2l(s_2 - s_1) = 2xd$ на показник заломлення n і отримаємо

$$2l \cdot n(s_2 - s_1) = 2l \cdot \Delta = 2nxd.$$

Оптична різниця ходу

$$\Delta = \frac{xd}{l} n.$$

Використовуючи умови інтерференційних максимумів (14.11) та мінімумів (14.12), а також те, що довжина хвилі у вакуумі λ_0 і довжина хвилі у середовищі $\lambda_{\text{сеп}}$ пов'язані з показником заломлення n середовища співвідношенням (14.3)

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_{\text{сеп}}}{n}, \text{ отримаємо}$$

– **координати інтерференційних максимумів:**

$$\Delta = \pm 2k \frac{\lambda_0}{2} = \frac{xd}{l} n,$$

$$x_{\text{max}} = \pm 2k \cdot \frac{\lambda_0 \cdot l}{2nd} = \pm 2k \cdot \frac{l}{2d} \cdot \frac{\lambda_0}{n} = \pm 2k \cdot \frac{l \cdot \lambda_{\text{сеп}}}{2d}; \quad (14.13)$$

– **координати інтерференційних мінімумів:**

$$\Delta = \pm (2k + 1) \frac{\lambda_0}{2} = \frac{xd}{l} n,$$

$$x_{\text{min}} = \pm (2k + 1) \cdot \frac{\lambda_0 \cdot l}{2nd} = \pm (2k + 1) \cdot \frac{l}{2d} \cdot \frac{\lambda_0}{n} = \pm (2k + 1) \cdot \frac{l \cdot \lambda_{\text{сеп}}}{2d}. \quad (14.14)$$

Відстань між двома сусідніми максимумами (мінімумами) – **ширина інтерференційної смуги**

$$\Delta x = x_{\text{max}1} - x_{\text{max}0} = \frac{\lambda_0 \cdot l}{d \cdot n} = \frac{\lambda_{\text{сеп}} \cdot l}{d}. \quad (14.15)$$

Ця формула дозволяє розрахувати довжину хвилі використовуючи інтерференційну картину.

14.1.4. Інтерференція у тонких плівках

Отримання інтерференційної картини в тонких плівках базується на принципі поділу амплітуди падаючої хвилі.

При падінні світлової хвилі під кутом α на тонку прозору плівку з коефіцієнтом заломлення n та товщиною b хвиля частково відбивається, а частково заломлюється, входить в плівку, відбивається від нижньої поверхні, знову заломлюється і виходить з плівки (рис. 14.5). Промінь $1'$, що є результатом відбиття променя 1 в точці C , і промінь $2'$, який після проходження променя 2 в тонкій плівці вийшов з неї після заломлення в точці C , є когерентними та можуть

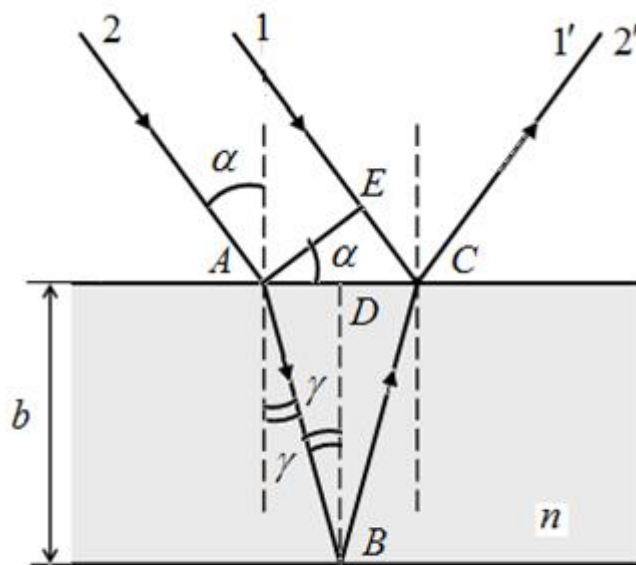


Рисунок 14.5

інтерферувати. Вид інтерференційної картини залежить від їх оптичної різниці ходу Δ .

З геометричних міркувань і законів геометричної оптики оптична різниця ходу становить $2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$. Крім того, треба врахувати те, що падаюча хвиля в точці падіння частково відбивається від оптично більш щільного середовища,

в результаті чого її фаза змінюється на π . Згідно з формулою $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta$, яка пов'язує оптичну різницю фаз з оптичною різницею ходу, отримуємо $\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta'$, звідки знаходимо додаткову різницю ходу $\Delta' = \frac{\lambda}{2}$, яку необхідно врахувати в загальній різниці ходу.

Отже, **різниця ходу**, яку набувають хвилі при падінні світла на тонку плоскопаралельну плівку (пластинку), складає

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \pm \frac{\lambda}{2}. \quad (14.16)$$

Умови інтерференції будуть однакові для променів з кутом падіння α , тобто променів, які мають однаковий кут нахилу до поверхні плівки. Тому інтерференційна картина в разі плоскопаралельної пластини має назву **смуги рівного нахилу**.

Якщо на тонку плівку у вигляді клину, показник заломлення матеріалу якої n , падає паралельний пучок світла під кутом α , то промені, що відбилися від різних поверхонь плівки, не будуть паралельними. Різниця ходу залежить від товщин плівки в цих місцях. Однаковим товщинам плівки b будуть відповідати однакові умови інтерференції. Інтерференційна картина буде локалізована поблизу поверхні клину. Якщо поверхні клину ідеально плоскі, то інтерференційна картина матиме вигляд світлих і темних смужок, що йдуть паралельно ребру клина, що проходить через точку O (рис. 14.6).

З урахуванням додаткової різниці ходу, пов'язаної з відбиттям, оптична різниця ходу при відбитті на клині становить

$$\Delta = 2bn \cdot \cos(\gamma + \varphi) \pm \frac{\lambda}{2}, \quad (14.17)$$

де γ – кут заломлення, φ – кут клину, b – товщина плівки в місці формування інтерференційної картини.

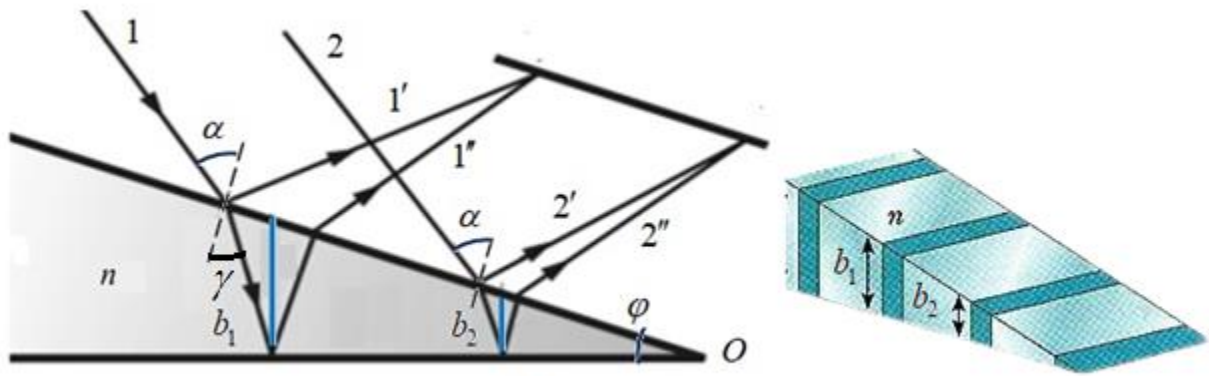


Рисунок 14.6

Для тонкої плівки у вигляді клину з дуже малим кутом при вершині φ однакові умови інтерференції будуть для місць однакової товщини, тому відповідну інтерференційну картину називають **смуги рівної товщини**. Одним із прикладів інтерференційної картини у вигляді смуг рівної товщини є **кільця Ньютона**.

Якщо світло падає нормально до плоскої поверхні тонкої плоско-опуклої лінзи з радіусом кривизни R , що лежить опуклою стороною на плоскій поверхні (рис. 14.7, а). Отримана інтерференційна картина має вигляд темних і світлих концентричних кіл, що чергуються, – **кільця Ньютона** (при похилому падінні – еліпсів).

Роль тонкої плівки змінної товщини грає проміжок між лінзою і пластинкою b , на якій лежить лінза. В загальному випадку цей проміжок може бути заповнений прозорою речовиною з показником заломлення n або повітрям. Падаючий промінь (1) частково відбивається в точці A (промінь $1'$), частково проходить проміжок AB і відбивається в точці B (промінь $1''$). Якщо спостерігати кільця Ньютона **у відбитому світлі**, то оптична різниця ходу дорівнює подвоєній ширині проміжку, помноженій на показник заломлення n того середовища, яким заповнений цей проміжок, тобто $2bn$. Внаслідок відбиття світлової хвилі в точці A до різниці ходу необхідно додати півхвилі. Остаточно, різниця ходу становить

$$\Delta = 2bn + \frac{\lambda}{2}. \quad (14.18)$$

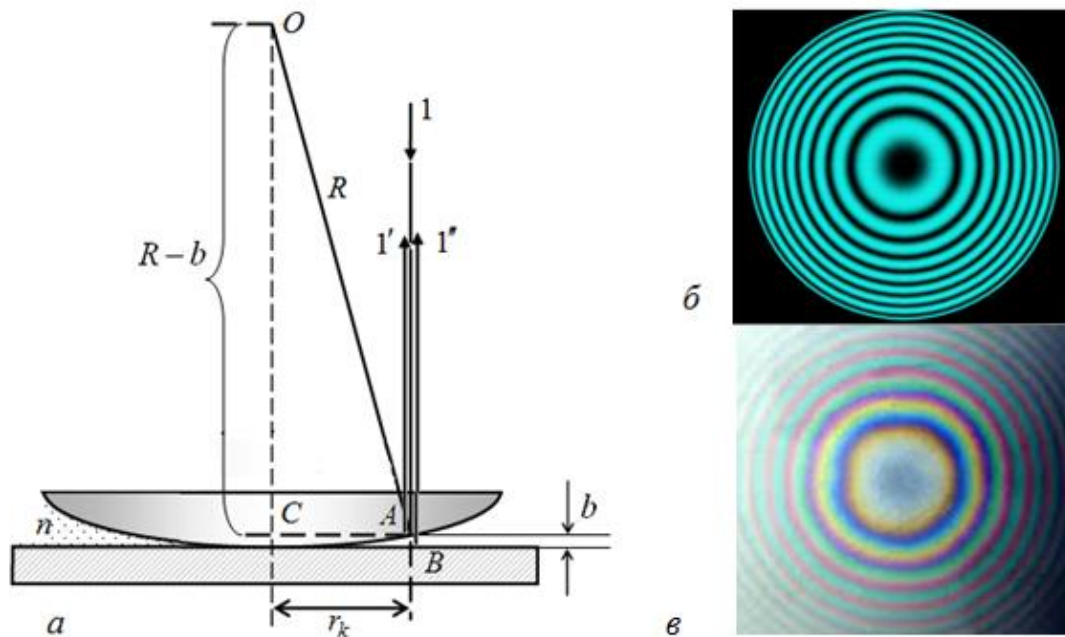


Рисунок 14.7

$$\text{З } \triangle COA \quad R^2 = (R-b)^2 + r^2 = R^2 - 2Rb + b^2 + r^2.$$

Ширина проміжку зв'язана із радіусом кільця Ньютона за умови нехтування величиною b^2 (оскільки $b \ll R$ й $b \ll r$)

$$b = \frac{r^2}{2R}. \quad (14.19)$$

Прирівнюючи різницю ходу (14.18) до умови інтерференційного максимуму

$$\Delta = 2k \cdot \frac{\lambda}{2},$$

$$2bn + \frac{\lambda}{2} = 2k \frac{\lambda}{2}, \quad 2bn = \frac{2nr^2}{2R} = (2k-1) \frac{\lambda}{2},$$

отримаємо **радіуси світлих кілець** Ньютона (k – номер кільця)

$$r_k = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2n}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (14.20)$$

Аналогічно, застосовуючи умову інтерференційного мінімуму

$$\Delta = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2},$$

$$2bn + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad 2bn = \frac{2nr^2}{2R} = 2k\frac{\lambda}{2},$$

отримаємо *радіуси темних кілець* Ньютона

$$r_k = \sqrt{\frac{kR\lambda}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (14.21)$$

Значенню $k = 0$ для радіусів темних кілець відповідає $r_k = 0$, тобто в точці торкання лінзи та пластинки, на якій вона лежить, спостерігається мінімум інтенсивності – темна пляма.

При освітленні монохроматичним світлом радіус кілець зростає зі збільшенням довжини хвилі (рис. 14.7, б), а при освітленні білим світлом світлі кільця мають райдужне забарвлення, при цьому колір кожного кільця змінюється в міру зростання відстані від центру від фіолетового до червоного (рис. 14.7, в).

Кільця Ньютона можна спостерігати не тільки у відбитому, але й у світлі, що проходить. Інтерференційні картини у цих випадках взаємно доповнюють одна одну. У тих місцях, де у відбитому світлі спостерігаються максимуми інтерференції (світлі кільця), у світлі, що проходить, спостерігаються мінімуми (темні кільця). Однак, якщо у відбитому світлі інтерферують пучки приблизно однакової інтенсивності, то у світлі, що проходить, – пучки суттєво відрізняються інтенсивністю, тому інтерференційна картина буде менш виразною. Завдяки цьому спостереження кілець Ньютона проводять, як правило, у відбитому світлі.

На практиці кільця Ньютона використовуються для вимірювання радіусів кривизни поверхонь, довжин хвиль світла та показників заломлення. В оптичній промисловості з їх допомогою контролюють правильність сферичної поверхні лінзи. Якщо шліфування поверхні лінзи погане, то кільця Ньютона мають спотворену форму.

14.1.5. Дифракція. Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракція Френеля

Дифракцією називається сукупність явищ, які спостерігаються при поширенні світла в середовищі з різкими неоднорідностями (поблизу меж непрозорих або прозорих тіл; малих отворів тощо), і пов'язаних з відхиленнями від законів геометричної оптики. Іншими словами, дифракція полягає у відхиленні світлових хвиль від прямолінійного поширення та обгинанні світловою хвилею об'єктів, розміри яких порівнянні з довжиною хвилі цього світла.

Спільним між інтерференцією і дифракцією є те, що в обох явищах спостерігається перерозподіл світлового потоку, який відбувається при суперпозиції когерентних хвиль.

Різниця полягає в тому, що інтерференція відбувається від кінцевого числа дискретних джерел, а дифракція – від нескінченного числа безперервно розташованих джерел.

Коли світлові хвилі оминають перешкоди з розмірами порядку довжини хвилі світла, вони можуть проникати в область так званої геометричної тіні (рис. 14.8). Це явище можна пояснити принципом Гюйгенса, згідно з яким кожна точка хвильового фронту є джерелом вторинної хвилі. Обвідна цих хвиль, яка завдає положення хвильового фронту в наступний момент часу, потрапляє в область тіні.

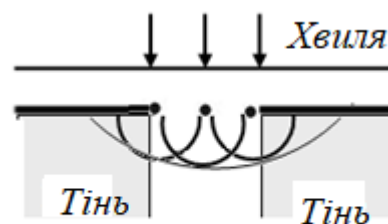


Рисунок 14.8

Принцип Гюйгенса був доповнений Френелем, що дало змогу розрахувати інтенсивність вторинних хвиль, які формують дифракційну картину. Згідно з **принципом Гюйгенса-Френеля**

- усі вторинні джерела фронту хвилі, які виходять з одного джерела, когерентні між собою;
- рівні за площею ділянки хвильової поверхні випромінюють рівні інтенсивності;

– для вторинних джерел діє принцип суперпозиції: кожна ділянка хвильової поверхні випромінює незалежно від інших;

– кожен елемент хвильової поверхні випромінює переважно в напрямку зовнішньої нормалі до хвильової поверхні, при цьому амплітуда вторинної сферичної хвилі пропорційна площі dS елементу. Результируюче коливання в точці спостереження визначається формулою

$$E = \int_S K(\varphi) \cdot \frac{A}{r} \cdot \cos(\omega t - kr + \alpha) dS, \quad (14.22)$$

де E – модуль світлового вектора, A – амплітуда світлового коливання, r – відстань від елементу dS до точки спостереження, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число, $K(\varphi)$ – коефіцієнт, який залежить від кута φ між нормаллю до площинки dS і напрямком від dS до точки спостереження.

Застосування формули (14.22) є досить складним за математичної точки зору, але Френелем був запропонований метод, який можна застосовувати для випадків, що характеризуються певною симетрією, наприклад, для сферичної хвилі.

За умови використання **методу зон Френеля**, сферичний фронт хвилі, що випромінюється джерелом S , поділяється на кільцеві зони, відстані яких від точки спостереження P визначаються як $b_k = b + k \frac{\lambda}{2}$ (рис. 14.9). В результаті коливання в точці P , які приходять від двох сусідніх зон, знаходяться у протифазі, оскільки різниця ходу між ними дорівнює півхвилі. Отже, інтерферуючи, вторинні хвилі від сусідніх зон гасять одна одну.

Вважаючи, що площі сусідніх зон приблизно дорівнюють одна одній, а амплітуди коливань, що збуджуються в точці спостереження зонами Френеля, утворюють монотонно спадну послідовність $A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_{k-1} > A_k$, оскільки зі збільшенням номера зони зростає кут φ між нормаллю до площі зони та напрямком на точку спостереження. При цьому амплітуди хвиль, які приходять

в точку P від сусідніх зон, можна вважати рівними. Тоді амплітуда в точці спостереження

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots \quad (14.23)$$

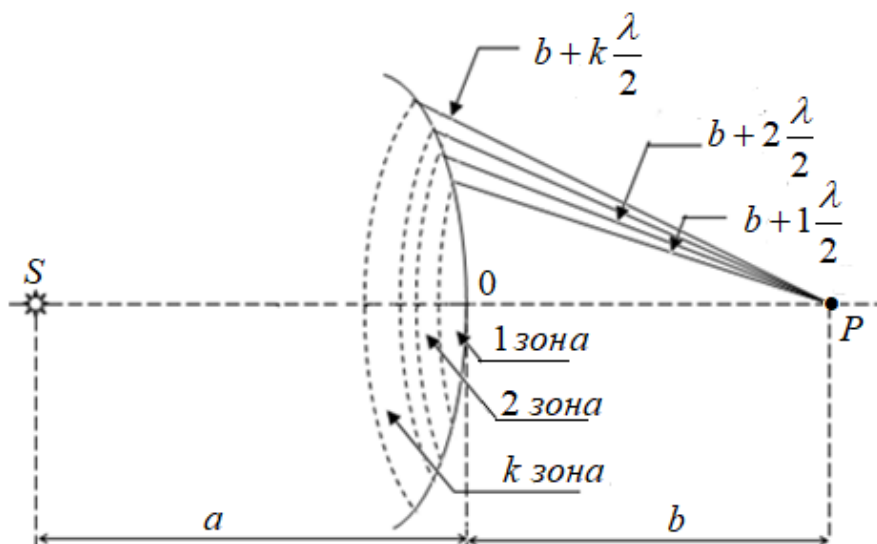


Рисунок 14.9

З аналізу (14.23) видно, якщо

– відкритим є увесь фронт, то результуюча амплітуда $A = \frac{A_1}{2}$, оскільки усі суми у дужках дорівнюють нулю. Інтенсивність в точці спостереження P , що визначається квадратом амплітуди, дорівнює $I = A^2 = A_1^2/4$;

– відкритою є перша зона, тоді $A = A_1$. Інтенсивність $I = A^2 = A_1^2$, тобто інтенсивність в точці спостереження є в 4 рази більшою, ніж при повністю відкритому екрані;

– відкритими залишаються дві зони, то $A = A_1 - A_2 = 0$, а інтенсивність $I = 0$;

– відкриті три зони, то результуюча амплітуда $A = A_1 - A_2 + A_3 = A_1$;

– відкритими є чотири зони: $A = 0$, і так далі.

Для невеликих k , якщо в отворі укладається непарне число зон Френеля, то у центрі дифракційної картини спостерігається максимум – світла пляма, а якщо число парне – темна пляма. При великій кількості відкритих зон світло від

джерела S до точки спостереження P поширюється вздовж SP практично прямолінійно, в результаті чого результуюча амплітуда $A = \frac{A_1}{2}$.

Радіус k -ої зони Френеля визначається за формулами:

1. у разі сферичної хвилі ($a \approx b$)

$$r_k = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} k \lambda ; \quad (14.24)$$

2. у разі плоскої хвилі ($a \gg b$)

$$r_k = \sqrt{bk\lambda} . \quad (14.25)$$

Дифракція Френеля або **дифракція в променях, що сходяться**, спостерігається на кінцевій відстані від перешкоди. У цьому випадку на шляху сферичної світлової хвилі знаходиться непрозорий екран з **круглим отвором**, центр якого розташовується на осі симетрії хвильового фронту. Вид дифракційної картини залежить від числа зон Френеля, на яке можна розбити відкриту частину хвильової поверхні. Амплітуда результуючого коливання в точці спостереження, яке збуджується усіма зонами, що потрапляють у круглий отвір, дорівнює

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - \dots + (-1)^{k-1} A_k = \begin{cases} \frac{A_1 + A_k}{2}, & \text{при } k - \text{непарному,} \\ \frac{A_1 - A_k}{2}, & \text{при } k - \text{парному.} \end{cases} \quad (14.26)$$

Отже, в залежності від кількості k відкритих зон у центрі дифракційної картини спостерігається: світла пляма (дифракційний максимум) при непарному k і темна точка (мінімум інтенсивності) при парному k (рис. 14.10).

Дифракція Френеля може спостерігатися також і на інших об'єктах, наприклад, на непрозорому диску (рис. 14.11, а), на краю напівплощини (рис. 14.11, б) тощо.

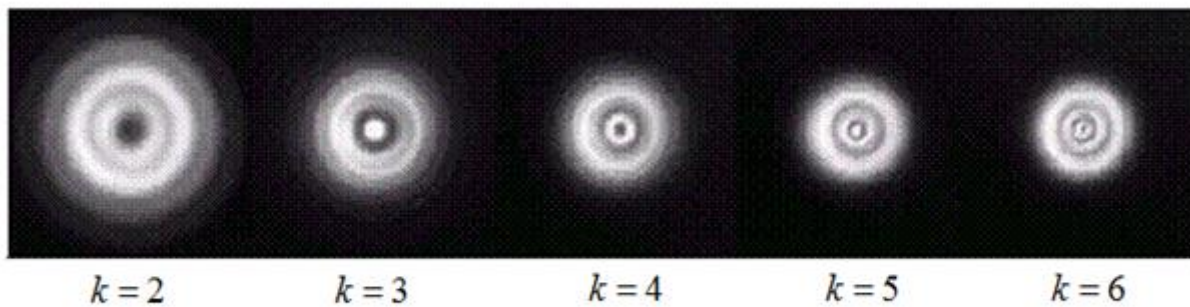


Рисунок 14.10

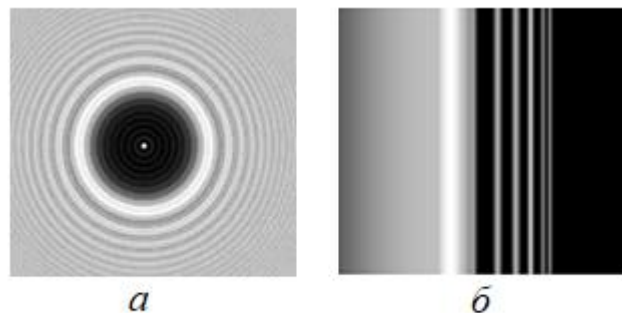


Рисунок 14.11

14.1.6. Дифракція Фраунгофера. Дифракційна решітка

Дифракція Фраунгофера або **дифракція в паралельних променях**. спостерігається тоді, коли дифракційна картина формується на досить великій відстані від перешкоди, на яку падає електромагнітна хвиля (світло). Оскільки джерело променів розташоване на значній відстані від перешкоди, то можна вважати, що хвиля є плоскою.

На щілину шириною b , яка набагато більше її довжини, падає плоска світлова хвиля від точкового джерела, що знаходиться у фокусі збиральної лінзи. Завдяки цьому після заломлення в лінзі отримується паралельний пучок світла. Такий пучок можна отримати також використовуючи лазер. Коли пучок променів потрапляє на щілину, у фокальній площині іншої збиральної лінзи, що розміщена між щілиною і екраном, спостерігається дифракційна картина. Без дифракційних ефектів в разі виконання закону прямолінійного поширення світла, на екрані було б зображення джерела світла (щілини). Але внаслідок дифракції на екрані

формується інтерференційна картина (перерозподіл енергії світлової хвилі), при цьому в її створенні беруть участь когерентні вторинні хвилі, які походять з точок хвильового фронту, що потрапляє в щілину. До речі, саме тому дифракцію визначають як інтерференцію вторинних хвиль.

На екрані в побічному фокусі лінзи збираються всі промені, що падають під кутом ψ до оптичної осі лінзи (рис. 14.12, *a*). Оптична різниця ходу Δ між крайніми променями MK і NL , що йдуть в довільному напрямку ψ , становить

$$\Delta = NC = b \sin \psi. \quad (14.27)$$

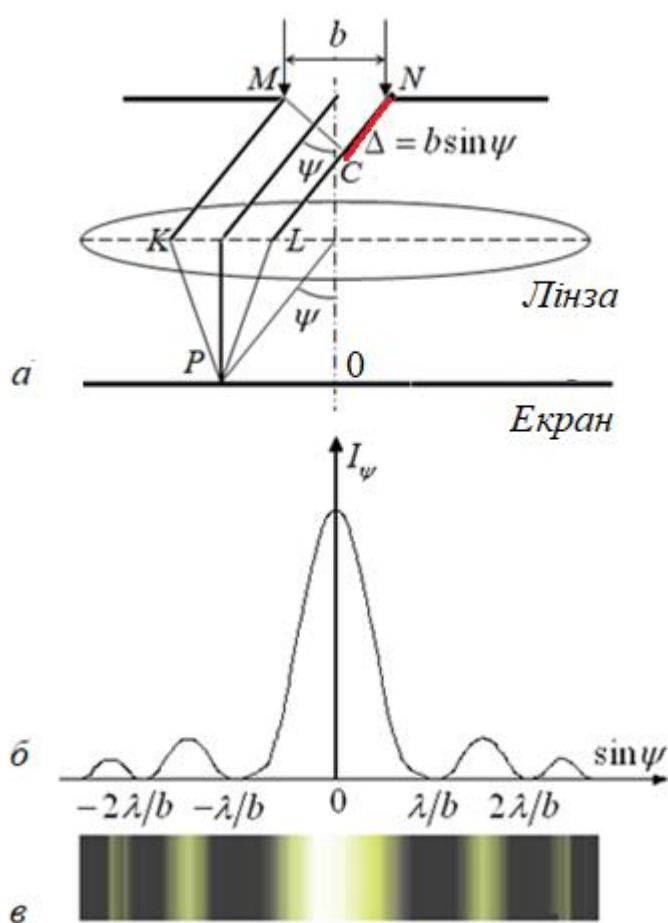


Рисунок 14.12

Розіб'ємо щілину на зони, які у такому випадку мають вигляд смуг, паралельних ребру щілини. Ширина кожної зони обирається так, щоб різниця ходу променів від країв цих зон дорівнювала $\lambda/2$. Випромінювання, що виходять від сусідніх зон, знаходяться у протифазі, тому при інтерференції амплітуда результуючого коливання дорівнює нулю, оскільки ці коливання

взаємно гасять одне одного. Коли число зон парне, то в точці P спостерігається **дифракційний мінімум**

$$b \sin \psi = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \text{ де } k = 1, 2, 3, \dots \quad (14.28)$$

Якщо число зон **непарне**, то в точці P – **дифракційний максимум**

$$b \sin \psi = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \text{ де } k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (14.29)$$

де k – порядок дифракційного мінімуму чи максимуму.

В напрямку $\psi = 0$ спостерігається найбільш інтенсивний центральний максимум нульового порядку. Розподіл інтенсивності та вид дифракційної картини показані на рис. 14.12, б, в.

Дифракційна решітка – система великого числа однакових і паралельних одна одній щілин шириною b кожна, що лежать в одній площині, і розділених непрозорими рівними проміжками a (рис. 14.13). У якісних дифракційних решіток кількість щілин досягає $10^7 - 10^8$ штрихів (щілин) на міліметр.

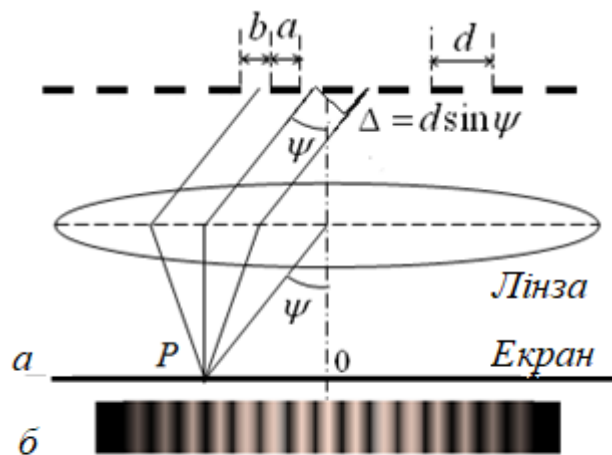


Рисунок 14.13

Величина $d = a + b$ називається **періодом (сталюю) дифракційної решітки**.

Різниці ходу променів, що йдуть від двох сусідніх щілин, для кута дифракції ψ будуть однаковими в межах всієї дифракційної решітки і дорівнюватимуть

$\Delta = d \sin \psi$. У тих напрямках, для яких різниця ходу дорівнює парному числу півхвиль, спостерігається максимум.

Умова **дифракційного максимуму** (або **рівняння решітки**) є

$$d \sin \psi = \pm k \lambda, \quad (14.30)$$

де d – стала дифракційної решітки, $k = 0, 1, 2, \dots$ – **порядок дифракційного максимуму**.

Умова **дифракційного мінімуму** для дифракційної решітки збігається з умовою мінімуму для однієї щілини

$$b \sin \psi = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad (14.31)$$

де b – ширина щілини, $k = 1, 2, 3, \dots$ – **порядок дифракційного мінімуму**.

Якщо дифракційна картина освітлюється білим світлом, то для різних довжин хвиль положення максимумів не збігаються (крім центрального, нульового максимуму). Центральний максимум – біла смуга (власно це зображення джерела світла), а інші – райдужні, причому внутрішній край кожного спектра забарвлений в фіолетовий колір, а зовнішній – у червоний. Величину k називають **порядком дифракційного спектра**, а самі максимуми інтенсивності – **дифракційними спектрами** k -го порядку.

Застосування дифракційної решітки засноване на її здатності розкладати в спектр, що дозволяє вивчати спектральний склад світла. У зв'язку з цим дифракційну решітку вважають **спектральним приладом**.

Роздільна здатність (R) дифракційної решітки характеризує її здатність утворювати окремо спектральні лінії з близькими значеннями довжин хвиль: λ і $\lambda + \Delta\lambda$.

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \quad (14.32)$$

$$R = kN = kN_0 l = k \frac{l}{d}, \quad (14.33)$$

де k – номер (порядок) дифракційного спектра (максимуму); N – загальна кількість штрихів дифракційної решітки; l – довжина дифракційної решітки; N_0 – число штрихів на одиниці довжини.

Дифракція спостерігається також на тривимірних структурах, тобто просторових утвореннях, що виявляють періодичність за трьома напрямками, що не лежать в одній площині. Подібними структурами є кристалічні тіла. Звичайна періодичність кристалічної решітки $\sim 10^{-10}$ м. Для здійснення дифракції необхідно, щоб довжина хвилі випромінювання, яке дифрагує, була того ж порядку. Цій умові відповідає рентгенівське випромінювання – електромагнітне випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 10^{-8} - 10^{-12}$ м. У такому випадку відбувається так звана **бреггівська дифракція** – явище сильного розсіювання хвиль на періодичній кристалічній решітці при певних кутах падіння. Положення максимумів при дифракції монохроматичних рентгенівських променів з довжиною хвилі λ на кристалах описується **формулою Вульфа-Бреггів**

$$2d \sin \vartheta = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (14.34)$$

де ϑ – кут ковзання променів, що доповнює до 90° кут падіння α , а d – параметр решітки кристала.

При дифракції рентгенівського випромінювання симетрія розташування дифракційних максимумів відображає симетрію розташування частинок в решітці кристала, тому знаючи довжину хвилі випромінювання і кут ковзання, можна досліджувати структуру кристалів.

14.1.7. Поляризація світла

Світлові хвилі є поперечними, вектори напруженості електричного $\vec{E}$ і магнітного $\vec{H}$ полів взаємно перпендикулярні та коливаються перпендикулярно вектору швидкості $\vec{v}$ поширення хвилі. Світлова хвиля складається з багатьох цугів – коротких імпульсів електромагнітних хвиль, які випромінюються окремими атомами. Електричне і магнітне поля в електромагнітній хвилі

змінюються синхронно, тому світлову хвилю можна описувати лише одним вектором $\vec{E}$, який називають **світловим вектором**. Для кожного цугу площина коливань світлового вектора орієнтована випадково. Таке світло називають **природним** або неполяризованим (рис. 14.14, а).

Поляризація – це властивість електромагнітних хвиль, яка характеризується просторово-часовою впорядкованістю орієнтації електричного вектора $\vec{E}$.

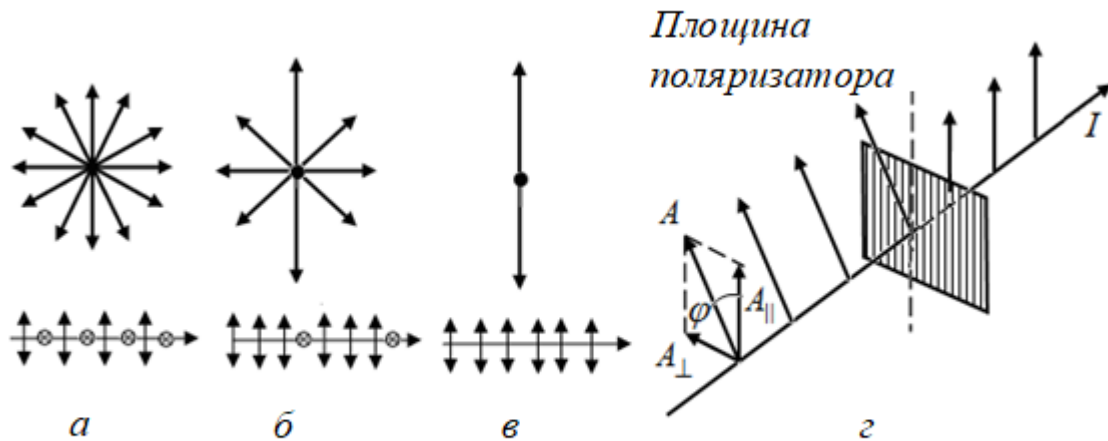


Рисунок 14.14

Поляризованим називають світло, для якого напрям коливань світлового вектора зберігається незмінним. Якщо коливання світлового вектора відбуваються лише в одній площині, то світло називають **плоскополяризованим** (або лінійно поляризованим) (рис. 14.14, в). Площину, в якій коливається світловий вектор, називають **площиною поляризації**. Світло, для якого існує переважний напрямок коливань вектора $\vec{E}$ і незначна амплітуда коливань вектора $\vec{E}$ в інших напрямках, називається **частково поляризованим** (рис. 14.14, б). Для часткової поляризації використовується поняття **ступеня поляризації**, який визначається як

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (14.35)$$

де $I_{\max}$ і $I_{\min}$ – максимальна і мінімальна інтенсивності частково поляризованого світла, яке пропускається аналізатором, відповідно. Для

природного світла $I_{\max} = I_{\min}$, тому $P = 0$, для плоскополяризованого $I_{\min} = 0$, тому $P = 1$.

Плоскополяризоване світло можна отримати з природного світла за допомогою приладів – **поляризаторів**, які пропускають лише ті коливання, які є паралельними площині, що називають **площиною поляризатора**, і повністю затримують ті коливання, які відбуваються в площині, перпендикулярній цій площині. Матеріали, що використовуються для поляризаторів, характеризуються анізотропією щодо коливань вектора $\vec{E}$ (**анізотропією** називається відмінність властивостей середовища для різних напрямків всередині цього середовища). Таку анізотропію мають деякі природні кристали, наприклад, турмалін або ісландський шпат.

Інтенсивність світла I , яке пройшло через поляризатор, визначається **законом Малюса**:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi, \quad (14.36)$$

де I_0 – інтенсивність падаючого плоскополяризованого світла, а φ – кут між площиною поляризації падаючого світла і площиною поляризатора.

Беручи до уваги поглинання і відбиття світла речовиною поляризатора, закон Малюса можна записати у вигляді

$$I = k_{\text{пр}} I_0 \cos^2 \varphi = (1 - k_{\text{погл}}) I_0 \cos^2 \varphi, \quad (14.37)$$

де $k_{\text{пр}}$ – коефіцієнт пропускання поляризатора, а $k_{\text{погл}}$ – коефіцієнт поглинання, який враховує втрати на поглинання і відбиття при проходженні через поляризатор.

Якщо на шляху природного променя стоять два поляризатори (часто другий поляризатор називають **аналізатором**), кут між площинами поляризації яких дорівнює φ , то після першого поляризатора світло буде плоскополяризованим з інтенсивністю вдвічі меншою, ніж у природного світла. Після другого поляризатора світло за законом Малюса матиме інтенсивність $I_0 \cos^2 \varphi$. В результаті, інтенсивність світла після проходження двох поляризаторів складе

$$I = \frac{1}{2} I_{\text{прир}} \cdot \cos^2 \varphi. \quad (14.38)$$

Вочевидь, що максимальна інтенсивність світла, яке пройшло два поляризатори, дорівнює $I_{\text{max}} = \frac{I_{\text{прир}}}{2}$ і спостерігається, якщо поляризатори паралельні, тобто при $\varphi = 0$. Мінімальна інтенсивність $I_{\text{min}} = 0$ досягається при схрещених поляризаторах, тобто при $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Світло поляризується при відбитті від межі поділу двох середовищ і при заломленні на межі (рис. 14.15).

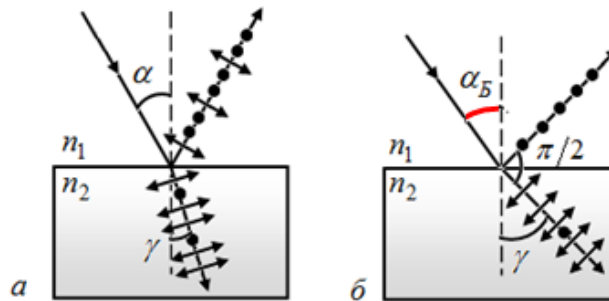


Рисунок 14.15

Якщо кут падіння світла на межу поділу двох діелектриків (наприклад, «повітря-скло») є відмінним від нуля, то відбите і заломлене світло виявляється частково поляризованим. У відбитому промені переважають коливання, які є перпендикулярними до площини падіння, а в заломленому промені – коливання, які є паралельними площині падіння (рис. 14.15, а). Ступінь поляризації залежить від кута падіння.

Закон Брюстера: при падінні світла під кутом α_B , що задовольняє умові

$$\text{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad (14.39)$$

відбитий і заломлений промені взаємно перпендикулярні, відбите світло повністю поляризовано в площині, перпендикулярній площині падіння променя, а заломлений промінь частково поляризований з максимальним ступенем поляризації.

У формулі (14.39) n_{21} – показник заломлення другого середовища (n_2) відносно першого (n_1), а кут α_B , що задовольняє цій умові, називають **кутом Брюстера** (або **кутом повної поляризації**). При цьому кут між відбитим і заломленим променями дорівнює $\pi/2$ (рис. 14.15, б).

Явище **подвійного променезаломлення** полягає в тому, що промінь всередині кристала, наприклад, ісландського шпату розщеплюється на два промені (рис. 14.16, а). Один промінь підпорядковується закону заломлення, а другий – ні. Ці промені називаються **звичайний** і **незвичайний** (*ordinary та extraordinary*) та позначаються літерами «о» і «е», відповідно. Було виявлено, що при падінні у певному напрямку промінь не роздвоюється. Навіть при нормальному падінні незвичайний промінь відхиляється від первинного напрямку, і, крім того, цей промінь, як правило, не лежить в одній площині з падаючим променем і перпендикуляром, проведеним в точку падіння променя, як це визначається законом геометричної оптики (рис. 14.16, б).

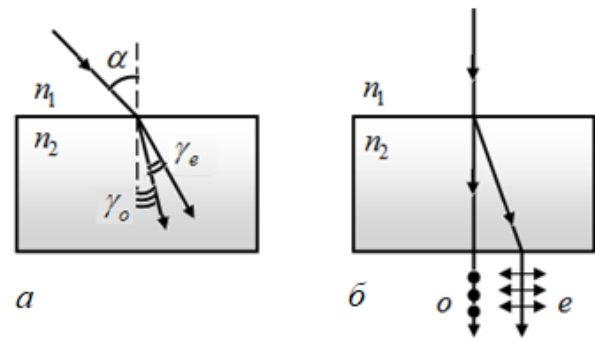


Рисунок 14.16

Поляризація світла широко використовується в побуті, техніці та наукових дослідженнях. Так, її застосовують, щоб регулювати інтенсивність освітлення та гасіння відблисків (поляризаційні окуляри), підвищувати контраст прозорих та мало контрастних об'єктів. Також це явище активно використовується в кристалографічних дослідженнях, на ньому заснована поляризаційна мікроскопія. Поляризація використовується для створення різних оптичних ефектів, а також у 3D-кінематографі: в технології IMAX лінійна поляризація застосовується для поділу зображень, призначених правому та лівому оку, а у технології RealD 3D – кругова поляризація дозволяє зберігати стереоефект і уникати двоїння зображення при невеликих бічних нахилах голови.

14.2. Приклади розв'язання задач

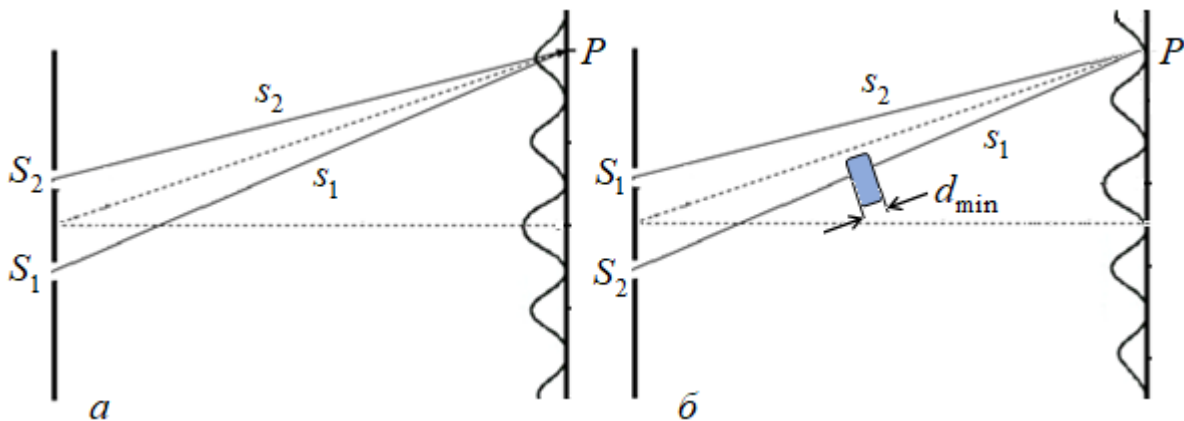
Задача 14.2.1

На екрані спостерігається інтерференційна картина від двох когерентних джерел монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 690$ нм. Коли на шляху одного з променів перпендикулярно йому розмістили тонку водяну плівку з показником заломлення $n_b = 1,33$, інтерференційна картина змінилася на обернену. За якої мінімальної товщини плівки це можливо?

Дано:	Розв'язання
$\lambda = 690$ нм	Зміна інтерференційної картини на обернену означає, що на тих ділянках екрана, де спостерігалися інтерференційні максимуми, стали спостерігатися мінімуми. Умови максимумів і мінімумів інтерференції є, відповідно,
$n_b = 1,33$	
$d_{\min} = ?$	

$$\Delta_{\max} = 2k \frac{\lambda}{2} \text{ і } \Delta_{\min} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (1)$$

де Δ – оптична різниця ходу променів, що інтерферують.



Виходячи з умов максимумів і мінімумів зрозуміло, що зміна інтерференційної картини на обернену можлива за умови зміни оптичної різниці ходу променів на непарне число половин довжин хвиль, тобто,

$$\Delta_2 - \Delta_1 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (2)$$

де Δ_1 і Δ_2 – оптичні різниці ходу променів до і після внесення плівки, відповідно;
 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Найменшій товщині $d_{\min}$ плівки відповідає $k = 0$, тому

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \frac{\lambda}{2}. \quad (3)$$

До внесення плівки геометричні довжини шляхів променів складали, відповідно, s_1 та s_2 , а оптичні – $L_1 = n_1 s_1$ і $L_2 = n_2 s_2$. Оптична різниця ходу двох променів

$$\Delta_1 = L_1 - L_2. \quad (4)$$

Вважаючи, що промені розповсюджуються у повітрі, показник заломлення якого становить $n = 1$, оптична різниця ходу збігається з геометричною

$$\Delta_1 = L_1 - L_2 = n s_1 - n s_2 = n(s_1 - s_2) = s_1 - s_2. \quad (5)$$

Після того, як на шляху першого променя помістили плівку, його оптичний шлях став складатися з двох частин: перша $s_1 - d_{\min}$ пролягає у повітрі, а інша – у воді, де оптична довжина шляху буде $n_b d_{\min}$. Отже, оптична різниця ходу двох променів, на шляху одного з яких знаходиться водяна плівка, буде

$$\Delta_2 = [(s_1 - d_{\min}) + n_b d_{\min}] - s_2 = (s_1 - s_2) + d_{\min}(n_b - 1). \quad (6)$$

Підставимо отримані Δ_1 і Δ_2 із (5) і (6) в вираз (3)

$$[(s_1 - s_2) + d_{\min}(n_b - 1)] - (s_1 - s_2) = \frac{\lambda}{2},$$

$$d_{\min}(n_b - 1) = \frac{\lambda}{2},$$

звідки шукана мінімальна товщина плівки, розміщення якої на шляху одного з променів змінює інтерференційну картину на обернену, становить

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2(n_b - 1)} = \frac{690 \cdot 10^{-9}}{2(1,33 - 1)} = 1,05 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 1,05 \text{ мкм}.$$

Відповідь: 1,05 мкм.

Задача 14.2.2

Когерентні промені з довжиною хвилі $\lambda = 404 \text{ нм}$ перетинаються в точках на екрані. Що буде спостерігатися в цих точках (посилення чи послаблення світла), якщо оптична різниця ходу променів становить для першої точки $\Delta_1 = 17,17 \text{ мкм}$, а для другої точки $\Delta_2 = 12,12 \text{ мкм}$?

Дано:	Розв'язання
$\lambda = 404 \text{ нм}$	Умови спостерігання інтерференційних максимумів
$\Delta_1 = 17,17 \text{ мкм}$	$\Delta = \pm 2k \frac{\lambda}{2}$ та мінімумів $\Delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$ можна записати у
$\Delta_2 = 12,12 \text{ мкм}$	загальному вигляді:
$m = ?$	$\Delta = \pm m \frac{\lambda}{2}, \quad (1)$

де m – це парне число для максимуму ($m = 2k$) і непарне – для мінімуму ($m = 2k + 1$).

Визначимо m для першого випадку:

$$m = \frac{2\Delta}{\lambda} = \frac{2 \cdot 17,17 \cdot 10^{-6}}{404 \cdot 10^{-9}} = 85,$$

результатом є непарне число. Це означає, що

$$2k + 1 = 85, \quad k = 42.$$

Це означає, що в першій точці накладання променів спостерігається 42-й інтерференційний мінімум.

Для другого випадку:

$$m = \frac{2\Delta}{\lambda} = \frac{2 \cdot 12,12 \cdot 10^{-6}}{404 \cdot 10^{-9}} = 60.$$

$$2k = 60, \quad k = 30.$$

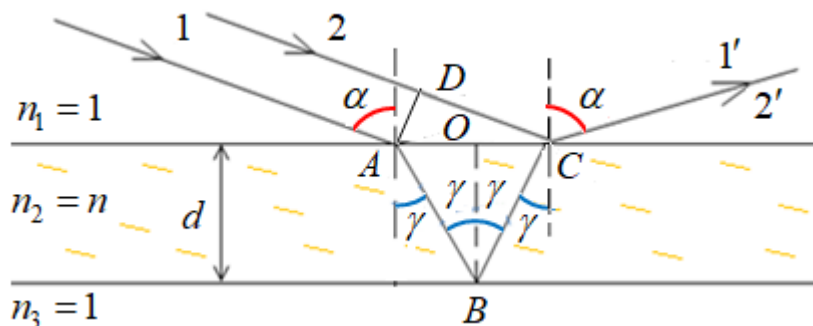
Результат для m – парне число, відповідно, у другій точці, де накладаються промені, буде спостерігатися 30-й інтерференційний максимум.

Відповідь: 42-й інтерференційний мінімум і 30-й інтерференційний максимум.

Задача 14.2.3

На тонку плівку, що знаходиться у повітрі, падає біле світло під кутом падіння $\alpha = 60^\circ$. Показник заломлення плівки $n = 1,33$. За якої найменшої товщини плівки відбите світло буде червоного кольору ($\lambda = 700 \text{ нм}$)?

Дано:	Розв'язання
$\alpha = 60^\circ$	Інтерференційна картина у відбитому світлі виникає через накладання двох хвиль, відбитих від верхньої та нижньої поверхонь плівки. Один з променів пучка (2) безпосередньо потрапляє в точку С і відбивається (2') в ній нагору під кутом, що дорівнює куту падіння α .
$n = 1,33$	
$\lambda = 700 \text{ нм}$	
$d_{\min} = ?$	



Промінь (1) потрапляє в точку С складнішим шляхом: спочатку він заломлюється в точці А і поширюється в плівці, потім відбивається від нижньої її поверхні в точці В і, нарешті, виходить, переломившись, назовні (1') в точці С під кутом, рівним куту падіння α . Таким чином, з точки С йдуть вгору два паралельні промені, з яких один утворився внаслідок відбиття від нижньої поверхні плівки, другий – внаслідок відбиття від верхньої поверхні плівки. Пучки, що виникають у результаті багаторазового відбиття від поверхонь плівки, не розглядаються через їх малу інтенсивність.

Якщо промені падають із повітря (для повітря $n_1 = 1$) на поверхню плівки з показником заломлення n та товщиною d , то оптична різниця ходу двох променів 1 і 2

$$\Delta = ns_1 - s_2, \quad (1)$$

де $s_1 = AB + BC$ – геометрична довжина шляху першого променя, що рухався у плівці, а оптична довжина його шляху є ns_1 ; $s_2 = DC$ – геометрична довжина шляху другого променя, яка збігається з його оптичною довжиною, оскільки промінь рухався у повітрі – середовищі з показником заломлення $n_1 = 1$.

$$AB = BC = \frac{OB}{\cos \gamma} = \frac{d}{\cos \gamma}. \quad (2)$$

Зважаючи на те, що кут $\angle DAC = \alpha$, $BC = DC = AC \sin \alpha$.

Тоді оптична різниця ходу становить

$$\Delta = 2n \frac{d}{\cos \alpha} - 2d \operatorname{tg} \gamma \cdot \sin \alpha = 2d \frac{n^2 - n \sin \alpha \sin \gamma}{n \cos \gamma}. \quad (3)$$

Застосовуючи закон заломлення світла

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}, \quad (4)$$

отримаємо

$$n \cos \gamma = \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 \gamma} = \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}. \quad (5)$$

Отже, з урахуванням (5) різниця ходу (3) становить

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}. \quad (6)$$

Крім оптичної різниці ходу (6) слід врахувати зміну фази хвилі при відбитті: у точці C , на межі розділу «повітря-плівка», промінь відбивається від оптично більш щільного середовища, тобто середовища з показником заломлення $n > 1$. При невеликих кутах падіння фаза змінюється на π . У точці B на межі розділу «плівка-повітря» світло відбивається від оптично менш щільного середовища, так що стрибка фази не відбувається. Отже, між променями 1' і 2' виникає додаткова різниця фаз

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \pi, \quad (7)$$

що відповідає додатковій оптичній різниці ходу

$$\Delta' = \frac{\pi\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{2}, \quad (8)$$

яку можна врахувати, якщо величину Δ зменшити або збільшити на половину довжини хвилі у вакуумі.

Таким чином, оптична різниця ходу дорівнює

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \pm \frac{\lambda}{2}. \quad (7)$$

Якщо прирівняти цю оптичну різницю ходу умові інтерференційного мінімуму $\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, то можна знайти товщини, за яких плівка виглядає чорною, а якщо – умові інтерференційного максимуму $\Delta = 2k\frac{\lambda}{2}$, то товщини, за яких плівка буде забарвленою, де $k = 0, 1, 2, \dots$

Згідно з даними задачі, плівка виглядає червоною, тому застосуємо умову інтерференційного максимуму

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2} = 2k\frac{\lambda}{2}. \quad (8)$$

Мінімальна товщина буде при $k = 0$, $\lambda = \lambda_{\text{черв}} = 700 \cdot 10^{-9} \text{ м}$:

$$\begin{aligned} d_{\min} &= \frac{(2k+1)\frac{\lambda}{2}}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = \\ &= \frac{700 \cdot 10^{-9}}{4\sqrt{(1,33)^2 - \sin^2 60^\circ}} = 1,73 \cdot 10^{-7} \text{ м}. \end{aligned}$$

Відповідь: $d_{\min} = 1,73 \cdot 10^{-7} \text{ м}$.

Задача 14.2.4

На поверхню скляного об'єктива ($n_1 = 1,5$) нанесено тонку плівку речовини з показником заломлення $n = 1,35$. Знайти найменшу товщину плівки, за якої спостерігається максимальне ослаблення світла в середній частині видимого спектра. Промені падають нормально до поверхні плівки.

Дано:	Розв'язання
$n_1 = 1,5$	Плівка, показник заломлення якої менше, ніж показник заломлення речовини, на яку вона нанесена, – це так звана «просвітлююча» плівка. Такі плівки в разі нанесення на поверхні лінз зменшують розсіювання і відбиття світла,
$n = 1,35$	
$\lambda = 380 - 750 \text{ нм}$	
$d_{\min} = ?$	

що падає, від поверхні оптичного елементу (об'єктива). Вони покращують світлопроникність системи і контраст оптичного зображення. Найчастіше намагаються знизити коефіцієнт відбиття для променів у середній частині видимого спектра, яка відповідає зеленому світлу з $\lambda = 555 \text{ нм}$. Це область найбільшої чутливості ока людини, тому об'єктиви мають блакитно-фіолетове або блакитно-сіре забарвлення. Сама ж оптика в цьому випадку називається «просвітленою оптикою».

Оскільки показник заломлення плівки менше, ніж показник заломлення об'єктива ($n < n_1$), на який вона нанесена, втрата півхвилі при відбитті монохроматичного світла від тонкої плівки відбувається на обох її поверхнях. Отже, в оптичній різниці ходу світлових хвиль додаткову різницю ходу $\Delta' = \pm \lambda/2$ враховувати не потрібно:

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}.$$

Якщо необхідно забезпечити ослаблення світла, то це означає, що треба виконати умову інтерференційного мінімуму

$$\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Тоді

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Враховуючи те, що світло падає нормально до поверхні плівки ($\sin \alpha = 0$), отримаємо

$$2dn = (2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

звідки

$$d = \frac{(2k+1)\lambda}{4n}.$$

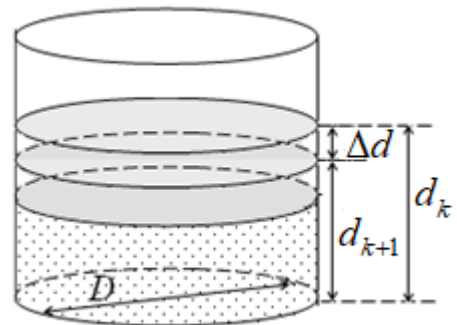
Мінімальній товщині плівки відповідає $k = 0$:

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4n} = \frac{555 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 1,35} = 1,03 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Відповідь: $d_{\min} = 1,03 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$

Задача 14.2.5

На поверхні води, яка знаходиться в посудині діаметром $D = 30 \text{ см}$, знаходиться тонка плівка етилового спирту $n = 1,36$, що випаровується. Пучок монохроматичного червоного світла з довжиною хвилі $\lambda = 650 \text{ нм}$ падає на поверхню спиртової плівки під кутом падіння $\alpha = 30^\circ$. Знайти: 1) масу спирту, яка повинна випаруватися для того, щоб один мінімум змінився на інший, якщо густина спирту $\rho = 789 \text{ кг/м}^3$; 2) швидкість випаровування спирту, якщо інтервал часу між послідовними мінімумами становить $t = 10 \text{ хвилин}$.



Дано:	Розв'язання
$D = 30 \text{ см}$	Коли тонкий шар спирту освітлюється монохроматичним світлом, то в залежності від товщини спиртової плівки можуть бути виконані умови або інтерференційного максимуму, або мінімуму. Внаслідок випаровування товщина плівки зменшується, тому відбувається чергування мінімумів, коли плівка виглядає чорною, і максимумів, коли плівка червона.
$n = 1,36$	
$\lambda = 650 \text{ нм}$	
$\alpha = 30^\circ$	
$\rho = 789 \text{ кг/м}^3$	
$m = ? \quad \frac{m}{t} = ?$	

Припустимо, що один мінімум спостерігається, коли товщина спиртової плівки дорівнює d_k , а наступний – при товщині d_{k+1} . Тоді, враховуючи, що оптична різниця ходу при інтерференції в тонких плоскопаралельних плівках дорівнює $\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \pm \frac{\lambda}{2}$, запишемо

$$\begin{cases} 2d_k\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \\ 2d_{k+1}\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2} = [2(k+1)+1]\frac{\lambda}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2d_k\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = k\lambda, \\ 2d_{k+1}\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = (k+1)\lambda, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_k = \frac{k\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}, \\ d_{k+1} = \frac{(k+1)\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}, \end{cases}$$

$$\Delta d = d_{k+1} - d_k = \frac{(k+1)\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} - \frac{k\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Маса спирту, який знаходиться в шарі об'ємом $V = \Delta d \cdot S = \Delta d \cdot \frac{\pi D^2}{4}$,

пов'язана з його густиною виразом

$$m = \rho V = \rho S \Delta d = \rho \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Підставимо числові значення та знайдемо шукану масу

$$m = \frac{789 \cdot \pi \cdot 0,09 \cdot 650 \cdot 10^{-9}}{8\sqrt{1,36^2 - 0,25}} = 1,43 \cdot 10^{-5} \text{ кг.}$$

Швидкість випаровування визначається масою, яка випаровується за одиницю часу. Вона дорівнює

$$\frac{m}{t} = \frac{1,43 \cdot 10^{-5}}{10 \cdot 3600} \approx 4 \cdot 10^{-10} \text{ кг/с.}$$

Відповідь: $m = 1,43 \cdot 10^{-5} \text{ кг}$; $\frac{m}{t} \approx 4 \cdot 10^{-10} \text{ кг/с.}$

Задача 14.2.6

На скляний клин з малим кутом α між його гранями перпендикулярно його грані падає паралельний пучок променів монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$. Знайти кут α при вершині клину, якщо відстань між найближчими темними інтерференційними смугами становить $x = 0,4 \text{ мм}$.

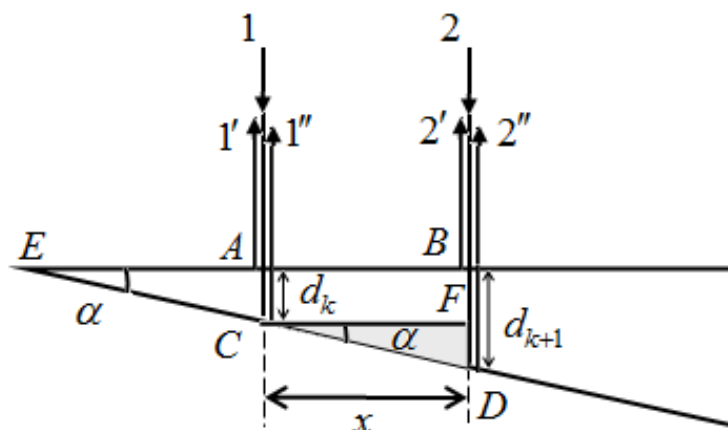
Дано:	Розв'язання
$\lambda = 0,6 \text{ мкм}$	Паралельний пучок світла падає нормально на поверхню клина. Промені 1 та 2 частково відбиваються в точках A і B від верхньої грані (відбиті промені $1'$ та $2'$), а частково – від нижньої грані клину в точках C і D (промені $1''$ та $2''$).
$x = 0,4 \text{ мм}$	
$\alpha = ?$	

Беручи до уваги те, що кут клина α дуже малий, можна вважати, що відбиті промені $1'$, $1''$ і $2'$, $2''$ йдуть паралельно один одному. До того ж, промені $1'$, $1''$ й $2'$, $2''$ є когерентними, тому на поверхні клину спостерігається інтерференційна картина.

Темні смуги будуть в тих місцях клину, де для променів відбитих від верхньої та нижньої граней оптична різниця ходу така, що в ній вкладається непарна кількість півхвиль, тобто виконується умова інтерференційного мінімуму:

$$\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1)$$

В випадку, що розглядається, оптичні різниці ходу з врахуванням додаткової різниці ходу, що пов'язана зі зміною фази хвилі на протилежну при відбитті від оптично більш щільного середовища в точках A і B , становлять



$$\begin{cases} 2d_k n + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \\ 2d_{k+1} n + \frac{\lambda}{2} = [2(k+1)+1]\frac{\lambda}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2d_k n = k\lambda, \\ 2d_{k+1} n = (k+1)\lambda. \end{cases}$$

Звідси $d_k = \frac{k\lambda}{2n}, \quad d_{k+1} = \frac{(k+1)\lambda}{2n}.$

Трикутник $\triangle CFD$ є подібним трикутнику $\triangle EBD$, а значить, $\angle BED = \angle FCD = \alpha$. З трикутника $\triangle CFD$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{FD}{CF} = \frac{d_{k+1} - d_k}{x} = \frac{(k+1)\lambda - k\lambda}{2nx} = \frac{\lambda}{2nx} = \frac{0,6 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1,5 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^{-4},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}(5 \cdot 10^{-4}) = 0,03^\circ.$$

Відповідь: $\alpha = 0,03^\circ$.

Задача 14.2.7

Установка для спостереження кілець Ньютона освітлюється монохроматичним світлом, яке падає по нормалі до поверхні лінзи. Спостереження проводиться у відбитому світлі. Відстань між п'ятим і двадцять п'ятим світлими кільцями становить 4,8 мм. Знайти відстань між четвертим і шістнадцятим темними кільцями.

Дано:	Розв'язання
$r_{25} - r_5 = 4,8 \text{ мм}$	При спостеріганні кілець Ньютона у відбитому світлі радіуси світлих кілець
$r_{16} - r_4 = ?$	

$$r_k = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}}, \quad k=1,2,3,\dots$$

а радіуси темних кілець

$$r_k = \sqrt{kR\lambda}, \quad k=0,1,2,\dots$$

Застосуємо формули для знаходження радіусів темних та світлих кілець Ньютона у відбитому світлі:

для світлих кілець за умовами задачі

$$r_{25} - r_5 = \sqrt{\frac{49R\lambda}{2}} - \sqrt{\frac{9R\lambda}{2}} = \sqrt{R\lambda} \left(\frac{7-3}{\sqrt{2}} \right) = 2,83\sqrt{R\lambda},$$

шукана різниця радіусів темних кілець

$$r_{16} - r_4 = \sqrt{16R\lambda} - \sqrt{4R\lambda} = 2\sqrt{R\lambda}.$$

Поділивши одне рівняння на інше, отримаємо

$$\frac{r_{25} - r_5}{r_{16} - r_4} = \frac{2,83\sqrt{R\lambda}}{2\sqrt{R\lambda}}.$$

Тоді шукана відстань між темними кільцями становить

$$r_{16} - r_4 = (r_{25} - r_5) \cdot 0,707 = 4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 0,707 = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Відповідь: $r_{16} - r_4 = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$

Задача 14.2.8

На щілину шириною $b = 2 \cdot 10^{-3} \text{ см}$ падає нормально паралельний пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$. Знайти ширину зображення щілини на екрані, розташованому на відстані $L = 1 \text{ м}$ від неї. Шириною зображення вважати відстань між першими дифракційними мінімумами, розташованими по обидві боки від головного максимуму.

Дано:

$$b = 2 \cdot 10^{-3} \text{ см}$$

$$\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$$

$$L = 1 \text{ м}$$

$$2x = ?$$

Розв'язання

В задачі розглядається дифракція монохроматичного світла ($\lambda = \text{const}$) на вузькій щілині, яку можна вважати нескінченно довгою. У разі, коли світло падає нормально площині щілини, а зображення щілини за умови задачі обмежене двома першими мінімумами, ширину щілини

можна визначити як $2x$, де x – відстань між серединою центрального максимуму і першим мінімумом.

Зі схематичного зображення дифракційної картини видно, що мінімуми інтенсивності світла при дифракції від щілини спостерігаються симетрично під кутами ψ , які визначаються з умови дифракційного мінімуму для щілини

$$b \sin \psi = \pm k \lambda.$$

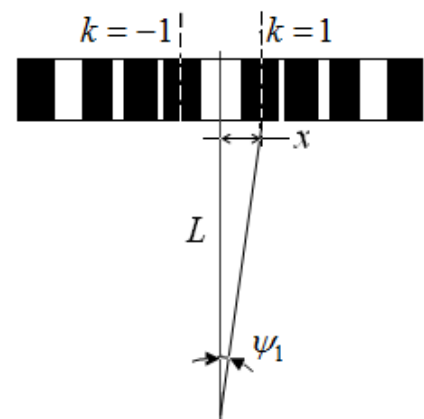
Для мінімумів першого порядку ($k = 1$):

$$b \sin \psi_1 = \lambda.$$

Звідки

$$\sin \psi_1 = \frac{\lambda}{b},$$

$$\psi_1 = \arcsin \frac{\lambda}{b} = \arcsin \frac{500 \cdot 10^{-9}}{20 \cdot 10^{-6}} = \arcsin 0,025 = 1,43^\circ.$$



З іншого боку, з трикутника на схемі відстань x між центральним максимумом і першим мінімумом може бути записана як

$$x = L \cdot \operatorname{tg} \psi_1 = 1 \cdot \operatorname{tg} 1,43^\circ = 0,025 \text{ м.}$$

Шукана відстань між двома мінімумами $2x = 2 \cdot 0,025 = 0,05 \text{ м.}$

Звернемо увагу на те, що зазвичай кути дифракції для мінімумів і максимумів перших порядків дуже малі, отже, значення їх синусів і тангенсів практично збігаються, тому в переважній більшості задач можна вважати, що $\sin \psi \approx \operatorname{tg} \psi$.

Відповідь: $2x = 0,05 \text{ м.}$

Задача 14.2.9

На дифракційну решітку нормально падає монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 550 \text{ нм}$. На екрані, що розташований на відстані $L = 2,5 \text{ м}$ від решітки, відстань між максимумами першого порядку $2x_1 = 8 \text{ см}$ один від одного. Знайти: 1) період дифракційної решітки; 2) максимальний кут дифракції; 3) загальну кількість максимумів, яке може дати ця решітка.

Дано:	Розв'язання
$\lambda = 550 \text{ нм}$	Умова спостереження дифракційного максимуму для дифракційної решітки
$L = 2,5 \text{ м}$	
$2x_1 = 8 \text{ см}$	
$d = ?$	$d \sin \psi = \pm k \lambda,$ де $k = 0, 1, 2, \dots$ номер дифракційного максимуму (порядок дифракційного спектра).

Для максимуму першого ($k = 1$) порядку:

$$d \sin \psi_1 = \lambda.$$

З іншого боку, як видно зі схеми (див. рисунок),

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{x_1}{L},$$

де x_1 – це відстань між центральним і першим максимумами.

Виходячи з умов задачі, $x_1 = \frac{2x_1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ см.}$

$$\psi_1 = \arctg \frac{x_1}{L} = \arctg \frac{4 \cdot 10^{-2}}{2,5} = 0,016.$$

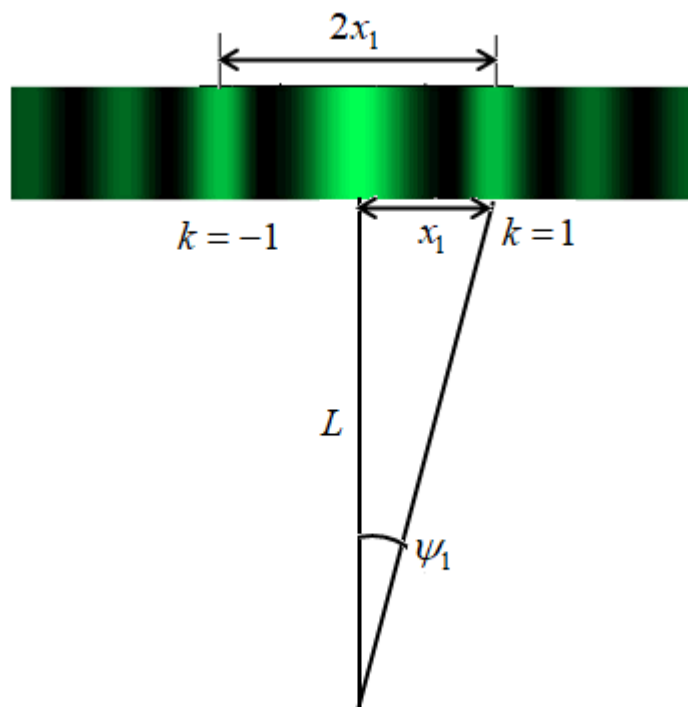
$$\psi_1 = 0,9^\circ.$$

Тоді

$$d = \frac{\lambda}{\sin \psi_1} = 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Для визначення максимального кута дифракції знайдемо найбільший порядок максимуму, який дає ця дифракційна решітка.

З умови спостереження дифракційного максимуму для решітки та з урахуванням того, що $\sin \psi \leq 1$, отримаємо



$$k_{\max} \leq \frac{d \cdot (\sin \psi)_{\max}}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} = \frac{3,5 \cdot 10^{-5}}{550 \cdot 10^{-9}} = 63,7.$$

Оскільки номер максимуму має бути цілим числом, округлимо результат до цілого, відкидаючи дробову частину. Слід пам'ятати, що округлення результату за правилами математики в бік більшого числа призведе до значення, що

відповідає значенню синуса кута дифракції більшого за одиницю, чого не може бути. Тому найбільший порядок максимуму $k_{\max} = 63$.

Дифракційному максимуму 63-го порядку відповідає

$$\sin \psi_{\max} = \frac{k_{\max} \cdot \lambda}{d} = \frac{63 \cdot 550 \cdot 10^{-9}}{3,5 \cdot 10^{-5}} = 0,99,$$

і, остаточно, кут дифракції дорівнює

$$\psi_{\max} = \arcsin 0,99 = 82,9^\circ.$$

Загальна кількість максимумів, яку дає решітка: по 63 максимуму з кожного боку від центрального плюс сам центральний максимум, тобто

$$K = 2k_{\max} + 1 = 2 \cdot 63 + 1 = 127.$$

Відповідь: $d = 3,75 \cdot 10^{-5}$ м; $\psi_{\max} = 82,75^\circ$; $K = 127$

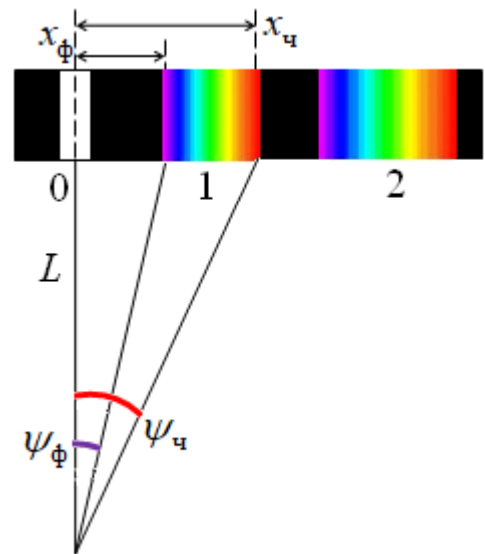
Задача 14.2.10

Дифракційна решітка, що має $N_0 = 100$ штрихів на 1 мм, яка розташована на відстані $L = 2$ м від екрана, освітлюється білим світлом, що нормально падає на неї. Знайти ширину дифракційного спектра 1-го порядку, якщо межа видимого спектра становить для фіолетового світла $\lambda_{\phi} = 380$ нм, для червоного $\lambda_{\text{ч}} = 760$ нм.

Дано:	Розв'язання
$N_0 = 100 \text{ мм}^{-1}$	Якщо дифракційна решітка має 100 штрихів 1 мм, тобто
$L = 2 \text{ м}$	$N_0 = 100 \text{ мм}^{-1} = 10^5 \text{ м}^{-1}$, тоді її період становить
$k = 1$	$d = \frac{1}{N_0} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5} \text{ м}.$
$\lambda_{\phi} = 380 \text{ нм}$	З умови дифракційного максимуму для дифракційної решітки $d \sin \psi = \pm k \lambda$ випливає, що положення головних
$\lambda_{\text{ч}} = 760 \text{ нм}$	
$\Delta x = ?$	

максимумів (крім нульового) залежить від довжини хвилі. Тому решітка здатна розкласти випромінювання в спектр. Це значить, що вона є спектральним приладом.

Якщо на решітку падає немонохроматичне випромінювання (наприклад, біле світло), то в кожному порядку дифракції (при кожному значенні k) виникає спектр досліджуваного випромінювання, причому фіолетова частина спектра розташовується ближче до максимуму нульового порядку, а червона – далі, оскільки $\lambda_{\phi} < \lambda_{\text{ч}}$. Чим більшим є порядок спектра, тим ширшим буде дифракційний максимум.



Запишемо умови спостереження дифракційного максимуму першого порядку для фіолетового і червоного випромінювань, а також співвідношення між геометричними характеристиками дифракційної схеми:

$$\begin{cases} d \sin \psi_{\phi} = 1 \cdot \lambda_{\phi}, \\ d \sin \psi_{\text{кр}} = 1 \cdot \lambda_{\text{кр}}, \\ x_{\phi} = L \cdot \text{tg } \psi_{\phi}, \\ x_{\text{кр}} = L \cdot \text{tg } \psi_{\text{кр}}. \end{cases}$$

З перших двох рівнянь системи знайдемо значення синусів кутів дифракції:

$$\sin \psi_{\phi} = \frac{\lambda_{\phi}}{d} = \frac{380 \cdot 10^{-9}}{10^{-5}} = 0,038, \quad \sin \psi_{\text{ч}} = \frac{\lambda_{\text{ч}}}{d} = \frac{760 \cdot 10^{-9}}{10^{-5}} = 0,076.$$

З огляду на те, що значення синусів дуже малі, то малими є і відповідні їм кути, отже, можна вважати, що

$$\text{tg } \psi_{\phi} \approx \sin \psi_{\phi}, \text{ а } \text{tg } \psi_{\text{ч}} \approx \sin \psi_{\text{ч}}.$$

Тоді,

$$x_{\phi} = L \cdot \text{tg } \psi_{\phi} \approx L \cdot \sin \psi_{\phi},$$

$$x_{\text{ч}} = L \cdot \text{tg } \psi_{\text{ч}} \approx L \cdot \sin \psi_{\text{ч}}.$$

Остаточно, шукана ширина максимуму першого порядку становить

$$\Delta x = x_{\psi} - x_{\phi} = L \operatorname{tg} \psi_{\psi} - L \operatorname{tg} \psi_{\phi} \approx L (\sin \psi_{\psi} - \sin \psi_{\phi}) = 2(0,076 - 0,036) = 0,076 \text{ м.}$$

Відповідь: $\Delta x = 0,076 \text{ м.}$

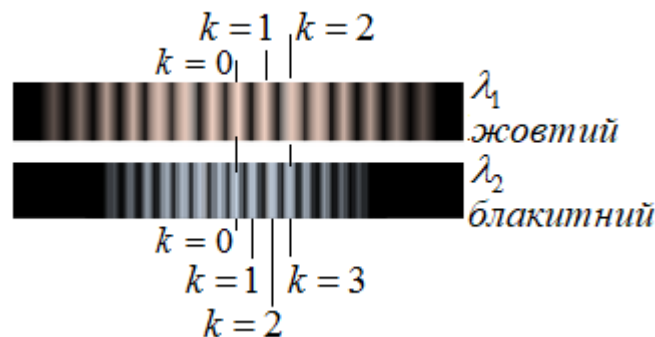
Задача 14.2.11

На дифракційну решітку нормально падає паралельний пучок білого світла. В отриманій дифракційній картині перекриваються жовтий і блакитний спектри. Довжини хвиль жовтого і блакитного світла в повітрі дорівнюють $\lambda_1 = 600 \text{ нм}$ і $\lambda_2 = 400 \text{ нм}$, знайдіть порядки спектрів, що перекриваються.

Дано:	Розв'язання
$\lambda_1 = 600 \text{ нм}$	Умови спостереження дифракційних максимумів для обох довжин хвиль
$\lambda_2 = 400 \text{ нм}$	
$k_1 = ? \quad k_2 = ?$	$\begin{cases} d \sin \psi = k_1 \lambda_1, \\ d \sin \psi = k_2 \lambda_2. \end{cases}$

З рівності лівих частин випливає, що $k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2$. Це рівняння з двома невідомими, але ми його можемо розв'язати, виходячи з того, що номери дифракційних максимумів – це цілі числа, причому порівняно невеликі.

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{400}{600} = \frac{2}{3}.$$



Отриманий результат означає, що жовта лінія в спектрі 2 порядку накладається на блакитну лінію в спектрі 3 порядку.

Відповідь: $k_1 = 2; k_2 = 3$

Задача 14.2.12

Дифракційна картина отримана за допомогою дифракційної решітки довжиною $l = 0,5$ см, що має $N_0 = 100$ штрихів на 1 мм. Визначити, в спектрі якого порядку можна спостерігати роздільно дві лінії калію з довжинами хвиль $\lambda_1 = 578$ нм і $\lambda_2 = 580$ нм.

Дано:

$$l = 0,5 \text{ см}$$

$$N_0 = 100 \text{ мм}^{-1}$$

$$\lambda_1 = 578 \text{ нм}$$

$$\lambda_2 = 580 \text{ нм}$$

$$k = ?$$

Розв'язання

Роздільна здатність дифракційної решітки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN_0l, \quad (1)$$

де N_0 – кількість штрихів на одиниці довжини решітки,

а l – її довжина.

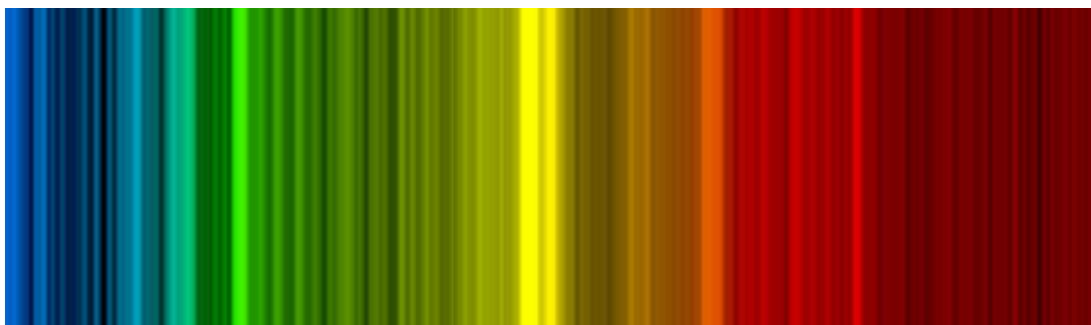
Довжина хвилі λ в формулі (1) визначається як середнє

арифметичне двох довжин хвиль

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{578 + 580}{2} = 579 \text{ нм}. \quad (2)$$

Різниця довжин хвиль

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 580 - 578 = 0,2 \text{ нм}. \quad (3)$$



λ_1 | λ_2

З формули (1) порядок спектра дорівнює

$$k = \frac{\lambda}{\Delta\lambda \cdot N_0 \cdot l}. \quad (4)$$

Підставляючи результати (2) і (3) в (4) отримуємо шуканий порядок спектра

$$k = \frac{\lambda}{\Delta\lambda \cdot N_0 \cdot l} = \frac{579 \cdot 10^{-9}}{0,2 \cdot 10^{-9} \cdot 10^5 \cdot 0,005} = 5,8 \approx 6.$$

Звернемо увагу на наступне. Якщо ми отримали результат у вигляді дробового числа, то незалежно від розміру дробової частини, округляти треба у бік *більшого* значення. Наприклад, незалежно від того, отримали ми відповідь 5,3 або 5,8, округляти її треба до 6. Це означає, що лінії будуть розділені, тільки починаючи зі спектра 6-го порядку, оскільки ширина дифракційного максимуму збільшується зі зростанням його порядку.

Перевіримо, чи дозволяє ця решітка отримати спектр 6-го порядку:

$$k_{\max} = \frac{d \cdot \sin \psi}{\lambda_2} = \frac{d \cdot (\sin \psi)_{\max}}{\lambda_2} = \frac{1}{N_0 \lambda_2} = \frac{1}{10^5 \cdot 580 \cdot 10^{-9}} = 17,24 \approx 17.$$

Оскільки для цієї дифракційної решітки максимальний порядок дифракційного спектра $k_{\max} = 17$, то з її допомогою можна спостерігати окремо зазначені лінії, починаючи зі спектра 6-го порядку.

Відповідь: $k = 6$.

Задача 14.2.13

На дифракційну решітку довжиною $l = 2$ см, що має загальну кількість штрихів $N = 5000$, падає нормально світло після проходження через світлофільтр. Смуга пропускання світлофільтра по довжинах хвиль становить від $\lambda_1 = 420$ нм до $\lambda_2 = 480$ нм. Чи будуть перекриватися спектри різних порядків?

Дано:

$$l = 2 \text{ см}$$

$$N = 5000$$

$$\lambda_1 = 420 \text{ нм}$$

$$\lambda_2 = 480 \text{ нм}$$

$$k_1 = ? \quad k_2 = ?$$

Розв'язання

Період дифракційної решітки становить

$$d = \frac{1}{N_0} = \frac{l}{N} = \frac{0,02}{5000} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Для того щоб спектри перекривалися, необхідно, щоб для них був однаковим кут дифракції, отже,

$$\begin{cases} d \sin \psi = k_1 \lambda_1, \\ d \sin \psi = k_2 \lambda_2. \end{cases}$$

З рівності правих частин випливає $k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2$. У цьому рівнянні з двома невідомими порядки дифракційних максимумів можна легко підібрати, пам'ятаючи про те, що це цілі числа:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{480}{420} = \frac{8}{7}.$$

Тепер необхідно переконатися, що дана решітка дозволяє отримати максимуми відповідних порядків. Для з'ясування цього використаємо умову спостереження дифракційного максимуму для кожної з довжин хвиль, знайшовши з її допомогою максимальний порядок дифракційного спектра.

Вважаючи, що $(\sin \psi)_{\max} = 1$, отримаємо

$$k_{1\max} = \frac{d \sin \psi_1}{\lambda_1} = \frac{d (\sin \psi_1)_{\max}}{\lambda_1} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{420 \cdot 10^{-9}} = 9,52 \approx 9,$$

$$k_{2\max} = \frac{d \sin \psi_2}{\lambda_2} = \frac{d (\sin \psi_2)_{\max}}{\lambda_2} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{480 \cdot 10^{-9}} = 8,33 \approx 8.$$

Отже, максимальний порядок спектра для першої довжини хвилі становить $k_{1\max} = 9$, а для другої – $k_{2\max} = 8$, тому при використанні даної решітки буде спостерігатися перекриття спектрів: спектр 8-го порядку для λ_1 накладається на спектр 7-го порядку для λ_2 .

Відповідь: $k_1 = 8; k_2 = 7$.

Задача 14.2.14

Визначити кут між головними площинами поляризатора та аналізатора, якщо після їх проходження інтенсивність природного світла зменшилася у 5 разів.

Дано:	Розв'язання
$I_{\text{пр}} = 5I$	Закон Малюса дозволяє визначити інтенсивність
$\varphi_1 = ?$	світла, яке пройшло крізь поляризатор, як
	$I_1 = I_{\text{пр}} \cos^2 \varphi.$

Поляризатор пропускає коливання паралельні його головній площині та повністю затримує ті, які перпендикулярні їй. Оскільки для природного світла усі площини коливань світлового вектора є рівноймовірними, то кут φ приймає

рівноймовірно значення від 0 до 2π . Це означає, що середнє значення $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}$,

а природне світло після проходження через поляризатор послаблюється удвічі та стає плоскополяризованим, тобто $I_1 = I_{\text{пр}}$. Тоді після першого поляризатора

$$I_{\text{пр}} = \frac{1}{2} I_{\text{пр}}.$$

Тепер на другий поляризатор, який називають аналізатором, падає плоскополяризоване світло. Інтенсивність світла після проходження через аналізатор за законом Малюса становить

$$I = I_{\text{пр}} \cos^2 \varphi_1,$$

де φ_1 – кут між площиною поляризатора та площиною поляризації світлового променя або фактично шуканий кут між площинами поляризатора і аналізатора.

Оскільки за умовою задачі інтенсивність зменшилася у 5 разів, то

$$I_{\text{пр}} = 5I,$$

то

$$I = I_{\text{шт}} \cos^2 \varphi_1 = \frac{1}{2} I_{\text{пр}} \cos^2 \varphi_1 = \frac{1}{2} \cdot 5I \cos^2 \varphi_1,$$

$$\cos^2 \varphi_1 = \frac{2}{5}, \quad \cos \varphi_1 = \sqrt{\frac{2}{5}} = 0,632,$$

$$\varphi_1 = \arccos 0,63 = 50,8^\circ.$$

Відповідь: $\varphi_1 = 50,8^\circ$.

Задача 14.2.15

Визначити кут Брюстера для падіння променів з повітря на поверхню скла, якщо відомо, що граничний кут повного внутрішнього відбиття для цієї межі поділу становить $\alpha_{\text{гр}} = 42^\circ$.

Дано:

$$\alpha_{\text{гр}} = 42^\circ$$

$$\alpha_{\text{Б}} = ?$$

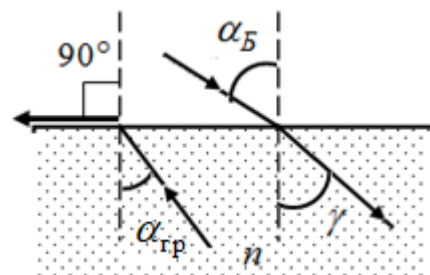
Розв'язання

Явище повного внутрішнього відбиття спостерігається, коли промінь світла переходить з оптично більш щільного середовища (скла) з показником заломлення $n_2 = n$ в менш щільне середовище (повітря), для якого $n_1 = 1$.

В цьому випадку синус кута повного внутрішнього відбиття дорівнює

$$\sin \alpha_{\text{гр}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{n}.$$

Кут Брюстера – це кут падіння променя, при якому промінь, відбитий від оптично більш щільного середовища, є повністю поляризованим. Згідно із законом Брюстера тангенс цього кута дорівнює



$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{Б}} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_2}{1} = n.$$

Звідси випливає, що

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{Б}} = \frac{1}{\sin \alpha_{\text{rp}}}.$$

Кут Брюстера

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{Б}} &= \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sin \alpha_{\text{rp}}} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sin 42^\circ} \right) = \\ &= \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{0,669} \right) = \operatorname{arctg} (1,494) = 56,21^\circ. \end{aligned}$$

Відповідь: $\alpha_{\text{Б}} = 56,21^\circ$

14.3. Задачі для самостійної роботи

14.3.1. В досліді Юнга на шляху одного з променів, що інтерферують, встановили тонку скляну пластинку. В результаті центральна світла смуга змістилась в положення, яке раніше займала п'ята світла смуга, не враховуючи центральної. Промінь падає на пластинку нормально до її поверхні. Показник заломлення пластини 1,5. Довжина хвилі монохроматичного світла 600 нм. Якою має бути товщина пластинки.

Відповідь: $d = 6$ мкм.

14.3.2. На тонку плівку у вигляді клину з показником заломлення 1,2 нормально падає монохроматичне світло з довжиною хвилі 700 нм. Визначити кут клину, якщо відстань між двома сусідніми інтерференційними максимумами складає 1,5 мм.

Відповідь: $\alpha = 1,75$ рад.

14.3.3. На лінзу з показником заломлення 1,5, вкриту тонкою плівкою з показником заломлення 1,25, падає нормально монохроматичне світло з довжиною хвилі 0,7 мкм. Визначити мінімальну товщину плівки, що забезпечить максимальне усунення втрат відбитого світла.

Відповідь: $d_{\min} = 0,14$ мкм.

14.3.4. Визначити кут падіння білого світла на поверхню тонкої плівки з показником заломлення 1,33, якщо при товщині плівки 0,133 мкм відбиті промені мають жовтий колір (довжина хвилі жовтого світла 600 нм).

Відповідь: $\alpha = 45^\circ$.

14.3.5. На дифракційну решітку з періодом $2 \cdot 10^{-5}$ м нормально падає монохроматичне світло з довжиною хвилі 500 нм. На екрані, розташованому на відстані 1 м, спостерігається дифракційна картина. Визначити: 1) відстань від центрального максимуму, на якій буде спостерігатися 2-й головний максимум; 2) кут дифракції, який відповідає останньому максимуму.

Відповідь: $x = 5$ см; $\psi_{\max} = 90^\circ$.

14.3.6. На дифракційну решітку з періодом $2 \cdot 10^{-5}$ м нормально падає монохроматичне світло з довжиною хвилі 600 нм. На екрані, розташованому на відстані 1 м, спостерігається дифракційна картина. Визначити: 1) відстань від центрального максимуму, на якій буде спостерігатися 3-й головний максимум; 2) загальну кількість максимумів, які дає решітка.

Відповідь: $x = 9$ см; $K = 67$.

14.3.7. На дифракційну решітку нормально падає монохроматичне світло з довжиною хвилі 500 нм. На екрані, розташованому на відстані 1 м, спостерігається дифракційна картина. Відстань між нульовим та 1-м максимумами 10 см. Визначити: 1) період решітки; 2) кут дифракції, який відповідає останньому максимуму.

Відповідь: $d = 5 \cdot 10^{-6}$ м; $\psi_{\max} = 14,5^\circ$.

14.3.8. Дифракційна решітка довжиною 5 мм розділяє в першому порядку дві спектральні лінії натру з довжиною хвиль 589 нм та 589,6 нм. Визначити роздільну здатність решітки, її період та кут, при якому в спектрі 3-го порядку буде спостерігатися світло з довжиною хвилі 600 нм, що падає на решітку нормально.

Відповідь: $R = 982$; $d = 5 \cdot 10^{-6}$ м; $\psi_{\max} = 20,7^\circ$.

14.3.9. На щілину шириною 20 мкм падає нормально паралельний пучок монохроматичного світла ($\lambda = 500$ нм). Знайти ширину зображення щілини на екрані, віддаленому від щілини на відстань 1 м. Шириною зображення вважати відстань між першими дифракційними мінімумами, розташованими по обидва боки від головного максимуму освітленості. Яке число дифракційних мінімумів спостерігається на екрані?

Відповідь: $x = 0,05$ м, $K = 80$.

14.3.10. На дифракційну решітку падає нормально пучок світла. Червону лінію ($\lambda = 700$ нм) в спектрі другого порядку можна спостерігати під кутом дифракції $\psi = 30^\circ$. Знайти сталу дифракційної решітки. Яке число штрихів нанесено на одиницю довжини цієї решітки?

Відповідь: $d = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}; N_0 = 3,57 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$.

14.3.11. Знайти найбільший порядок спектра для лінії $\lambda = 526 \text{ нм}$, якщо дифракційна решітка має 500 штрихів на мм. Яке число дифракційних максимумів дає ця решітка?

Відповідь: $k_{\max} = 3, K = 7$.

14.3.12. Пучок природного світла падає на поліровану поверхню скляної пластинки, розташованої в рідині. Відбитий від пластинки промінь складає кут 97° з падаючим променем. Визначити показник заломлення рідини, якщо відбите світло є повністю поляризованим (показник заломлення скла 1,5).

Відповідь: $n = 1,33$.

14.3.13. На якій кутовій висоті над лінією горизонту знаходиться Сонце, якщо сонячне світло, відбите від поверхні води повністю поляризоване.

Відповідь: $\varphi = 37^\circ$.

14.3.14. Аналізатор зменшує інтенсивність світла, що приходить до нього від поляризатора, в 2 рази. Визначити кут між площинами пропускання поляризатора та аналізатора. Втрати інтенсивності світла в аналізаторі знехтувати.

Відповідь: $\varphi = 45^\circ$.

14.3.15. Визначити швидкість світла в кристалі кам'яної солі, якщо при падінні світла у повітрі на поверхню кристалу кут Брюстера дорівнює 57° .

Відповідь: $v = 1,94 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

15. ЕЛЕМЕНТИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

15.1. Теоретичні відомості

15.1.1. Механічний принцип відносності Галілея

В класичній (Ньютонівській) механіці *інерціальною системою відліку* (ІСВ) називається така система, щодо якої швидкість матеріальної точки, вільної від зовнішніх впливів, зберігається незмінною за величиною і напрямком. Будь-які дві ІСВ або взаємно нерухомі, або рухаються відносно одна одної рівномірно і прямолінійно.

Розглянемо дві ІСВ, одна з яких – ІСВ' рухається відносно ІСО зі швидкістю $\vec{V}$ (рис. 15.1). Оскільки в класичній фізиці властивості простору і хід часу в усіх ІСВ однакові, то координати точки M в цих системах пов'язані співвідношеннями, які називаються *перетвореннями Галілея* для координат:

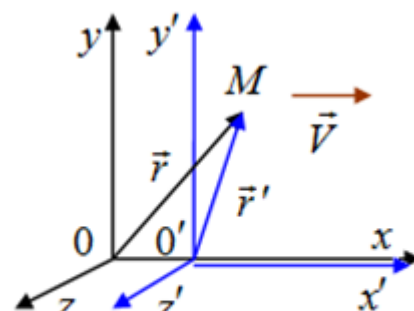


Рисунок 15.1

$$\begin{cases} x' = x - Vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{cases} \quad (15.1)$$

Радіус-вектор частинки становить

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t. \quad (15.2)$$

Диференціювання співвідношення (15.2) з урахуванням того, що $t' = t$, визначає швидкість в штрихованій системі відліку

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}'}{dt} \quad (15.3)$$

і дозволяє отримати *класичний закон додавання швидкостей*

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}' - \vec{V}t) = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{V} = \vec{v} - \vec{V}. \quad (15.4)$$

Для прискорення диференціювання швидкості дає

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{V}) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}. \quad (15.5)$$

Рівність прискорень в обох ІСВ означає, що прискорення інваріантне стосовно перетворень Галілея (**інваріант** – величина, що має однакове чисельне значення у всіх системах відліку).

Сили взаємодії матеріальних точок залежать від взаємного розташування ($\vec{r}_{12}$) і швидкостей відносного руху точок ($\vec{u}_{12}$).

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}'_{12} = \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2 &= (\vec{r}_1 - \vec{V}t) - (\vec{r}_2 - \vec{V}t) = \vec{r}_1 - \vec{V}t - \vec{r}_2 + \vec{V}t = \vec{r}_{12} \\ \vec{u}'_{12} = \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2 &= (\vec{v}_1 - \vec{V}) - (\vec{v}_2 - \vec{V}) = \vec{v}_1 - \vec{V} - \vec{v}_2 + \vec{V} = \vec{u}_{12} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{F}' = \vec{F}. \quad (15.6)$$

Це значить, що сила, що діє на матеріальну точку, інваріантна відносно перетворень Галілея. До того ж вважається, що рівняння 2 закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ також є інваріантним відносно перетворень Галілея. Наслідком цього є **механічний принцип відносності Галілея**: у будь-яких інерціальних системах всі механічні явища за одних умов протікають однаково.

15.1.2. Постулати спеціальної теорії відносності

Поява **спеціальної теорії відносності (СТВ)** обумовлена розвитком електродинаміки і спробами застосувати механічний принцип відносності Галілея до її законів. Це призвело до ряду протиріч. Наприклад, з механічного закону додавання швидкостей (15.4) швидкість світла у вакуумі для рухомої і нерухомої ІСВ повинна відрізнятися (тобто $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{V}$), а з рівнянь Максвелла – має залишатися незмінною ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

Протиріччя між класичними механічними та електродинамічними підходами були подолані А. Ейнштейном, який запропонував вважати, що закони

електродинаміки є вірними, а необхідно змінити перетворення Галілея для випадку швидкостей наближених до швидкості світла.

Постулати СТВ:

1. ***Принцип відносності Ейнштейна:*** в будь-яких ІСВ всі фізичні явища (механічні, електродинамічні тощо) в однакових умовах протікають однаково.
2. ***Принцип сталості швидкості світла:*** швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості руху джерела та однакова у всіх напрямках і для всіх ІСВ, тобто є універсальною сталою.

15.1.3. Перетворення Лоренца та їх наслідки

Відхилення у перебігу фізичних процесів від передбачень класичної механіки, які описує СТВ, називають ***релятивістськими ефектами***, а швидкості, для яких такі ефекти стають суттєвими, – ***релятивістськими швидкостями***. Основною відмінністю СТВ від класичної механіки є залежність просторових та часових характеристик від швидкості.

Перетворення Галілея не діють, коли швидкість об'єкту наближається до швидкості світла. Тому центральне місце у спеціальній теорії відносності посідають перетворення Лоренца, які дозволяють перетворювати просторово-часові координати подій під час переходу від однієї інерційної системи відліку до іншої. Простір і час, які окремо існували в класичній фізиці, були замінені єдиним чотиривимірним «простором-часом».

$$\begin{cases} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{cases} \quad (15.7)$$

де $\beta = \frac{V}{c}$ – відношення швидкості руху системи до швидкості світла у вакуумі.

Наслідки із перетворень Лоренца

1. Відносність одночасності: події, одночасні в одній ІСВ, не є такими в інших ІСВ, що рухаються відносно першої.

Це стосується подій, які причинно не пов'язані одна з одною, оскільки події, що одночасно відбуваються в різних точках простору, не впливають одна на одну. Якщо події причинно пов'язані, то у всіх системах «причина» відбувається раніше «наслідку», тобто «народження передує смерті», а не навпаки.

2. Відносність довжин (відстаней): в ІСВ, що рухаються одна відносно іншої зі швидкістю, яка близька до швидкості світла у вакуумі, спостерігається релятивістський ефект скорочення довжини тіл (в напрямку їх руху)

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (15.8)$$

де l – довжина об'єкта, який рухається, l_0 – **власна довжина** – довжина об'єкта в ІСВ, відносно якої він знаходиться у стані спокою.

3. Відносність проміжків часу: тривалість проміжків часу між двома неодноразовими подіями, що відбуваються в одному і тому ж місці, в різних ІСВ різна:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (15.9)$$

де τ – тривалість явища в системі, яка рухається, τ_0 – **власний час** – час, що відраховується за годинником, що рухається разом з тілом.

Час, відрахований за годинниками, відносно яких система рухається, завжди більший за власний час (уповільнення часу).

«Парадокс близнюків». Один з братів-близнюків відправляється в космічну подорож зі швидкістю наближеною до швидкості світла (субсвітловою), а інший залишається на Землі. З точки зору брата, що залишився, оскільки мандрівник рухався відносно Землі з субсвітловою швидкістю, то у нього сповільнився час, і роки, що минули на Землі, відповідають миттєвостям в космосі. Але з точки

зору мандрівника, оскільки Земля рухалася відносно корабля з субсвітловою швидкістю, то земний власний час проходив повільніше часу на борту корабля, і час подорожі зайняв меншу кількість років, виміряних за земним часом. Парадокс пояснюється нерівноправністю систем відліку. Якщо система відліку, яка пов'язана із Землею, може вважатися інерціальною, то систему, що пов'язана з космічним кораблем, який прискорився до швидкості, що наближена до швидкості світла, інерціальною вважати не можна. А це означає, що СТВ, яка описує рух в інерціальних системах відліку, до неї не застосовна.

4. Інваріантність інтервалу (релятивістського) між подіями

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2} = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2}, \quad (15.10)$$

де $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ – **інтервал** – відстань між двома точками x_1, y_1, z_1 та x_2, y_2, z_2 , яка зберігається в класичній механіці, $\Delta t = t_2 - t_1$.

5. Закон додавання швидкостей в релятивістській механіці

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}}, \quad (15.11)$$

де v – швидкість об'єкту в системі K , v' – швидкість об'єкту в системі K' , V – швидкість руху системи K' відносно системи K .

15.1.4. Релятивістська динаміка

Другий закон Ньютона у звичайному вигляді не узгоджується з теорією відносності. Наприклад, якщо тіло рухається під впливом постійної сили, тоді його швидкість змінюється відповідно до закону рівноприскореного руху, тобто лінійно зростає з часом. Тому через достатній час може стати більше швидкості світла. Необхідно внести до другого закону Ньютона такі зміни, щоб збільшення швидкості тіла під дією будь-якої сили утруднялося в міру її наближення до швидкості світла. Цього можна досягти, якщо змінити зв'язок імпульсу матеріальної точки зі швидкістю. У механіці Ньютона через пропорційність

імпульсу та швидкості, вважалося, що маса тіла не залежить від швидкості його руху. В теорії відносності зв'язок між імпульсом і швидкістю більш складний. Спираючись на вимогу принципу відносності (інваріантність законів щодо перетворень Лоренца), можна довести, що маса має зростати зі швидкістю згідно із законом:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (15.12)$$

де m_0 – **маса спокою**, яка виміряна в тій ІСВ, де тіло перебуває у стані спокою, m – **релятивістська маса** тіла в системі, що рухається.

З формули (15.12) випливає, що маса прагне нескінченності у міру того, як швидкість тіла наближається до швидкості світла. Тим самим, автоматично виконується вимога теорії, згідно з якою швидкість світла є граничною величиною, і швидкість будь-якого тіла не може її перевищити.

В класичній механіці імпульс тіла визначається як $\vec{p} = m\vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$. Оскільки в СТВ маса і час залежать від швидкості тіла, то замінивши час dt , що визначається по годиннику тієї системи, в якій визначається імпульс, на $d\tau_0$, який визначається по годиннику, що рухається разом з тілом, отримаємо **релятивістський імпульс**:

$$\vec{p} = m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau_0} = m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (15.13)$$

де m_0 – маса спокою.

Основним законом класичної динаміки є 2 закон Ньютона $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, який зазвичай використовують у вигляді $\vec{F} = m\vec{a}$. Але в релятивістському випадку слід враховувати залежність маси та імпульсу від швидкості руху, тому **основне рівняння релятивістської динаміки (2 закон Ньютона)** набуває вигляду

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right). \quad (15.14)$$

Через однорідність та ізотропність простору в релятивістській механіці в випадку замкнутої системи справедливі закони збереження релятивістських імпульсу й моменту імпульсу.

Повна енергія тіла пропорційна його релятивістській масі:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (15.15)$$

Енергія спокою – це енергія, яку має тіло у стані спокою.

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (15.16)$$

Ця формула виражає **взаємозв'язок маси та енергії**.

Кінетична енергія, яку має тіло, що рухається, в релятивістській механіці має вигляд

$$KE = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right). \quad (15.17)$$

Використовуючи формули для енергії та імпульсу, можна отримати **зв'язок між енергією та імпульсом**. Для цього поділимо формули для релятивістського імпульсу (15.13) на вираз для повної енергії (15.15):

$$\begin{aligned} \frac{\vec{p}}{E} &= \frac{m_0 \vec{v} \sqrt{1 - \beta^2}}{m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\vec{v}}{c^2}, \\ \vec{p} &= \frac{E}{c^2} \vec{v}. \end{aligned} \quad (15.18)$$

Якщо піднести до квадрата вираз для повної енергії та перетворити з урахуванням того, що $\beta = \frac{v}{c}$, то отримаємо

$$\begin{aligned} E^2 &= \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \beta^2}, \\ E^2 (1 - \beta^2) &= E^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = E^2 - \frac{E^2 v^2}{c^2} = m_0^2 c^4. \end{aligned}$$

Помножимо і поділимо доданок $\frac{E^2 v^2}{c^2}$ на c^2

$$E^2 - \frac{E^2 v^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{c^2} = m_0^2 c^4.$$

В результаті, враховуючи, що з (15.18)

$$\frac{E^2 v^2}{c^2 c^2} \cdot c^2 = p^2 c^2,$$

отримаємо

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4. \quad (5.19)$$

Вираз (5.19) називають *основною кінематичною тотожністю*. Він є інваріантом щодо перетворень Лоренца.

Іноді формулу (5.19) при розв'язанні задач зручніше використовувати у вигляді

$$E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \quad (15.20)$$

Справедливість теорії відносності, як і будь-якої іншої фізичної теорії, зрештою, перевіряється емпірично, шляхом експериментів. СТВ є основою сучасної фізики. Вся сукупність експериментальних даних у фізиці високих енергій, ядерній фізиці, спектроскопії, астрофізиці, електродинаміці та інших сферах фізики узгоджується з теорією відносності в межах точності експерименту. Наприклад, формули СТВ застосовуються при розрахунку прискорювачів елементарних частинок. Обробка величезних масивів даних щодо зіткнення частинок, що рухаються з релятивістськими швидкостями в електромагнітних полях, заснована на законах релятивістської динаміки, відхилення від яких не було виявлено.

15.2. Приклади розв'язання задач

Задача 15.2.1

Якою має бути швидкість рухомого тіла, щоб його поздовжні розміри зменшилися у 2 рази?

Дано:	Розв'язання
$l = 0,5l_0$	Власна довжина l_0 , тобто довжина тіла в системі, відносно якої
$v = ?$	воно знаходиться у стані спокою, і l – довжина тіла в системі, відносно якої воно рухається зі швидкістю v , яка є наближеною до швидкості світла c , пов'язані співвідношенням

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2},$$

де $\beta = v/c$.

Вважаючи, що довжина $l = l_0/2$, отримуємо

$$l_0/2 = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Звідси $\beta = \sqrt{3}/2 = 0,866$.

Шукана швидкість становить

$$v = \beta c = 0,866c = 2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $v = 2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Задача 15.2.2

Елементарна частинка мезон, яка входить до складу космічних променів, рухається зі швидкістю, що становить 95% швидкості світла. Який проміжок часу τ за годинником нерухомого спостерігача відповідає 1 секунді власного часу мезона?

Дано:	Розв'язання
$\tau_0 = 1 \text{ с}$	Інерціальна система відліку, відносно якої мезон знаходиться у стані спокою, рухається зі швидкістю $v = 0,95c$ відносно нерухомого спостерігача. Власний час мезона τ_0 вимірюється за допомогою годинника, які рухаються разом з ним.
$v = 0,95c$	
$\tau = ?$	

Отже, проміжок часу за годинником нерухомого спостерігача з урахуванням того, що $\beta = 0,95$, становить

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,95^2}} = 3,2 \text{ с.}$$

Відповідь: $\tau = 3,2 \text{ с.}$

Задача 15.2.3

Жорсткий стрижень довжиною $l_0 = 1 \text{ м}$ покоїться в системі K' . Стрижень розташований так, що утворює кут $\varphi_0 = 45^\circ$ з віссю x' . Визначити довжину і кут φ в системі K , якщо швидкість системи K' відносно системи K становить $V = 0,8c$.

Дано:	Розв'язання
$l_0 = 1 \text{ м}$	Під час руху зі швидкостями, які близькі до швидкості світла, в напрямку руху відбувається скорочення довжини об'єкта, що рухається. Якщо система K' рухається зі швидкістю $V = 0,8c$ відносно системи K так, що осі x і x' паралельні, то змінюватися буде довжина проєкції
$\varphi_0 = 45^\circ$	
$V = 0,8c$	
$\varphi = ?$	

$x' = l_0 \cdot \cos \varphi_0$. В системі K її довжина складатиме

$$x = x' \sqrt{1 - \beta^2} = l_0 \cdot \cos \varphi_0 \sqrt{1 - \beta^2},$$

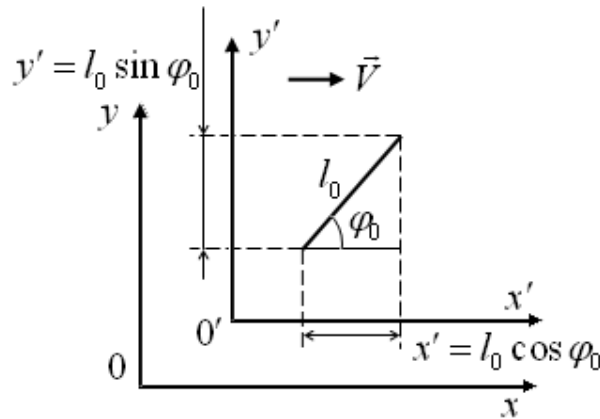
де $\beta = V/c = 0,8c/c = 0,8$.

Проекція на вертикальну вісь під час руху не змінюється і становить

$$y' = l_0 \sin \varphi_0 = y.$$

Довжина стрижня у системі K

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{l_0^2 \cdot \cos^2 \varphi_0 (1 - \beta^2) + l_0^2 \sin^2 \varphi_0} = l_0 \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \varphi_0}.$$



Підставимо дані задачі

$$l = 1 \cdot \sqrt{1 - (0,8 \cdot 0,707)^2} = 0,825 \text{ м.}$$

Кут φ визначимо з виразу

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{l_0 \sin \varphi_0}{l_0 \cdot \cos \varphi_0 \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1,67.$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} 1,66 = 59^\circ.$$

Відповідь: $\varphi = 59^\circ$.

Задача 15.2.4

Власний час життя елементарної частинки становить $\tau_0 = 2 \text{ мкс}$. Від точки народження до точки розпаду в лабораторній системі відліку частинка подолати відстань $l = 6 \text{ км}$. З якою швидкістю (в частках швидкості світла) рухалася ця частинка?

Дано:

$$\tau_0 = 2 \text{ мкс}$$

$$l = 6 \text{ км}$$

$$\beta = ?$$

Розв'язання

Для того щоб знайти швидкість частинки в лабораторній системі відліку необхідно знайти час життя частинки в цій системі. З формули, яка зв'язує власний час життя τ_0 з часом

життя τ в тій системі, відносно якої частинка рухається,

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Тоді швидкість руху частинки

$$v = \frac{l}{\tau} = \frac{l\sqrt{1 - \beta^2}}{\tau_0} = \frac{l\sqrt{1 - (v/c)^2}}{\tau_0}.$$

Розділимо обидві частини формули на швидкість світла у вакуумі c і після перетворення отримаємо:

$$\frac{v}{c} = \frac{l\sqrt{1 - (v/c)^2}}{c\tau_0}.$$

Оскільки швидкість частинки треба знайти в частках швидкості світла, то знайдемо величину β , яка є відношенням швидкості об'єкта до швидкості світла

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tau_0 c}{l}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^3}\right)^2}} = 0,995.$$

Відповідь: $\beta = 0,995$.

Задача 15.2.5

Прискорювач надав радіоактивному ядру швидкість $0,4c$, де c є швидкість світла у вакуумі. В момент вильоту з прискорювача ядро викинуло у напрямку свого руху β -частинку зі швидкістю $0,75c$ відносно прискорювача. Визначте швидкість частинки відносно ядра.

Дано:	Розв'язання
$V = 0,4c$	Для розв'язання задачі потрібно використовувати релятивістський закон додавання швидкостей:
$v = 0,75c$	
$v' = ?$	
	$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{Vv}{c^2}}$, де v – швидкість об'єкта в системі K , v' – швидкість

об'єкта в системі K' , V – швидкість руху системи K' відносно системи K .

У випадку, що розглядається, v – це швидкість β -частинки в системі відліку, що зв'язана з прискорювачем, тобто відносно прискорювача; v' – це швидкість частинки в системі відліку, що зв'язана з ядром, тобто відносно ядра; V – швидкість одної системи відносно іншої, а саме, швидкість ядра відносно прискорювача.

Підставляючи дані задачі, отримуємо

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{Vv}{c^2}} = \frac{0,75c - 0,4c}{1 - \frac{0,75c \cdot 0,4c}{c^2}} = \frac{0,35c}{0,7} = \frac{c}{2} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 150 \text{ Мм/с}.$$

Відповідь: $v' = 150 \text{ Мм/с}$.

Задача 15.2.6

Нейтрино летить зі швидкістю світла відносно ракети. Ракета рухається відносно зірок зі швидкістю $V = 0,9c$. Визначити швидкість нейтрино відносно зірок.

Дано:	Розв'язання
$v' = c$	В задачі розглядаються швидкості у двох системах відліку: одна, що пов'язана із зірками, інша – пов'язана з ракетою. В них швидкість нейтрино відносно ракети – v' , V – швидкість ракети
$V = 0,9c$	
$v = ?$	

відносно зірок, а знайти треба швидкість нейтрино відносно зірок v . З релятивістської формули додавання швидкостей

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{Vv}{c^2}}$$

виразимо шукану швидкість і підставимо дані задачі

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v' \cdot V}{c^2}} = \frac{c + 0,9c}{1 + \frac{c \cdot 0,9c}{c^2}} = \frac{1,9c}{1,9} = c.$$

Отже, швидкість нейтрино відносно зірок дорівнює швидкості світла, що відповідає постулату спеціальної теорії відносності – принцип сталості швидкості світла, згідно з яким швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості руху джерела та однакова у всіх напрямках і для всіх ІСВ, тобто є універсальною сталою.

Задача 15.2.7

Показати, що об'ємна густина заряду більша в тій ІСВ, відносно якої заряди рухаються.

Дано:	Розв'язання
ρ	Згідно із законом збереження електричного заряду алгебраїчна сума зарядів замкнутої системи є постійною величиною. Крім того, величина заряду є релятивістським інваріантом, тобто величиною, що не залежить від вибору ІСВ.
ρ'	

Але в задачі йдеться про об'ємну густину електричних зарядів, яка є в СТВ відносною величиною, бо залежить не тільки від заряду, але й від розмірів. За визначенням середня об'ємна густина заряду в системі, відносно якої заряди знаходяться у стані спокою, дорівнює

$$\rho = \frac{\Delta q}{\Delta V},$$

де Δq – заряд, що знаходиться в об'ємі ΔV .

Об'єм тіла є величиною відносною і згідно з наслідками з перетворень Лоренца, якщо ІСВ рухається зі швидкістю, яка близька до швидкості світла у вакуумі, в напрямку її руху спостерігається релятивістський ефект скорочення довжини.

Об'ємна густина заряду в системі, яка рухається, дорівнює

$$\rho' = \frac{\Delta q}{\Delta V'}.$$

Тоді,

$$\rho' = \frac{\Delta q}{\Delta V'} = \frac{\Delta q}{\Delta V \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Виходячи з того, що знаменник дробу завжди менше одиниці, то $\rho' > \rho$, а саме, густина заряду, в системі, відносно якої заряди рухається, більше, ніж у системі, відносно якої заряди знаходяться у стані спокою.

Відповідь: $\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$

Задача 15.2.8

З якою швидкістю β (в частках швидкості світла) рухається частинка, якщо її релятивістська маса в 3 рази більше її маси спокою?

Дано:	Розв'язання
$m = 3m_0$	Під час руху зі швидкістю, яка близька до швидкості світла, маса частинки m пов'язана з її масою спокою m_0 відповідно до формули
$\beta = ?$	

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Якщо за умовами задачі релятивістська маса становить $m = 3m_0$, то

$$3m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

звідки

$$\sqrt{1 - \beta^2} = 0,333.$$

Швидкість частинки (в частках швидкості світла) дорівнює $\beta = 0,94$, а в абсолютних значеннях $v = \beta c = 2,82 \cdot 10^8$ м/с.

Відповідь: $\beta = 0,94$.

Задача 15.2.9

Яку прискорювальну різницю потенціалів має пройти електрон, щоб його швидкість досягла 95% швидкості світла?

Дано:	Розв'язання
$v = 0,95c$	Під час руху в електричному полі кінетична енергія зарядженої частинки електрону зростає внаслідок роботи електричного поля:
$U = ?$	
	$KE = A.$ (1)

Робота електричного поля становить

$$A = qU = eU. \quad (2)$$

Кінетична енергія частинки у випадку швидкостей близьких до швидкості світла, тобто релятивістська кінетична енергія є

$$KE = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right). \quad (3)$$

Підставляючи (2) і (3) в вираз (1), отримаємо

$$eU = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right).$$

Звідки шукана різниця потенціалів становить

$$U = \frac{m_0 c^2}{e} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0,95^2}} - 1 \right) = 1,13 \cdot 10^6 \text{ В.}$$

Відповідь: $U = 1,13 \cdot 10^6 \text{ В.}$

Задача 15.2.10

Знайти швидкість частинки, якщо її повна енергія в 10 разів більше енергії спокою.

Дано:	Розв'язання
$E = 10E_0$	Енергія спокою – енергія частинки в системі відліку, відносно якої вона знаходиться у стані спокою. З фізичної концепції еквівалентності маси та енергії вона дорівнює
$v = ?$	

$$E_0 = m_0 c^2, \quad (1)$$

де m_0 – маса спокою, c – швидкість світла в вакуумі.

Повна енергія частинки

$$E = mc^2, \quad (2)$$

де m – маса руху або релятивістська маса.

Повну енергію можна виразити через енергію спокою

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3)$$

Оскільки за умовами задачі $E = 10E_0$, то з урахуванням (3)

$$\frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = 10E_0.$$

Тоді

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 10,$$

звідки шукана швидкість частинки становить

$$\beta = 0,995 \quad \text{і} \quad v = \beta c = 0,995c = 2,98 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $v = 2,98 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Задача 15.2.11

Релятивістська частинка має імпульс $p = \frac{865 \text{ MeV}}{c}$ і кінетичну енергію

$KE = 500 \text{ MeV}$. Знайти її швидкість.

Дано:

$$p = \frac{865 \text{ MeV}}{c}$$

$$KE = 500 \text{ MeV}$$

$$v = ?$$

Розв'язання

Імпульс і кінетична енергія в спеціальній теорії відносності описуються, відповідно, формулами

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1)$$

$$KE = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right). \quad (2)$$

Поділимо (2) на (1) і отримаємо

$$\frac{KE}{p} = \frac{m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)}{\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{c^2 (1 - \sqrt{1-\beta^2})}{v}. \quad (3)$$

Перепишемо рівняння (3), враховуючи, що $\beta = v/c$,

$$\frac{KE \cdot v}{pc^2} = 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 - \frac{KE \cdot v}{pc^2}. \quad (4)$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата

$$1 - \frac{2KE \cdot v}{pc^2} + \left(\frac{KE \cdot v}{pc^2} \right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

і виразимо швидкість

$$v = \frac{2pKE}{p^2 + \left(\frac{KE}{c} \right)^2}. \quad (5)$$

Виразимо дані задачі в одиницях СІ. Позасистемна одиниця електронвольт $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$. Тому енергія $KE = 500 \text{ MeV} = 500 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 8 \cdot 10^{-11} \text{ Дж}$, а імпульс $p = \frac{865 \text{ MeV}}{c} = \frac{865 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} = 4,61 \cdot 10^{-19} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Підставимо ці значення в формулу (5) і отримаємо швидкість релятивістської частинки

$$v = \frac{2pKE}{p^2 + \left(\frac{KE}{c} \right)^2} = \frac{2 \cdot 4,61 \cdot 10^{-19} \cdot 8 \cdot 10^{-11}}{\left(4,61 \cdot 10^{-19} \right)^2 + \left(\frac{8 \cdot 10^{-11}}{3 \cdot 10^8} \right)^2} = 2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Цю швидкість можна виразити в частинах швидкості світла

$$v = \frac{2,6 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} = 0,87c.$$

Слід зауважити, що можна було рахувати й в позасистемних одиницях

$$v = \frac{2 \cdot \frac{865}{c} \cdot 500}{\left(\frac{865}{c} \right)^2 + \left(\frac{500}{865/c} \right)^2} = 0,87c.$$

В такому разі розрахунок простіший і дає результат безпосередньо в частинах швидкості світла.

Відповідь: $v = 0,87c$.

Задача 15.2.12

Чому дорівнює імпульс протона, що має кінетичну енергію $KE = 500 \text{ MeV}$?

Дано:	Розв'язання
$KE = 500 \text{ MeV}$	Імпульс релятивістської частинки становить
$p = ?$	$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (1)$

Піднесемо вираз (1) до квадрата і виразимо швидкість

$$p^2 - \frac{p^2 v^2}{c^2} = m_0^2 c^2,$$

$$v = \frac{pc}{\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}}. \quad (2)$$

Підставимо отриманий вираз (2) в формулу для енергії

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{p^2 + m_0^2 c^2}}} = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \quad (3)$$

Повна енергія складається з енергії спокою і кінетичної енергії

$$E = m_0 c^2 + KE. \quad (4)$$

З врахуванням (4) і після піднесення до квадрата, отримуємо

$$\left(m_0 c^2 + KE\right)^2 = c^2 p^2 + \left(m_0 c^2\right)^2,$$

$$c^2 p^2 = KE \left(KE + 2m_0 c^2\right).$$

Отже, шуканий імпульс дорівнює

$$p = \frac{\sqrt{KE(KE + 2m_0c^2)}}{c}. \quad (5)$$

Кінетичну енергію виразимо в одиницях СІ

$$KE = 500 \text{ MeV} = 500 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 8 \cdot 10^{-11} \text{ Дж}$$

і підставимо в отриману формулу (5)

$$p = \frac{\sqrt{8 \cdot 10^{-11} \left(8 \cdot 10^{-11} + 2 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \right)}}{3 \cdot 10^8} = 5,8 \cdot 10^{-19} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Цей результат можна виразити у позасистемних одиницях, поділивши на співвідношення між Джоулем і електронвольтом $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ і помноживши на швидкість світла.

$$p = 5,8 \cdot 10^{-19} \frac{3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,09 \cdot 10^9 \frac{\text{eV}}{c} = 1,09 \frac{\text{Гев}}{c}.$$

Відповідь: $p = 5,8 \cdot 10^{-19} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$

Задача 15.2.13

Яку прискорювальну різницю потенціалів має пройти протон, щоб його маса була такою ж, як у α -частинки з кінетичною енергією $KE_\alpha = 10^9 \text{ eV}$?

Дано:	Розв'язання
$KE_\alpha = 10^9 \text{ eV}$	Кінетична енергія α -частинки є різниця між її повною енергією та енергією спокою
$U = ?$	
	$KE_\alpha = m_\alpha c^2 - m_{0\alpha} c^2, \quad (1)$

звідки релятивістська маса α -частинки, що рухається, дорівнює

$$m_\alpha = \frac{KE_\alpha + m_{0\alpha} c^2}{c^2}, \quad (2)$$

де $m_{0\alpha}$ – маса спокою α -частинки.

Аналогічно, кінетична енергія протона та його релятивістська маса становлять, відповідно,

$$KE_p = m_p c^2 - m_{0p} c^2, \quad (3)$$

$$m_p = \frac{KE_p + m_{0p} c^2}{c^2}. \quad (4)$$

За умовою задачі маси α -частинки і протону, що рухаються, дорівнюють одна одній $m_\alpha = m_p$, тому прирівняємо вирази (2) і (4)

$$\begin{aligned} \frac{KE_\alpha + m_{0\alpha} c^2}{c^2} &= \frac{KE_p + m_{0p} c^2}{c^2}, \\ KE_\alpha + m_{0\alpha} c^2 &= KE_p + m_{0p} c^2. \end{aligned} \quad (5)$$

З урахуванням того, що $m_{0\alpha} = 4m_{0p}$, а, значить, і $m_{0\alpha} c^2 = 4m_{0p} c^2$, рівняння (5) набуває вигляду

$$KE_p + m_{0p} c^2 = KE_\alpha + 4m_{0p} c^2,$$

звідки кінетична енергія протона

$$KE_p = KE_\alpha + 4m_{0p} c^2 - m_{0p} c^2 = KE_\alpha + 3m_{0p} c^2. \quad (6)$$

Цю кінетичну енергію протон отримує завдяки роботі електричного поля

$$eU = KE_p = KE_\alpha + 3m_{0p} c^2. \quad (7)$$

Отже, різниця потенціалів, яку має подолати протон, становить

$$\begin{aligned} U &= \frac{KE_\alpha + 3m_{0p} c^2}{e} = \\ &= \frac{10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} + 3 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 3,8 \cdot 10^9 \text{ В} = 3,8 \text{ Гев}. \end{aligned}$$

Відповідь: $U = 3,8 \text{ Гев}$.

Задача 15.2.14

Кінетична енергія релятивістської частинки дорівнює її енергії спокою. У скільки разів зросте імпульс частинки, якщо її кінетична енергія збільшиться в 4 рази?

Дано:

$$KE_1 = E_0$$

$$KE_2 = 4KE_1$$

$$\frac{p_2}{p_1} = ?$$

Розв'язання

Розв'яжемо задачу двома способами.

1 спосіб

Знайдемо зв'язок між імпульсом та кінетичною енергією частинки. Для цього скористаємося виразами для

повної енергії релятивістської частинки

$$\begin{cases} E = KE + E_0, \\ E^2 = p^2 c^2 + E_0^2. \end{cases} \quad (1)$$

Піднесемо перше рівняння до квадрата і прирівняємо праві частини рівнянь.

В результаті отримаємо

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{KE^2 + 2KE \cdot E_0}. \quad (2)$$

За умовою задачі $KE_1 = E_0$, $KE_2 = 4KE_1 = 4E_0$, відповідно, тоді використовуючи (2), початковий p_1 і кінцевий p_2 імпульси релятивістської частинки можна виразити як

$$p_1 = \frac{1}{c} \sqrt{E_0^2 + 2E_0 \cdot E_0} = \frac{E_0 \sqrt{3}}{c}, \quad (3)$$

$$p_2 = \frac{1}{c} \sqrt{16E_0^2 + 8E_0 E_0} = \frac{E_0 \sqrt{24}}{c}. \quad (4)$$

З врахуванням (3) і (4), відношення імпульсів дорівнює

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{E_0 \sqrt{24}}{c} \frac{c}{E_0 \sqrt{3}} = \sqrt{8} = 2,82. \quad (5)$$

2 спосіб

Знайдемо швидкості частинки (в частках швидкості світла) для двох випадків:

1) коли її кінетична енергія дорівнює енергії спокою $KE_1 = E_0$. Кінетична енергія

$$KE_1 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} - 1 \right), \quad (6)$$

а енергія спокою

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (7)$$

Це означає, що

$$m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} - 1 \right) = m_0 c^2, \quad (8)$$

звідки величина відносної швидкості

$$\beta_1 = 0,866. \quad (9)$$

2) Коли кінетична енергія частинки збільшилася у 4 рази, тобто стала у 4 рази більшою за її енергію спокою $KE_2 = 4E_0$, тоді

$$KE_2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} - 1 \right), \quad (10)$$

$$m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} - 1 \right) = 4m_0 c^2, \quad (11)$$

З рівняння (11) відносна швидкість дорівнює

$$\beta_2 = 0,98. \quad (12)$$

Враховуючи, що релятивістський імпульс є $p = \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, знайдемо

відношення імпульсів

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{m_0 \beta_2 c \sqrt{1 - \beta_1^2}}{m_0 \beta_1 c \sqrt{1 - \beta_2^2}} = \frac{0,98 \sqrt{1 - 0,866^2}}{0,866 \sqrt{1 - 0,98^2}} = 2,82. \quad (13)$$

Як можна побачити з порівняння (9) і (13), другий спосіб дав такий же результат.

Відповідь: $\frac{p_2}{p_1} = 2,82$.

Задача 15.2.15

Частинка мала імпульс $p_1 = m_0 c$. Після дії на неї сили імпульс збільшився вдвічі. Визначити, як змінилися при цьому повна і кінетична енергії частинки.

Дано:	Розв'язання
$p_1 = m_0 c$	Повна енергія релятивістської частинки пов'язана з імпульсом
$p_2 = 2p_1 = 2m_0 c$	
$\frac{E_2}{E_1} = ? \quad \frac{KE_2}{KE_1} = ?$	$E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \quad (1)$ Виходячи з (1), повні енергії для першого ($p_1 = m_0 c$) та другого ($p_2 = 2p_1 = 2m_0 c$) випадків становлять, відповідно: $E_1 = c \sqrt{p_1^2 + m_0^2 c^2} = c \sqrt{m_0^2 c^2 + m_0^2 c^2} = m_0 c^2 \sqrt{2} \quad (2)$ $E_2 = c \sqrt{p_2^2 + m_0^2 c^2} = c \sqrt{4m_0^2 c^2 + m_0^2 c^2} = m_0 c^2 \sqrt{5}. \quad (3)$

Отже, зміна повної енергії дорівнює

$$\frac{E_2}{E_1} = \sqrt{\frac{5}{2}} = 1,58. \quad (4)$$

Кінетична енергія – це різниця між повною енергією E та енергією спокою E_0 :

$$KE = E - E_0. \quad (5)$$

З (5) випливає, що кінетичні енергії до та після дії сили становлять

$$KE_1 = E_1 - E_0 = m_0 c^2 (\sqrt{2} - 1), \quad (6)$$

$$KE_2 = E_1 - E_0 = m_0 c^2 (\sqrt{5} - 1). \quad (7)$$

Зміна кінетичної енергії складає

$$\frac{KE_2}{KE_1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{2} - 1} = 2,98. \quad (8)$$

Відповідь: $\frac{E_2}{E_1} = 1,58; \frac{KE_2}{KE_1} = 2,98.$

15.3. Задачі для самостійної роботи

15.3.1. Власний час життя нестабільної частинки становить 10 нс, час життя частинки в нерухомій системі складає 20 нс. Знайти шлях, пройдений цієї частинкою до розпаду в нерухомій системі відліку.

Відповідь: $s = 5,2 \text{ м}$.

15.3.2. Власний час життя частинки дорівнює 15 мкс. Якою має бути швидкість частинки, щоб нерухомий спостерігач міг її спостерігати протягом однієї мілісекунди?

Відповідь: $\tau = 0,9999c$.

15.3.3. Чому дорівнює довжина космічного корабля, що рухається зі швидкістю $0,8c$. Довжина корабля, що знаходиться у стані спокою, становить 100 м.

Відповідь: $l = 60 \text{ м}$

15.3.4. З космічного корабля, що віддаляється від Землі зі швидкістю $0,7c$, стартує ракета у напрямку руху корабля. Швидкість ракети відносно Землі $0,96c$. Чому дорівнює швидкість ракети відносно Землі?

Відповідь: $v' = 0,8c$.

15.3.5. Яку прискорювальну різницю потенціалів має пройти протон, щоб його поздовжні розміри стали вдвічі меншими?

Відповідь: $U = 933,75 \cdot 10^6 \text{ В}$.

15.3.6. Знайти швидкість, з якою має рухатися куб уздовж одного зі своїх ребер, щоб його густина збільшилася вдвічі?

Відповідь: $v = 2,12 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

15.3.7. Чому дорівнюватиме маса космонавта, що рухається в космічному кораблі зі швидкістю $0,8c$? Маса спокою космонавта становить 90 кг.

Відповідь: $m = 150 \text{ кг}$.

15.3.8. На скільки збільшиться маса α -частинки, яка була прискорена зі стану спокою до швидкості, яка становить $0,9c$?

Відповідь: $\Delta m = 8,64 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$

15.3.9. Маса тіла, що рухається, збільшилася на 20 %. У скільки разів змінилася його довжина?

Відповідь: зменшилася в 1,2 рази.

15.3.10. Яку різницю потенціалів має пройти протон, щоб його розміри зменшилися в 2 рази?

Відповідь: $U = 9,315 \cdot 10^8 \text{ В}$.

15.3.11. У скільки разів збільшиться маса рухомого електрона в порівнянні з його масою спокою, якщо електрон, пройшовши прискорювальну різницю потенціалів, набув кінетичну енергію 0,76 MeV?

Відповідь: $m/m_0 = 2,5$.

15.3.12. За якої швидкості кінетична енергія частинки дорівнює її енергії спокою?

Відповідь: $v = 0,866c = 2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

15.3.13. На скільки відсотків повна енергія протона, що вилітає з прискорювача зі швидкістю, модуль якої $v = 0,8c$, більша за його енергію спокою?

Відповідь: на 67%.

15.3.14. Знайдіть швидкість частинки, якщо її повна енергія в 4 рази більша за кінетичну.

Відповідь: $v = 0,66c$.

15.3.15. Повна енергія частинки з масою m у 5 разів більша за її кінетичну енергію. Знайдіть імпульс частинки.

Відповідь: $p = \frac{3mc}{4}$.

16. КВАНТОВА ОПТИКА

16.1 Теоретичні відомості

16.1.1. Теплове випромінювання та його основні характеристики

Теплове випромінювання – електромагнітне випромінювання, що виникає внаслідок внутрішньої енергії випромінюючого тіла та залежить лише від температури та оптичних властивостей цього тіла.

Теплове випромінювання відбувається за будь-якої температури, що перевищує температуру абсолютного нуля. Спектр випромінювання більшості твердих і рідких тіл неперервний. Ці тіла випускають промені, що відрізняються між собою довжиною хвилі, а також й своїми властивостями. Розпечені тіла (тверді та рідкі) світяться білим світлом; з пониженням температури зменшується інтенсивність випромінювання і змінюється його спектральний склад (колір).

Теплове випромінювання є єдиним випромінюванням, яке здатне перебувати в термодинамічній рівновазі з речовиною, тому його називають **рівноважним**.

Інтенсивність теплового випромінювання характеризується енергією, що випускається одиницею поверхні випромінюючого тіла по всіх напрямках за одиницю часу, – **енергетичною світністю** R (або **випромінюваністю**).

$$[R] = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Як видно із розмірності, енергетична світність – це потік енергії (Дж/с = Ват) з одиниці поверхні випромінюючого тіла.

Енергетична світність є функцією частоти та температури, що відображається індексами в позначенні $R_{\omega T}$.

Для опису спектрального складу теплового випромінювання застосовується енергія, що випромінюється одиницею поверхні нагрітого тіла в одиницю часу у

вузькому діапазоні частот від ω до $\omega + d\omega$. Цей потік променистої енергії $dR_{\omega T}$, що випускається з одиниці поверхні тіла по всіх напрямках, пропорційний ширині спектрального діапазону $d\omega$

$$dR_{\omega T} = r_{\omega T} d\omega, \quad (16.1)$$

Енергію $r_{\omega T}$, що припадає на одиничний діапазон частот, називають або **спектральною густиною енергетичної світності** або **спектральною випромінювальною здатністю тіла**.

$$[r_{\omega T}] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}.$$

Для кожного тіла випромінювальна здатність є певною функцією частоти, вид якої змінюється при зміні температури тіла. Надалі для такої функціональної залежності, що розглядається при заданому значенні температури тіла як деяка функція частоти $r(\omega, T)$, використовуватимемо прийняте в теорії теплового випромінювання позначення: $r(\omega, T) \equiv r_{\omega T}$.

Сумарний потік енергії випромінювання з одиниці поверхні тіла по всьому діапазону частот називається **інтегральною енергетичною світністю** тіла або його **інтегральною випромінюваністю**

$$R_{\omega T} = \int dR_{\omega T} = \int_0^{\infty} r_{\omega T} d\omega. \quad (16.2)$$

Для характеристики процесу поглинання випромінювання вводиться **спектральна поглинальна здатність** – безрозмірна величина, що показує, яка частка падаючого потоку променистої енергії $(d\Phi_{\omega})_{\text{пад}}$, що обумовлений електромагнітними хвилями, частота яких укладена в інтервалі $d\omega$ поблизу ω , поглинається тілом:

$$a_{\omega T} = \frac{(d\Phi_{\omega})_{\text{погл}}}{(d\Phi_{\omega})_{\text{пад}}}. \quad (16.3)$$

Будь-яке реальне тіло поглинає випромінювання різних частот по-різному залежно від температури. Тому спектральна поглинальна здатність тіла $a_{\omega T}$ є функцією частоти, вид якої змінюється за зміни температури тіла.

Абсолютно чорне тіло (АЧТ) – це фізична модель, під якою розуміють тіло, що повністю поглинає усе електромагнітне випромінювання, що на нього падає. АЧТ характеризується поглинальною здатністю $a_{\omega T} \equiv 1$ для всіх частот і за будь-якої температури. У природі абсолютно чорних тіл немає: є деякі об'єкти, при описі яких можна вважати, що їх поглинальна здатність дорівнює одиниці. До них відносять, наприклад, сажу і платинова чернь, які поглинають близько 99% падаючого на них випромінювання. Також характеристики, наближені до абсолютно чорного тіла, має Сонце.

Тіло, у якого поглинальна здатність менше одиниці $a_{\omega T} < 1$ та однакова по всьому діапазону частот, називають **сірим тілом**. Для практичного застосування при розв'язанні задач використовують **коефіцієнт чорноти** k , який відповідає поглинальній здатності тіла у певному інтервалі температур. Для абсолютно чорного тіла $k = 1$, а для сірих тіл $k < 1$.

Випромінювальну здатність тіла $r_{\omega T}$ і інші вище розглянуті характеристики теплового випромінювання $(R_{\omega T}, a_{\omega T})$ можна розглядати і як функцію довжини хвилі випромінювання λ , яка пов'язана з частотою через швидкість світла у вакуумі за формулою $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$. В цьому випадку відповідні характеристики будуть записані з індексами λ і T , а саме, $r_{\lambda T}$, $R_{\lambda T}$ і $a_{\lambda T}$.

16.1.2. Закони теплового випромінювання

Між випромінювальними та поглинальними властивостями будь-якого тіла існує зв'язок, адже рівновагу в системі можна встановити лише в тому випадку, якщо кожне тіло випромінюватиме в одиницю часу стільки ж енергії, скільки

воно поглинає. Це означає, що тіла, що інтенсивніше поглинають випромінювання будь-якої частоти, будуть це випромінювання інтенсивніше і випромінювати.

Закон Кірхгофа: відношення випромінювальної та поглинальної здатностей однаково для всіх тіл у природі, включаючи абсолютно чорне тіло, і при даній температурі є однією і тією ж універсальною функцією частоти (довжини хвилі) і температури і називається **випромінювальною здатністю абсолютно чорного тіла** $r_{\omega T}^*$.

$$\left(\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}}\right)_1 = \left(\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}}\right)_2 = \dots = \left(\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}}\right)_{\text{чорн}} = r_{\omega T}^* = f(\omega, T). \quad (16.4)$$

Зауважимо, що зірочкою (*) надалі ми відзначатимемо характеристики теплового випромінювання абсолютно чорного тіла.

Закон Стефана-Больцмана: енергетична світність абсолютно чорного тіла пропорційна четвертому ступеню його температури:

$$R^* = \sigma T^4, \quad (16.5)$$

де $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$ – **стала Стефана-Больцмана**.

Закон Стефана-Больцмана, визначаючи залежність енергетичної світності від температури, не дає відповіді щодо спектрального складу випромінювання абсолютно чорного тіла. З експериментальних кривих залежності $r_{\lambda T}^*(\lambda)$ за різних температур (рис. 16.1) впливає, що розподіл енергії в спектрі абсолютно чорного тіла є нерівномірним. Всі криві мають максимум, який зі збільшенням T зміщується в бік збільшення частот (рис. 16.1, а) або зменшення довжин хвиль (рис. 16.1, б). Площа, обмежена кривою залежності $r_{\lambda T}(\lambda)$, дорівнює R^* (це впливає з геометричного сенсу інтеграла) і пропорційна T^4 .

На основі термодинамічних підходів і теорії електромагнітних хвиль Максвелла, Вільгельм Він сформулював два закони для теплового випромінювання.

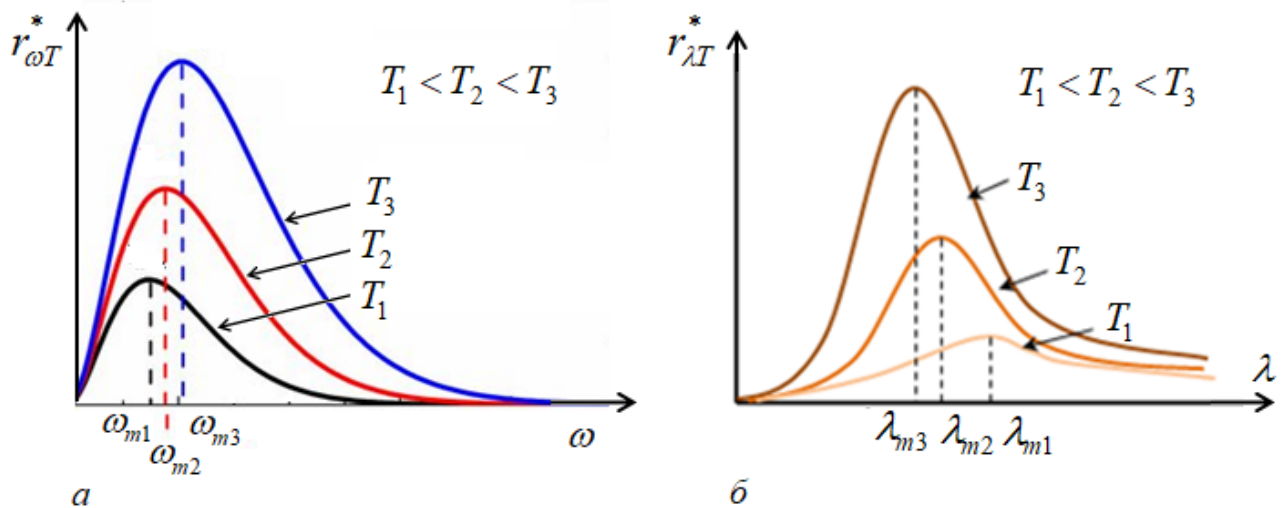


Рисунок 16.1

Закон зміщення Віна (1 закон Віна): довжина хвилі λ_m (рис. 16.1, б), що відповідає максимальному значенню випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла (максимуму спектральної густини енергетичної світності), змінюється обернено пропорційно абсолютній температурі T :

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \quad (16.6)$$

де $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ – **стала Віна**.

2 закон Віна: максимальна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла зростає пропорційно до п'ятого ступеня абсолютної температури:

$$(r_{\lambda T}^*)_m = CT^5, \quad (16.7)$$

де $C = 1,29 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}^5}$ – стала.

Вид функції $r_{\omega T}^* = f(\omega, T)$ з закону Кірхгофа намагалися встановити багато вчених, серед яких Релей і Джинс, які запропонували математичну формулу, яка добре відповідала експерименту в області великих довжин хвиль випромінювання, але прагнула до нескінченності в області коротких довжин хвиль (рис. 16.2).

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT, \quad (16.8)$$

де c – швидкість світла, а k – стала Больцмана.

До того ж формула Релея-Джинса суперечила законам Віна і Стефана-Больцмана, а також закону збереження енергії (інтегрування формули Релея-Джинса дає $R^* = \infty$, в той час, як ця величина має кінцеве значення). В історію фізики цей факт невідповідності теорії та практики увійшов під назвою «*ультрафіолетова катастрофа*».



Рисунок 16.2

Роботи Релея-Джинса показали неможливість застосування класичної фізики для дослідження спектрального складу випромінювання абсолютно чорного тіла.

16.1.3. Квантова гіпотеза. Формула Планка

У 1900 р. М. Планк запропонував формулу для розрахунку випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла, відмовившись від класичних уявлень про безперервність процесу випромінювання електромагнітних хвиль. Планк припустив, що потік випромінювання складається з окремих порцій – **квантів**, енергії яких пропорційні частотам (довжинам хвиль) відповідного електромагнітного випромінювання. Квант енергії електромагнітного випромінювання (світла) називається **фотон**. Фотон є частинкою, що має енергію ε та імпульс p , які визначаються за формулами

$$\varepsilon = \hbar \omega = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad (16.9)$$

$$p = \frac{\hbar \omega}{2\pi c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}, \quad (16.10)$$

де $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, $h = 2\pi\hbar = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – **сталі Планка**, ν , ω і λ – частота, кругова частота і довжина хвилі випромінювання, відповідно.

Фотони рухаються зі швидкістю світла, бо саме і є світлом. Маса спокою фотона дорівнює нулю.

Формула Планка для спектральної густини енергетичної світності абсолютно чорного тіла:

$$r_{\omega T}^* = f(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}. \quad (16.10)$$

Враховуючи те, що $\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}$, спектральну густину енергетичної світності (випромінювальну здатність) по формулі Планка можна записати у вигляді

$$r_{\lambda T}^* = f(\lambda, T) = \frac{2\pi \hbar c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar c}{\lambda kT}} - 1}. \quad (16.11)$$

Формула Планка добре узгоджується з експериментальними даними. З неї витікають закони Стефана-Больцмана і Віна.

16.1.4. Фотоелектричний ефект та його закономірності. Рівняння Ейнштейна для фотоефекту

Явище випускання електронів твердими та рідкими тілами під дією електромагнітного випромінювання називається **фотоемісією електронів** або **зовнішнім фотоефектом**.

Дослідження фотоефекту, що було здійснено на експериментальній установці (рис. 16.3, а), дозволило встановити закономірності та характеристики

фотоефекту.

1. Фотострум насичення $I_{\text{нас}}$ (рис. 16.3, б) є пропорційним світловому потоку $\Phi_{\text{св}}$, що падає на катод (*закон Столетова*):

$$I_{\text{нас}} = \gamma \cdot \Phi_{\text{св}}, \quad (16.12)$$

де γ – чутливість опромінюваної поверхні, яка залежить від природи та стану поверхні, а також від довжини світлової хвилі.

2. Максимальна початкова швидкість фотоелектронів та їх кінетична енергія визначаються частотою світлової хвилі і не залежать від її інтенсивності.

3. Для кожної речовини існує найменша частота $\omega_{\text{чер}}$, нижче якої фотоефект не відбувається. Вона називається *червоною межею фотоефекту*. Величина $\omega_{\text{чер}}$ залежить від хімічної природи речовини та стану його поверхні.

4. Фотоефект практично безінерційний, тобто фотоелектрони з'являються майже відразу після початку опромінювання. Інтервал часу між початком опромінювання і випромінюванням фотоелектронів для зовнішнього фотоефекту становить ~ 1 нс.

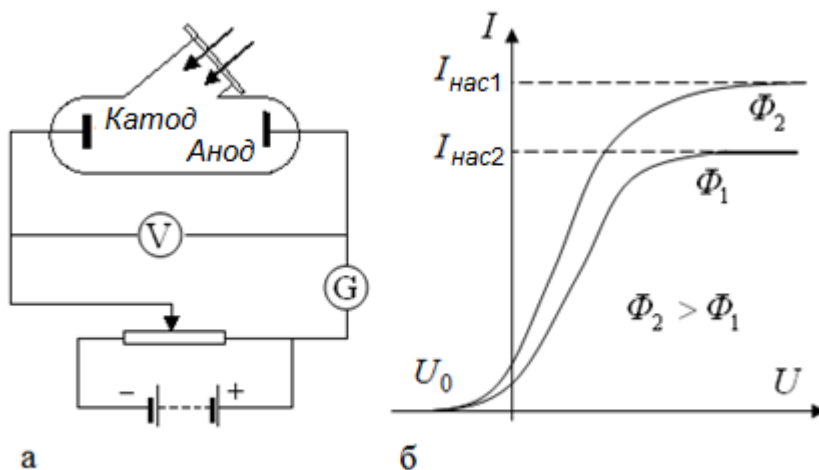


Рисунок 16.3

Пояснення встановлених закономірностей виявилось неможливим в рамках класичної фізики. Для їх пояснення необхідно було залучити квантові уявлення.

А. Ейнштейн, розвиваючи квантову гіпотезу Планка, припустив, що світло не тільки випромінюється, але й розповсюджується у просторі та поглинається

речовиною у вигляді квантів. У квантовій теорії фотоефекту він запропонував, що у кожному елементарному епізоді фотоефекту один електрон поглинає один фотон і внаслідок отримання енергії виходить з металу. Для виходу за межі металу електрон повинен витратити певну енергію, яка називається **роботою виходу** $A_{\text{вих}}$. Ця енергія залежить від хімічної природи речовини та стану її поверхні та є постійною характеристикою для кожного металу.

Рівняння Ейнштейна для фотоефекту

$$\varepsilon = A_{\text{вих}} + KE, \quad (16.13)$$

де $\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \hbar\omega$ – енергія падаючого на речовину кванта електромагнітного випромінювання (світла), а KE – максимальна кінетична енергія електрона.

Робота виходу, як будь-яка енергія, вимірюється в Джоулях, але не менш часто на практиці використовується і позасистемна одиниця вимірювання енергії **електронвольт** ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$).

З формули (16.13) видно, якщо $\varepsilon < A_{\text{вих}}$, то електрон не покидає метал, тобто фотоефект не спостерігається.

Зі співвідношення $\varepsilon = A_{\text{вих}}$, можна визначити мінімальну частоту або максимальну довжину хвилі, за яких здійснюється фотоефект. Значення кругової частоти $\omega_{\text{чер}}$, частоти $\nu_{\text{чер}}$ і довжини хвилі $\lambda_{\text{чер}}$ відповідають так званій **червоній межі фотоефекту**. Тому з $\hbar\omega_{\text{чер}} = h\nu_{\text{чер}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{чер}}} = A_{\text{вих}}$,

$$\omega_{\text{чер}} = \frac{A_{\text{вих}}}{\hbar}, \quad \nu_{\text{чер}} = \frac{A_{\text{вих}}}{h}, \quad \lambda_{\text{чер}} = \frac{hc}{A_{\text{вих}}}. \quad (16.14)$$

Червона межа фотоефекту відповідає тій довжині хвилі падаючого фотона, більше якої, або тій частоті, менше якої, фотоефект не відбувається, оскільки в цьому випадку енергія кванта буде менша за роботу виходу, тобто цієї енергії буде недостатньо для того, щоб електрон вийшов за межі своєї речовини.

При $\varepsilon > A_{\text{вих}}$, фотоефект відбувається, а електрони, що покидають речовину, мають кінетичну енергію, яка для класичного випадку є $KE = \frac{mv^2}{2}$, а для релятивістського – $KE = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$, де $\beta = \frac{v}{c}$. Кінетична енергія вирваних світлом електронів залежить тільки від частоти світла: зростає лінійно з частотою світла і не залежить від його інтенсивності.

Фотострумом між катодом і анодом в досліді (рис. 16.3,а) можна керувати, змінюючи енергію світла, що падає. Якщо змінити полярність батареї, то сила струму зміниться і при деякій напрузі U_3 протилежної полярності дорівнюватиме нулю. Це означає, що електричне поле гальмує вибиті електрони до повної зупинки, а потім повертає їх на електрод.

Затримуюча напруга U_3 залежить від максимальної кінетичної енергії, яку мають вирвані світлом електрони. Тому з врахуванням того, що робота електричного поля $eU_3 = KE$, рівняння (16.13) набуває вигляду

$$\varepsilon = A_{\text{вих}} + eU_3. \quad (16.15)$$

16.1.5. Гальмівне рентгенівське випромінювання. Короткохвильова межа суцільного рентгенівського спектра

Якщо енергія кванта значно перевищує роботу виходу, то рівняння Ейнштейна (16.13) набуває вигляду

$$\varepsilon = KE. \quad (16.16)$$

Таким чином, енергія світлового кванта перетворюється на кінетичну енергію електрона. Цей процес називається **прямим фотоефектом**.

Якщо електрон прискорити різницею потенціалів U , то вираз (16.16) можна інтерпретувати інакше: при різкому гальмуванні електронів у металі кінетична

енергія електронів переходить в енергію квантів, що виникають. Саме такий процес – **зворотний фотоефект** – відбувається в рентгенівській трубці.

Рентгенівська трубка (рис. 16.4, а) є вакуумним балоном, в якому розташовані навпроти один одного джерело термоелектронів (катод К), що нагрівається струмом, і антикатод (анод А з вольфраму, платини, міді тощо). Циліндричний електрод Ц призначений для фокусування електронного пучка.

Під дією напруги U електрони розганяються до енергії eU . Потрапивши у металевий антикатод, електрони різко уповільнюються та стають джерелом електромагнітних хвиль.

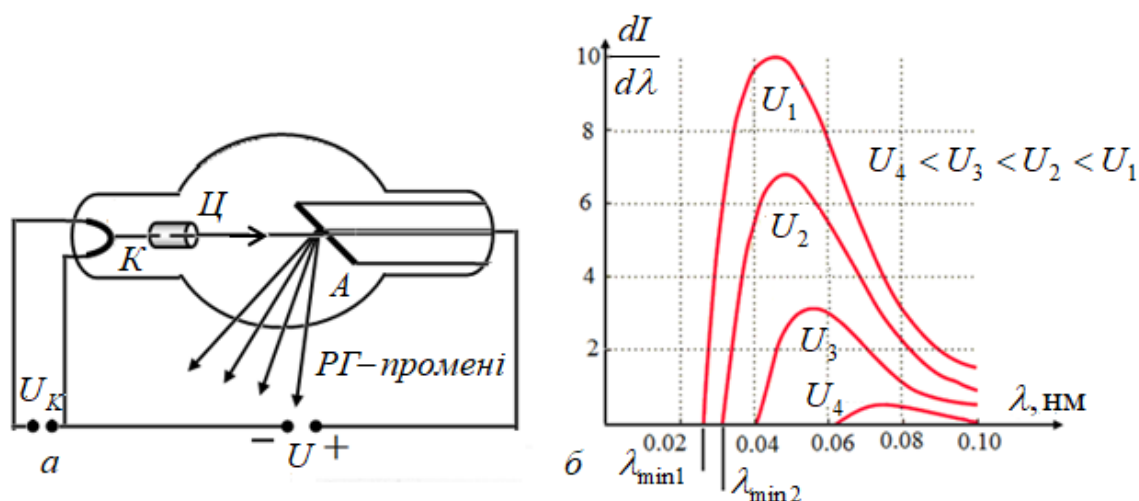


Рисунок 16.4

Рентгенівське випромінювання (РГ-випромінювання, X-промені, Röntgen-viprominnyuvannya) – електромагнітне випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 10^{-8} - 10^{-12}$ м, яке характеризується високою проникаючою здатністю. Потрапляючи в речовину антикатада, електрони гальмуються, при цьому випускається електромагнітне випромінювання, що має назву **гальмівного РГ випромінювання**. Спектр цього випромінювання при розкладанні по довжинах хвиль виявляється суцільним, як і спектр видимого білого світла (рис. 16.4, б).

В області коротких довжин хвиль на залежності спектральної інтенсивності від λ спостерігається короткохвильова межа гальмівного рентгенівського спектру. Наявність її пояснюється тим, що енергія кванта $\hbar\omega$ випромінювання,

яке обумовлено енергією, що втрачається електроном при гальмуванні, не може бути більшою за енергію цього електрона. Звідси випливає, що частота випромінювання не може перевищувати значення $\omega_m = \omega_{\max} = \frac{eU}{\hbar}$. Значить, **довжина хвилі короткохвильової межі суцільного рентгенівського спектра** не може бути меншою, ніж

$$\lambda_m = \lambda_{\min} = \frac{2\pi\hbar c}{eU} = \frac{hc}{eU}, \quad (16.17)$$

$$\lambda_m = \lambda_{\min} = \frac{1,24}{U}. \quad (16.18) \text{де}$$

U – вимірюється в кіловольтах, а $\lambda_{\min}$ – в нанометрах.

Існування короткохвильової межі гальмівного рентгенівського спектру, яка не залежить від матеріалу антикатада і визначається тільки напругою на трубці, є одним з найяскравіших проявів квантових властивостей рентгенівського випромінювання. Залежність граничної частоти від прискорювальної напруги (16.17) дозволяє з високою точністю визначити значення сталої Планка, що збігається зі значенням, отриманим із законів теплового випромінювання.

16.1.6. *Фотони. Світловий тиск*

Пояснення закономірностей теплового випромінювання, фотоефекту і гальмівного РГ випромінювання показали правомірність квантової гіпотези Планка та гіпотези Ейнштейна про світлові кванти – **фотони**.

Світло з частотою ω – це потік фотонів з енергією $\varepsilon = \hbar\omega$. Оскільки світло поширюється в вакуумі зі швидкістю c , то фотони повинні мати ту ж саму швидкість. Але згідно СТВ повна енергія будь-якої частинки, що рухається зі швидкістю v , визначається як $E = m_0 c^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$. Оскільки для фотона $v = c$, то знаменник цього виразу обертається в нуль. Для фотона, що має кінцеву

енергію, це можливо лише за умови $m_0 = 0$, тобто маса спокою фотона дорівнює нулю.

Використовуючи формулу, яка зв'язує енергію частинки та її імпульс $E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$, прийнявши $m_0 = 0$ і $E = \varepsilon = \hbar \omega$, отримаємо **імпульс фотона** у вигляді

$$p = \frac{\hbar \omega}{c} = \frac{h \nu}{c} = \frac{h}{c T} = \frac{h}{\lambda}. \quad (16.19)$$

Хвильовим числом називається величина $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, тоді

$$p = \hbar k. \quad (16.20)$$

Але оскільки імпульс – це векторна величина, то

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}, \quad (16.21)$$

де $\vec{k}$ – **хвильовий вектор**, модуль якого дорівнює хвильовому числу k .

Звернемо увагу на той факт, що частота і хвильовий вектор характеризують хвильові властивості монохроматичного світла, а енергія та імпульс – корпускулярні. До того ж фотон як частинка має досить своєрідні властивості: його маса спокою дорівнює нулю і його єдиний стан – рух зі швидкістю світла, яка є однаковою для всіх систем відліку.

Одним з основних експериментальних підтверджень наявності у фотона імпульсу є **світловий тиск**. З квантової точки зору тиск світла обумовлений тим, що при зіткненні світла з поверхнею кожен фотон передає їй свій імпульс. Реально відбиття світла поверхнею є досить складним процесом «перевипромінювання», тобто поглинання, а потім випромінювання фотона речовиною. Але спрощено його можна розглядати як дзеркальне відбиття «пружних» кульок.

Розглянемо потік монохроматичного випромінювання, що падає перпендикулярно поверхні. Нехай в одиницю часу на одиницю площі падає n фотонів, що мають частоту ν . Якщо **коефіцієнт відбиття** ρ , то ρn фотонів

відбивається, а $(1-\rho)n$ фотонів поглинається. Кожен відбитий фотон передає поверхні імпульс $2p = 2\frac{h\nu}{c}$, а поглинений – імпульс $p = \frac{h\nu}{c}$.

Тиск світла (P) на поверхню дорівнює імпульсу, який передають поверхні за 1 секунду усі n фотонів:

$$P = \frac{2h\nu}{c}\rho n + \frac{h\nu}{c}(1-\rho)n = \frac{nh\nu}{c}(1+\rho) = \frac{E}{c}(1+\rho). \quad (16.22)$$

Тиск світла відіграє велику роль в астрономічних та атомних явищах. В астрофізиці тиск світла поряд із тиском газу забезпечує стабільність зірок, протидіючи силам гравітації. Дією тиску світла пояснюються деякі форми кометних хвостів. До атомних ефектів відноситься так звана «світлова віддача», яку відчуває збуджений атом під час випромінювання фотона.

16.1.7. Комптон-ефект. Корпускулярно-хвильовий дуалізм

Комптон-ефект полягає в зміні довжини хвилі рентгенівських променів, що відбувається при розсіянні їх речовиною, що складається з легких атомів (парафін, графіт тощо). А. Комптон встановив, що в розсіяному на «вільних» (або слабозв'язаних) електронах речовини короткохвильовому електромагнітному випромінюванні (рентгенівському та γ -випромінюванні) поряд з вихідною довжиною хвилі λ з'являється зміщена лінія з довжиною хвилі $\lambda' > \lambda$. Це збільшення довжини хвилі називається **комптонівським зміщенням** (рис. 16.5, а).

Комптонівське зміщення $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ для всіх речовин однаково і не залежить від довжини хвилі λ падаючого випромінювання. Збільшення $\Delta\lambda$ визначається тільки кутом розсіювання ϑ між напрямками розсіяного та падаючого випромінювань:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \vartheta) = 2\lambda_c \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right), \quad (16.23)$$

де $\lambda_c = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 2,43 \text{ пм}$ – **комтонівська довжина хвилі** для електрона.

Особливості Комптон-ефекту можна пояснити, розглядаючи процес пружного зіткнення РГ-фотонів з практично вільними електронами.

При Комптон-ефекті виконується закон збереження енергії

$$\varepsilon_\phi = \varepsilon'_\phi + \varepsilon'_e, \quad (16.24)$$

і закон збереження імпульсу

$$\vec{p}_\phi = \vec{p}'_e + \vec{p}'_\phi, \quad (16.25)$$

де ε_ϕ і $\vec{p}_\phi$, ε'_ϕ і $\vec{p}'_\phi$ – енергії та імпульси фотонів падаючого й розсіяного під кутом ϑ (**кут розсіяння**), відповідно, ε'_e і $\vec{p}'_e$ – енергія та імпульс електрона віддачі, що поширюється під кутом φ (**кут віддачі**) у напрямку падіння фотона; $\alpha = \vartheta + \varphi$ – **кут розльоту** (рис. 16.5, б).

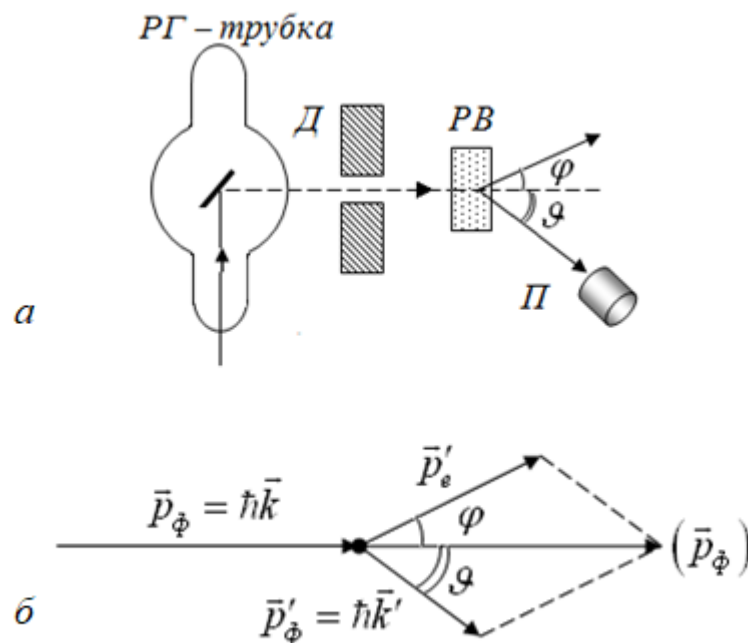


Рисунок 16.5

Якщо на електрон, що знаходиться у стані спокою, падає фотон, то їх енергії і імпульси мають наступний вигляд

Таблиця 16.1 – Значення енергій та імпульсів для частинок, що беруть участь у Комптон-ефекті

	Енергія		Імпульс	
	до	після	до	після
Фотон	$\hbar\omega$	$\hbar\omega'$	$\hbar\vec{k}$	$\hbar\vec{k}'$
Електрон	m_0c^2	$c\sqrt{p'^2 + m_0^2c^2}$	0	$\vec{p}'$

Запишемо закон збереження енергії $\hbar\omega + m_0c^2 = \hbar\omega' + c\sqrt{p'^2 + m_0^2c^2}$ та розділимо його обидві частини на c :

$$\sqrt{p'^2 + m_0^2c^2} = \hbar\left(\frac{\omega}{c} - \frac{\omega'}{c}\right) + m_0c,$$

$$\sqrt{p'^2 + m_0^2c^2} = \hbar(k - k') + m_0c.$$

Піднесемо обидві частини до квадрата і отримаємо:

$$p'^2 + m_0^2c^2 = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk') + m_0^2c^2 + 2\hbar m_0c(k - k'),$$

звідки

$$p'^2 = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk') + 2\hbar m_0c(k - k'). \quad (16.26)$$

Запишемо закон збереження імпульсу:

$$\hbar\vec{k} = \vec{p}' + \hbar\vec{k}',$$

$$p'^2 = \hbar^2(\vec{k} - \vec{k}')^2$$

$$p'^2 = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk'\cos\alpha), \quad (16.27)$$

Прирівняємо вирази для p'^2 з законів збереження енергії (16.26) та імпульсу (16.27)

$$\hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk') + 2\hbar m_0c(k - k') = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk'\cos\vartheta),$$

$$\hbar k^2 + \hbar k'^2 - 2\hbar kk' + 2m_0c(k - k') = \hbar k^2 + \hbar k'^2 - 2\hbar kk'\cos\vartheta,$$

$$2m_0c(k - k') = 2\hbar kk'(1 - \cos\vartheta).$$

Помножимо обидві частини на $\frac{\pi}{m_0 c k k'}$:

$$\begin{aligned}\frac{2\pi m c}{m_0 c k k'}(k - k') &= \frac{2\pi \hbar k k'}{m_0 c k k'}(1 - \cos \vartheta), \\ \frac{2\pi k}{k k'} - \frac{2\pi k'}{k k'} &= \frac{2\pi \hbar}{m_0 c}(1 - \cos \vartheta), \\ \lambda' - \lambda &= \frac{2\pi \hbar}{m_0 c}(1 - \cos \vartheta).\end{aligned}\tag{16.28}$$

Порівняємо теоретичну формулу (16.28) з експериментальним (16.23) виразом $\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos \vartheta)$, отримаємо значення **комptonівської довжини хвилі**:

$$\lambda_c = \frac{2\pi \hbar}{m_0 c} = \frac{h}{m_0 c}.\tag{16.29}$$

Комптонівська довжина хвилі електрона дорівнює

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 2,43 \text{ пм}.\tag{16.30}$$

Фотони можуть розсіюватися і на інших частинках (протонах, нейтронах) так само, як на електронах, проте через те, що ці частинки важчі за електрон, зміна довжини хвилі значно менша, а тому помітною стає лише для дуже високоенергетичних фотонів.

Значення відкриття Комптона полягає в тому, що вперше було показано наявність у квантів електромагнітного випромінювання всіх механічних властивостей, характерних для інших фізичних частинок.

Одним з найбільш значних досягнень фізики ХХ століття стало подолання протиставлення хвильових і квантових властивостей світла. Властивості безперервності, характерні для електромагнітного поля світлової хвилі, не виключають властивостей дискретності, характерних для світлових квантів – фотонів, тобто це діалектична єдність двох протилежностей (**корпускулярно-хвильовий дуалізм**).

У прояві цих двох протилежних властивостей є певна закономірність. Зі зменшенням довжини хвилі (зростанням частоти) сильніше виявляються квантові властивості світла (червона межа фотоефекту, фотохімічні реакції), а хвильові властивості – слабше (наприклад, дифракція РГ-променів виявлена лише на кристалічній решітці). Для довгохвильового випромінювання основну роль грають хвильові властивості.

Корпускулярні і хвильові властивості не виключають, а взаємно доповнюють одна одну. Вони відображають дві різні, але тісно взаємопов'язані закономірності поширення електромагнітного випромінювання і його взаємодію з речовиною. Корпускулярні властивості обумовлені тим, що енергія, імпульс і маса випромінювання локалізовані в дискретних «частинках» – фотонах, хвильові – статистичними закономірностями розподілу фотонів в просторі, тобто закономірностями, що визначають ймовірності знаходження фотонів в різних точках простору.

16.2. Приклади розв'язання задач

Задача 16.2.1

Якого кольору зірка Антарес, якщо температура її поверхні $T = 4000 \text{ K}$? Вважаючи випромінювання близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла, знайти енергію, яку зірка випромінює за одну секунду з одиниці площі поверхні? Знайти масу електромагнітних хвиль (всіх довжин), що випромінюються зіркою за $t = 1 \text{ с}$. Радіус Антаресу вважати рівним $r = 6,13 \cdot 10^{11} \text{ м}$.

Дано:	Розв'язання
$T = 4000 \text{ K}$	Оскільки випромінювання зірки є близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла, то виходячи із визначення енергетичної світності як енергії, що випромінюється за одиницю часу з одиниці площі поверхні, визначимо її за законом Стефана-Больцмана
$t = 1 \text{ с}$	
$r = 6,13 \cdot 10^{11} \text{ м}$	
$R^* = ? \quad \lambda_m = ?$	
$m_0 = ?$	

$$R^* = \sigma T^4, \quad (1)$$

де $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{K}^4}$ – стала Стефана-Больцмана, а T – абсолютна температура.

Підставляючи дані задачі, знайдемо

$$R^* = \sigma T^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 4000 = 2,27 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}.$$

Для визначення кольору зірки скористаємося законом зміщення Віна, згідно з яким довжина хвиля, на яку припадає максимум спектральної густини енергетичної світності, є обернено пропорційною абсолютній температурі

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \quad (2)$$

де $b \approx 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{K}$ – стала Віна.

Тоді довжина хвилі становить

$$\lambda_m = \frac{b}{T} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{4000} = 7,25 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 723 \text{ нм.}$$

Ця довжина хвилі належить до видимого діапазону електромагнітних хвиль і відповідає червоному кольору. Саме тому Антарес, зірка, що належить до сузір'я Скорпіона, є так званим червоним супергігантом.

Для знаходження маси електромагнітних хвиль будемо використовувати взаємозв'язок маси та енергії зі спеціальної теорії відносності

$$E_0 = m_0 c^2,$$

де E_0 – енергія, що випромінюється протягом 1 секунди з 1 кв.м. поверхні зірки, іншими словами, потужність випромінювання з одиниці площі.

Виходячи з розмірності енергетичної світності $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ і враховуючи (1),

потужність N випромінювання зі всієї поверхні зірки є

$$N = R^* \cdot S = R^* \cdot 4\pi r^2,$$

де $S = 4\pi r^2$ – площа поверхні зірки радіуса r .

Отже, маса електромагнітних хвиль, що випромінює зірка за 1 с, становить

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{E_0}{c^2} = \frac{N \Delta t}{c^2} = \frac{R^* \cdot 4\pi r^2 \cdot \Delta t}{c^2} = \\ &= \frac{2,27 \cdot 10^{-4} \cdot 4\pi \cdot (6,13 \cdot 10^{11})^2 \cdot 1}{(3 \cdot 10^8)^2} = 1,2 \cdot 10^4 \text{ кг.} \end{aligned}$$

Перевірка розмірності

$$[m_0] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} = \text{кг}.$$

Відповідь: $R^* = 2,27 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$; $\lambda_m = 723 \text{ нм}$; $m_0 = 1,2 \cdot 10^4 \text{ кг}$.

Задача 16.2.2

Абсолютно чорне тіло має температуру $T_1 = 2900 \text{ K}$. У результаті охолодження тіла довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної густини енергетичної світності, змінилася на $\Delta\lambda_m = 9 \text{ мкм}$. До якої температури охолодили тіло?

Дано:	Розв'язання
$T_1 = 2900 \text{ K}$	Довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної густини енергетичної світності, визначається законом зміщення Віна
$\Delta\lambda_m = 9 \text{ мкм}$	
$T_2 = ?$	$\lambda_m = \frac{b}{T}, \quad (1)$ де $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{K}$ – стала Віна.

Більш високій температурі відповідає менша довжина хвилі, тому, якщо $T_2 < T_1$, то $\lambda_{m2} > \lambda_{m1}$. Отже, зміна довжини хвилі $\Delta\lambda_m$ при зміні температури від T_1 до T_2 становить

$$\Delta\lambda_m = \lambda_{m2} - \lambda_{m1} = \frac{b}{T_2} - \frac{b}{T_1}.$$

Звідси шукана температура T_2 становить

$$T_2 = \frac{bT_1}{b + \Delta\lambda_m \cdot T_1} = \frac{2,97 \cdot 10^{-3} \cdot 2900}{2,97 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^{-6} \cdot 2900} = 296 \text{ K}.$$

Відповідь: $T_2 = 296 \text{ K}$.

Задача 16.2.3

Температура абсолютно чорного тіла змінилася при нагріванні від $T_1 = 1000 \text{ K}$ до $T_2 = 3000 \text{ K}$. У скільки разів збільшилася при цьому його енергетична

світність R^* ? На скільки змінилася довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної густини енергетичної світності λ_m ? У скільки разів збільшилася його максимальна спектральна густина енергетичної світності $(r_\lambda)_{\max}$?

Дано:	Розв'язання
$T_1 = 1000 \text{ K}$	Відношення енергетичних світностей, що відповідають температурам T_1 і T_2 , знайдемо, використовуючи закон Стефана-Больцмана:
$T_2 = 3000 \text{ K}$	
$\frac{R_2^*}{R_1^*} = ? \quad \Delta\lambda_m = ?$	
$\frac{(r_\lambda)_{\max 2}}{(r_\lambda)_{\max 1}} = ?$	$\frac{R_2^*}{R_1^*} = \frac{\sigma T_2^4}{\sigma T_1^4} = \left(\frac{3000}{1000}\right)^4 = 81.$ Зміну довжини хвилі, на яку припадає максимум спектральної густини енергетичної світності, визначимо з 1 закону Віна – закону зміщення

$$\Delta\lambda_m = \lambda_{m1} - \lambda_{m2} = \frac{b}{T_1} - \frac{b}{T_2} = b \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = 2,97 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{3000} \right) = 1,97 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Зміна максимального значення спектральної густини енергетичної світності розрахуємо за 2 законом Віна

$$\frac{(r_\lambda)_{\max 2}}{(r_\lambda)_{\max 1}} = \frac{CT_2^5}{CT_1^5} = \left(\frac{3000}{1000}\right)^5 = 243.$$

Відповідь: $\frac{R_2^*}{R_1^*} = 81$; $\Delta\lambda_m = 1,97 \cdot 10^{-6} \text{ м}$; $\frac{(r_\lambda)_{\max 2}}{(r_\lambda)_{\max 1}} = 243$.

Задача 16.2.4

Нехтуючи втратами тепла на теплопровідність, підрахувати потужність електричного струму, необхідну для розжарювання вольфрамової нитки діаметром $d = 1 \text{ мм}$ і довжиною $l = 20 \text{ см}$ до температури $T = 3500 \text{ К}$.

Коефіцієнт чорноти вольфраму для даної температури $k = 0,35$. Який струм потече через лампу, якщо напруга в мережі $U = 220 \text{ В}$?

Дано:	Розв'язання
$d = 1 \text{ мм}$	Вважаючи, що нитка випромінює як сіре тіло, її енергетична
$l = 20 \text{ см}$	світність R з урахуванням коефіцієнта чорноти k і закону
$T = 3500 \text{ К}$	Стефана-Больцмана дорівнює
$k = 0,35$	$R = kR^* = k\sigma T^4, \quad (1)$
$U = 220 \text{ В}$	а потужність випромінювання
$N = ? \quad I = ?$	$N = RS, \quad (2)$
	де $S = \pi d \cdot l$ – площа поверхні вольфрамової нитки.

Отже, шукана потужність дорівнює

$$N = RS = k\sigma T^4 \cdot \pi d \cdot l = 0,35 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} (3500)^4 \cdot \pi \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 = 1871 \text{ Вт.}$$

Потужність струму є $N = IU$, звідки величина струму становить

$$I = \frac{N}{U} = \frac{1871}{220} = 8,5 \text{ А.}$$

Відповідь: $N = 1871 \text{ Вт}; I = 8,5 \text{ А.}$

Задача 16.2.5

Поверхня тіла нагріта до температури $T = 1000 \text{ К}$. Потім одна половина цієї поверхні нагрівається на $\Delta T = 100 \text{ К}$, а інша охолоджується на $\Delta T = 100 \text{ К}$. У скільки разів зміниться енергетична світність поверхні даного тіла?

Дано:	Розв'язання
$T = 1000 \text{ К}$	У початковому стані за температури T енергетична
$\Delta T = \pm 100 \text{ К}$	світність тіла становить
$\frac{R_0^*}{R^*} = ?$	$R_0^* = \sigma T^4,$

а відповідна потужність випромінювання дорівнює

$$N_0 = R_0^* \cdot S = \sigma T^4 S, \quad (1)$$

де S – площа поверхні, що випромінює.

Коли перша половина $S/2$ поверхні нагрівається на ΔT , вона випромінює

$$N_1 = R_1 \cdot \frac{S}{2} = \frac{S \sigma T_1^4}{2}$$

а друга половина $S/2$, що охолоджується на ΔT , випромінює

$$N_2 = R_2 \cdot \frac{S}{2} = \frac{S \sigma T_2^4}{2}$$

Потужність, яку випромінює тіло, є сумою потужностей, що випромінюються кожною половиною

$$N = N_1 + N_2 = \frac{S \sigma T_1^4}{2} + \frac{S \sigma T_2^4}{2} = \frac{S \sigma}{2} (T_1^4 + T_2^4). \quad (2)$$

Отже, відношення енергетичних світностей визначається відношенням відповідних потужностей з рівних за площею випромінюючих поверхонь при температурах: $T = 1000 \text{ K}$, $T_1 = T + \Delta T = 1000 + 100 = 1100 \text{ K}$ і

$T_2 = T - \Delta T = 1000 - 100 = 900 \text{ K}$, розрахованих за формулами (1) і (2):

$$\begin{aligned} \frac{R_0^*}{R^*} &= \frac{N_0}{N} = \frac{S \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot 2}{S \cdot \sigma (T_1^4 + T_2^4)} = \\ &= \frac{2 \cdot (1000)^4}{(1100)^4 + (900)^4} = \frac{2 \cdot 10^{12}}{1,46 \cdot 10^{12} + 0,656 \cdot 10^{12}} = 0,946. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{R_0^*}{R^*} = 0,946$.

Задача 16.2.6

Довжина хвилі світла, що відповідає червоній межі фотоефекту, для деякого металу становить $\lambda_{\text{чер}} = 275 \text{ нм}$. Визначити мінімальну енергію фотона ε_{min} , який призводить до фотоефекту; роботу виходу $A_{\text{вих}}$ електрона з

металу; максимальну швидкість $v_{\max}$ і максимальну кінетичну енергію KE електронів, що вириваються з металу світлом з довжиною хвилі 1) $\lambda_1 = 180$ нм; 2) $\lambda_2 = 1,2$ пм.

Дано:	Розв'язання
$\lambda_{\text{чер}} = 275$ нм	Робота виходу електрону з металу зв'язана з довжиною хвилі $\lambda_{\text{чер}}$, яка називається червоною межею фотоефекту,
$\lambda_1 = 180$ нм	
$\lambda_2 = 1,2$ пм	
$\varepsilon_{\min} = ?$ $A_{\text{вих}} = ?$	$A_{\text{вих}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{чер}}}.$
$v_{\max} = ?$ $KE = ?$	За умовами задачі $\lambda_{\text{чер}} = 275$ нм $= 275 \cdot 10^{-9}$ м, тоді
	$A_{\text{вих}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{275 \cdot 10^{-9}} = 7,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4,5 \text{ еВ}.$

З рівняння Ейнштейна для фотоефекту

$$\varepsilon = A_{\text{вих}} + KE \quad (1)$$

випливає, що фотоефект буде відбуватися в тому випадку, якщо енергія ε падаючого фотона є більшою або дорівнює роботі виходу $A_{\text{вих}}$ електрона з металу, $\varepsilon \geq A_{\text{вих}}$. Це означає, що мінімальна енергія фотона для того, щоб відбувся фотоефект, становить

$$\varepsilon_{\min} = A_{\text{вих}} = 7,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4,5 \text{ еВ}.$$

Кінетична енергія електронів із рівняння Ейнштейна для фотоефекту (1) є

$$KE = \frac{hc}{\lambda} - A_{\text{вих}}, \quad (2)$$

Якщо метал освітлюється світлом з довжиною хвилі $\lambda_1 = 180$ нм, то по формулі (2) кінетична енергія електронів дорівнює

$$\begin{aligned} KE &= \frac{hc}{\lambda_1} - A_{\text{вих}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{180 \cdot 10^{-9}} - 7,2 \cdot 10^{-19} = \\ &= 1,1 \cdot 10^{-18} - 7,2 \cdot 10^{-19} = 3,83 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2,4 \text{ еВ}. \end{aligned} \quad (3)$$

Враховуючи, що максимальна кінетична енергія фотоелектронів $KE = \frac{mv^2}{2}$, максимальна швидкість електронів, тобто їх швидкість безпосередньо у момент вильоту з металу, становить

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot KE}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,83 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 9,17 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

Якщо метал освітлюється світлом з довжиною хвилі $\lambda_2 = 1,2 \text{ нм} = 1,2 \cdot 10^{-12} \text{ м}$, то розрахунок по формулі (2) дає

$$\begin{aligned} KE &= \frac{hc}{\lambda_2} - A_{\text{вих}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,2 \cdot 10^{-12}} - 7,2 \cdot 10^{-19} = \\ &= 1,66 \cdot 10^{-13} - 7,2 \cdot 10^{-19} = 1,66 \cdot 10^{-13} \text{ Дж.} \end{aligned} \quad (4)$$

Як видно із порівняння результатів (3) і (4), отримане значення кінетичної енергії для λ_2 на 6 порядків більше, ніж значення кінетичної енергії для λ_1 . Така енергія кванта світла і, як результат, енергія фотоелектрона відповідає релятивістському випадку, тому для знаходження швидкості електрона треба використовувати релятивістську формулу для кінетичної енергії

$$KE = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right). \quad (5)$$

Можна виразити β з формули (5)

$$\beta = \frac{\sqrt{KE(KE + 2m_0 c^2)}}{KE + m_0 c^2}. \quad (6)$$

Розрахунки за формулою (6) досить складні, тому скористаємося простішим методом, підставляючи значення кінетичної енергії KE і енергії покою електрона $m_0 c^2$ в формулу (5)

Отже,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{KE}{m_0 c^2} + 1 = \frac{1,66 \cdot 10^{-13}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} + 1 = 2,03 + 1 = 3,03.$$

Тоді величина β становить

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{3,03},$$

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3,03}\right)^2} = 0,94.$$

Виходячи з того, що $\beta = \frac{v}{c}$, максимальна швидкість фотоелектронів дорівнює

$$v = v_{\max} = \beta c = 0,94 \cdot 3 \cdot 10^8 = 2,83 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Відповідь: 1) $v_{\max} = 9,17 \cdot 10^5 \text{ м/с}$; 2) $v_{\max} = 2,83 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Задача 16.2.7

Фотони з енергією $\varepsilon = 4,9 \text{ еВ}$ виривають електрони з металу, робота виходу з якого становить $A_{\text{вих}} = 4,5 \text{ еВ}$. Визначити максимальний імпульс $p_{\max}$, який передається поверхні металу при вильоті кожного електрона.

Дано:	Розв'язання
$\varepsilon = 4,9 \text{ еВ}$	З рівняння Ейнштейна для фотоефекту максимальна кінетична енергія електронів, що вилітають з металу, становить
$A_{\text{вих}} = 4,5 \text{ еВ}$	
$p_{\max} = ?$	
	$KE_{\max} = \varepsilon - A_{\text{вих}} = 4,9 - 4,5 = 0,4 \text{ еВ} = 6,4 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}.$

Слід зауважити, що термін максимальна енергія, а також максимальні швидкість та імпульс застосовуються тоді, коли йдеться безпосередньо про момент вильоту електрона з поверхні металу.

До вильоту електрона імпульс системи «електрон-метал», яку вважаємо замкнутою, дорівнював нулю. Згідно із законом збереження імпульсу сумарний імпульс системи залишається незмінним, тому максимальний імпульс $p_{\max}$, який

передається поверхні металу при вильоті електрона, дорівнює по модулю імпульсу електрона в момент його вильоту. Використовуючи зв'язок між кінетичною енергією KE та імпульсом p з класичної фізики

$$KE_{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{(mv_{\max})^2}{2m} = \frac{p_{\max}^2}{2m},$$

отримаємо

$$p_{\max} = \sqrt{2mKE_{\max}} = \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 6,4 \cdot 10^{-20}} = 3,4 \cdot 10^{-25} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь: $p_{\max} = 3,4 \cdot 10^{-25} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$

Задача 16.2.7

Коли довжину хвилі випромінювання, що падає на катод фотоелемента, зменили з $\lambda_1 = 600$ нм до $\lambda_2 = 400$ нм, максимальна швидкість фотоелектронів змінилася вдвічі. Визначити червону межу фотоефекту для цієї речовини.

Дано:	Розв'язання
$\lambda_1 = 600$ нм	Запишемо рівняння Ейнштейна для фотоефекту для двох випадків, що розглядаються в задачі,
$\lambda_2 = 400$ нм	
$v_2 = 2v_1$	
$\lambda_{\text{чер}} = ?$	$\begin{cases} \varepsilon_1 = A_{\text{вих}} + KE_1, \\ \varepsilon_2 = A_{\text{вих}} + KE_2, \end{cases} \quad (1)$

де $\varepsilon_1 = \frac{hc}{\lambda_1}$ та $\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_2}$ — енергії фотонів, що падають на метал, $KE_1 = \frac{mv_1^2}{2}$ та

$KE_2 = \frac{mv_2^2}{2}$ — кінетичні енергії фотоелектронів, v_1 та v_2 — максимальні

швидкості фотоелектронів (швидкості в момент їх вильоту з металу).

$$\begin{cases} \frac{hc}{\lambda_1} = A_{\text{вих}} + \frac{mv_1^2}{2}, \\ \frac{hc}{\lambda_2} = A_{\text{вих}} + \frac{mv_2^2}{2}, \end{cases} \quad (2)$$

З того, що $\lambda_1 > \lambda_2$, випливає, що $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Тоді за умови того, що в обидва рівняння системи (2) входить та ж сама робота виходу $A_{\text{вих}}$, кінетичні енергії співвідносяться як $KE_2 > KE_1$, а з цього випливає, що $v_2 > v_1$. Зважаючи на те, що за умовою задачі швидкості відрізняються у 2 рази, $v_2 = 2v_1$.

З урахуванням наведених вище міркувань, система (2) набуває вигляду

$$\begin{cases} \frac{hc}{\lambda_1} = A_{\text{вих}} + \frac{mv_1^2}{2}, \\ \frac{hc}{\lambda_2} = A_{\text{вих}} + \frac{m4v_1^2}{2}. \end{cases} \quad (3)$$

Помножимо обидві частини першого рівняння (3) на 4 і віднімемо від нього друге рівняння

$$\begin{aligned} \frac{4hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} &= 4A_{\text{вих}} - A_{\text{вих}} + \frac{m4v_1^2}{2} - \frac{m4v_1^2}{2} = 3A_{\text{вих}}, \\ A_{\text{вих}} &= \frac{hc}{3} \left(\frac{4}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Підставимо (4) вираз для роботи виходу

$$A_{\text{вих}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{чер}}}$$

і отримаємо

$$\frac{hc}{\lambda_{\text{чер}}} = \frac{hc}{3} \left(\frac{4}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{hc}{3} \left(\frac{4\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \right).$$

Звідки червона межа фотоефекту становить

$$\lambda_{\text{чер}} = \frac{3 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{4\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{3 \cdot 600 \cdot 10^{-9} \cdot 400 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 400 \cdot 10^{-9} - 600 \cdot 10^{-9}} = 7,2 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 720 \text{ нм}.$$

Відповідь: $\lambda_{\text{чер}} = 720 \text{ нм}$.

Задача 16.2.8

Затримуюча напруга при освітленні деякого металу світлом з довжиною хвилі $\lambda_1 = 491$ нм дорівнює $U_1 = 0,8$ В. При зміні джерела світла напруга, що затримує, збільшилася до $U_2 = 1,43$ В. Яка довжина хвилі другого джерела світла. Чому дорівнює робота виходу даного металу?

Дано:

$$\lambda_1 = 491 \text{ нм}$$

$$U_1 = 0,8 \text{ В}$$

$$U_2 = 1,43 \text{ В}$$

$$\lambda_2 = ?$$

Розв'язання

Запишемо рівняння Ейнштейна для першого та другого випромінювань

$$\begin{cases} \frac{hc}{\lambda_1} = A_{\text{вих}} + KE_1, \\ \frac{hc}{\lambda_2} = A_{\text{вих}} + KE_2. \end{cases} \quad (1)$$

Врахуємо, що різниця потенціалів, що затримує, визначається максимальною кінетичною енергією електронів, тобто $KE_1 = eU_1$, а $KE_2 = eU_2$, тоді

$$\begin{cases} \frac{hc}{\lambda_1} = A_{\text{вих}} + eU_1, \\ \frac{hc}{\lambda_2} = A_{\text{вих}} + eU_2, \end{cases} \quad (2)$$

де $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд електрона.

Система (2) містить рівняння з двома невідомими – довжиною хвилі λ_2 та роботою виходу $A_{\text{вих}}$.

Віднімемо з другого рівняння системи (2) перше і знайдемо шукану довжину хвилі

$$\frac{hc}{\lambda_2} - \frac{hc}{\lambda_1} = e(U_2 - U_1),$$

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\frac{hc}{\lambda_1} + e(U_2 - U_1)} = \frac{\lambda_1 hc}{hc + \lambda_1 e(U_2 - U_1)} = \frac{\lambda_1}{1 + \frac{\lambda_1 e}{hc}(U_2 - U_1)},$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{1 + \frac{\lambda_1 e}{hc}(U_2 - U_1)} = \frac{4,91 \cdot 10^{-7} \lambda_1}{1 + \frac{4,91 \cdot 10^{-7} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} (1,43 - 0,7)} = 3,81 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Виразимо роботу виходу з першого рівняння системи

$$A_{\text{вих}} = \frac{hc}{\lambda_1} - eU_1. \quad (3)$$

Підставивши в (3) чисельні значення, отримаємо

$$A_{\text{вих}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4,91 \cdot 10^{-7}} - 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,7 =$$

$$= 4,04 \cdot 10^{-19} - 1,12 \cdot 10^{-19} = 2,92 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,83 \text{ еВ.}$$

Відповідь: $\lambda_2 = 3,81 \cdot 10^{-7} \text{ м}$; $A_{\text{вих}} = 2,93 \text{ Дж} = 1,83 \text{ еВ}$.

Задача 16.2.9

Знайти довжину хвилі короткохвильової межі суцільного рентгенівського спектра, якщо швидкість електронів, які підлітають до антикатода трубки становить $v = 0,85c$, де c – швидкість світла.

Дано:	Розв'язання
$v = 0,85c$	Довжина хвилі короткохвильової межі суцільного спектра
$\lambda_{\min} = ?$	визначається виразом
	$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU}, \quad (1)$

де U – напруга на рентгенівській трубці; $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ – стала Планка;
 $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ – елементарний заряд.

Робота електричного поля, що знаходиться між катодом і антикатодом (анодом) рентгенівської трубки, витрачається на прискорення електронів, в результаті чого зростає їхня швидкість і кінетична енергія.

$$eU = KE. \quad (2)$$

Оскільки в даній задачі швидкість електронів є наближеною до швидкості світла, то для знаходження кінетичної енергії треба використовувати релятивістську формулу

$$KE = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right). \quad (3)$$

Тоді формула (2) набуває вигляду

$$eU = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right). \quad (4)$$

З урахуванням (4) короткохвильова межа суцільного рентгенівського спектра дорівнює

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} &= \frac{hc}{eU} = \frac{h c}{m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right)} = \\ &= \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0,85^2}} - 1 \right)} = 2,7 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 2,7 \text{ пм}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\lambda_{\min} = 2,7 \text{ пм}$.

Задача 16.2.10

На поверхню площею $S = 100 \text{ см}^2$ щохвилини падає $W = 120 \text{ Дж}$ світлової енергії. Визначити світловий тиск у випадках, коли поверхня 1) повністю відбиває; 2) повністю поглинає усе випромінювання.

Дано:

$$S = 100 \text{ см}^2$$

$$W = 120 \text{ Дж}$$

$$t = 1 \text{ хв} = 60 \text{ с}$$

$$\rho = 1$$

$$\rho = 0$$

$$P = ?$$

Розв'язання

1) Коли поверхня повністю відбиває усе падаюче на неї випромінювання, коефіцієнт відбиття $\rho = 1$, а світловий тиск дорівнює

$$P = \frac{E}{c}(1 + \rho) = \frac{2E}{c}.$$

Кількість енергії, що падає на 1 м^2 площі за 1 с , становить

$$E = \frac{W}{St},$$

тому світловий тиск за умови, коли поверхня повністю відбиває світло, дорівнює

$$P = \frac{2E}{c} = \frac{2W}{cSt} = \frac{2 \cdot 120}{3 \cdot 10^8 \cdot 100 \cdot 10^{-4} \cdot 60} = 1,33 \cdot 10^{-6} \text{ Па}.$$

2) Якщо поверхня повністю поглинає падаюче на неї випромінювання, то її коефіцієнт відбиття $\rho = 0$. Тоді

$$P = \frac{E}{c}(1 + \rho) = \frac{E}{c} = \frac{W}{cSt} = \frac{120}{3 \cdot 10^8 \cdot 100 \cdot 10^{-4} \cdot 60} = 6,67 \cdot 10^{-7} \text{ Па}.$$

Задача 16.2.11

Визначити довжину хвилі рентгенівського випромінювання, якщо при його комптонівському розсіюванні графітом під кутом $\vartheta = 60^\circ$ довжина хвилі розсіяного випромінювання дорівнювала $\lambda' = 25,4 \text{ нм}$. Знайти:

1) енергії та імпульси падаючого (ε_ϕ , p_ϕ) і розсіяного (ε'_ϕ , p'_ϕ) фотонів;

2) енергію ε'_e , імпульс p'_e і швидкість v електрона віддачі;

3) кути віддачі ϕ і розльоту α .

Дано:

$$\vartheta = 60^\circ$$

$$\lambda' = 25,4 \text{ пм}$$

$$\lambda = ?$$

$$\varepsilon_\phi = ? \quad p_\phi = ?$$

$$\varepsilon'_\phi = ? \quad p'_\phi = ?$$

$$\varepsilon'_e = ? \quad p'_e = ?$$

$$\nu = ? \quad \varphi = ? \quad \alpha = ?$$

Розв'язання

Для визначення довжини хвилі падаючого рентгенівського випромінювання скористуємося виразом для комптонівського зсуву

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \vartheta),$$

$$\lambda = \lambda' - \lambda_c (1 - \cos \vartheta) = 25,4 - 2,43(1 - \cos 60^\circ) = 24,19 \text{ пм.}$$

Енергії падаючого і розсіяного фотонів

$$\varepsilon_\phi = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{24,19 \cdot 10^{-12}} = 8,22 \cdot 10^{-15} \text{ Дж,}$$

$$\varepsilon'_\phi = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{25,4 \cdot 10^{-12}} = 7,82 \cdot 10^{-15} \text{ Дж.}$$

Енергія падаючого фотона в результаті розсіяння розподіляється між енергією розсіяного фотона і енергією електрона віддачі. Тому, застосовуючи закон збереження енергії

$$\varepsilon_\phi = \varepsilon'_\phi + \varepsilon'_e,$$

виразимо енергію електрона

$$\varepsilon'_e = \varepsilon_\phi - \varepsilon'_\phi = 8,22 \cdot 10^{-15} - 7,82 \cdot 10^{-15} = 4 \cdot 10^{-16} \text{ Дж.}$$

Імпульси падаючого p_ϕ і розсіяного p'_ϕ фотонів

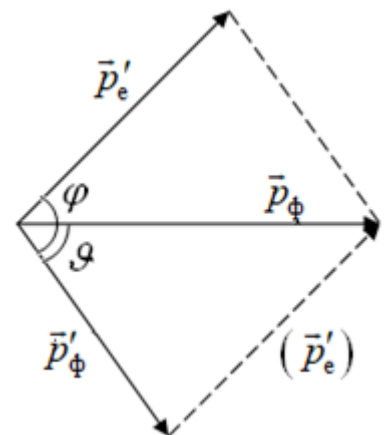
становлять

$$p_\phi = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{24,19 \cdot 10^{-12}} = 2,74 \cdot 10^{-23} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}},$$

$$p'_\phi = \frac{h}{\lambda'} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{25,4 \cdot 10^{-12}} = 2,6 \cdot 10^{-23} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Для визначення імпульсу електрона віддачі застосуємо закон збереження імпульсу

$$\vec{p}_\phi = \vec{p}'_\phi + \vec{p}'_e.$$



Виходячи з того, що імпульс – це вектор, побудуємо діаграму додавання векторів, з якої зрозуміло, що імпульс електрона віддачі можна знайти за допомогою теореми косинусів

$$\begin{aligned} p'_e &= \sqrt{p_\phi^2 + p_\phi'^2 - 2p_\phi p_\phi' \cos \vartheta} = \\ &= \sqrt{(2,74 \cdot 10^{-23})^2 + (2,6 \cdot 10^{-23})^2 - 2 \cdot 2,74 \cdot 10^{-23} \cdot 2,6 \cdot 10^{-23} \cos 60^\circ} = \\ &= 2,67 \cdot 10^{-23} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Після того, як знайдено імпульс електрона, можна знайти його швидкість. Якщо застосувати класичну формулу $p = mv$, то швидкість становить

$$v = \frac{p}{m} = \frac{2,67 \cdot 10^{-23}}{9,1 \cdot 10^{-31}} = 2,93 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

Величина швидкості наближена до швидкості світла, тому для розрахунку треба використовувати формулу для релятивістського імпульсу

$$p'_e = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

з якої можна знайти величину $\beta = v/c$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{p'_e}{\sqrt{p_e'^2 + (m_0 c)^2}} = \frac{2,67 \cdot 10^{-23}}{\sqrt{(2,67 \cdot 10^{-23})^2 + (9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8)^2}} = \\ &= \frac{2,67 \cdot 10^{-23}}{\sqrt{7,13 \cdot 10^{-46} + 7,46 \cdot 10^{-44}}} = 0,097. \end{aligned}$$

Швидкість електрона віддачі дорівнює

$$v = \beta c = 0,097 \cdot 3 \cdot 10^8 = 2,9 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

Кут віддачі знайдемо з діаграми імпульсів за допомогою теореми синусів

$$\begin{aligned} \frac{p'_e}{\sin \vartheta} &= \frac{p_\phi'}{\sin \varphi}, \\ \sin \varphi &= \frac{p_\phi'}{p'_e} \sin \vartheta = \frac{2,6 \cdot 10^{-23}}{2,67 \cdot 10^{-23}} \sin 60^\circ = 0,843. \end{aligned}$$

$$\varphi = \arcsin 0,843 = 57,5^\circ$$

Кут розльоту α , який є сумою кута розсіювання ϑ і кута віддачі φ , становить

$$\alpha = \vartheta + \varphi = 60^\circ + 57,5^\circ = 117,5^\circ.$$

Відповідь: $\lambda = 24,19 \text{ пм}$; $\varepsilon_\phi = 8,22 \cdot 10^{-15} \text{ Дж}$; $\varepsilon_e = 8,22 \cdot 10^{-15} \text{ Дж}$;

$$\varepsilon'_e = 4 \cdot 10^{-16} \text{ Дж}; p_\phi = 2,74 \cdot 10^{-23} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}; p'_\phi = 2,6 \cdot 10^{-23} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}};$$

$$p'_e = 2,67 \cdot 10^{-23} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}; v = 2,9 \cdot 10^7 \text{ м/с}; \varphi = 57,5^\circ; \alpha = 117,5^\circ.$$

Задача 16.2.12

При комптонівському розсіюванні енергія падаючого фотона розподіляється порівну між розсіяним фотоном та електроном віддачі. Кут розсіювання $\vartheta = \pi/2$. Знайти енергію ε'_ϕ та імпульс p'_ϕ розсіяного фотона, а також енергію ε'_e , імпульс p'_e і швидкість v електрона віддачі.

Дано:

$$\varepsilon'_\phi = \varepsilon'_e = \frac{\varepsilon_\phi}{2}$$

$$\vartheta = \pi/2$$

$$\varepsilon'_\phi = ? \quad p'_\phi = ?$$

$$\varepsilon'_e = ? \quad p'_e = ?$$

$$v = ?$$

Розв'язання

Використаємо співвідношення між довжинами хвиль падаючого і розсіяного рентгенівського випромінювання:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \vartheta) = \lambda_c \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \lambda_c \quad (1)$$

Енергія падаючого фотона $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$, звідки довжина хвилі

$$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}. \text{ З огляду на те, що комптонівська довжина хвилі}$$

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c},$$

вираз для комптонівського зсуву (1) $\lambda' - \lambda = \lambda_c$ набуває вигляду

$$\frac{hc}{\varepsilon'_\phi} - \frac{hc}{\varepsilon_\phi} = \frac{h}{m_0 c}. \quad (2)$$

Помножимо та поділимо праву частину рівняння (2) на швидкість світла c й одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{hc}{\varepsilon'_\phi} - \frac{hc}{\varepsilon_\phi} &= \frac{hc}{m_0 c^2}, \\ \frac{1}{\varepsilon'_\phi} - \frac{1}{\varepsilon_\phi} &= \frac{1}{m_0 c^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

У знаменнику правої частини (3) $m_0 c^2 = \varepsilon_0$ – енергія спокою електрона. З урахування цього, а також того, що за умовою задачі, $\varepsilon'_\phi = \varepsilon_\phi / 2$, рівняння (3) можна записати в такому вигляді

$$\frac{2}{\varepsilon_\phi} - \frac{1}{\varepsilon_\phi} = \frac{1}{\varepsilon_0}.$$

Звідки $\varepsilon_\phi = \varepsilon_0$ і $\varepsilon'_\phi = \varepsilon'_e = \varepsilon_0 / 2$.

Враховуючи, що $\varepsilon_0 = 0,512 \text{ MeV} = 8,18 \cdot 10^{-14} \text{ Дж}$, отримаємо

$$\varepsilon'_\phi = 0,256 \text{ MeV} = 4,09 \cdot 10^{-14} \text{ Дж}.$$

Імпульс розсіяного фотона

$$p'_\phi = \frac{\varepsilon'_\phi}{c} = \frac{4,09 \cdot 10^{-14}}{3 \cdot 10^8} = 1,36 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Імпульс падаючого фотона

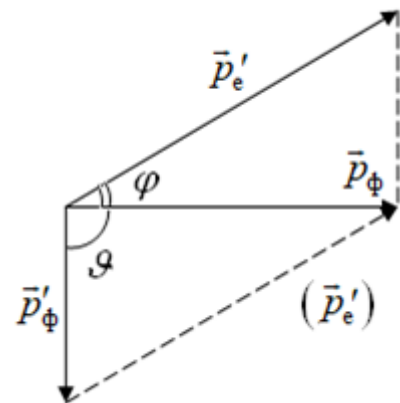
$$p_\phi = \frac{\varepsilon_\phi}{c} = \frac{8,18 \cdot 10^{-14}}{3 \cdot 10^8} = 2,72 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Імпульс електрона віддачі можна визначити із закону збереження імпульсу

$$\vec{p}_\phi = \vec{p}'_e + \vec{p}'_\phi.$$

Як видно зі схеми, модуль імпульсу можна знайти за теоремою Піфагора:

$$p'_e = \sqrt{(p_\phi)^2 + (p'_\phi)^2} = \sqrt{(1,36 \cdot 10^{-22})^2 + (2,72 \cdot 10^{-22})^2} = 3 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$



Швидкість електрона віддачі знайдемо, використовуючи релятивістську формулу для імпульсу

$$p'_e = \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$\beta = \frac{p'_e}{\sqrt{p_e'^2 + (m_0 c)^2}} = \frac{3 \cdot 10^{-22}}{\sqrt{(3 \cdot 10^{-22})^2 + (9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8)^2}} = 0,74.$$

Отже, швидкість електрона дорівнює

$$v = \beta c = 0,74 \cdot 3 \cdot 10^8 = 2,2 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $\varepsilon'_\phi = \varepsilon'_e = \varepsilon_0/2$; $p'_\phi = 1,36 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$; $p_\phi = 2,72 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$;

$$p'_e = 3 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}; \quad v = 2,2 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Задача 16.2.13

Визначити енергію розсіяного фотона та електрона віддачі в ефекті Комптона, якщо падаючий фотон зазнав розсіювання на кут $\vartheta = 180^\circ$. Енергія фотона до розсіювання була $\varepsilon_\phi = 1,536 \text{ Мев}$. Знайти імпульси падаючого і розсіяного фотонів, а також швидкість та імпульс електрона віддачі.

Дано:	Розв'язання
$\vartheta = 180^\circ$	Комптонівський зсув довжини хвилі визначається за формулою
$\varepsilon_\phi = 1,536 \text{ Мев}$	
$p_\phi = ? \quad p'_\phi = ?$	$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \vartheta) = \lambda_c (1 - \cos \pi) = 2\lambda_c. \quad (1)$
$p'_e = ? \quad v = ?$	Використовуючи те, що довжина хвилі фотона пов'язана з його енергією $\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}$, а також те, що комптонівська довжина хвилі

електрона $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$, зробимо заміну у співвідношенні (1):

$$\frac{hc}{\varepsilon'_\phi} - \frac{hc}{\varepsilon_\phi} = \frac{2h}{m_0 c}. \quad (2)$$

Помножимо та поділимо праву частину рівняння (2) на швидкість світла c й одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{hc}{\varepsilon'_\phi} - \frac{hc}{\varepsilon_\phi} &= \frac{2hc}{m_0 c^2}, \\ \frac{1}{\varepsilon'_\phi} - \frac{1}{\varepsilon_\phi} &= \frac{2}{m_0 c^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Енергія спокою електрона $m_0 c^2 = \varepsilon_0 = 0,512 \text{ MeV}$, тоді задана в задачі енергія падаючого фотона $\varepsilon_\phi = 1,536 \text{ MeV} = 3\varepsilon_0$. Враховуючи це, запишемо рівняння (3) у вигляді

$$\frac{1}{\varepsilon'_\phi} - \frac{1}{3\varepsilon_0} = \frac{2}{\varepsilon_0}. \quad (4)$$

З рівняння (4) визначимо енергію розсіяного фотона

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon'_\phi} &= \frac{1}{3\varepsilon_0} + \frac{2}{\varepsilon_0} = \frac{7}{3\varepsilon_0}, \\ \varepsilon'_\phi &= \frac{3}{7} \varepsilon_0 = \frac{3 \cdot 0,512}{7} = 0,219 \text{ MeV} = 3,52 \cdot 10^{-14} \text{ Дж.} \end{aligned}$$

Із закону збереження енергії $\varepsilon_\phi = \varepsilon'_\phi + \varepsilon'_e$:

$$\varepsilon'_e = \varepsilon_\phi - \varepsilon'_\phi = 3\varepsilon_0 - 0,219\varepsilon_0 = 2,781\varepsilon_0 = 1,43 \text{ MeV} = 2,28 \cdot 10^{-13} \text{ Дж.}$$

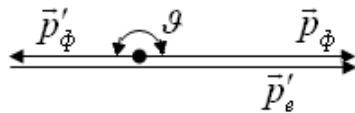
Імпульси падаючого та розсіяного фотонів дорівнюють

$$\begin{aligned} p_\phi &= \frac{\varepsilon_\phi}{c} = \frac{3 \cdot \varepsilon_0}{c} = \frac{3 \cdot m_0 c^2}{c} = 3 \cdot m_0 c = 3 \cdot 2,731 \cdot 10^{-22} = 8,193 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}, \\ p'_\phi &= \frac{\varepsilon'_\phi}{c} = \frac{2,781 \cdot \varepsilon_0}{c} = 2,781 \frac{m_0 c^2}{c} = 2,781 \cdot m_0 c = \end{aligned}$$

$$= 2,781 \cdot 2,731 \cdot 10^{-22} = 7,59 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Для визначення імпульсу електрона віддачі скористуємося законом збереження імпульсу $\vec{p}_\Phi = \vec{p}'_e + \vec{p}'_\Phi$ та векторною діаграмою імпульсів. Модуль імпульсу електрона дорівнює

$$p'_e = p_\Phi + p'_\Phi = 2,72 \cdot 10^{-22} + 7,59 \cdot 10^{-22} = 1,03 \cdot 10^{-21} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$



Швидкість електрона віддачі знайдемо, використовуючи релятивістську формулу для імпульсу $p'_e = \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, з якої

$$\beta = \frac{p'_e}{\sqrt{p_e'^2 + (m_0 c)^2}} = \frac{1,03 \cdot 10^{-21}}{\sqrt{(1,03 \cdot 10^{-21})^2 + (9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8)^2}} = 0,967.$$

Отже, швидкість електрона становить

$$v = \beta c = 0,967c = 2,9 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $v = \beta c = 0,967c = 2,9 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$

Задача 16.2.14

Під час Комптон-ефекту довжини хвиль фотонів, розсіяних під кутами $\vartheta_1 = 60^\circ$ та $\vartheta_2 = 120^\circ$, відрізняються один від одного в 2 рази. Знайти довжину хвилі λ падаючого рентгенівського випромінювання.

Дано:

$$\vartheta_1 = 60^\circ$$

$$\vartheta_2 = 120^\circ$$

$$\lambda'_2 = 2\lambda'_1$$

$$\lambda = ?$$

Розв'язання

Для заданих в задачі кутів розсіяння фотонів
комптонівські зсуви довжини хвилі становлять

$$\begin{cases} \lambda'_1 - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \vartheta_1) = \lambda_c (1 - \cos 60^\circ) = \frac{\lambda_c}{2}, \\ \lambda'_2 - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \vartheta_2) = \lambda_c (1 - \cos 120^\circ) = \frac{3\lambda_c}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Довжина хвилі λ'_2 розсіяного рентгенівського випромінювання для $\vartheta_2 = 120^\circ$ більше, ніж довжина хвилі λ'_1 для $\vartheta_1 = 60^\circ$, відповідно, $\lambda'_2 = 2\lambda'_1$. Тоді система рівнянь (1) набуває вигляду

$$\begin{cases} \lambda'_1 - \lambda = \frac{\lambda_c}{2}, \\ 2\lambda'_1 - \lambda = \frac{3\lambda_c}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Знайдемо з першого рівняння системи (2) $\lambda'_1 = \lambda + \frac{\lambda_c}{2}$ та, підставивши його у друге рівняння, отримаємо

$$2\left(\lambda + \frac{\lambda_c}{2}\right) - \lambda = \frac{3\lambda_c}{2}. \quad (3)$$

З рівняння (3) і з урахуванням того, що комптонівська довжина хвилі електрона $\lambda_c = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 2,43 \text{ пм}$, довжина хвилі падаючого фотона становить

$$\lambda = 0,5\lambda_c = 0,5 \cdot 2,43 = 1,215 \text{ пм}.$$

Відповідь: $\lambda = 1,215 \text{ пм}$.

Задача 16.2.15

Кут розсіювання фотона при Комптон-ефекті становить $\vartheta = 60^\circ$, а кут розльоту дорівнює $\alpha = 90^\circ$. Визначити енергію падаючого фотона, енергію розсіяного фотона, енергію, імпульс та швидкість електрона віддачі.

Дано:

$$\vartheta = 60^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\varepsilon_\phi = ? \quad \varepsilon'_\phi = ?$$

$$\varepsilon'_e = ? \quad p'_e = ? \quad v = ?$$

Розв'язання

Співвідношення між довжинами хвиль падаючого та розсіяного фотонів для Комптон-ефекту

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \vartheta) = \lambda_c (1 - \cos 60^\circ) = \frac{\lambda_c}{2}. \quad (1)$$

Враховуючи те, що довжина хвилі фотона пов'язана з його енергією за формулою $\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}$, а також те, що комптонівська довжина хвилі електрона

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}, \text{ запишемо (1) у вигляді}$$

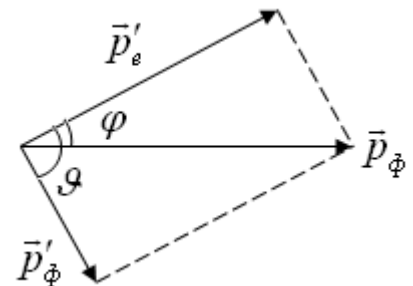
$$\frac{hc}{\varepsilon'_\phi} - \frac{hc}{\varepsilon_\phi} = \frac{h}{2m_0 c}. \quad (2)$$

Помножимо та розділимо праву частину рівняння (2) на швидкість світла c .

$$\frac{hc}{\varepsilon'_\phi} - \frac{hc}{\varepsilon_\phi} = \frac{hc}{2m_0 c^2},$$

$$\frac{1}{\varepsilon'_\phi} - \frac{1}{\varepsilon_\phi} = \frac{1}{2\varepsilon_0}.$$

Для знаходження співвідношення між енергіями падаючого ε_ϕ та розсіяного ε'_ϕ фотонів використаємо співвідношення між імпульсами цих фотонів, яке випливає із закону збереження імпульсу для Комптон-ефекту: $\vec{p}_\phi = \vec{p}'_e + \vec{p}'_\phi$.



З трикутника імпульсів,

враховуючи те, що кут розльоту $\alpha = \vartheta + \varphi = 90^\circ$, а кут розсіювання $\vartheta = 60^\circ$, знайдемо кут віддачі $\varphi = 30^\circ$.

Якщо $\vartheta = 60^\circ$, то $\cos \vartheta = \cos 60^\circ = 0,5$; з іншого боку, $\cos \vartheta = \frac{p'_\phi}{p_\phi}$. Тому

$$\frac{p'_\phi}{p_\phi} = 0,5 \text{ та } p_\phi = 2p'_\phi. \text{ Враховуючи, що } p_\phi = \frac{\varepsilon_\phi}{c} \text{ та } p'_\phi = \frac{\varepsilon'_\phi}{c}, \text{ отримаємо}$$

$$\text{співвідношення між енергіями } \frac{\varepsilon_\phi}{\varepsilon} = 2 \frac{\varepsilon'_\phi}{\varepsilon}, \text{ звідки } \varepsilon_\phi = 2\varepsilon'_\phi.$$

Тоді

$$\frac{1}{\varepsilon'_\phi} - \frac{1}{2\varepsilon'_\phi} = \frac{1}{2\varepsilon_0}.$$

Енергія розсіяного фотона становить

$$\varepsilon'_\phi = \varepsilon_0 = 0,512 \text{ MeV} = 8,19 \cdot 10^{-14} \text{ Дж},$$

а енергія падаючого фотона

$$\varepsilon_\phi = 2\varepsilon_0 = 2 \cdot 0,512 = 1,024 \text{ MeV} = 1,64 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}.$$

Енергію електрона віддачі визначимо із закону збереження енергії

$$\varepsilon_\phi = \varepsilon'_\phi + \varepsilon'_e$$

$$\varepsilon'_e = \varepsilon_\phi - \varepsilon'_\phi = 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0.$$

Імпульси падаючого та розсіяного фотонів, відповідно, дорівнюють

$$p_\phi = \frac{\varepsilon_\phi}{c} = \frac{2 \cdot \varepsilon_0}{c} = \frac{2 \cdot m_0 c^2}{\hbar c} = 2 \cdot m_0 c = 2 \cdot 2,731 \cdot 10^{-22} = 5,462 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}},$$

$$p'_\phi = \frac{\varepsilon'_\phi}{c} = \frac{\varepsilon_0}{c} = \frac{m_0 c^2}{\hbar c} = m_0 c = 2,731 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Імпульс електрона віддачі, враховуючи те, що кут розльоту між розсіяним фотоном і електроном віддачі $\alpha = 90^\circ$, можна знайти за теоремою Піфагора

$$p'_e = \sqrt{(p_\phi)^2 + (p'_\phi)^2} = \sqrt{(2m_0 c)^2 + (m_0 c)^2} = \sqrt{3} m_0 c = 4,72 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Швидкість електрона віддачі знайдемо, використовуючи релятивістську

$$\text{формулу для імпульсу } p'_e = \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \text{ з якої}$$

$$\beta = \frac{p'_e}{\sqrt{p_e'^2 + (m_0 c)^2}} = \frac{\sqrt{3} m_0 c}{\sqrt{(\sqrt{3} m_0 c)^2 + (m_0 c)^2}} = \frac{\sqrt{3} m_0 c}{2 m_0 c} = 0,866.$$

Отже, швидкість електрона віддачі

$$v = \beta c = 0,866c = 2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $v = 2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

15.3. Задачі для самостійної роботи

15.3.1. Визначити енергетичну світність абсолютно чорного тіла R^* , якщо довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної густини енергетичної світності, дорівнює $\lambda_m = 0,58$ мкм.

Відповідь: $R^* = 3,54 \cdot 10^7 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$.

15.3.2. З оглядового віконця печі щохвилини випромінюється енергія 6 кДж. Визначити температуру стінок печі, якщо площа віконця становить 10 см², а випромінювання можна вважати випромінюванням абсолютно чорного тіла.

Відповідь: $T = 1152 \text{ К}$.

15.3.3. Знайти, у скільки разів зміниться енергетична світність абсолютно чорного тіла, якщо довжина хвилі, що відповідає максимуму спектральної густини енергетичної світності змістилася з $\lambda_{\text{ч}} = 0,78$ мкм на $\lambda_{\text{ф}} = 0,39$ мкм.

Відповідь: $R_2^*/R_1^* = 16$.

15.3.4. Яка частина споживаної потужності $N = 1$ кВт розсіюється стінками муфельної печі, якщо вона має отвір площею $S = 100$ см² і випромінює як абсолютно чорне тіло. Температура всередині печі становить $T = 1000$ К.

Відповідь: $\eta = 0,43$.

15.3.5. Знайти температуру абсолютно чорного тіла, якщо його початкова температура становить $T = 2898$ К, а при зміні температури довжина хвилі, що відповідає максимуму спектральної густини енергетичної світності, зросла на $\Delta\lambda_m = 1$ мкм.

Відповідь: $T_2 = 1449 \text{ К}$.

15.3.6. Знайти площу спіралі лампи потужністю 25 Вт, якщо її температура $T = 2450$ К. Вважати спіраль сірим тілом з коефіцієнтом чорноти $k = 0,3$.

Відповідь: $S = 0,41 \text{ мм}^2$.

16.3.7. Визначити червону межу фотоефекту для цинку і максимальну швидкість фотоелектронів, що вириваються з його поверхні електромагнітним випромінюванням з довжиною хвилі 250 нм.

Відповідь: $\lambda_{\text{чер}} = 332 \text{ нм}$; $v_{\text{max}} = 6,6 \cdot 10^5 \text{ м/с}$.

16.3.8. Фотострум, який виникає в ланцюзі вакуумного фотоелемента при освітленні електрода електромагнітним випромінюванням з довжиною хвилі $\lambda = 262 \text{ нм}$, припиняється, якщо увімкнути зовнішню затримуючу напругу $U = 1,5 \text{ В}$. Визначити роботу виходу з металу електрода в Джоулях та електронвольтах.

Відповідь: $A_{\text{вих}} = 5,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 3,24 \text{ еВ}$.

16.3.9. Червона межа фотоефекту для цезію відповідає довжині хвилі 653 нм. Визначити максимальну швидкість електрона, що вилетів, при освітленні цезію світлом з довжиною хвилі 400 нм.

Відповідь: $v_{\text{max}} = 6,5 \cdot 10^5 \text{ м/с}$.

16.3.10. При збільшенні напруги на рентгенівській трубці у 15 разів довжина хвилі короткохвильової межі суцільного рентгенівського спектра змінилася на $\Delta\lambda = 26 \text{ пм}$. Визначити початкову напругу на рентгенівській трубці.

Відповідь: $U_1 = 47,8 \text{ В}$.

16.3.11. На кожен квадратний сантиметр поверхні падає променистий потік потужністю $N = 1 \text{ мкВт}$. Визначити тиск P світла, якщо коефіцієнт відбиття $\rho = 0,8$. Поверхня перпендикулярна променям.

Відповідь: $P = 6 \cdot 10^{-11} \text{ Па}$.

16.3.12. Фотон з довжиною хвилі $\lambda = 6 \text{ пм}$ розсіявся під прямим кутом на вільному електроні, що знаходився у стані спокою. Визначити частоту розсіяного фотона та кінетичну енергію електрона віддачі.

Відповідь: $\nu'_{\text{ф}} = 2,2 \cdot 10^{20} \text{ с}^{-1}$; $\varepsilon'_e = 60 \text{ кеВ}$.

16.3.13. Фотон розсіявся під кутом $\vartheta = 120^\circ$ на вільному електроні, що знаходився у стані спокою, в результаті чого електрон отримав кінетичну енергію $\varepsilon'_e = 0,45$ кеВ. Визначити енергію фотона до розсіювання.

Відповідь: $\varepsilon_\phi = 0,68$ МеВ.

16.3.14. Фотон з енергією 1 МеВ розсіявся на вільному електроні, що знаходився у стані спокою. Визначити кінетичну енергію електрона віддачі, якщо в результаті розсіювання довжина хвилі фотона змінилася на 25%.

Відповідь: $\varepsilon'_\phi = 0,2$ МеВ.

16.3.15. Фотон з енергією 0,15 МеВ розсіявся на електроні, що знаходився у стані спокою, в результаті чого його довжина хвилі змінилася на $\Delta\lambda = 0,3$. Визначити кут віддачі електрона.

Відповідь: $\varphi = 71,6^\circ$.

17. АТОМНА ФІЗИКА. БОРІВСЬКА ТЕОРІЯ АТОМА

17.1. Теоретичні відомості

17.1.1 Атомна природа матерії

У попередніх розділах розглянуті докази хвильової природи електромагнітного випромінювання та експерименти, що могли бути пояснені лише за допомогою частинково-подібної поведінки випромінювання. У цьому розділі будуть розглянуті докази частинкової природи матерії. І перш за все треба згадати експерименти, що призвели до відкриття електрона, протона, ядра, та планетарної моделі атома Резерфорда-Бора.

Перші ідеї щодо дискретної побудови матерії були вже у роботах давньогрецьких вчених Демокріта і Левкіппа (5 - 4 ст. до н.е.), де вперше з'явилася гіпотеза об атомах як найменших частинках речовини. Значно пізніше хімік А. Лавуазьє встановив закон збереження матерії, виходячи з того, що загальна кількість атомів окремих елементів залишається незмінною під час хімічної реакції, а Дж. Дальтон з позицій атомізму сформулював закон кратних співвідношень. А. Авогадро постулював, що усі чисті гази при однаковій температурі та тиску мають однакову кількість молекул в одиниці об'єму. Дж. Максвелл показав, макроскопічні параметри, такі як тиск і температуру, можна отримати із середніх значень за розподілами молекулярних і атомарних властивостей. Крім того, А. Ейнштейн в роботах по броунівському руху дав додаткове підтвердження атомно-молекулярної гіпотези.

Далі вчені намагалися відповісти на питання, якщо матерія складається з атомів, то з чого складаються самі атоми. Намагання знайти відповіді на це питання відобразилися в цілій низці великих експериментів, а саме,

- відкриття законів електролізу М. Фарадеєм (1833);

- вивчення природи катодних променів і відкриття електрона Дж. Томсоном (1897):

- точне вимірювання заряду електрона Р. Мілікенем (1909).

Ці експерименти сприяли створенню Дж. Томсоном (1904) першої моделі побудови атома, в якій він описав атом як згусток матерії, що має позитивний електричний заряд, в якому знаходяться негативно заряджені частинки – електрони. За подібність розподілу електронів в атомі ця модель отримала назву «булочка з родзинками». Головними недоліками цієї моделі було те, що вона не пояснювала дискретний характер спектрів газів і стійкість атомів.

Е. Резерфорд вивчав проходження α -частинок через тонку фольгу із золота та інших металів. Досліди (рис. 17.1) показали, що деяка кількість α -частинок розсіюється на значні (понад 90°) кути, що неможливо було пояснити в рамках моделі Томсона. Базуючись на результатах цих експериментів, Резерфорд запропонував планетарну модель атома згідно з якою, позитивний заряд атома зосереджений в дуже малій області ($\sim 10^{-14}$ м), яка є **ядром**, а негативний заряд (електрони) знаходяться навколо ядра, займаючи область $\sim 10^{-10}$ м. Позитивний заряд $(+Ze)$ дорівнює за величиною негативному $(-Ze)$, де число Z – номер елемента в таблиці Менделєєва.

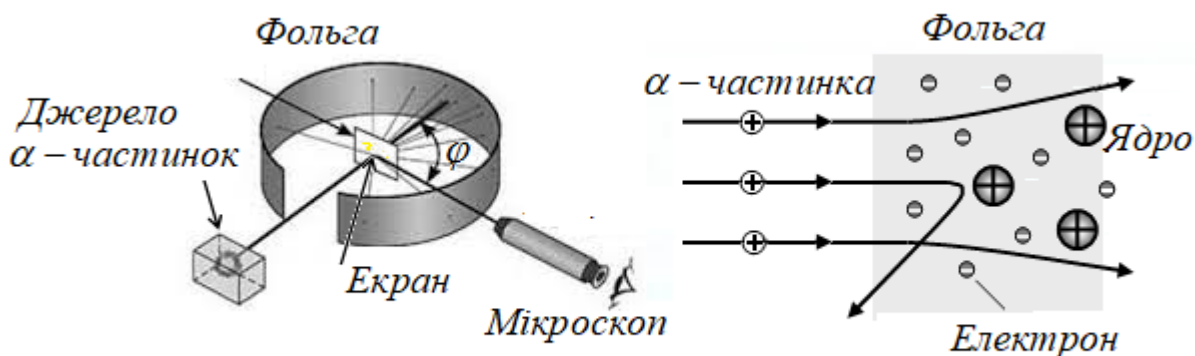


Рисунок 17.1

Запропонована планетарна модель складалася з нерухомих зарядів, яка не може бути стійкою. Тому Резерфорд припустив, що електрони мають рухатися

вздовж викривлених траєкторій. Але в цьому випадку рух є прискореним (є нормальне прискорення), а отже, атоми повинні випромінювати електромагнітні хвилі, в результаті чого повинна губитися енергія, внаслідок чого електрони мають впасти на ядро. Суперечність планетарної моделі знайшли своє розв'язання в теорії, що запропонував Н. Бор (1913).

17.1.2. Постулати Бора. Дослід Франка-Герца

Нільс Бор, вважаючи, що в мікросвіті не можуть діяти ті ж закони, що і в макросвіті, сформулював припущення (постулати), що суперечили положенням класичної фізики, але вони дозволяли побудувати теорію, яка пояснювала результати багатьох фізичних експериментів.

1. Постулат стаціонарних станів: існують такі **стаціонарні стани** атома, перебуваючи в яких, він не випромінює енергії. Цим станам відповідають **стаціонарні орбіти**, рухаючись по яким з кутовим прискоренням, електрони не випромінюють електромагнітні хвилі. При цьому має виконуватися **правило квантування орбіт**: в стаціонарному стані атома електрон, рухаючись по круговій орбіті, повинен мати квантовані (певні) значення моменту імпульсу L , що задовольняють умові

$$L = mvr = n\hbar, \quad (17.1)$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$ – номер орбіти або енергетичного стану (головне квантове число), m – маса електрона, v – його швидкість на орбіті радіуса r , $\hbar$ – стала Планка.

Іноді правило квантування орбіт формують як окремий постулат.

2. Правило частот: під час переходу атома з одного стаціонарного стану в інший випромінюється або поглинається один фотон з енергією

$$\hbar\omega = E_{n_1} - E_{n_2}, \quad (17.2)$$

де n_1, n_2 – номери станів (орбіт).

При поглинанні світла атом переходить зі стаціонарного стану з меншою енергією в стаціонарний стан з більшою енергією; при випромінюванні – зі

стаціонарного стану з більшою енергією в стаціонарний стан з меншою енергією, тобто при $E_{n1} > E_{n2}$ відбувається випромінювання фотона, а при $E_{n1} < E_{n2}$ – поглинання фотона.

Ідея Бора щодо дискретності енергетичних станів атома знайшла своє підтвердження в дослідах Дж. Франка і Г. Герца, в яких атоми розрідженого газу (пари ртуті) «обстрілюють» повільними електронами та при цьому досліджують розподіл швидкостей електронів до і після зіткнення. Якщо зіткнення пружні, то розподіл швидкостей не змінюється. При непружних зіткненнях електрон втрачає енергію, віддаючи її атомам, в результаті чого змінюється розподіл за швидкостями. Дослід показав, що електрони передають, а атоми ртуті поглинають енергію порціями (рис. 17.2). Таким чином, ідея Бора про існування в атомах стаціонарних станів блискуче витримала перевірку експериментом.

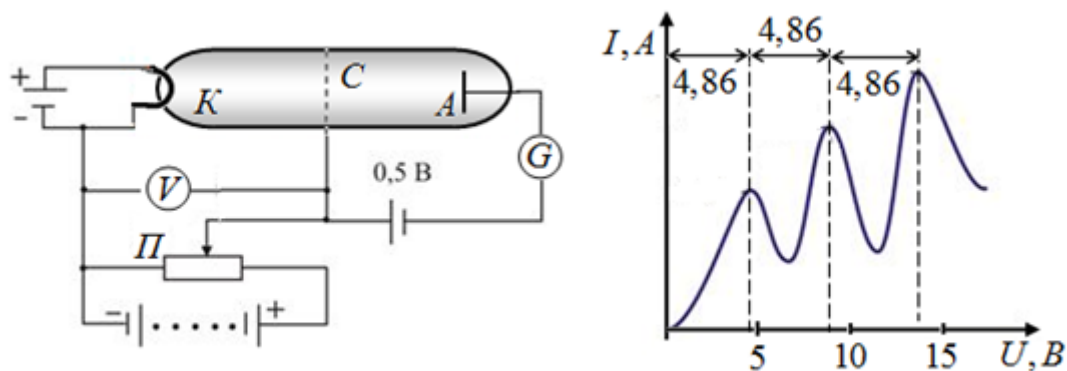


Рисунок 17.2

17.1.3. Боровська теорія атома водню. Спектр водню. Формула Рідберга

На основі своїх постулатів Бор створив теорію побудови атома водню. Водень є найпростішим хімічним елементом: його ядро містить один протон із зарядом $+e$, а навколо ядра обертається електрон із зарядом $-e$ ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – елементарний заряд). Електрон притягується до ядра електростатичними кулонівськими силами взаємодії.

Тоді за класичним 2 законом Ньютона

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}. \quad (17.3)$$

Піднесемо до квадрата постулат Бора (17.1) $mvr = n\hbar$ і розділимо на (17.3)

$$\frac{mv^2}{rm^2v^2r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2n^2\hbar^2}.$$

Радіус n -ої борівської орбіти електрона

$$r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} n^2, \quad (17.4)$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$ – номер орбіти (рівня, стану) або **головне квантове число**.

Радіус **першої** борівської орбіти атома водню – r_1 при $n=1$ – **перший борівський радіус**:

$$r_1 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м}. \quad (17.5)$$

Швидкість електрона на n -ій орбіті з постулату Бору (17.1) з урахуванням (17.4) становить

$$v_n = \frac{\hbar}{m \cdot r_n} \cdot n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot \hbar} \cdot \frac{1}{n} = \frac{v_1}{n} = \frac{2,19 \cdot 10^6}{n} \text{ м/с}, \quad (17.6)$$

де v_1 – швидкість електрона на 1-й борівській орбіті, що дорівнює

$$v_1 = 2,19 \cdot 10^6 \text{ м/с}. \quad (17.7)$$

Енергія атома водню згідно з теорією Бора складається з кінетичної (KE) енергії електрона (ядро нерухоме) і потенційної (PE) енергії взаємодії електрона з ядром

$$E = KE + PE = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}. \quad (17.8)$$

З (17.3) $mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$. Тоді

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{2r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{2r}. \quad (17.9)$$

Підставимо в (17.9) вираз (17.4) для борівського радіуса та отримаємо вираз для повної енергії електрона в атомі водню:

$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot \frac{me^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{E_1}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2} \text{ еВ.} \quad (17.10)$$

Значення повної, кінетичної та потенційної енергії пов'язані такими співвідношеннями:

$$E_n = -KE_n, \quad PE_n = 2E_n = -2KE_n. \quad (17.11)$$

Енергетичні рівні водню E_n можна подати графічно як діаграму (рис. 18.3). На вертикальній осі вказані значення енергії електрона на різних енергетичних рівнях, розраховані за формулою (17.11), та показані переходи між рівнями, об'єднані у так звані спектральні серії.

На підставі правила частот ($\hbar\omega = E_{ni} - E_{nk}$) можна розрахувати частоти та довжини хвиль спектральних ліній:

$$\omega = \frac{E_{ni} - E_{nk}}{\hbar} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot \frac{me^4}{2\hbar^3} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) = R' \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right), \quad (17.12)$$

де $R' = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ – **стала Рідберга** (для частот).

$$\frac{1}{\lambda} = R \cdot \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right), \quad (17.13)$$

де $R = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1}$ – **стала Рідберга** (для довжин хвиль).

Енергія кванта, що випромінюється при переході електрона з вищого на нижчий рівень, дорівнює

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = hcR \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right). \quad (17.14)$$

Стан атома з найменшою енергією $E_1 = -13,6 \text{ еВ}$ ($n=1$) – **основний**. Енергія $E = 13,6 \text{ еВ}$ є енергією зв'язку електрона в основному стані. Саме цю енергію треба надати електрону в основному стані, щоб видалити його з атома водню. Тому її також називають **енергією іонізації атома**. **Потенціал іонізації** – та

різниця потенціалів, яку має пройти електрон, щоб, зіткнувшись з незбудженим атомом, іонізувати його.

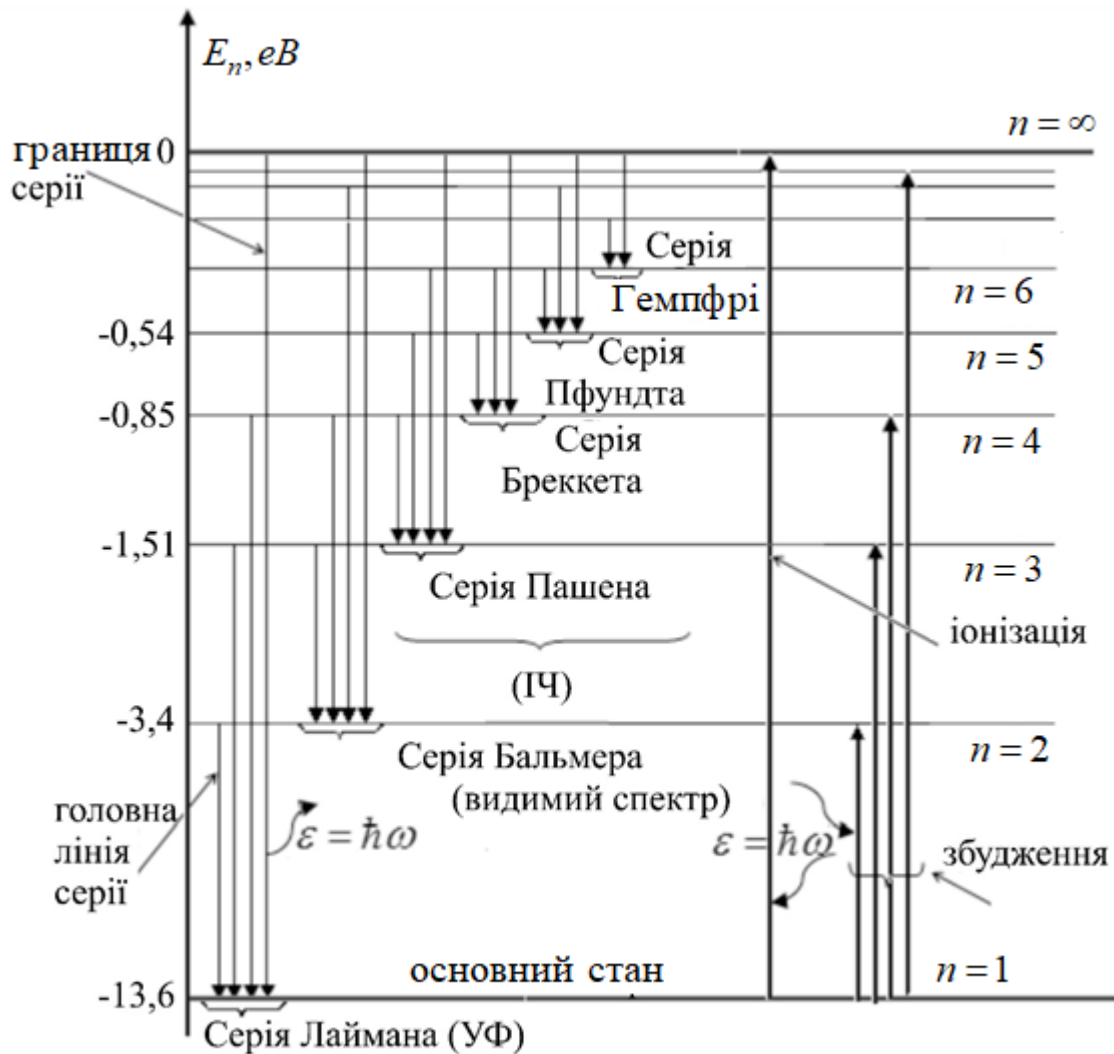


Рисунок 17.3

Стани з $n = 2, 3, \dots$ – **збуджені**. За аналогією з потенціалом та енергією іонізації вводяться поняття **енергії збудження** та **потенціалу збудження**.

Спектральна серія виникає при квантових переходах електронів з різних збуджених рівнів енергії на однаковий кінцевий рівень.

Серія Лаймана утворюється при переході електронів зі збуджених енергетичних рівнів на перший у спектрі випромінювання і з першого рівня на всі інші в спектрі поглинання, тобто у формулі Рідберга ($n_i = 1$, а $n_k = 2, 3, \dots, \infty$) та належить до ультрафіолетового діапазону.

Головна лінія серії має найбільшу в цій серії довжину хвилі. Наприклад, для серії Лаймана довжина хвилі головної лінії відповідає переходу між другим і першим рівнями, тобто з $n_k = 2$ на $n_i = 1$, і визначається виразом

$$\frac{1}{\lambda} = R \cdot \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3R}{4}, \quad (17.15)$$

звідки

$$\lambda = \lambda_{\max} = \frac{4}{3R} = 121,6 \text{ нм.}$$

Ця спектральна лінія у спектрі водню також називається **резонансною лінією водню**.

Границя (межа) серії ($n_k = \infty$) – відповідає частоті $\omega_m = \frac{R'}{n_1^2}$ або довжині

хвилі $\lambda_m = \frac{n_i^2}{R}$.

Серія Бальмера утворюється при переходах електронів з $n_k > 2$ на другий рівень $n_i = 2$. Перші чотири лінії ($n_k = 3, 4, 5, 6$) цієї серії у спектрі водню відповідають видимому діапазону, інші – ультрафіолетовому.

Формула Бальмера є окремим випадком формули Рідберга (17.13) для $n_i = 2$, а $n_k = 3, 4, 5, \dots$

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_k^2} \right). \quad (17.16)$$

Серія Пашена утворюється при переходах електронів на третій рівень ($n_i = 3$) з рівнів $n_k = 4, 5, \dots, \infty$ і відповідає інфрачервоному діапазону.

Переходам електронів на четвертий ($n_i = 4$) рівень з рівнів $n_k = 5, 6, \dots, \infty$ відповідає **серія Брекета**, переходам на п'ятий рівень ($n_i = 5$) із рівнів $n_k = 6, 7, \dots, \infty$ – **серія Пфунда**, переходам на шостий рівень ($n_i = 6$) з рівнів $n_k = 7, 8, \dots, \infty$ – **серія Гемпфрі**. Усі ці серії також належать інфрачервоному діапазону.

Отже, при отриманні ззовні енергії (нагрівання, опромінювання, бомбардування частинками тощо) атоми, поглинаючи кванти енергії, переходять у збуджені стани. Потім вони, повертаючись на нижчі енергетичні рівні, випускають енергію у вигляді квантів. Якщо розкласти випромінювання атома за допомогою призми або дифракційної решітки, то для видимого діапазону можна візуально спостерігати набір дискретних спектральних ліній різної

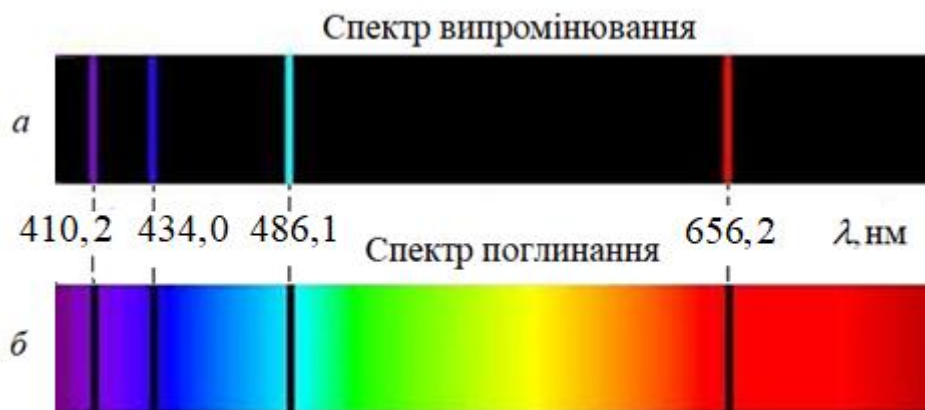


Рисунок 17.4

інтенсивності – **лінійчатий спектр випромінювання** (рис. 17.4, а). Для атома водню – це 4 лінії спектральної серії Бальмера, які належать видимому діапазону.

При проходженні білого світла через гази в останніх відбувається поглинання тих довжин хвиль, які присутні в спектрі випромінювання цих газів. **Лінійчаті спектри поглинання** складаються з окремих темних ліній, розташованих на фоні суцільного спектра (рис. 17.4, б). Ці темні лінії відповідають довжинам хвиль, що поглинули атоми.

Експериментальні дослідження спектрів випромінювання розріджених газів (т. е. спектрів випромінювання окремих атомів) показали, що кожному газу властивий певний лінійчатий спектр, який складається з окремих спектральних ліній або груп близько розташованих ліній. Формула Рідберга повністю описує не тільки видимий спектр водню, але й спектри в ультрафіолетовому та інфрачервоному діапазонах.

Гарне узгодження борівської теорії атома водню з експериментом було вагомим аргументом на користь її справедливості. Однак спроби застосувати цю

теорію до складніших атомів не принесли позитивного результату. Але теорія Бора добре підходить для опису так званих воднеподібних атомів (точніше, іонів), тобто атомів, у яких залишився один електрон, а всі інші електрони відсутні внаслідок іонізації цього атома.

Для воднеподібного атома (іона із зарядом ядра $+Ze$ та одним електроном) частоти спектральних ліній, що випускаються або поглинаються атомом при переході електрона з рівня на рівень,

$$\omega = Z^2 R' \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right). \quad (17.17),$$

де Z – номер елемента у таблиці Менделєєва.

Для довжин хвиль спектральних ліній, враховуючи те, що $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, маємо

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right). \quad (17.18)$$

Переваги теорії Бора як великого кроку в розвитку теорії будови атома в тому, що вона:

- 1) показала непридатність законів класичної фізики до опису внутрішньоатомних явищ;
- 2) пояснила дискретну будову спектрів газів (водню і воднеподібних атомів);
- 3) стимулювала постановку багатьох експериментів, що дали важливі наукові результати.

Недоліки теорії Бора:

- 1) виявилася непослідовною (ні класичною, ні квантовою);
- 2) не описувала інші, крім водню, атоми;
- 3) не пояснювала інтенсивності спектральних ліній.

17.2. Приклади розв'язання задач

Задача 17.2.1

Визначити радіуси перших трьох борівських орбіт в атомі водню і швидкості електронів на них.

Дано:	Розв'язання
$n = 1, 2, 3$	Радіус n -ої борівської орбіти
$r_n = ?$	$r_n = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{\hbar^2}{m \cdot e^2} \cdot n^2 = r_1 \cdot n^2 = 5,29 \cdot 10^{-11} \cdot n^2 (\text{м}). \quad (1)$
$v_n = ?$	Радіусу перших трьох орбіт розрахуємо по формулі (1)

за умови, що n набуває значень 1, 2 і 3

$$r_1 = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}; \quad r_2 = 2,117 \cdot 10^{-10} \text{ м}; \quad r_3 = 4,76 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Швидкість електрону на n -ій борівській орбіті

$$v_n = \frac{\hbar}{m \cdot r_n} \cdot n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot \hbar} \cdot \frac{1}{n} = \frac{v_1}{n} = \frac{2,19 \cdot 10^6}{n} \text{ м/с}.$$

Швидкості електрону на першій, другій та третій орбітах:

$$v_1 = 2,19 \cdot 10^6 \text{ м/с}; \quad v_2 = 1,09 \cdot 10^6 \text{ м/с}; \quad v_3 = 7,29 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $r_1 = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}; r_2 = 2,117 \cdot 10^{-10} \text{ м}; r_3 = 4,76 \cdot 10^{-10} \text{ м};$

$$v_1 = 2,19 \cdot 10^6 \text{ м/с}; \quad v_2 = 1,09 \cdot 10^6 \text{ м/с}; \quad v_3 = 7,29 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Задача 17.2.2

Визначити кінетичну, потенціальну та повну енергії електронів на першій та n -ій борівських орбітах.

Дано:	Розв'язання
$n = 1$	Повна енергія електрону, що набуває дискретні значення, які залежать від номера орбіти n (головного квантового числа), визначається як
$KE_n = ?$	
$PE_n = ? \quad E_n = ?$	

$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot \frac{me^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{E_1}{n^2},$$

де $E_1 = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 13,6 \text{ еВ}$.

Тоді повна енергія електрону на n -ій орбіті визначається за виразом

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ еВ}.$$

Кінетична енергія електрону на n -ій орбіті становить

$$KE_n = -E_n,$$

а для першої борівської орбіти $KE_1 = -E_1 = 13,6 \text{ еВ}$.

Потенціальна енергія електрону на n -ій орбіті дорівнює

$$PE_n = 2E_n,$$

а для першої борівської орбіти $PE_1 = 2E_1 = -27,2 \text{ еВ}$.

Відповідь: $KE_1 = -E_1 = 13,6 \text{ еВ}$; $PE_1 = -27,2 \text{ еВ}$.

Задача 17.2.3

Визначити частоту і період обертання електрона на першій борівській орбіті в атомі водню.

Дано:	Розв'язання
$n = 1$	Період обертання (час одного оберту електрону на орбіті) визначимо, скориставшись значеннями швидкості
$\omega = ? \quad v = ? \quad T = ?$	

електрону на орбіті та радіуса орбіти, обчисленими в задачі 17.2.1:

$$T = \frac{2\pi r_n}{v_n} = \frac{2\pi \cdot 5,29 \cdot 10^{-11}}{2,19 \cdot 10^6} = 1,5 \cdot 10^{-16} \text{ с},$$

а кутова і звичайна частоти дорівнюють, відповідно,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1,5 \cdot 10^{-16}} = 4,2 \cdot 10^{16} \text{ рад/с},$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,5 \cdot 10^{-16}} = 6,67 \cdot 10^{15} \text{ Гц}.$$

Відповідь: $T = 1,5 \cdot 10^{-16} \text{ с}$; $\omega = 4,2 \cdot 10^{16} \text{ рад/с}$; $\nu = 6,67 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$.

Задача 17.2.4

Знайти найменшу і найбільшу довжини хвиль в ультрафіолетовому спектрі (серія Лаймана) і у видимому спектрі (серія Бальмера) водню.

Дано:	Розв'язання
$n = 1, 2$	Довжини хвиль фотонів, що випромінює атом водню,
$\lambda_{\min} = ? \quad \lambda_{\max} = ?$	можуть бути знайдені за формулою Рідберга

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right), \quad (1)$$

де $R = 1,0973731 \cdot 10^7 \approx 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ – стала Рідберга.

Найбільша довжина хвилі (головна лінія серії) для ультрафіолетового спектра відповідає переходу з другого ($n_k = 2$) рівня на перший ($n_i = 1$) рівень.

Тому з формули (1)

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 8,230 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}$$

знаходимо

$$\lambda_{\max} = 1,215 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Найменша довжина хвилі (для лінії, яку називають границею (межею) серії) відповідає переходу на перший рівень ($n_i = 1$) з рівня $n = \infty$. В цьому випадку з формули Рідберга (1)

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty} \right) = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$$

отримуємо

$$\lambda_{\min} = 9,116 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$$

Застосуємо формулу Рідберга (1) до знаходження довжин хвиль спектральних ліній серії Бальмера, зважаючи на те, що ці лінії виникають при переході електрона на другий рівень ($n_i = 2$):

- для головної лінії серії – з третього рівня ($n_k = 3$)

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 1,524 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1},$$

$$\lambda_{\max} = 6,561 \cdot 10^{-7} \text{ м;}$$

- для граничної лінії серії – з рівня $n = \infty$

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty} \right) = 2,743 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1},$$

$$\lambda_{\min} = 3,645 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Ця лінія не належить до видимої частини спектра (довжини хвиль видимого спектра лежать в інтервалі 400 – 760 нм), а знаходиться в ультрафіолетовому діапазоні.

Розрахуємо значення довжин хвиль для переходів на другий рівень з вищих рівнів, щоб зрозуміти, скільки ліній належать видимому спектру

Якщо $n_i = 2$, а $n_k = 3$, то

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 1,524 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1},$$

$$\lambda = 6,561 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 656 \text{ нм.}$$

Якщо $n_i = 2$, а $n_k = 4$, то

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) = 2,058 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1},$$

$$\lambda = 4,860 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 486 \text{ нм}.$$

Якщо $n_i = 2$, а $n_k = 5$, то

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} \right) = 2,304 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1},$$

$$\lambda = 4,339 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 434 \text{ нм}.$$

Якщо $n_i = 2$, а $n_k = 6$, то

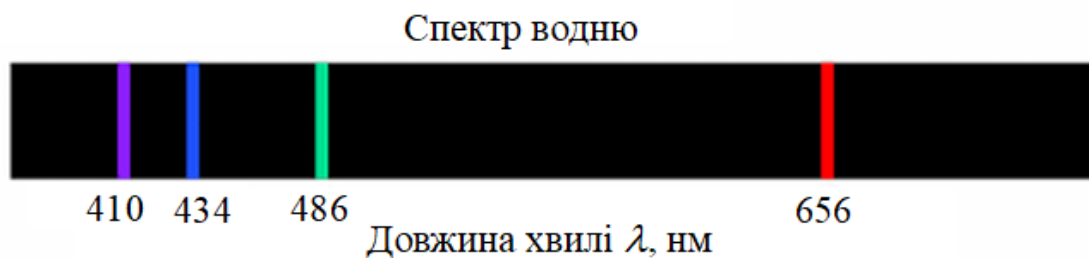
$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2} \right) = 2,439 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1},$$

$$\lambda = 4,101 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 410 \text{ нм}.$$

Якщо $n_i = 2$, а $n_k = 7$, то

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{7^2} \right) = 2,519 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1},$$

$$\lambda = 3,969 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 397 \text{ нм}.$$



Остання спектральна лінія лежить в ультрафіолетовій частині спектра, тому мінімальна довжина хвилі видимого випромінювання відповідає переходу з шостого на другий рівень $\lambda_{\min} = 4,101 \cdot 10^{-7} \text{ м}$.

Таким чином, у видимому діапазоні спектра водню знаходяться 4 лінії серії Бальмера, що відповідають переходам електронів на другий рівень з третього, четвертого, п'ятого і шостого рівнів. Решта ліній серії належить до ультрафіолетової області спектра.

Відповідь: серія Лаймана – $\lambda_{\max} = 1,215 \cdot 10^{-7}$ м, $\lambda_{\min} = 9,116 \cdot 10^{-8}$; серія Бальмера – $\lambda_{\max} = 6,561 \cdot 10^{-7}$ м, $\lambda_{\min} = 4,101 \cdot 10^{-7}$ м.

Задача 17.2.5

Електрон в атомі водню перейшов з третього енергетичного рівня на другий. Визначити довжину хвилі, імпульс та енергію випроміненого фотона. Знайти швидкість, з якою почав рухатися при цьому атом.

Дано:	Розв'язання
$n_k = 3$	Довжина хвилі випроміненого фотона може бути
$n_i = 2$	знайдена за формулою Рідберга для серії Бальмера при
$\lambda = ? \quad p = ?$	$n_i = 2, n_k = 3$ і $R = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
$\varepsilon = ? \quad v = ?$	$\frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 1,53 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}.$ $\lambda_{\max} = 6,55 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$

Імпульс та енергія фотона, відповідно, дорівнюють

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{6,55 \cdot 10^{-7}} = 1,01 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = pc = 1,01 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^8 = 3,03 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

До випромінювання фотона атом водню перебував у стані спокою, отже, його імпульс дорівнював нулю. Вважаючи систему «фотон-атом водню» замкнутою і з урахуванням того, що маса атома водню складається з суми мас протона та електрона, напишемо закон збереження імпульсу, який має вигляд

$$0 = m_H v - p,$$

звідки швидкість, яку набув атом водню в результаті випромінювання фотона, дорівнює

$$v = \frac{m_H}{p} = \frac{m_p + m_e}{p} = \frac{1,66 \cdot 10^{-27} + 9,1 \cdot 10^{-31}}{1,01 \cdot 10^{-27}} = 1,65 \text{ м/с.}$$

Відповідь: $\lambda_{\text{max}} = 6,55 \cdot 10^{-7} \text{ м}$; $p = 1,01 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$; $\varepsilon = 3,03 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$;

$$v = 1,65 \text{ м/с.}$$

Задача 17.2.6

Визначити потенціал іонізації та перший потенціал збудження атома водню.

Дано:	Розв'язання
Водень H	Потенціал іонізації – це та різниця потенціалів, яку має пройти електрон, щоб під час зіткнення з атомом, що перебуває в основному стані, іонізувати його.
$U_i = ?$ $U_1 = ?$	

$$eU_i = \varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = hcR \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty} \right) = 13,6 \text{ еВ,}$$

де добуток $hcR = 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,1 \cdot 10^7 = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 13,6 \text{ еВ}$.

Звідси величина потенціалу іонізації дорівнює

$$U_i = 13,6 \text{ В.}$$

Перший потенціал збудження – це та різниця потенціалів, яку має пройти електрон, щоб під час зіткнення з атомом, що перебуває в основному стані, перевести його електрон з першого на другий рівень. Тому із рівності енергії кванта ε роботі eU_1 електричного поля отримуємо

$$eU_1 = \varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = hcR \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 10,2 \text{ еВ.}$$

Отже, перший потенціал збудження для атома водню становить

$$U_1 = 10,2 \text{ В.}$$

Відповідь: $U_i = 13,6 \text{ В}$; $U_1 = 10,2 \text{ В}$.

Задача 17.2.7

Яку найменшу енергію повинні мати електрони, щоб при збудженні атомів водню ударами цих електронів з'явилися лінії всіх серій спектра водню? Яку найменшу швидкість повинні мати ці електрони?

Дано:	Розв'язання
Водень H	Всі лінії усіх серій водню з'являються при отриманні атомом енергії, що дорівнює енергії іонізації, тобто найменшій енергії, яка потрібна для того, щоб вирвати електрон з атома й віднести його на нескінченну віддаль.
$\varepsilon_{\min} = ? \quad v_{\min} = ?$	

З огляду на це та з урахуванням формули Рідберга відповідну енергію можна записати як

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = hcR \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty} \right) = hcR = 2,19 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 13,6 \text{ еВ}.$$

Енергію ε атому водню передає електрон з кінетичною енергією $KE = \frac{mv^2}{2}$, що була здобута в електричному полі, робота якого дорівнює eU . Тоді зі співвідношення $\varepsilon = eU = \frac{mv^2}{2}$ швидкість електрону має бути не меншою за

$$v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,19 \cdot 10^{-18}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $\varepsilon = 2,19 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 13,6 \text{ еВ}$; $v = 2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$.

Задача 17.2.8

В яких межах мають знаходитися довжини хвиль фотонів монохроматичного світла, щоб при збудженні атомів водню квантами цього світла спостерігалися три спектральні лінії?

Дано:	Розв'язання
$n = 1, 2, 3$	Для спостереження трьох спектральних ліній необхідно, щоб, поглинувши кванти світла і перейшовши на третій енергетичний рівень, електрони в атомах водню здійснювали перехід на перший рівень. У цих випадках реалізуються переходи з 3-го на 2-й, потім з 2-го на 1-й, а також безпосередньо з 3-го рівня на 1-й. В результаті будуть спостерігатися дві лінії серії Лаймана та одна – серії Бальмера.
$\lambda_{\max} = ? \lambda_{\min} = ?$	

Максимальна довжина хвилі буде спостерігатися для $n_i = 1$, $n_k = 2$ у формулі Рідберга

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 8,25 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}, \quad \lambda_{\max} = 1,21 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Мінімальна довжина хвилі буде спостерігатися для

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 9,78 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}, \quad \lambda_{\min} = 1,023 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Відповідно, довжини хвиль фотонів мають знаходитися в інтервалі $\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$, а саме, $102,3 \leq \lambda \leq 121 \text{ нм}$.

Відповідь: $102,3 \leq \lambda \leq 121 \text{ нм}$.

Задача 17.2.9

Атом водню в основному стані поглинув квант світла з довжиною хвилі $\lambda = 121,5 \text{ нм}$. Визначити радіус електронної орбіти збудженого атома водню і момент імпульсу електрона на цій орбіті.

Дано:	Розв'язання
$\lambda = 121,5 \text{ нм}$	У атомі водню в основному стані електрон знаходиться на першому рівні. Скориставшись формулою Рідберга, знайдемо номер рівня, куди в результаті поглинання кванта світла перейшов електрон.
$r_n = ? L_n = ?$	

Знайдемо n_k із $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right)$:

$$n_k = n_i \sqrt{\frac{\lambda R}{\lambda R - n_i^2}} = 1 \cdot \sqrt{\frac{121,5 \cdot 10^{-9} \cdot 1,1 \cdot 10^7}{121,5 \cdot 10^{-9} \cdot 1,1 \cdot 10^7 - 1}} = 2.$$

Це означає, що в результаті поглинання кванта світла електрон в атомі водню перейшов на другий енергетичний рівень.

Оскільки радіус n -ої борівської орбіти

$$r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} n^2 = r_1 \cdot n^2 = 0,53 \cdot 10^{-10} \cdot n^2 \text{ м},$$

то радіус другої орбіти $n = 2$ дорівнює

$$r_2 = 0,53 \cdot 10^{-10} \cdot 2^2 = 2,12 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Момент імпульсу електрону на другій орбіті можна визначити двома способами:

1) розрахувавши швидкість електрону на другій орбіті за формулою $v_n = \frac{v_1}{n}$

$$v_2 = \frac{v_1}{2} = \frac{2,19 \cdot 10^6}{2} = 1,09 \cdot 10^6 \text{ м/с},$$

та, знаючи масу електрону $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг і радіус другої орбіти r_2 , визначити момент імпульсу за формулою

$$L_2 = mv_2 r_2 = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,09 \cdot 10^6 \cdot 2,12 \cdot 10^{-10} = 2,1 \cdot 10^{-34} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}.$$

2) скориставшись правилом квантування Бора (першим постулатом Бора)

$L_n = mv_n r_n = n\hbar$, де $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка, а n – номер енергетичного рівня (номер орбіти),

$$L_2 = 2\hbar = 2 \cdot 1,055 \cdot 10^{-34} = 2,1 \cdot 10^{-34} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}.$$

Відповідь: $r_2 = 2,12 \cdot 10^{-10}$ м; $L_2 = 2,1 \cdot 10^{-34}$ кг·м²·с⁻¹.

Задача 17.2.10

Квант світла з енергією $\varepsilon = 15$ eV вибиває електрон, що знаходиться в основному стані в атомі водню. З якою швидкістю електрон буде рухатися поза атома?

Дано:

$$\varepsilon = 15 \text{ eV}$$

$$v = ?$$

Розв'язання

Енергія фотона $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$, що падає на атом водню,

витрачається на іонізацію цього атома, який знаходиться в основному стані, а решта переходить в кінетичну енергію електрона, з якою він вилітає з атома.

Енергія іонізації атома водню, тобто енергія, яка необхідна для того, щоб перевести електрон з першого енергетичного рівня ($n_1 = 1$) на останній ($n_k = \infty$), дорівнює

$$\varepsilon_i = hcR \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) = 13,6 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty} \right) = 13,6 \text{ eV}.$$

Тоді кінетична енергія електрона

$$KE = \varepsilon - \varepsilon_i = 15 - 13,6 = 1,4 \text{ eV} = 2,24 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Виразимо швидкість із формули кінетичної енергії $KE = \frac{mv^2}{2}$

$$v = \sqrt{\frac{2KE}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,24 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 7 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $v = 7 \cdot 10^5$ м/с.

Задача 17.2.11

Визначити зміну кінетичної енергії електрону в атомі водню при випромінюванні ним фотона з довжиною хвилі $\lambda = 102,3$ нм.

Дано:

$$\lambda = 102,3 \text{ нм}$$

$$\Delta KE = ?$$

Розв'язання

Випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 102,3 \text{ нм}$

належить до ультрафіолетового діапазону, відповідно, фотон

з цією довжиною хвилі належить до серії Лаймана $n_i = 1$. Формула Рідберга

для цього випадку має вигляд

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Тоді

$$\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{\lambda R}.$$

Номер рівня, з якого електрон перейшов в основний стан, буде

$$n = \sqrt{\frac{\lambda R}{\lambda R - 1}} = \sqrt{\frac{102,3 \cdot 10^{-9} \cdot 1,1 \cdot 10^7}{102,3 \cdot 10^{-9} \cdot 1,1 \cdot 10^7 - 1}} = 3.$$

Повна енергія електрону на третій орбіті становить

$$E_3 = -\frac{13,6}{n^2} = -\frac{13,6}{3^2} = -1,51 \text{ eV}.$$

З співвідношення між повною і кінетичною енергіями $KE_n = -E_n$, отримуємо, що кінетична енергія електрона на третьому рівні

$$KE_3 = -E_3 = 1,51 \text{ eV}.$$

Повна енергія електрону в основному стані

$$E_1 = -\frac{13,6}{n^2} = -\frac{13,6}{1^2} = -13,6 \text{ eV},$$

а кінетична енергія $KE_1 = -E_1 = 13,6 \text{ eV}$.

Отже, шукана зміна кінетичної енергії становить

$$\Delta KE = KE_1 - KE_3 = 13,6 - 1,51 = 12,09 \text{ eV}.$$

Відповідь: $\Delta KE = 12,09 \text{ eV}$.

Задача 17.2.12

На дифракційну решітку нормально падає пучок світла від розрядної трубки, заповненої атомарним воднем. Стала решітки дорівнює $d = 5$ мкм. Якому переходу електрона відповідає спектральна лінія, що спостерігається за допомогою цієї решітки в спектрі n 'ятого порядку під кутом $\psi = 41^\circ$?

Дано:

$$d = 5 \text{ мкм}$$

$$k = 5$$

$$\psi = 41^\circ$$

$$n_i = ? \quad n_k = ?$$

Розв'язання

Довжину хвилі спектральної лінії визначимо з умови дифракційного максимуму для дифракційної решітки

$$d \sin \psi = k \lambda$$

$$\lambda = \frac{d \sin \psi}{k} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot \sin 41^\circ}{5} = 0,656 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Ця довжина хвилі належить до видимого спектра і, відповідно, до серії Бальмера, отже, електрон перейшов на другий енергетичний рівень, а це означає, що у формулі Рідберга $n_i = 2$. Визначимо, з якого рівня відбувся цей перехід, тобто знайдемо n_k :

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_k^2} \right),$$

$$\frac{1}{n_k} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda R}} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{0,656 \cdot 10^{-6} \cdot 1,1 \cdot 10^7}} = 0,333,$$

$$n_k = 3.$$

Це означає, що електрон в атомі водню перейшов з третього на другий рівень.

Відповідь: $n_i = 2$; $n_k = 3$.

Задача 17.2.13

Визначити потенціал і енергію іонізації для двократно іонізованого літію.

Дано:	Розв'язання
Li^{++}	Формула Рідберга для воднеподібних іонів має вигляд
$\varepsilon_i = ? \quad U_i = ?$	$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \cdot \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right),$

де Z – номер елементу в таблиці Менделєєва (для літію $Z = 3$).

Енергія іонізації

$$\varepsilon_i = \frac{hc}{\lambda} = Z^2 hc R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty} \right) = 9 \cdot 13,6 \text{ eV} = 122,4 \text{ eV} = 2,4 \cdot 10^{-15} \text{ Дж.}$$

Кінетичну енергію, яку електрони передають атому літію, що знаходиться у незбудженому (основному) стані, вони здобули в електричному полі, різниця потенціалів якого U_i :

$$eU_i = KE = \varepsilon_i,$$

звідси

$$U_i = \frac{\varepsilon_i}{e} = \frac{122,4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 122,4 \text{ В.}$$

Відповідь: $\varepsilon_i = 122,4 \text{ eV} = 2,4 \cdot 10^{-15} \text{ Дж}; U_i = 122,4 \text{ В.}$

Задача 17.2.14

Одноразово іонізований атом гелію перебуває в основному стані. Чи може квант світла, який відповідає переходу між першими двома енергетичними рівнями у дворазово іонізованому літії, вирвати електрон з цього атома гелію?

Дано:	Розв'язання
$Z_1 = 3$	Квант світла, випущений літієм, може іонізувати гелій, якщо енергія цього кванта є більшою або дорівнює енергії іонізації гелію.
$Z_2 = 2$	
$\varepsilon = ? \quad \varepsilon_i = ?$	

Визначимо енергію кванта, який випромінює літій. Перехід між першими двома енергетичними станами відповідає переходу з другого рівня на перший,

під час якого випромінюється головна лінія серії Лаймана. Використовуючи формулу Рідберга для воднеподібного атома – іона Li^{++} ($Z_1=3$) запишемо енергію цього кванта

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = Z_1^2 hcR \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} Z_1^2 hcR = \frac{27}{4} hcR = 6,75 \cdot 13,6 \text{ eV} = 91,8 \text{ eV}. \quad (1)$$

Своєю чергою, за допомогою формули Рідберга і формули для енергії кванта підрахуємо енергію іонізації гелію

$$\varepsilon_i = \frac{hc}{\lambda_2} = Z_2^2 hcR \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty} \right) = Z_2^2 hcR = 4 hcR = 4 \cdot 13,6 \text{ eV} = 54,4 \text{ eV}. \quad (2)$$

Порівнюючи результати розрахунків енергій (1) і (2), бачимо, що $\varepsilon > \varepsilon_i$. Отже, то квант світла, випущений літієм, зможе іонізувати гелій.

Відповідь: $\varepsilon = 91,8 \text{ eV}$; $\varepsilon_i = 54,4 \text{ eV}$.

Задача 17.2.15

У якого воднеподібного іона різниця довжин хвиль головних ліній серій Бальмера і Лаймана дорівнює $\Delta\lambda = 59,3 \text{ нм}$.

Дано:	Розв'язання
$\Delta\lambda = 59,3 \text{ нм}$	Головна лінія серії Лаймана для воднеподібного іона
$Z = ?$	визначається за формулою Рідберга, вважаючи $n_i = 1$ і $n_k = 2$.
	$\frac{1}{\lambda_L} = Z^2 R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) = Z^2 R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3Z^2 R}{4},$ $\lambda_L = \frac{4}{3Z^2 R}. \quad (1)$

Для головної лінії серії Бальмера $n_i = 2$ і $n_k = 3$

$$\frac{1}{\lambda_B} = Z^2 R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) = Z^2 R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{5Z^2 R}{36},$$

$$\lambda_B = \frac{36}{5Z^2 R}. \quad (2)$$

За умовами задачі різниця довжин хвиль $\Delta\lambda = 59,3$ нм. Тому підставимо результати (1) і (2) і отримаємо

$$\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_L = \frac{36}{5Z^2 R} - \frac{4}{3Z^2 R} = \frac{88}{15Z^2 R}. \quad (3)$$

Виразимо Z із формули (3)

$$Z = \sqrt{\frac{88}{15R\Delta\lambda}} = \sqrt{\frac{88}{15 \cdot 1,1 \cdot 10^7 \cdot 59,3 \cdot 10^{-9}}} = 3.$$

Отже, воднеподібним іоном, що має дану різницю довжин хвиль між головними лініями Лаймана і Бальмера, є літій.

Відповідь: $Z = 3$, Li^{++} .

17.3. Задачі для самостійної роботи

17.3.1. Знайти зміну орбітального механічного моменту електрона, якщо при переході його зі збудженого стану в основний випроменився фотон з довжиною хвилі $\lambda = 102$ нм.

Відповідь: $\Delta L = 2,1 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

17.3.2. Атом водню з нормального стану було переведено у збуджений. При цьому переході радіус орбіти електрона зріс у 16 разів. Визначити енергію збудження (енергія електрона у нормальному стані 13,6 еВ).

Відповідь: $\varepsilon = 12,75$ еВ.

17.3.3. Визначити максимальну та мінімальну енергії фотона у видимій частині спектра водню.

Відповідь: $\varepsilon_{\min} = 3,03 \cdot 10^{-19}$ Дж = 1,89 еВ; $\varepsilon_{\max} = 5,45 \cdot 10^{-19}$ Дж = 3,41 еВ.

17.3.4. Фотон, частота якого $\nu = 3,62 \cdot 10^{15}$ Гц, вибив електрон з атома водню, що перебував в основному стані. Визначити швидкість електрона за межами атома.

Відповідь: $v = 1,2$ Мм/с.

17.3.5. Атомарний водень опромінюють ультрафіолетовим випромінюванням з довжиною хвилі $\lambda = 95$ нм. Визначити, які спектральні лінії у видимій області спектра з'являться при цьому.

Відповідь: $\lambda_3 = 0,656$ мкм, $\lambda_4 = 0,486$ мкм, $\lambda_5 = 0,434$ мкм.

17.3.6. Максимальна довжина хвилі спектральної водневої лінії серії Лаймана дорівнює 0,12 мкм. Визначити максимальну довжину хвилі лінії серії Бальмера.

Відповідь: $\lambda = 0,648$ мкм.

17.3.7. Визначити довжину хвилі спектральної лінії, що відповідає переходу електрона в атомі водню з шостої борівської орбіти на другу. До якої серії належить ця лінія?

Відповідь: $\lambda = 0,41$ мкм, четверта лінія серії Бальмера.

17.3.8. Електрон в атомі водню перейшов з четвертого енергетичного рівня на другий. Визначити енергію випущеного при цьому фотона.

Відповідь: $\varepsilon = 2,55 \text{ eV}$.

17.3.9. Визначити роботу, яку необхідно виконати, щоб видалити електрон з другої борівської орбіти атома водню за межі тяжіння його ядра.

Відповідь: $A = 5,45 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$.

17.3.10. Визначити енергію, яку необхідно витратити для повного відриву електрону від ядра одноразово іонізованого атома гелію, якщо: 1) електрон знаходиться в основному стані; 2) електрон знаходиться в стані, який відповідає головному квантовому числу $n = 3$.

Відповідь: $\varepsilon_{i1} = 54,2 \text{ eV}$, $\varepsilon_{i2} = 6,02 \text{ eV}$.

17.3.11. В односторонньому іоні літію електрон перейшов із четвертого енергетичного рівня на другий. Визначити довжину хвилі випромінювання, випущеного іоном літію.

Відповідь: $\lambda = 0,054 \text{ мкм}$.

17.3.12. У випромінюванні зірки виявлено воднеподібний спектр, довжини хвиль якого в 9 разів менше, ніж в атомарного водню. Визначте елемент, якому належить даний спектр.

Відповідь: $Z = 3$, літій.

17.3.13. Під час освітлення гелію рентгенівськими променями з довжиною хвилі $\lambda = 10^{-10} \text{ м}$ відбувається іонізація гелію. Знаючи, що енергія іонізації гелію дорівнює $24,5 \text{ eV}$, визначити швидкість електрону, що залишає атом гелію. Початковою кінетичною енергією електрону можна знехтувати.

Відповідь: $v = 6,6 \cdot 10^7 \text{ м/с}$.

17.3.14. Обчислити постійну Рідберга R , якщо відомо, що для іонів He^+ різниця довжин хвиль між головними лініями серій Бальмера і Лаймана $\Delta\lambda = 133,7 \text{ нм}$.

Відповідь: $R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$.

17.3.14. Знайти номер рівня n , що відповідає збудженому стану воднеподібного іона He^+ , якщо при переході в основний стан цей іон випустив послідовно два фотони з довжинами хвиль 108,5 і 30,4 нм.

Відповідь: $n = 5$.

18. ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

18.1. Теоретичні відомості

18.1.1. Хвилі де Бройля

Луї де Бройль висунув гіпотезу про те, що корпускулярно-хвильовий дуалізм властивостей характерний не тільки для світла. Він припустив, що всі матеріальні частинки (електрони, протони тощо) мають не тільки корпускулярні, але й хвильові властивості. При цьому ці хвилі мають специфічну (не електромагнітну) природу, для якої не можна знайти аналогії у класичній фізиці.

Де Бройль припустив, що формули, які описують енергію та імпульс фотона ($\varepsilon = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda}$, $p = \hbar k = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$), можуть бути застосовані для опису руху електрона та інших частинок як хвильового процесу, довжина хвилі якого визначається як

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p}, \quad (18.1)$$

де λ – довжина хвилі де Бройля, $h = 2\pi\hbar = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка, p – імпульс частинки, що дорівнює для нерелятивістського випадку $p = mv$, а релятивістського випадку $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$, де m_0 – маса спокою частки, v – її

швидкість, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла у вакуумі.

Використовуючи співвідношення

$$KE = \frac{mv^2}{2} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda}, \quad (18.2)$$

можна довжину хвилі де Бройля виразити через кінетичну енергію частинки

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot KE}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m \cdot KE}}. \quad (18.3)$$

Застосовуючи формулу для довжини хвилі де Бройля можна записати вираз для імпульсу у векторному та скалярному вигляді, відповідно,

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}, \quad (18.4)$$

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \hbar k, \quad (18.5)$$

де $\vec{k}$ – хвильовий вектор і його модуль $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число.

Оцінка довжини хвилі де Бройля для звичайного матеріального макрооб'єкта, що має масу $m \sim 1\text{кг}$ і рухається зі швидкістю $v \sim 1\text{ м/с}$, дає довжину хвилі де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{1 \cdot 1} = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ м.}$$

Такі хвильові властивості неможливо зареєструвати та перевірити, бо вони суттєво менше розмірів атомного ядра ($\sim 10^{-15}\text{ м}$).

Але для електрона, що рухається в електронно-променевої трубі, розрахунок за формулою (18.1) дає довжину хвилі де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^5} = 7,2 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

Порядок цього результату збігається із порядком величини розміру атома, а це означає, що хвильові властивості електронів повинні проявитися, наприклад, при їх розсіюванні на тих же кристалах, на яких спостерігається дифракція рентгенівських променів.

Ідея «хвиль матерії», запропонована де Бройлем, отримала підтвердження в експериментах по дифракції електронів і інших частинок, які дали змогу стверджувати, що хвильові властивості є універсальними для усіх частинок. Більш того, хвильові властивості мають як потоки частинок, так і окремі мікрочастинки. Існування хвиль де Бройля лежить в основі роботи електронного мікроскопа, який має роздільну здатність набагато вищу, ніж у будь-якого оптичного мікроскопа, що дозволяє спостерігати молекули та атоми. Метод

дифракції частинок широко використовується в дослідженні будови та властивостей речовини.

Правило квантування орбіт Бора отримало наочну інтерпретацію із запровадженням поняття хвиль де Бройля. Згідно з ним момент імпульсу електрона може набувати тільки тих значень, що відповідають формулі $mv_n r_n = n\hbar = n \frac{h}{2\pi}$, звідки радіус орбіти електрона $r_n = n \frac{h}{2\pi mv_n}$. Тоді довжина орбіти дорівнює

$$2\pi r_n = 2\pi n \frac{h}{2\pi mv_n} = n \frac{h}{p_n} = n\lambda_n. \quad (18.6)$$

Це означає, що довжина хвилі де Бройля цілу кількість разів укладається на довжині стаціонарної кругової орбіти. З огляду на це, можна запровадити й інше визначення стаціонарної орбіти, як орбіти, де укладається ціле число довжин хвиль електрона. Крім того, із формули (18.6) випливає, що довжина хвилі де Бройля електронів на різних орбітах різна внаслідок відмінності швидкостей електронів на них.

На рис. 18.1 показані дозволені орбіти, що завдані стоячими хвилями де Бройля для орбіт $n=3$ (а), $n=4$ (б), $n=5$ (в) і $n=6$ (г).

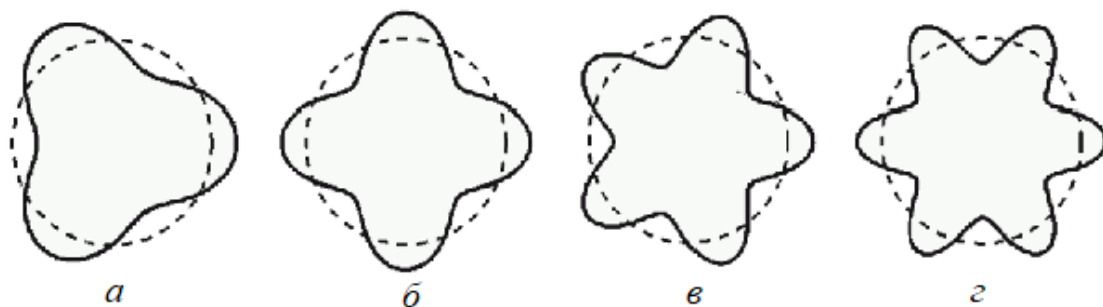


Рисунок 18.1

18.1.2. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга

У класичній фізиці вичерпний опис стану частинки визначається динамічними параметрами (координати, імпульс, момент імпульсу, енергія).

Однак реальна поведінка мікрочастинок показує, що існує принципова межа точності, з якою подібні змінні можуть бути вказані та виміряні.

В. Гейзенберг сформулював **принцип невизначеності**: величини, що характеризують фізичну систему не можуть одночасно набувати точних значень. Цей принцип відображає подвійну, корпускулярно-хвильову природу частинок матерії (електронів, протонів та ін.). Кількісні співвідношення, що виражають цей принцип у конкретних випадках, називають **співвідношеннями невизначеностей**.

Перше співвідношення обмежує точності одночасного виміру координат і відповідних проєкцій імпульсу частинки. Для проєкції, наприклад, на вісь x воно має вигляд

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar. \quad (18.7)$$

З цього співвідношення випливає, що чим точніше ми спробуємо визначити координату частинки, тим з меншою точністю зможемо схарактеризувати її імпульс. А це означає, що неможливо зберегти уявлення про орбіту, вздовж якої рухається електрон з визначеною швидкістю, тобто класичні уявлення у такому випадку не працюють.

Друге співвідношення встановлює невизначеності одночасного виміру енергії та проміжку часу:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar. \quad (18.8)$$

Наслідки зі співвідношень невизначеностей:

1. Неможливий стан, у якому частка перебувала б у стані спокою.
2. При розгляді руху квантового об'єкта необхідно у багатьох випадках відмовитися від поняття класичної траєкторії.
3. Часто втрачає сенс поділ повної енергії частинки (як квантового об'єкта) на потенціальну та кінетичну, оскільки перша залежить від координат, а друга – від імпульсу. Ці динамічні змінні не можуть одночасно мати певні значення.

Отже, відмова від детермінованого поняття траєкторії руху, притаманного класичній механіці, і перехід до ймовірнісного опису положення мікрочастинок

у просторі є однією з істотних і принципових особливостей квантової механіки.

18.1.3. Ймовірнісний сенс хвиль де Бройля. Хвильова функція

Поширення хвиль де Бройля у просторі не пов'язане з поширенням у просторі будь-якого поля, відомого у класичній фізиці. Ці хвилі мають специфічну квантову природу, яка не має аналогів у класичній фізиці.

Для розуміння фізичного сенсу хвиль де Бройля згадаємо взаємозв'язок між корпускулярними та хвильовими властивостями світла. Тоді питання природи хвиль матерії можна сформулювати як питання фізичного сенсу амплітуди цих хвиль.

Замість амплітуди хвилі розглядатимемо інтенсивність хвилі, яка, як відомо, пропорційна квадрату модуля амплітуди ($I \sim |A|^2$). У дослідах по дифракції картина, що спостерігається для мікрочастинок, характеризується неоднаковим розподілом потоків мікрочастинок у різних напрямках. Наявність максимумів на дифракційній картині означає, що у цих напрямках хвилі де Бройля розповсюджуються із найбільшою інтенсивністю. А інтенсивність буде максимальною, якщо у цьому напрямі поширюється максимальна кількість частинок. Це означає, що дифракційна картина для мікрочастинок є проявом статистичної (ймовірнісної) закономірності у розподілі частинок: де інтенсивність хвилі де Бройля максимальна, там і частинок більше. Це стало основою своєрідного статистичного, ймовірнісного тлумачення хвиль де Бройля: квадрат модуля амплітуди хвиль де Бройля у певній точці є мірою ймовірності того, що частка виявляється у цій точці.

Хвилі де Бройля у квантової механіки сприймаються як хвилі ймовірності, тобто ймовірність виявити частинку в різних точках простору змінюється за хвильовим законом. Але для деяких точок простору така ймовірність буде негативною (тобто частка не потрапляє до цієї області). Макс Борн у 1926 році припустив, що за хвильовим законом змінюється не сама ймовірність, а

амплітуда ймовірності, яку також називають *хвильовою функцією* або Ψ -*функцією* (*пси - функцією*).

Отже, у квантовій теорії стан частинки задається пси-функцією, яка є комплексною величиною і формально має хвильові властивості. За ідеєю М. Борна, рух будь-якої мікрочастинки окремо підпорядковується законам ймовірності. Розподіл ймовірності, що характеризує цей рух, проявляється внаслідок реєстрації досить великої кількості частинок. Цей розподіл виявляється таким самим, як і розподіл інтенсивності хвилі: там, де інтенсивність хвилі більша, реєструється і більше частинок.

У квантової теорії розглядається питання не точного передбачення подій, а визначення ймовірностей цих подій. Пси-функція і є тією величиною, яка дозволяє знаходити всі ймовірності.

Ймовірність знаходження частки в об'ємі dV в момент t визначається як

$$dP = |\Psi|^2 dV = \Psi \cdot \Psi^* dV, \quad (18.9)$$

де Ψ^* – комплексно-спряжена функція.

Тоді густина ймовірності, тобто ймовірність знаходження частинки в одиниці об'єму, буде

$$P = |\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*. \quad (18.10)$$

Пси-функція, яка визначається з точністю до довільного постійного множника, вибирається так, щоб вона задовольняла умові нормування:

$$\int |\Psi|^2 dV = \int \Psi \cdot \Psi^* dV = 1, \quad (18.11)$$

де інтеграл береться по всьому простору або по тій області, де Ψ відмінна від нуля. Умова нормування означає, що у всій області, де $\Psi \neq 0$, частка знаходиться з ймовірністю, що дорівнює одиниці. Пси-функцію, яка задовольняє умові нормування, називають **нормованою**.

Таким чином, опис стану мікрооб'єкта за допомогою хвильової функції має статистичний, ймовірнісний характер: квадрат модуля хвильової функції (квадрат модуля амплітуди хвиль де Бройля) визначає можливість знаходження

частинки в даний момент часу в певному обмеженому об'ємі. Сама ж хвильова функція є основною характеристикою стану мікрооб'єктів (елементарних частинок, атомів, молекул). З її допомогою визначаються значення фізичних величин, що характеризують цей об'єкт.

18.1.4. Рівняння Шредінгера

У класичній механіці основним рівнянням, що описує рух частинки, є рівняння 2-го закону Ньютона.

У квантовій механіці також потрібно рівняння, яке дозволяло б описувати рух мікрочастинок у просторі та в часі. При цьому слід враховувати характерну для мікросвіту корпускулярно-хвильову двоїстість і той факт, що співвідношення невизначеностей Гейзенберга накладає обмеження на точність знаходження основних характеристик. Основним має бути рівняння щодо хвильової функції, бо саме вона, чи, точніше, її квадрат визначає ймовірність знаходження частинки у заданий час у заданому певному об'ємі. Крім того, шукане рівняння мало б враховувати хвильові властивості частинок, тобто має бути хвильовим рівнянням (диференціальним рівнянням другого порядку), щоб врахувати хвильові властивості. Саме таке рівняння запропонував 1926 року австрійський фізик-теоретик Ервін Шредінгер.

Рівняння Шредінгера – основне рівняння нерелятивістської квантової теорії – визначає зміну стану системи у часі. Воно грає у квантовій механіці таку ж роль, як основне рівняння динаміки (2-й закон Ньютона) у нерелятивістській класичній механіці.

Рівняння Шредінгера для мікрочастинки масою m , що рухається в силовому полі зі швидкістю $v \ll c$ має вигляд

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (18.12)$$

де $\Psi(x, y, z, t)$ – хвильова функція, $U = U(x, y, z, t)$ – потенціальна енергія частинки у силовому полі, в якому рухається частка, $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця, $\hbar$ – стала Планка, $\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Оскільки наведений запис рівняння Шредінгера містить похідну за часом, то таке рівняння називається **часовим**.

Для більшості фізичних явищ важливо отримувати стаціонарні розв'язки рівняння, що не залежить від часу, тоді рішення часового рівняння Шредінгера шукатимемо у вигляді, в якому розділені змінні – одна залежить від координат, а інша – від часу.

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \cdot \varphi(t), \quad (18.13)$$

Для стаціонарного поля потенційна енергія не залежить від часу

$$\psi(x, y, z) = U(x, y, z) = U, \quad (18.14)$$

а залежна від часу функція має вигляд

$$\varphi(t) = e^{-i(E/\hbar)t}, \quad (18.15)$$

де E – повна енергія частинки.

Підставимо (18.14) та (18.15) в рівняння Шредінгера,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi e^{-i(E/\hbar)t} + U \psi e^{-i(E/\hbar)t} = i\hbar \left(-i \frac{E}{\hbar} \right) \psi e^{-i(E/\hbar)t}. \quad (18.16)$$

Поділивши на $e^{-i(E/\hbar)t}$ і зробивши відповідні перетворення, отримуємо диференціальне рівняння відносно функції ψ

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U = i\hbar \left(-i \frac{E}{\hbar} \right) \psi. \quad (18.17)$$

Остаточнo,

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0. \quad (18.18)$$

Рівняння (18.18) – це **стаціонарне рівняння Шредінгера** (або рівняння Шредінгера для стаціонарних станів)

Функції ψ , що задовольняють цьому рівнянню при даному U , називаються **власними функціями**. Значення, за яких існують розв'язки рівняння Шредінгера, називаються **власними значеннями**.

Рівняння Шредінгера тісно пов'язане з гіпотезою де Бройля і корпускулярно-хвильовим дуалізмом матерії, що впливає з неї. Безпосередня перевірка показує, що для вільної частинки, що має кінетичну енергію $E = \frac{p^2}{2m}$, яка рухається без силових полів ($U=0, \vec{F}=0$) в напрямку осі x , рішенням відповідного рівняння Шредінгера (18.12)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (18.19)$$

є хвильова функція виду

$$\psi(x, t) = Ae^{\frac{i(Et - px)}{\hbar}}. \quad (18.20)$$

яка відповідає плоскій хвилі де Бройля. Цей факт дозволяє стверджувати, що у загальному випадку рівняння Шредінгера є хвильовим рівнянням. Лінійність цього рівняння зумовлює принцип суперпозиції квантових станів.

18.2. Приклади розв'язання задач

Задача 18.2.1

Знайти довжину хвилі де Бройля для електронів, що пройшли різницю потенціалів 1 і 100 кВ.

Дано:	Розв'язання
$U_1 = 1\text{В}$	Довжина хвилі де Бройля визначається співвідношенням
$U_2 = 100\text{ кВ}$	$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (1)$
$\lambda_1 = ? \quad \lambda_2 = ?$	де $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$, p – імпульс частинки.

Для знаходження імпульсу частинки необхідно знати швидкість частинок (електронів), яку можна знайти, зважаючи на той факт, що свою кінетичну енергію електрони отримали завдяки дії прискорювального електричного поля:

$$eU_1 = \frac{mv^2}{2}, \quad (2)$$

звідки швидкість електрона дорівнює $v = \sqrt{\frac{2eU_1}{m}}$, а імпульс $p = \sqrt{2emU_1}$.

Враховуючи це, довжина хвилі електронів

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2emU_1}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1}} = 1,23 \cdot 10^{-9} \text{ м}.$$

Знайдемо швидкість електронів у тому випадку, коли прискорювальна напруга $U_2 = 100 \text{ кВ} = 10^5 \text{ В}$.

$$v = \sqrt{\frac{2eU_2}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,8 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Розрахунок показує, що швидкість електронів близька до швидкості світла, тому слід враховувати релятивістські ефекти. В такому випадку знайти довжину хвилі де Бройля можна двома способами

1 спосіб

Кінетична енергія електронів, що пройшли різницю потенціалів U_2 , дорівнює роботі $KE = eU_2$ електричного поля, отже,

$$m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = eU_2.$$

Звідси

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{eU_2}{m_0 c^2} + 1.$$

Підставимо числові дані та отримаємо, що

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{eU_2}{m_0 c^2} + 1 = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} + 1 = 1,2$$
$$\beta = 0,55.$$

Тоді імпульс електрона дорівнює

$$p = \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 0,55 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,2 = 1,8 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Довжина хвилі де Бройля дорівнює

$$\lambda_2 = \frac{h}{p} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{1,8 \cdot 10^{-22}} = 3,68 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

2 спосіб

Вважаючи, що друга прискорювальна напруга обумовлює необхідність врахування релятивістських поправок, одразу скористаємося формулою, яка зв'язує релятивістський імпульс з кінетичною енергією KE та енергією спокою ε_0 електрона

$$p = \frac{\sqrt{KE(KE + 2\varepsilon_0)}}{c}.$$

Зважаючи на те, що кінетична енергія електрона дорівнює енергії електричного поля, яке прискорило цей електрон, тобто $KE = eU_2$, отримаємо довжину хвилі де Бройля електронів

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{KE(KE + 2\varepsilon_0)}} = \frac{hc}{\sqrt{eU_2(eU_2 + 2m_0c^2)}} =$$

$$= \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5 (1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5 + 2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2)}} = 3,68 \cdot 10^{-12} \text{ м.}$$

Відповідь: $\lambda_1 = 1,23 \cdot 10^{-9} \text{ м}$; $\lambda_2 = 3,68 \cdot 10^{-12} \text{ м}$.

Задача 18.2.2

У однорідному магнітному полі, напруженість якого дорівнює $H = 18,9 \text{ кА/м}$, по колу радіусом $R = 8,3 \text{ мм}$ рухається α -частинка. Знайти її довжину хвилі де Бройля.

Дано:

$$H = 18,9 \text{ кА/м}$$

$$R = 8,3 \text{ мм}$$

$$\lambda = ?$$

Розв'язання

На частинку, що рухається в магнітному полі, діє магнітна складова сили Лоренца $\vec{F}_m = q[\vec{v}, \vec{B}]$. Якщо траєкторією частинки є коло, це означає, що кут між

напрямком швидкості частинки та магнітною індукцією становить $\alpha = 90^\circ$, а модуль сили дорівнює $F_m = qvB$. Рівняння руху частинки згідно з 2 законом Ньютона

$$ma_n = qvB,$$

де $a_n = \frac{v^2}{R}$ – нормальна складова прискорення.

Тому

$$m \frac{v^2}{R} = qvB.$$

З врахуванням того, що магнітна індукція $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, а для вакууму (повітря) магнітна проникність $\mu = 1$, магнітна стала $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$,

модуль магнітної індукції $B = \mu_0 H$. Тоді швидкість α -частинки ($q = 2e, m = 4m_p$)

$$v = \frac{qBR}{m} = \frac{q\mu_0 HR}{m} = \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,26 \cdot 10^{-6} \cdot 18,9 \cdot 10^3 \cdot 8,3 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}} = 9,5 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Довжина хвилі де Бройля α -частинки становить

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{4 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 9,5 \cdot 10^3} = 1,05 \cdot 10^{-11} \text{ м.}$$

Перевірка розмірності:

$$[\lambda] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}} = \text{м}.$$

Відповідь: $\lambda = 1,05 \cdot 10^{-11} \text{ м.}$

Задача 18.2.3

На скільки зміниться довжина хвилі де Бройля електрона в атомі водню, якщо атомом випущено фотон, довжина хвилі якого відповідає головній лінії серії Пашена?

Дано:	Розв'язання
$n_i = 3$	Головна лінія серії Пашена виникає при переході електрона з четвертого ($n_k = 4$) на третій ($n_i = 3$) енергетичний рівень.
$n_k = 4$	
$\Delta\lambda = ?$	Швидкість електрона на n -му рівні можна знайти за формулою

$$v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot \hbar} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2,19 \cdot 10^6}{n} \text{ м/с.}$$

Підставляючи номери рівнів, знайдемо швидкості електронів на них,

$$v_3 = \frac{2,19 \cdot 10^6}{3} = 7,29 \cdot 10^5 \text{ м/с та } v_4 = \frac{2,19 \cdot 10^6}{4} = 5,48 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

Довжини хвиль де Бройля дорівнюють, відповідно

$$\lambda_3 = \frac{h}{mv_3} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 7,29 \cdot 10^5} = 9,98 \cdot 10^{-10} \text{ м},$$

$$\lambda_4 = \frac{h}{mv_4} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5,48 \cdot 10^5} = 1,33 \cdot 10^{-9} \text{ м}.$$

Зміна довжини хвилі де Бройля складає

$$\Delta\lambda = \lambda_4 - \lambda_3 = 1,33 \cdot 10^{-9} - 9,98 \cdot 10^{-10} = 3,29 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Відповідь: $\Delta\lambda = 3,29 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$

Задача 18.2.4

Заряджена частинка, прискорена різницею потенціалів $U = 200 \text{ В}$, має довжину хвилі де Бройля $\lambda = 2,02 \text{ нм}$. Знайти масу частинки, якщо її заряд чисельно дорівнює заряду електрона.

Дано:	Розв'язання
$U = 200 \text{ В}$	Кінетичну енергію заряджена частинка набуває в електричному полі, отже, робота поля
$\lambda = 2,02 \text{ нм}$	
$q = e$	$eU = KE = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \quad (1)$
$m = ?$	

З (1) імпульс частинки дорівнює

$$p = \sqrt{2emU}. \quad (2)$$

Довжина хвилі де Бройля з підставленням (2) становить

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2emU}},$$

звідки маса зарядженої частинки дорівнює

$$m = \frac{h^2}{2eU\lambda^2} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 200 \cdot (2,02 \cdot 10^{-12})^2} = 1,68 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Перевірка розмірності

$$[m] = \frac{(\text{Дж} \cdot \text{с})^2}{\text{Кл} \cdot \text{В} \cdot \text{м}^2} = \frac{(\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2})^2 \cdot \text{с}^2}{\text{А} \cdot \text{с} \cdot (\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1}) \cdot \text{м}^2} = \text{кг}.$$

Відповідь: $m = 1,68 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$

Задача 18.2.5

Знайти невизначеність координати Δx електрона, що рухається зі швидкістю $v = 2 \text{ Мм/с}$ в атомі водню, якщо допустима неточність Δv у визначенні швидкості становить 15% від її величини. Порівняти із розміром атома водню. Вказати, чи допустимо застосовувати поняття «траєкторія» в цьому випадку.

Дано:	Розв'язання
$v = 2 \text{ Мм/с}$	Співвідношення невизначеностей Гейзенберга для координати та імпульсу має вигляд
$\frac{\Delta v}{v} = 15\%$	$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar. \quad (1)$
$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$	Виходячи з того, що величина імпульсу $p = mv$,
$\Delta x = ?$	невизначеність імпульсу можна виразити через невизначеність швидкості

$$\Delta p_x = m \Delta v. \quad (2)$$

Підставлення (2) в (1) дає

$$\Delta x \cdot m \Delta v \geq \hbar,$$

звідки невизначеність координати становить

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta v \cdot m}. \quad (3)$$

Невизначеність швидкості згідно з умовами задачі дорівнює

$$\Delta v = 0,15v = 0,15 \cdot 2 \cdot 10^6 = 3 \cdot 10^5 \text{ м/с}. \quad (4)$$

Тоді, шукана невизначеність координати з врахуванням (3) і (4)

$$\Delta x \geq \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{3 \cdot 10^5 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = 3,85 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Отримана невизначеність в координаті Δx співмірна з розмірами атома ($\sim 10^{-10}$ м), а тому поняття траєкторія не може бути застосоване для такого випадку.

Відповідь: $\Delta x \geq 3,85 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$

Задача 18.2.6

Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей мінімально можливу енергію електрона в атомі водню.

Дано:	Розв'язання
$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$	За умови, що $E = E_{\min}$, можна вважати, що імпульс електрона за порядком величини дорівнює величині його невизначеності, $p \sim \Delta p$, а діапазон відстаней електрона від ядра відповідає радіусу орбіти $\Delta r \sim r$.
$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$	
$E_{\min} = ?$	

Тоді зі співвідношення Гейзенберга $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$,

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{\Delta x},$$

а з урахуванням зроблених припущень

$$p \sim \frac{\hbar}{r}. \quad (1)$$

Енергія електрона в атомі може бути представлена як сума кінетичної енергії руху

$$KE = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \quad (2)$$

і потенціальної енергії взаємодії протона і електрона

$$PE = k \frac{e(-e)}{r} = \frac{ke^2}{r}, \quad (3)$$

де $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ Ф/м – електрична стала.

Повна енергія електрона з врахуванням (2) і (3) і підставленням (1) становить

$$E = KE + PE = \frac{p^2}{2m} - \frac{ke^2}{r} = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{ke^2}{r} = \frac{\hbar^2 - 2mke^2r}{2mr^2}. \quad (4)$$

Знайдемо похідну від залежності $E(r)$ (4) по r і прирівняємо її нулю, щоб відшукати значення r , при якому $E = E_{\min}$

$$-\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{ke^2}{r^2} = 0,$$

звідки

$$r = \frac{\hbar^2}{ke^2m}. \quad (5)$$

З врахуванням (5) мінімальне значення повної енергії (4) набуває вигляду

$$E_{\min} = \frac{\hbar^2 - 2mke^2r}{2mr^2} = \frac{\hbar^2 - 2mke^2 \left(\frac{\hbar^2}{ke^2m} \right)}{2m \left(\frac{\hbar^2}{ke^2m} \right)^2} = -\frac{k^2e^4m}{2\hbar^2}. \quad (6)$$

Підставлення (5) в (6) дає

$$E_{\min} = -\frac{k^2e^4m}{2\hbar^2} = -\frac{(9 \cdot 10^9)^2 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^4 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{2 \cdot (1,05 \cdot 10^{-34})^2} = -2,19 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}.$$

Якщо виразити цю енергію в електронвольтах, то ми отримаємо 13,6 еВ, що відповідає енергії електрона в основному стані за теорією Бора для атома водню.

Перевірка розмірності результату

$$[E_{\min}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Н}^2 \cdot \text{м}^4 \cdot \text{Кл}^4}{\text{Кл}^4 \cdot \text{Дж} \cdot \text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{Н}^2 \cdot \text{м}^3}{\text{с}^2 \cdot \text{Дж}^2} = \frac{\text{Дж}^3}{\text{Дж}^2} = \text{Дж}.$$

Відповідь: $E_{\min} = -2,19 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}.$

Задача 18.2.7

Середній час життя деяких елементарних частинок становить 10^{-18} с. Оцінити кінетичну енергію цих частинок.

Дано:	Розв'язання
$t = 10^{-18}$ с	Співвідношення невизначеностей Гейзенберга для енергії та часу має вигляд
$E = ?$	$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar. \quad (1)$

Вважаючи, що енергія частинки має порядок величини її невизначеності $E \sim \Delta E$, а час життя $t \sim \Delta t$, отримуємо оцінку кінетичної енергії частинки

$$E \approx \frac{\hbar}{t} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{10^{-18}} = 1,5 \cdot 10^{-16} \text{ Дж.}$$

Відповідь: $E \approx 1,5 \cdot 10^{-16}$ Дж.

Задача 18.2.8

Електрон з кінетичною енергією $KE \approx 4 \text{ eV}$ локалізований в області розміром $l = 1$ мкм. Оцінити за допомогою співвідношення Гейзенберга відносну невизначеність його швидкості.

Дано:	Розв'язання
$KE \approx 4 \text{ eV}$	Запишемо співвідношення невизначеностей $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$
$l = 1$ мкм	у вигляді
$\frac{\Delta v_x}{v_x} = ?$	$\Delta x \cdot m \Delta v_x \geq \hbar. \quad (1)$
	Вважатимемо, що невизначеність координати менше розміру області локалізації $\Delta x \leq l$, тоді вираз (1) набуває вигляду

$$l \cdot m \Delta v_x \sim \hbar,$$

звідки невизначеність швидкості становить

$$\Delta v_x \sim \frac{\hbar}{lm}. \quad (2)$$

Швидкість електрона виразимо з кінетичної енергії та отримаємо

$$v_x = \sqrt{\frac{2KE}{m}}. \quad (3)$$

Відносну невизначеність знайдемо як відношення невизначеності швидкості Δv_x з (2) і швидкості v_x з (3)

$$\frac{\Delta v_x}{v_x} \sim \frac{\hbar}{lm} \sqrt{\frac{m}{2KE}} = \frac{\hbar}{l\sqrt{2mKE}}. \quad (4)$$

Підставимо чисельні значення, виразивши $KE \approx 4 \text{ еВ} = 4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 6,4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$, $l = 1 \text{ мкм} = 10^{-6} \text{ м}$,

$$\frac{\Delta v_x}{v_x} \sim \frac{\hbar}{l\sqrt{2mKE}} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{10^{-6} \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 6,4 \cdot 10^{-19}}} = 9,7 \cdot 10^{-5} \approx 10^{-4}.$$

Відповідь: $\frac{\Delta v_x}{v_x} \approx 10^{-4}.$

Задача 18.2.9

Частинка знаходиться в прямокутній нескінченно глибокій потенціальній ямі шириною l та може рухатися вздовж осі x . Потенціальна енергія має значення: $U = 0$ при $0 \leq x \leq l$ та $U = \infty$ при $x < 0$ та $x > l$. Написати рівняння Шредінгера та його власні функції. Отримати вираз для власних значень енергії.

Дано:

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq l \\ \infty, & x > l \end{cases}$$

$$\psi_n(x) = ? \quad E_n = ? \quad (1)$$

Розв'язання

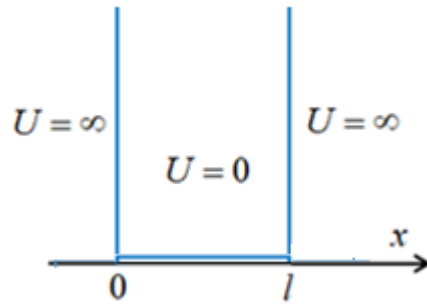
Рівняння Шредінгера в цьому випадку має вигляд

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0.$$

За межі ями частинка вийти не може, отже, ймовірність виявлення її поза ямою дорівнює нулю.

Оскільки ймовірність визначається псі-функцією, поза ями $\psi = 0$. З умови безперервності на межах ями при $x=0$ та $x=l$ хвильова функція також обертається в нуль, тобто граничні умови мають вигляд

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (2)$$



В області, де $\psi \neq 0$, потенціальна енергія $U = 0$, тоді рівняння Шредінгера (1) набуває вигляду

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0. \quad (3)$$

Введемо в (3) позначення

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E \quad (4)$$

і отримаємо рівняння

$$\psi'' + k^2\psi = 0. \quad (5)$$

Це диференціальне рівняння другого порядку, яке добре знайомо з теорії коливань, має розв'язок

$$\psi(x) = A \sin(kx + \alpha). \quad (6)$$

З врахуванням умови (2) функція (6) набуває вигляду

$$\psi(0) = A \sin \alpha = 0, \quad \text{звідки } \alpha = 0, \quad (7)$$

$$\psi(l) = A \sin kl = 0, \quad \text{звідки } kl = \pm n\pi, \quad k = \pm \frac{n\pi}{l}, \quad (8)$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$. При $n = 0$, $\psi \equiv 0$, тобто частинка ніде не знаходиться.

Виразимо k з (18), піднесемо до квадрата і підставимо в (4)

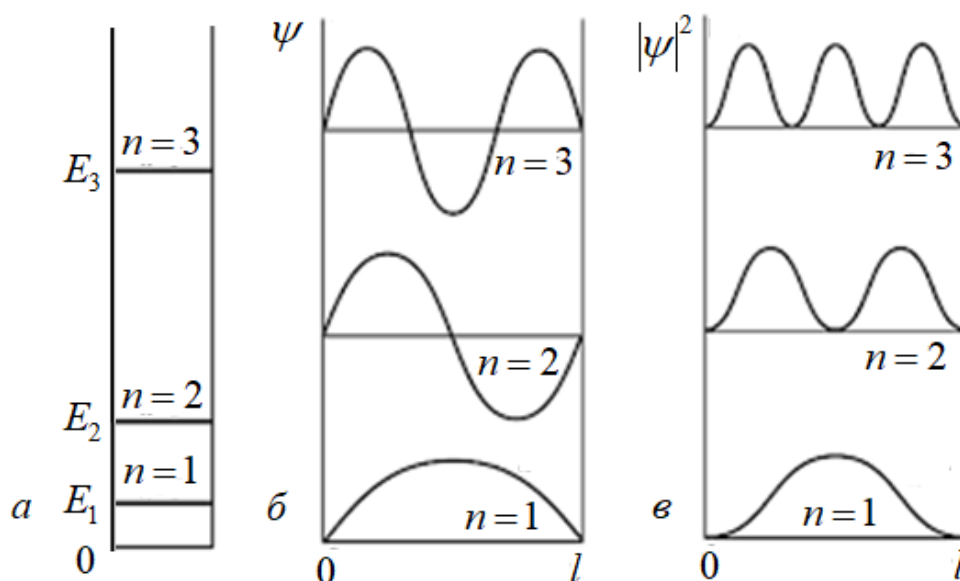
$$\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E, \quad (9)$$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \cdot n^2, \quad (10)$$

де $n=1,2,3,\dots$

Результат (10) свідчить про те, що стаціонарне рівняння Шредінгера, яке описує рух частинки в «потенціальній ямі» з нескінченно високими «стінками», задовольняється лише за власних значеннях E_n , що залежать від цілого числа n . Отже, енергія частинки в «потенціальній ямі» з нескінченно високими «стінками» набуває лише певних дискретних значень, тобто квантується. Квантовані значення енергії E_n називаються рівнями енергії (енергетичними рівнями), а число n , що визначає енергетичні рівні частинки, це головне квантове число. Таким чином, мікрочастинка в «потенціальній ямі» з нескінченно високими «стінками» може бути лише на певному енергетичному рівні E_n , або, як кажуть, частинка знаходиться у квантовому стані n .

Мінімальне значення енергії не дорівнює нулю. Це цілком узгоджується із принципом невизначеності. Адже у частинки в ямі обмежена область можливих значень її координати, тому має існувати розкид по імпульсах, а отже, відмінна від нуля енергія (рис. а).



Підставляючи значення k з (8) знайдемо власні функції

$$\psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (11)$$

Сталу інтегрування знайдемо з умови нормування, яке для випадку, що розглядається, має вигляд

$$A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = 1. \quad (12)$$

Оскільки на кінцях інтервалу інтегрування підінтегральна функція обертається в 0, то значення інтеграла можна отримати, помноживши середнє значення функції $\sin^2 \frac{n\pi x}{l} = \frac{1}{2}$ на довжину l , тоді $A = \sqrt{\frac{2}{l}}$. Отже, власні функції

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (13)$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$

Графіки власних функцій ψ_n (15), що відповідають рівням енергії E_n (10), при $n = 1, 2, 3$ наведено на рис. б. На рис. в зображена густина ймовірності виявлення частинки на різних відстанях від «стінок» ями, що дорівнює

$$|\psi_n(x)|^2 = \psi_n(x) \cdot \psi_n^*(x),$$

для тих же значень головного квантового числа n . З рисунка видно, що, наприклад, у квантовому стані з $n = 2$ частинка не може перебувати в середині «ями», в той час, як однаково часто може перебувати в її лівій та правій частинах. Така поведінка частинки вказує на те, що уявлення про траєкторії частинки у квантовій механіці є непридатним.

Відповідь: $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \cdot n^2.$

Задача 18.2.10

Знайти різницю енергій двох сусідніх рівнів для 1) молекули $m=10^{-26}$ кг, що знаходиться в посудині шириною $l=10$ см; 2) електрона $m=9,1\cdot 10^{-31}$ кг в атомі $l=10^{-9}$ м.

Дано:	Розв'язання
$m=10^{-26}$ кг	З формули для значень енергії, що отримана з рівняння Шредінгера
$l=10$ см	
$m=9,1\cdot 10^{-31}$ кг	
$l=10^{-9}$ м	
$\Delta E = ?$	$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \cdot n^2 \quad (1)$ впливає, що енергетичний інтервал між двома сусідніми рівнями становить

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \left((n+1)^2 - n^2 \right) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (n^2 + 2n + 1 - n^2) \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2} n. \quad (2)$$

Для частинки в посудині

$$\Delta E_n = \frac{(3,14)^2 \cdot (1,05) \cdot 10^{-68} \cdot n}{10^{-26} \cdot 10^{-2}} = 1 \cdot 10^{-39} \cdot n \text{ Дж.}$$

Для електрона в атомі

$$\Delta E_n = \frac{(3,14)^2 \cdot (1,05) \cdot 10^{-68} \cdot n}{10^{-31} \cdot 10^{-18}} = 1 \cdot 10^{-18} \cdot n \text{ Дж.}$$

Отримані результати дозволяють зробити такі висновки. Для частинки в посудині різниця енергій сусідніх станів настільки мала, що її енергетичний спектр можна вважати безперервним навіть за дуже великих значеннях n (суцільний енергетичний спектр). У другому випадку різниця велика, тому дискретність енергетичного спектра необхідно враховувати (лінійчатий спектр). Отже, застосування рівняння Шредінгера до частинки в «потенціальній ямі» з нескінченно високими «стінками» призводить до квантованих значень енергії,

тоді як класична механіка на енергію цієї частинки жодних обмежень не накладає.

Задача 18.2.11

Електрон знаходиться у нескінченно глибокій одновимірній потенціальній ямі шириною l . Знайти ймовірність знаходження електрона в інтервалах $0 < x < \frac{l}{4}$ та $\frac{l}{4} < x < \frac{3l}{4}$, якщо він знаходиться в нижчому збудженому стані.

Дано:

$$0 < x < \frac{l}{4}$$

$$\frac{l}{4} < x < \frac{3l}{4}$$

$$P_1 = ? \quad P_2 = ?$$

Розв'язання

Стан електрона, що відповідає мінімальному значенню квантового числа n ($n = 1$), називається основним. Стани з $n = 2, 3, 4, \dots$ називаються збудженими. Першому (нижчому) збудженому стану відповідає значення квантового числа $n = 2$.

Ймовірність знаходження частинки в деякому об'ємі простору V визначається інтегралом,

$$P = \int_V |\psi|^2 dV,$$

а для одновимірного випадку

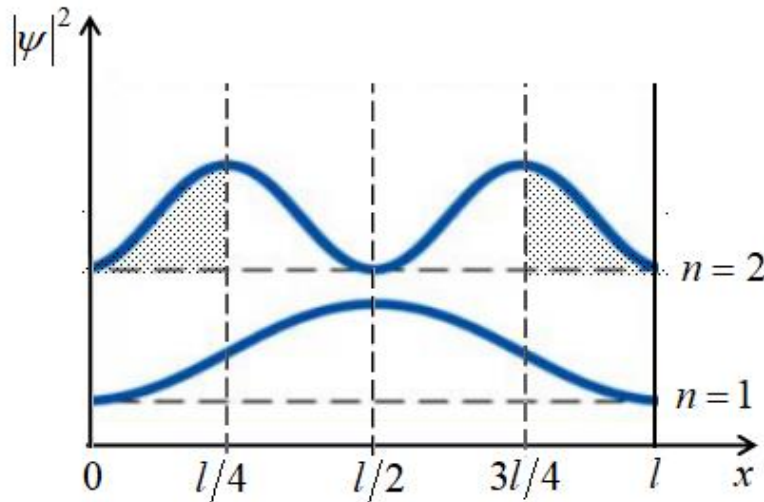
$$P = \int_l |\psi|^2 dx.$$

Хвильова функція частинки в нескінченно глибокій потенціальній ямі має вигляд

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

На рисунку наведені залежності густини ймовірності знаходження частинки від координати в межах потенціальної ями при різних значеннях квантового

числа n . Шукана ймовірність визначиться як площа під кривою $|\psi|^2$ в заданому інтервалі координат.



$$\begin{aligned}
 P_1 &= \int_0^{l/4} \frac{2}{l} \sin^2 \frac{n\pi x}{l} \cdot dx = \frac{2}{l} \int_0^{l/4} \frac{1 - \cos \frac{2n\pi x}{l}}{2} \cdot dx = \\
 &= \frac{1}{l} \left\{ \int_0^{l/4} dx - \int_0^{l/4} \cos \frac{2n\pi x}{l} \cdot dx \right\} = \frac{1}{l} \left\{ x \Big|_0^{l/4} - \frac{l}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{l} \Big|_0^{l/4} \right\} = \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4\pi} \sin \frac{n\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Підставляючи $n=2$, отримаємо ймовірність знаходження частинки в інтервалі $0 < x < \frac{l}{4}$

$$P_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\pi} \sin \pi = 0,25.$$

Ймовірність знаходження частки в інтервалі $\frac{l}{4} < x < \frac{3l}{4}$ можна визначити двома способами:

1) Взяти інтеграл від $|\psi|^2$ в межах $\frac{l}{4} < x < \frac{3l}{4}$:

$$P_2 = \int_{l/4}^{3l/4} |\psi|^2 dx = \frac{1}{l} \left\{ \left(\frac{3}{4}l - \frac{1}{4}l \right) - \frac{l}{2n\pi} \left(\sin \frac{2n\pi}{l} \cdot \frac{3l}{4} - \sin \frac{2n\pi}{l} \cdot \frac{l}{4} \right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}(\sin 3\pi - \sin \pi) = \frac{1}{2} = 0,5.$$

2) Цей же результат можна отримати, якщо врахувати, що знаходження електрона всередині ями подія достовірне, ймовірність якої дорівнює 1.

Як видно з рисунка, залежності густини ймовірності від координати x мають симетричний вигляд, отже, ймовірності знаходження електрона в інтервалах $0 < x < \frac{l}{4}$ і $\frac{l}{4} < x < \frac{3l}{4}$ однакові та дорівнюють, як показано вище, 0,25. Отже,

ймовірність знаходження електрона в інтервалі $\frac{l}{4} < x < \frac{3l}{4}$ можна визначити так

$$P_2 = 1 - 2P_1 = 0,5.$$

Таким чином, ймовірність знаходження частинки в різних частинах потенціальної ями різна, а у стінок ями дорівнює 0 за будь-яких значень n . Цей результат різко відрізняється від того, що можна очікувати для макроскопічної частинки, яку з рівною ймовірністю можна знайти в будь-якому місці ями, оскільки залежність густини ймовірності від координати для неї визначається прямою паралельною осі абсцис. Ймовірність знаходження частинки за межами нескінченно глибокої потенціальної ями дорівнює нулю.

Задача 18.2.12

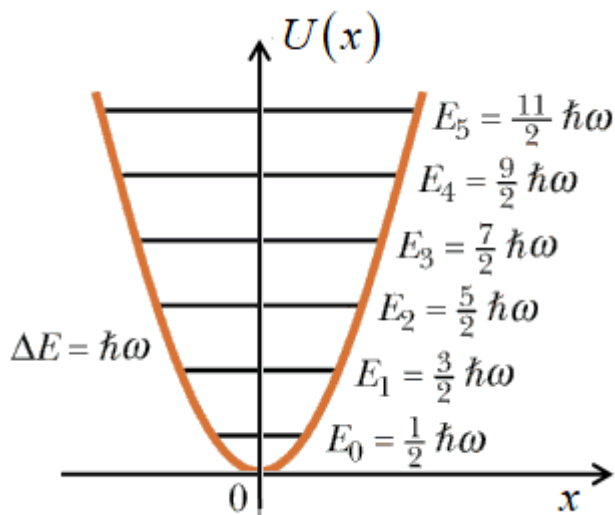
Знайти власні значення енергії одновимірного гармонічного квантового осцилятора маси m , кругова частота якого ω_0 .

Дано:	Розв'язання
m	Оскільки у квантовій теорії поняття сили втрачає сенс, то квантовий гармонічний осцилятор слід визначати як частинку маси m з потенціальною енергією $U(x)$ такою ж, як і у класичного осцилятора, тобто матеріального тіла, що здійснює гармонічні
ω_0	
$\psi_n = ?$	

коливання з циклічною частотою ω_0

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2}{2} x^2. \quad (1)$$

Залежність (1) є квадратичною, тобто має вид параболи, іншими словами, у такому випадку ми розглядаємо параболічну потенціальну яму.



Амплітуда малих коливань класичного осцилятора визначається його повною енергією E . В точках з координатами $\pm x_{\max}$ повна енергія E дорівнює потенціальній енергії. Тому з класичної точки зору частинка не може вийти за межі області $(-x_{\max}, +x_{\max})$. Такий вихід означав би, що її потенціальна енергія більша за повну, чого не може бути, оскільки призводить до висновку, що кінетична енергія є негативною. Таким чином, класичний осцилятор у стаціонарному стані знаходиться в «потенціальній ямі» з координатами $-x_{\max} \leq x \leq x_{\max}$ без можливості покинути її.

Гармонічний осцилятор у квантовій механіці (квантовий осцилятор) описується рівнянням Шредінгера,

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0,$$

що враховує вираз (1) для потенціальної енергії. Тоді стаціонарні стани квантового осцилятора визначаються рівнянням Шредінгера виду

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 \right) \psi = 0, \quad (2)$$

де E – повна енергія осцилятора.

В теорії диференціальних рівнянь рівняння виду (2) розв’язується тільки при власних значеннях енергії

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad (3)$$

де $n = 0, 1, 2, \dots$

Формула (3) показує, що енергія квантового осцилятора може мати лише дискретні значення, тобто вона квантується. Енергія обмежена знизу відмінним від нуля, як і для прямокутної ями з нескінченно високими «стінками», мінімальним значенням енергії $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$. Існування мінімальної енергії, яка називається енергією нульових коливань, є типовою для квантових систем і є прямим наслідком співвідношення невизначеностей.

Наявність нульових коливань означає, що частинка не може перебувати на дні потенціальної ями, причому цей висновок не залежить від її форми. Насправді перебування на дні ями обертало б в нуль імпульс частинки, а водночас і його невизначеність. Тоді невизначеність координати стає як завгодно великою, що суперечить, своєю чергою, перебуванню частинки в потенціальній ямі.

Висновок про наявність енергії нульових коливань квантового осцилятора суперечить висновкам класичної теорії, згідно з якою найменша енергія, яку може мати осцилятор, дорівнює нулю. Це значення відповідає тому стану, коли частинка заходиться у стані рівноваги. Наприклад, класична фізика доходить висновку, що за $T = 0 \text{ K}$ енергія коливального руху атомів кристала повинна перетворюватися на нуль.

У квантовій механіці вказується, що для квантового осцилятора можливі переходи лише між сусідніми стаціонарними рівнями, за яких квантове число змінюється на одиницю

$$\Delta n = \pm 1. \quad (1)$$

Цю умову називають правилом відбору для квантового гармонічного осцилятора. При кожному з таких переходів випромінюється або поглинається фотон з енергією $\hbar\omega$.

Задача 18.2.13

Знайти амплітуди відбитої та падаючої хвилі, а також коефіцієнти відбиття та пропускання при проходженні частинки крізь прямокутний потенціальний бар'єр нескінченної ширини.

Дано:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ U_0, & x > 0 \end{cases}$$

$$a = ? \quad b = ?$$

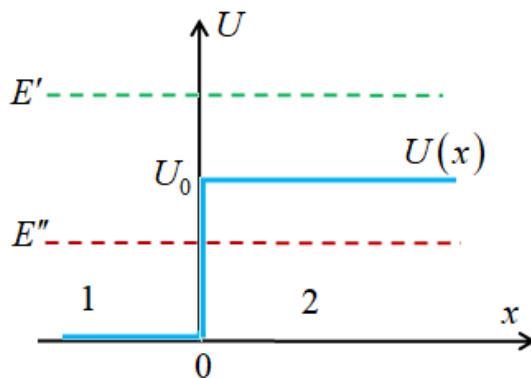
$$R = ? \quad D = ?$$

Розв'язання

Коли частинка рухається вздовж осі x , і потенціальна енергія залежить тільки від однієї координати $U(x)$, причому при $x=0$ зазнає стрибка.

Такий потенціальний бар'єр, який ще називають потенціальним порогом,

показано на рисунку.



Якщо в класичній фізиці частинка з енергією E потрапляє зліва на такий бар'єр, то при $E' > U_0$ вона вільно пройде над бар'єром, а при $E'' < U_0$ енергії

частинки буде недостатньо, і вона відіб'ється від бар'єра. В квантовій фізиці процеси відбиття і проходження мікрочастинки через бар'єр внаслідок принципу невизначеності енергії мають ймовірнісний характер. Тому, для мікрочастинки існує ймовірність при $E' > U_0$ відбитися від бар'єра, а при $E'' < U_0$ – пройти бар'єр.

Розглянемо квантово-механічну ситуацію, коли зліва (з області 1) на бар'єр налітає мікрочастинка або потік частинок з енергією E , інакше кажучи, на бар'єр падає дебройлівська хвиля

$$\Psi(x, t) = ae^{i(kx - \omega t)}.$$

Щоб задовольнити граничним умовам для Ψ і $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ при $x = 0$, повинна існувати хвиля, що пройшла, і та, що була відбита. У всіх трьох хвилях (що падає, що пройшла і що була відбита) однакова частота ω , тому у всіх розрахунках ми обмежимося лише координатною частиною цих хвиль, а саме $\psi(x)$.

Рівняння Шредінгера у нашому випадку має вигляд

$$\psi''_x + k^2 \psi = 0, \quad (1)$$

де $k^2 = \frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}$, причому в областях 1 і 2 це рівняння набувають вигляду, відповідно,

$$\psi''_1 + k_1^2 \psi = 0, \quad k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}, \quad (2)$$

$$\psi''_2 + k_2^2 \psi = 0, \quad k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U_0)}, \quad (3)$$

де k_1 і k_2 – хвильові числа.

Розглянемо два випадки, коли енергія частинки більше або менше висоти потенціального бар'єра.

1. $E = E' > U_0$

Загальне рішення рівнянь (1) має вигляд

$$\text{для } x \leq 0 \quad \psi_1 = a_1 \exp(ik_1 x) + b_1 \exp(-ik_1 x), \quad \text{де } k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}, \quad (4)$$

$$\text{для } x \geq 0 \quad \psi_2 = a_2 \exp(ik_2 x) + b_2 \exp(-ik_2 x), \quad \text{де } k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U_0)}. \quad (5)$$

де a і b – амплітуди хвиль.

Ці функції описують сукупність двох хвиль, які поширюються в протилежних напрямках осі x . У формулі (4) в області 1 ($x \leq 0$) є хвиля, що падає, амплітуду якої будемо вважати $a_1 = 1$, і відбита – з амплітудою b_1 . У формулі (5) в області 2 ($x \geq 0$) є тільки хвиля, що пройшла, амплітуда якої a_2 , а зворотної немає, тому $b_2 = 0$, і рівняння (4) і (5) набувають вигляду

$$\psi_1 = \exp(ik_1 x) + b_1 \exp(-ik_1 x), \quad (6)$$

$$\psi_2 = a_2 \exp(ik_2 x). \quad (7)$$

«Зшивання» функцій впливає з умови безперервності ψ та ψ'_x в точці $x = 0$, тому

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0), \\ \psi'_1(0) = \psi'_2(0), \end{cases} \quad (8)$$

або для відносних амплітуд (вважаючи, що $a_1 = 1$)

$$\begin{cases} 1 + b_1 = a_2, \\ k_1 - b_1 k_1 = a_2 k_2. \end{cases} \quad (9)$$

Звідси, співвідношення амплітуд відбитої та падаючої хвиль до амплітуди a_1 падаючої хвилі дорівнюють

$$a_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}, \quad (10)$$

$$b_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}. \quad (11)$$

Коефіцієнт відбиття дорівнює відношенню квадратів амплітуд відбитої b_1 та той, що падає, з $a_1 = 1$,

$$R = (b_1)^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - U_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - U_0}} \right)^2. \quad (12)$$

Коефіцієнт пропускання пропорційний відношенню квадратів амплітуд хвиль, що пройшла, a_2 і той, що падає.

$$D = \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{4\sqrt{E(E - U_0)}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E - U_0})^2}. \quad (13)$$

Зрозуміло, що сума $R + D = 1$. Крім того, ці коефіцієнти не залежать від напрямку руху частинки.

2. $E = E'' < U_0$.

Формули (10) і (11) залишаються справедливими, але число k_2 буде уявним, тому його доцільно записати як

$$k_2 = ik, \quad (14)$$

де $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U_0)}$, $i = \sqrt{-1}$.

Тоді амплітуда відбитої хвилі буде

$$b_1 = \frac{k_1 - ik}{k_1 + ik}. \quad (15)$$

а ймовірність відбиття (коефіцієнт відбиття) становить

$$\begin{aligned} R &= |b_1 \exp(-ik_1x)|^2 = b_1 \exp(-ik_1x) \cdot (b_1 \exp(-ik_1x))^* = \\ &= b_1 b_1^* = \frac{k_1 - ik}{k_1 + ik} \cdot \frac{k_1 + ik}{k_1 - ik} = 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Результат (16) означає, що усі частинки, що налітають на бар'єр, повинні відбиватися від нього, що є достатньо очікуваним для випадку $E < U_0$. Але формула (7) з врахуванням (14) набуває вигляду

$$\psi_2 = a_2 \exp(ik_2x) = a_2 \exp(-kx), \quad (17)$$

де k – дійсне число.

Тому існує ймовірність проникнення частинки в заборонену в класичній фізиці область. Густина ймовірність, що визначається квадратом амплітуди ψ -функції, дорівнює

$$|\psi_2|^2 = |a|^2 \cdot \exp(-2kx) \neq 0. \quad (18)$$

З (18) видно, що зі збільшенням глибини проникнення x густина ймовірності зменшується експоненційно. Це зменшення відбувається тим швидше, чим більше різниця $U_0 - E$. Зазвичай глибину проникнення визначають як відстань l , на якій ймовірність зменшується в e разів. При цьому в (18) $2kl = 1$ та

$$l = \frac{1}{2k} = \frac{\hbar}{\sqrt{8m(U_0 - E)}}. \quad (19)$$

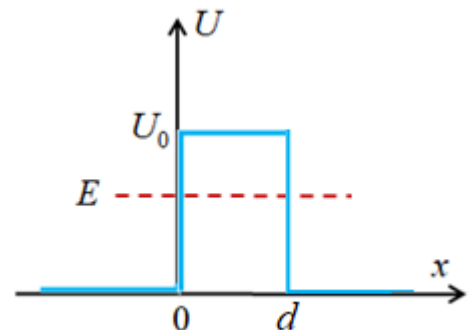
З формули (19) видно, що ψ -функція проникає в область $x > 0$, попри те, що хвиля, що падає, відбивається повністю.

У класичній фізиці така ситуація неможлива, тобто частинка не може проникнути під потенціальний бар'єр, оскільки в цій області її кінетична енергія має набувати негативних значень. Але ми вже згадували про те, що поділ повної енергії на кінетичну та потенціальну не має сенсу у зв'язку зі співвідношенням невизначеностей.

Здатність квантових частинок через хвильові властивості заходити за бар'єр називається тунельним ефектом. Він полягає в тому, що коли частинка з енергією E налітає на потенціальний бар'єр висотою $U_0 > E$, то вона з певною ймовірністю може пройти крізь бар'єр і зможе рухатися далі.

Якщо бар'єр має скінченну ширину d , то ймовірність тунельного проходження характеризується коефіцієнтом прозорості, який для прямокутного бар'єра наближено виражається формулою

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} \cdot d\right).$$



Відповідь: $a_1=1$, $b_1=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}$, $a_2=\frac{2k_1}{k_1+k_2}$, $R=\left(\frac{\sqrt{E}-\sqrt{E-U_0}}{\sqrt{E}+\sqrt{E-U_0}}\right)^2$,

$$D=\frac{4\sqrt{E(E-U_0)}}{\left(\sqrt{E}+\sqrt{E-U_0}\right)^2}.$$

Задача 18.2.14

Моноенергетичний потік електронів $E=40$ eV падає на низький прямокутний потенціальний бар'єр нескінченної ширини. Визначити висоту потенціального бар'єру, якщо відомо, що 9% електронів, що падають на бар'єр, відбивається.

Дано:

$$E=40 \text{ eV}$$

$$R=0,09$$

$$U_0=?$$

Розв'язання

В задачі маємо справу з випадком 1 із попередньої задачі, коли енергія частинки більше за висоту потенціального бар'єра $E > U_0$, тобто це так званий

низький потенціальний бар'єр.

Коефіцієнт відбиття від такого бар'єра визначається згідно з формулою

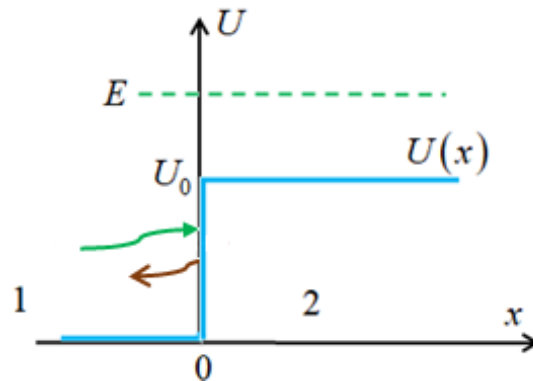
$$R=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2, \quad (1)$$

де k_1 і k_2 – хвильові числа, що відповідають руху електронів в 1 і 2 областях.

В першій області кінетична енергія електрона дорівнює E , а хвильове число

$$k_1=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}. \quad (2)$$

Оскільки координата електрона не визначена, то імпульс електрона визначається точно. Отже, і кінетична енергія в такому випадку визначається точно.



У другій області кінетична енергія електрона дорівнює $E - U_0$, а хвильове число

$$k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U_0)}. \quad (3)$$

Тоді, коефіцієнт відбиття з формули (1) з урахуванням (2) і (3) дорівнює

$$R = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - U_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - U_0}} \right)^2. \quad (4)$$

Перетворимо формулу (4), поділивши чисельник і знаменник дробу на $\sqrt{E}$

$$R = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}} \right)^2 \quad (5)$$

і виразимо з нього висоту потенціального бар'єра

$$U_0 = E \left[1 - \left(\frac{1 - \sqrt{R}}{1 + \sqrt{R}} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

Підставлення даних задачі $E = 40 \text{ eV} = 40 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 6,4 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$, $R = 0,09$ дає висоту потенціального бар'єра

$$U_0 = 6,4 \cdot 10^{-18} \left[1 - \left(\frac{1 - \sqrt{0,09}}{1 + \sqrt{0,09}} \right)^2 \right] = 4,54 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 28,4 \text{ еВ}.$$

Відповідь: $U_0 = 4,54 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 28,4 \text{ еВ}.$

Задача 18.2.15

Електрон має енергію $E = 10 \text{ еВ}$. Визначити, у скільки разів змінюється його швидкість та довжина хвилі де Бройля при проходженні через потенціальний бар'єр заввишки $U_0 = 6 \text{ еВ}$

Дано:	Розв'язання
$E = 10 \text{ еВ}$	Якщо розглядається потік мікрочастинок, то коефіцієнт відбиття показує відносну кількість частинок, що відбиваються від бар'єра. У випадку однієї мікрочастинки R показує ймовірність відбиття
$U_0 = 6 \text{ еВ}$	
$v_2/v_1 = ?$	
$\lambda_2/\lambda_1 = ?$	

її від низького потенціального бар'єра.

В першій області (до бар'єра) потенціальна енергія частинки дорівнює нулю, тоді повна енергія дорівнює кінетичній. Оскільки частка не релятивістська, для неї можна записати:

$$KE_1 = E = \frac{mv_1^2}{2},$$

звідки швидкість становить

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E}{m}}. \quad (1)$$

В другій області (після проходження бар'єра), потенціальна енергія дорівнює U_0 , а кінетична енергія дорівнює

$$KE_2 = \frac{mv_2^2}{2} = E - U_0,$$

звідки швидкість

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(E - U_0)}{m}}. \quad (2)$$

Шукане відношення швидкостей

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{E - U_0}{E}} = \sqrt{\frac{10 - 6}{10}} = \sqrt{0,4} = 0,632.$$

Внаслідок проходження через низький потенціальний бар'єр швидкість електрона зменшиться.

В оптиці величина, що дорівнює відношенню швидкостей світла в різних середовищах (а отже, й відношенню довжин хвиль) називається показником заломлення світла. За аналогією з оптикою відношення довжин хвиль де Бройля у різних областях простору (для однієї й тієї ж частинки) має назву показник заломлення хвиль де Бройля. Тоді, низький потенціальний бар'єр можна характеризувати показником заломлення хвиль де Бройля.

Довжина хвилі де Бройля до бар'єра,

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2mE}}, \quad (3)$$

а після проходження крізь бар'єр

$$\lambda_2 = \frac{h}{\sqrt{2m(E - U_0)}}. \quad (4)$$

Шукане відношення – показник заломлення хвиль де Бройля становить

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{E}{E - U_0}} = \sqrt{\frac{10}{10 - 6}} = \sqrt{2,5} = 1,58.$$

Таким чином, довжина хвилі де Бройля зросла в 1,58 раз при проходженні бар'єру.

Відповідь: $\frac{v_2}{v_1} = 0,632$; $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1,58$.

18.3. Задачі для самостійної роботи

18.3.1. Знайти довжину хвилі де Бройля електрона, прискореного електричним полем з різницею потенціалів 50 кВ.

Відповідь: $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-12}$ м.

18.3.2. Знайти довжину хвилі де Бройля електрона, рухається третьою орбітою в атомі водню.

Відповідь: $\lambda = 9,45 \cdot 10^{-10}$ м.

18.3.3. Знайти довжину хвилі де Бройля електрона, якщо кінетична енергія його руху становить 2 кеВ.

Відповідь: $\lambda = 2,75 \cdot 10^{-12}$ м.

18.3.4. Електрон рухається зі швидкістю $v = 2 \cdot 10^8$ м/с. Знайти довжину його хвилі де Бройля.

Відповідь: $\lambda = 2,7 \cdot 10^{-12}$ м.

18.3.5. Яку енергію треба додатково надати електрону, щоб його дебройлівська довжина хвилі зменшилася від 100 до 50 пм?

Відповідь: $\Delta E = 7,3 \cdot 10^{-14}$ Дж = 0,45 кеВ.

18.3.6. Яку різницю потенціалів повинен пройти електрон, щоб його дебройлівська і комптонівська довжина хвилі біли рівними.

Відповідь: $\Delta \varphi = 0,21$ МВ.

18.3.7. Оцінити невизначеність швидкості частинки, невизначеність координати якої $\Delta x = \lambda/2\pi$, де λ - її дебройлівська довжина хвилі.

Відповідь: $\Delta v_x \sim v_x$.

18.3.8. Електрон з кінетичною енергією $KE = 4$ еВ локалізований в області розміром $l = 1$ мкм. Оцінити з допомогою співвідношення невизначеностей відносну невизначеність його швидкості.

Відповідь: $\Delta v_x / v_x \sim 1 \cdot 10^{-4}$.

18.3.9. Вважаючи, що невизначеність координати частинки, що рухається, дорівнює дебройлівській довжині хвилі, визначити відносну невизначеність $\Delta p/p$ імпульсу цієї частинки.

Відповідь: $\Delta p/p = 0,153$.

18.3.10. Приймаючи, що мінімальна енергія нуклона в ядрі $E_{\min} = 10 \text{ MeV}$, оцінити, виходячи зі співвідношення невизначеностей, лінійні розміри ядра.

Відповідь: $d = 3 \text{ фм}$.

18.3.11. Вважаючи, що невизначеність координати електрона дорівнює розміру області його локалізації, знайти мінімальну відносну невизначеність швидкості електрона, який знаходиться на першій і другій борівських орбітах в атомі водню.

Відповідь: $\Delta v_1/v_1 = 0,25$; $\Delta v_2/v_2 = 0,125$.

18.3.12. Частинка знаходиться в основному стані в одновимірній прямокутній потенціальній ямі шириною l з абсолютно непроникними стінками ($0 < x < l$). Знайти ймовірність перебування частинки в області $0 < x < l/3$; $l/3 < x < 2l/3$; $2l/3 < x < l$.

Відповідь: $P(0 < x < l/3) \approx 19,5\%$; $P(l/3 < x < 2l/3) \approx 61\%$;

$P(2l/3 < x < l) \approx 19,5\%$.

18.3.13. Електрон в одновимірній прямокутній потенціальній ямі завширшки $l = 200 \text{ пм}$ з нескінченно високими стінками знаходиться у збудженому стані ($n = 4$). Знайти мінімальну енергію електрона і ймовірність знаходження електрона в першій чверті ями.

Відповідь: $E_{\min} = 1,5 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 9,37 \text{ eV}$; $P = 0,25$.

18.3.14. Дві частинки, електрон і протон, кожна з енергією $E = 5 \text{ eV}$, рухаючись в позитивному напрямку осі x , зустрічають на своєму шляху прямокутний потенціальний бар'єр заввишки $U_0 = 10 \text{ eV}$ і завширшки $l = 1 \text{ пм}$. Знайти співвідношення ймовірностей проходження частинками цього бар'єру.

Відповідь: $P_{\text{ел}}/P_{\text{пр}} = 2,6$.

18.3.15. Електрон з енергією $E = 4,9$ еВ рухається у позитивному напрямку осі x і падає на потенційний бар'єр заввишки $U_0 = 5$ еВ і шириною d . При якій ширині бар'єра ймовірність P проходження електрона через бар'єр дорівнюватиме 0,2?

Відповідь: $d = 4,95 \cdot 10^{-10}$ м.

19. БУДОВА АТОМІВ І МОЛЕКУЛ

19.1. Теоретичні відомості

19.1. Атом водню у квантовій механіці. Квантові числа. Спін

В атомі водню і в воднеподібних іонах один електрон знаходиться у сферично симетричному полі кулонівських сил, що створюються ядром з зарядом $+Ze$, де Z – порядковий номер елемента в таблиці Менделєєва, m – маса електрона, e – елементарний заряд. Стан електрона описується хвильовою функцією, що визначається з **рівняння Шредінгера** для стаціонарних станів

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E + U)\psi = 0, \quad (19.1)$$

де $U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r}$ – потенціальна енергія електрона, що знаходиться на відстані r від ядра, $\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка.

Кожному стаціонарному стану відповідає хвильова функція ψ_{nlm} , що залежить від трьох квантових чисел n , l і m , які називаються головним, орбітальним (азимутальним) і магнітним квантовими числами.

Квадрат модуля хвильової функції визначає густину ймовірності знаходження електрона (ймовірність знаходження електрона в одиниці об'єму).

$$|\psi_{nlm}|^2 = \frac{dP}{dV}. \quad (19.2)$$

Кожне квантове число визначає динамічну характеристику електрона у стаціонарному стані.

Головне квантове число n збігається з номером дозволеного енергетичного рівня та визначає **власні значення енергії** в атомі водню

$$E_n = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{me^4 Z^2}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{13,6 \cdot Z^2}{n^2} \text{ eB}, \quad (19.3)$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$

Отже, значення енергії електрона в атомі квантовані та збігаються з дозволеними значеннями енергії електрона, отриманими в теорії Бора. Стан електрона з $n = 1$ називають *основним* станом, стани з $n = 2, 3, 4$ – *збудженими*.

Орбітальне (азимутальне) квантове число l визначає величину моменту імпульсу електрона (орбітальний механічний момент) в атомі. **Величина орбітального (механічного) моменту імпульсу** L_l може набувати дискретні значення

$$L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \quad (19.4)$$

де $l = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$, тобто при заданому n азимутальне число l набуває n значень.

Орбітальний момент імпульсу частинки є вектор $\vec{L}_l$. Однак, три складових цього вектора по координатних осях не мають одночасно точних значень (подібно тому, як через співвідношення невизначеностей не мають одночасно точних значень x і p_x). У квантовій механіці показується, що в даному стаціонарному стані, окрім величини вектора L_l , має визначене значення лише його проєкція на один будь-який напрямок в просторі, наприклад, напрямок z .

Отже, вектор моменту імпульсу $\vec{L}_l$ електрона може мати лише такі орієнтації в просторі, при яких його **проєкція орбітального моменту імпульсу електрона** на будь-який напрямок в просторі z є кратною сталій Планка $\hbar$ і задається **магнітним квантовим числом** m .

$$L_{lz} = m\hbar, \quad (19.5)$$

де $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$.

При заданому l магнітне квантове число набуває $(2l+1)$ значень, а стала Планка є природною одиницею вимірювання моменту імпульсу. Фізичний смисл обмеження m за величиною в тому, що проєкція вектора моменту не може перевищувати довжини самого вектора.

Співвідношення (19.4) і (19.5) показують, що момент імпульсу електрона в атомі та проєкція цього моменту, як і енергія, є квантованими величинами, тобто такими, що мають дискретні значення.

Стан електрона в атомі водню і в воднеподібних іонах визначається усіма трьома квантовими числами n , l , m , проте, енергія електрона залежить тільки від головного квантового числа n . Отже, кожному власному значенню енергії E_n відповідає кілька функцій ψ_{nlm} . Це означає, що атом водню може мати те ж саме значення енергії, перебуваючи у кількох різних станах.

Стани з однаковими значеннями енергії називаються **виродженими**, а число різних станів з однаковим значенням енергії – **кратністю виродження**. Кратність виродження енергетичних рівнів водневого атома дорівнює n^2 , якщо не враховувати спіна електрона, про що буде сказано далі.

Стани з різними значеннями орбітального квантового числа відрізняються величиною моменту імпульсу. На рис. 19.1 наведено схему енергетичних рівнів в атомі водню. Рівні, що відповідають станам з різними значеннями квантового числа l , розміщені в різних стовпчиках і відрізняються значеннями орбітального механічного моменту. В атомній фізиці застосовуються запозичені із спектроскопії умовні позначення станів з різними l .

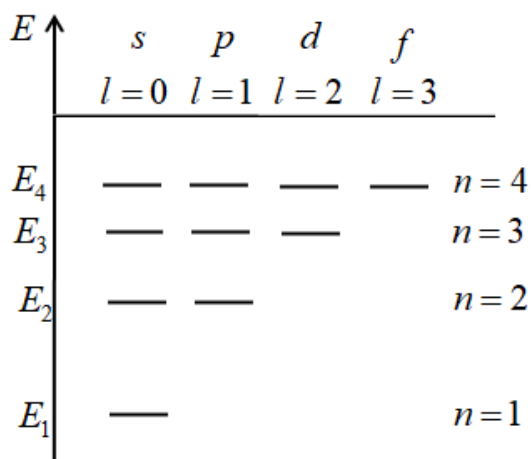


Рисунок 19.1

Стани з $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ позначаються, відповідно, як **s-, p-, d-, f-, g-, h-стани**, а електрони в цих станах називають **s-, p-, d-, f-, g-, h-електронами**.

Значення головного квантового числа вказується перед умовною позначкою квантового числа l . Тому, наприклад, електрон в стані з $n = 3$ і $l = 1$ позначається як $3p$.

Як видно з рис. 19.1, можливі такі стани електронів: $1s$; $2s, 2p$; $3s, 3p, 3d$; $4s, 4p, 4d, 4f$ тощо.

Електрон, що рухається навколо ядра, можна вважати елементарним круговим електричним струмом. Згідно з класичною теорією електромагнітних явищ, замкнутий струм є джерелом магнітного поля. Як було показано раніше, магнітна дія замкнутого струму характеризується магнітним моментом p_m , який є добутком сили струму I і площі контуру S . Знайдемо зв'язок орбітального магнітного моменту p_m з моментом імпульсу $L = mvr$. Якщо частинка з масою m та зарядом e рухається вздовж кола радіуса r з лінійною швидкістю $v = 2\pi r/T$, де T – період обертання, то його магнітний момент становить

$$p_m = IS = \frac{e}{T} S = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2}. \quad (19.6)$$

Тоді магнітний момент і орбітальний механічний момент співвідносяться як

$$\frac{p_m}{L} = \frac{evr}{2mvr} = \frac{e}{2m}. \quad (19.7)$$

Величина $\frac{p_m}{L}$ має назву **гіромагнітного відношення** або **магнітомеханічного** відношення.

У квантовій механіці величину орбітального магнітного моменту позначають μ_l (замість p_m). Величина **орбітального магнітного моменту** μ_l і **проекція орбітального магнітного моменту** μ_{lz} на довільну вісь z набувають дискретних значень згідно з

$$\mu_l = -\mu_B \sqrt{l(l+1)}, \quad (19.8)$$

$$\mu_{lz} = -m\mu_B. \quad (19.9)$$

де величина $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 0,927 \cdot 10^{-27} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$ – **магнетон Бора**, $l = 0, 1, 2, 3, \dots (n-1)$,
 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm l$.

Видно, що магнетон Бора μ_B є природною одиницею виміру магнітного моменту.

Відповідно до прийнятих у квантовій механіці позначень **гіромагнітне відношення** (19.7) для орбітальних магнітного і механічного моментів електрона з урахуванням (19.8) і (19.4) набуває вигляду

$$\frac{\mu_l}{L_l} = \frac{e}{2m}$$

або

(19.10)

$$\left| \frac{\mu_l}{L_l} \right| = \left| \frac{\mu_{lz}}{L_{lz}} \right| = \frac{m\mu_B}{m\hbar} = \frac{\mu_B}{\hbar}.$$

Слід зазначити, що електрон, як і будь-яка елементарна частинка, має власний момент імпульсу, не пов'язаний з рухом електрона в просторі як цілого, який називається **спіном** (від англ. *spin* – обертатися).

Спіновий орбітальний момент електрона (спін) дорівнює

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar, \quad (19.11)$$

де $s = 1/2$ – **спінове квантове число**.

Як видно з (19.11), спін вимірюється в одиницях сталої Планка $\hbar$.

Слід зазначити, що спін має переважна більшість мікрочастинок. Для кожного типу мікрочастинок спін може набувати або ціле (в тому числі нульове), або напівціле значення. Наприклад, спін протона і нейтрона дорівнює $s = \frac{1}{2}$, а у фотона $s = 1$.

Проекція спіна на будь-яку обрану вісь z має лише два значення і визначається **спіновим магнітним квантовим числом** $m_s = \pm 1/2$.

$$L_{sz} = m_s \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar. \quad (19.12)$$

Концепція спіна була введена в фізику Дж. Уленбеком і С. Гоудсмітом, які припустили, що власний магнітний момент електрона зв'язаний з тим, що електрон обертається навколо своєї осі як заряджена кулька. Згодом від такого уявлення відмовилися, оскільки величина спіну велика, а розмір електрона малий, і цій «кульці» довелося б обертатися з вельми великою швидкістю, близькою до швидкості світла. Тому слід вважати, що спін електрона та інших мікрочастинок – це квантова величина, яка не має класичного аналога, це внутрішня властивість електрона, така як маса або заряд, що має квантово-релятивістську природу і характеризує його поведінку при взаємодії з іншими квантовими об'єктами.

Як було зазначено вище, число станів з однаковою енергією називається кратністю виродження енергетичного рівня. **Кратність виродження** рівнів воднеподібних атомів з урахуванням спіна дорівнює $2n^2$.

Зі спіном пов'язаний **власний спіновий магнітний момент** μ_s . З дослідів відомо, що співвідношення власних спінового магнітного μ_s та спінового механічного L_s моментів (**гіромагнітне відношення**) вдвічі більше, ніж для орбітальних моментів (19.10)

$$\frac{\mu_s}{L_s} = -\frac{e}{m}. \quad (19.13)$$

З формули (19.13) **величина власного магнітного спінового моменту** електрона

$$\mu_s = -\frac{e}{m} L_s = -\frac{e\hbar}{m} \sqrt{s(s+1)} = -2\mu_B \sqrt{s(s+1)} = -\mu_B \sqrt{3}, \quad (19.14)$$

де $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 0,927 \cdot 10^{-27} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$ – магнетон Бора, e і m – заряд і маса електрона.

Проекція власного магнітного спінового моменту на довільну вісь z може мати наступні дискретні значення

$$\mu_{sz} = \mp \mu_B. \quad (19.15)$$

У формулі (19.15) знак «-» буде, якщо $m_s = +1/2$, а «+», коли $m_s = -1/2$.

Слід зазначити, що з урахуванням (19.15) і (19.12) гіромагнітне відношення (19.13) для спінових моментів (магнітного і механічного) можна записати в вигляді

$$\left| \frac{\mu_s}{L_s} \right| = \left| \frac{\mu_{sz}}{L_{sz}} \right| = \frac{2\mu_B}{\hbar}. \quad (19.16)$$

Випромінювання та поглинання квантів світла відбувається при переходах електрона з одного рівня на інший. У квантовій механіці доводиться, що можливі лише такі переходи, у яких квантове число l змінюється на одиницю:

$$\Delta l = \pm 1. \quad (19.17)$$

Умова, виражена цим правилом, називається **правилом відбору**. Існування цього правила обумовлено тим, що фотон має власний момент імпульсу (спін), що дорівнює $\hbar$. При випромінюванні фотон забирає з атома цей момент, а при поглинанні привносить, так що правило відбору є просто наслідком закону збереження моменту імпульсу.

19.1.2. Багатоелектронні атоми

Для атомів, що містять багато електронів, рівняння Шредінгера є складним диференціальним рівнянням, яке не може бути розв'язане в загальному вигляді. Тому для наближеного розв'язання цього рівняння приймають деяку спрощену модель атома. Для багатоелектронних атомів придатна модель, у якій зберігається уявлення про індивідуальний стан електрона в атомі. У межах цієї моделі рух усіх електронів відбувається незалежно друг від друга. Стан атома загалом визначається сукупністю станів всіх електронів. Такий підхід отримав назву **одночастинкового наближення**. Згідно з ним, кожен електрон рухається в деякому ефективному центрально-симетричному полі, що створюється ядром і всіма іншими електронами.

Стан окремого електрона в одночастинковому наближенні визначається завданням чотирьох квантових чисел:

- $n = 1, 2, 3, \dots$ головне квантове число;
- $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ (при даному n) – азимутальне квантове число;
- $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ (при даному l) – магнітне квантове число;
- $m_s = \pm 1/2$ – спінове квантове число.

Для кожного з електронів азимутальне l і магнітне m квантові числа визначають орбітальний момент імпульсу L_l і його проєкцію L_{lz} , а число m_s дає значення проєкції спіна на вісь z .

В одночастинковому наближенні значення енергії стаціонарних станів залежить від двох квантових чисел n та l і мають вигляд:

$$E_{nl} = -\frac{2\pi\hbar R c Z^2}{(n - \sigma_l)^2} = -13,6 \cdot \frac{Z^2}{(n - \sigma_l)^2} \text{ eB}, \quad (19.18)$$

де Z – номер елемента в таблиці Менделєєва; σ_l – стала екранування, яка збільшується зі зменшенням числа l .

Тому для електронів в станах з різними значеннями l спостерігається, що $\sigma_s > \sigma_p > \sigma_d > \sigma_f$.

В багатоелектронних атомах внаслідок взаємодії електронів між собою відбувається розщеплення енергетичного рівня із заданим значенням головного квантового числа і тим самим знімається виродження за квантовим числом l .

На рис. 19.2 наведено енергетичний спектр багатоелектронних атомів. Рівні з однаковим числом n з'єднані пунктирною лінією. Видно, що зі збільшенням числа n в атомі сильніше позначається екранування і збільшується розщеплення рівнів з різними l . Тому, зі збільшенням числа n рівні з великим значенням l розташовані вище s -рівнів з головним квантовим числом $(n+1)$. Можна сказати, що рівні з різним n «переплутуються».

Наприклад, починаючи з $n \geq 4$, енергія s -стану виявляється меншою за енергію d -стану для $(n-1)$ рівня.

Сукупність електронів, що мають однакове значення квантового числа n , утворюють *замкнуту оболонку*. Оболонка поділяється на *підоболонки*, що

відрізняються значеннями квантового числа l . Відповідно до значення n оболонкам дають позначення, запозичені зі спектроскопії рентгенівських променів (табл. 19.1).

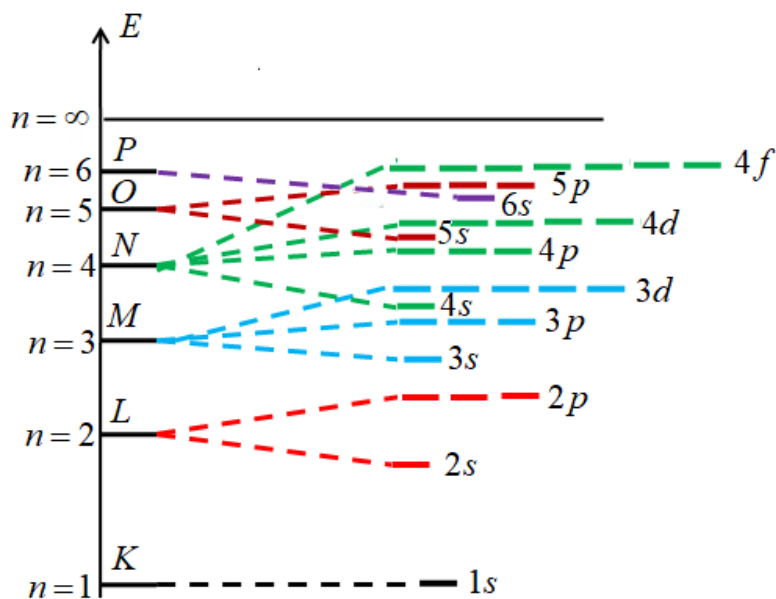


Рисунок 19.2

Таблиця 19.1 – Позначення оболонок

Значення n	1	2	3	4	5	6
Позначення оболонки	K	L	M	N	O	P

Електрони, що мають однакові числа n та l , які відрізняються числами m та m_s мають однакову енергію. Іншими словами, стани електронів у багатоелектронних атомах вироджені за квантовими числами m і m_s .

Розподіл електронів в атомі за одночастинковими станами з різними значеннями n та l називаються **електронною конфігурацією**. Число електронів з однаковими значеннями n та l вказують як показник ступеня при позначенні стану електрона (nl). Наприклад, якщо два електрони перебувають у стані з $n=1$, $l=0$, то електронна конфігурація записується як $1s^2$.

Розподіл електронів за станами в одночастинковому наближенні підпорядковується двом принципам:

1. Згідно із загальним принципом механіки, електрони в основному стані повинні перебувати у стані з мінімальною енергією;

2. Згідно з **принципом Паулі**, у кожному стані, що характеризується набором квантових чисел n , l , m і m_s може перебувати не більше одного електрона.

Ґрунтуючись на цих принципах, можна пояснити структуру атомів і побудову періодичної системи елементів Менделєєва.

Кожен електрон, що додається до атома з числом електронів Z , повинен зайняти найглибший із ще не заповнених рівнів. Послідовне заповнення електронних станів в атомах дозволяє розмістити всі хімічні елементи у періодичну таблицю. Порядковий номер хімічного елемента таблиці дорівнює загальному числу електронів в атомі даного елемента. Таблиця Менделєєва складається з 7 періодів, в межах якої властивості елементів змінюються від лужного металу до інертного газу. У перших трьох періодах йде послідовне заповнення K ($n=1$), L ($n=2$), M ($n=3$) оболонок. У кожній оболонці спочатку заповнюється s ($l=0$)-підоболонка, потім p ($l=1$)-підоболонка.

Послідовне заповнення оболонок порушується, починаючи з четвертого періоду таблиці. З рис. 19.2 видно, що енергія $4s$ -стану менша за енергію $3d$ -стану. Тому в IV періоді $4s$ -підоболонка заповнюється раніше, ніж $3d$ -підоболонка. Подібна ситуація повторюється й у V періоді. Елементи, в яких відбувається відступ у послідовності заповнення підоболонок, називаються **перехідними**.

У VI та VII періодах, після заповнення $6s$ - і $7s$ - підоболонок, заповнюються $4f$ - і $5f$ - підоболонки і тільки після їх заповнення, заповнюються $5d$ - і $6d$ - підоболонки попередніх оболонок. Елементи, у яких відбувається наповнення $4f$ - і $5f$ -підоболонок, називають **лантанойдами** ($4f > 6s$) і **актиноїдами** ($5f > 7s$), відповідно.

Атоми елементів з подібними властивостями розташовуються в групах. Характерною рисою основного стану атомів елементів, що належать до однієї

групи, є однакове число електронів у зовнішній оболонці та однакове квантове число l зовнішньої підоболонки. Цим пояснюється подібність хімічних та оптичних властивостей елементів у групах періодичної таблиці Менделєєва.

З принципу Паулі витікає такий наслідок: максимально можливе число електронів на кожному енергетичному рівні (в оболонці) з врахуванням спіну дорівнює подвоєному значенню квадрата головного квантового числа – $2n^2$, в підоболонці – $2(2l+1)$. Енергетичні оболонки та підоболонки (рівні та підрівні), які містять максимально допустиме число електронів, називають **замкнутими**. Розподіл можливих станів електрона в атомі на перших чотирьох оболонках показаний у таблиці 19.2. Для наочності замість позначень $s = \pm 1/2$ використовуються символи $\uparrow\downarrow$.

Слід пам'ятати, що при заповненні оболонок виконуються два **правила Клечковського**.

1. Енергія електрона значною мірою визначається величиною головного (n) квантового і меншою мірою орбітального (l) квантових чисел, тому спочатку заповнюються ті підоболонки, для яких сума $(n+l)$ буде меншою.

2. Якщо сума $(n+l)$ для двох електронів однакова, то спочатку електрони заповнюють атомну орбіталь, що відповідає меншому n .

Заповнення оболонок підпорядковується також двом **правилам Гунда**.

1. Всередині підрівня електрони заповнюють орбіталі таким чином, щоб їхній сумарний спін був максимальним.

2. Мінімальною енергією має стан з максимальною сумою магнітних квантових чисел.

Таблиця 19.2 – Розподіл станів електронів в атомі

Оболонка		n	l	m	s	Стан	Число електронів		
							в підоболонці	в оболонці	
K			0	0	$\uparrow\downarrow$	$1s^2$	2	2	
L		2	0	0	$\uparrow\downarrow$	$2s^2$	2	8	
			1	-1	$\uparrow\downarrow$	$2p^6$	6		
				0	$\uparrow\downarrow$				
M		3	1	+1	$\uparrow\downarrow$	$3p^6$	6	18	
				0	$\uparrow\downarrow$				
				-1	$\uparrow\downarrow$				
			2	-2	$\uparrow\downarrow$	$3d^{10}$	10		
				-1	$\uparrow\downarrow$				
				0	$\uparrow\downarrow$				
				+1	$\uparrow\downarrow$				
N		4	2	+2	$\uparrow\downarrow$	$4d^{10}$	10	32	
				0	$\uparrow\downarrow$				
				-1	$\uparrow\downarrow$				
			1	0	$\uparrow\downarrow$	$4p^6$	6		
				+1	$\uparrow\downarrow$				
			3	-3	$\uparrow\downarrow$	$4f^{14}$	14		
				-2	$\uparrow\downarrow$				
				-1	$\uparrow\downarrow$				
				0	$\uparrow\downarrow$				
				+1	$\uparrow\downarrow$				
				+2	$\uparrow\downarrow$				
				+3	$\uparrow\downarrow$				

19.1.3. Характеристичне рентгенівське випромінювання. Закон Мозлі

Коли прискорений сильним електричним полем пучок електронів бомбардує поверхню металу, спостерігається короткохвильове електромагнітне

випромінювання, довжина хвиль якого лежить у діапазоні $\lambda = 10^{-7} - 10^{-14}$ м, що називається *рентгенівським*.

Дослідження спектрального складу рентгенівського випромінювання дозволило виділити два різних механізмів випромінювання – гальмівне і характеристичне.

Гальмівне випромінювання було докладно розглянуте в розділі 16. Квантова оптика. Нагадаємо, що воно породжується в процесі різкого гальмування електронів на поверхні антикатада. Спектр цього випромінювання суцільний, він не залежить від властивостей металу мішені. Для пояснення існування його короткохвильової межі, яка залежить від прискорювальної напруги на рентгенівській трубці, потрібно застосування квантової теорії. Згідно з нею, межа спектра відповідає граничному випадку, коли вся кінетична енергія електрона, що гальмує, переходить в енергію фотона U разі підвищення напруги енергія випромінювання кожної довжини хвилі зростає. Одночасно змінюється спектральний склад випромінювання – спектр зміщується у бік коротких довжин хвиль, відбувається збільшення жорсткості випромінювання.

Характеристичне рентгенівське випромінювання. Якщо збільшити енергію електронів вище певної межі, індивідуальної для матеріалу мішені, то на суцільний спектр гальмівного випромінювання накладається лінійчатий спектр (рис. 19.3, а). *Лінійчатий* спектр визначається матеріалом мішені, тому називається характеристичним. Характеристичний рентгенівський спектр хімічних сполук становить собою суму спектрів хімічних елементів, що входять у сполуку, що є свідченням того, що зовнішні електронні оболонки у формуванні рентгенівського випромінювання участі не беруть.

Високоенергетичні електрони пучка при потраплянні на атоми мішені, збуджують їх, вибиваючи електрони із внутрішніх електронних оболонок. Вакансія, що утворилася в електронній оболонці, заповнюється електроном з оболонок з більшим значенням головного квантового числа. Фотон, що

випромінюється при такому переході, має значну енергію, отже, випромінювання лежить у короткохвильовій частині спектра.

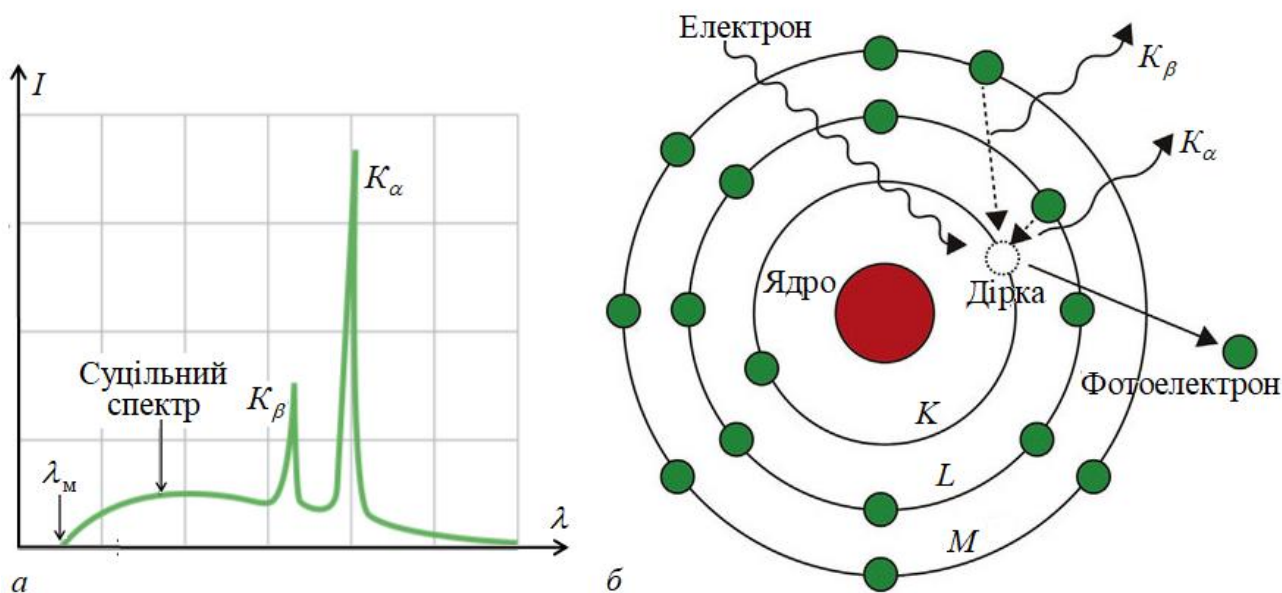


Рисунок 19.3

Перехід атома зі збудженого в незбуджений стан може здійснюватися шляхом низки послідовних переходів електронів з більш віддалених від ядра рівнів на менш віддалені. В результаті серії переходів виникає множинний спектр рентгенівського випромінювання. При цьому, поява лінії рентгенівське випромінювання супроводжується і всіма лініями з великими довжинами хвиль. При достатній енергії електрона, що падає, можуть бути вибиті електрони з будь-якої оболонки атома мішені. В результаті відбуватиметься цілий каскад переходів електронів між вище та нижче лежачими рівнями енергії. Вони супроводжуються утворенням фотонів. Наприклад, при заповненні вільних місць на рівні K виникає K -серія, на рівні L – L -серія тощо (рис. 19.4, б). Імовірність різних переходів різна: чим більша ймовірність переходу, тим вища яскравість відповідної лінії. Випромінювання кожної серії виникає тоді, коли прискорювальна напруга досягає певного значення, званого потенціалом збудження U_0 . На тлі суцільного спектра гальмівного випромінювання даного

анода лінії характеристичного спектра присутні при всіх напругах $U > U_0$. Підвищення напруги на трубці збільшує інтенсивність і суцільного, і характеристичного випромінювань, але довжини хвиль характеристичних максимумів і їх інтенсивності залишаються незмінними.

Властивості характеристичних рентгенівських спектрів:

1. Рентгенівські спектри відрізняються простотою та одноманітністю. Зі зростанням атомного номера Z елемента вони монотонно зміщуються в короткохвильову сторону.

2. Характеристичні спектри різних елементів однотипні та не змінюються, якщо елемент перебуває у поєднанні з іншими елементами. Спектри різних елементів є подібними, оскільки внутрішні електронні оболонки різних атомів мають однакову структуру, а переходи електронів здійснюються саме у внутрішніх частинах атомів, що мають подібну будову.

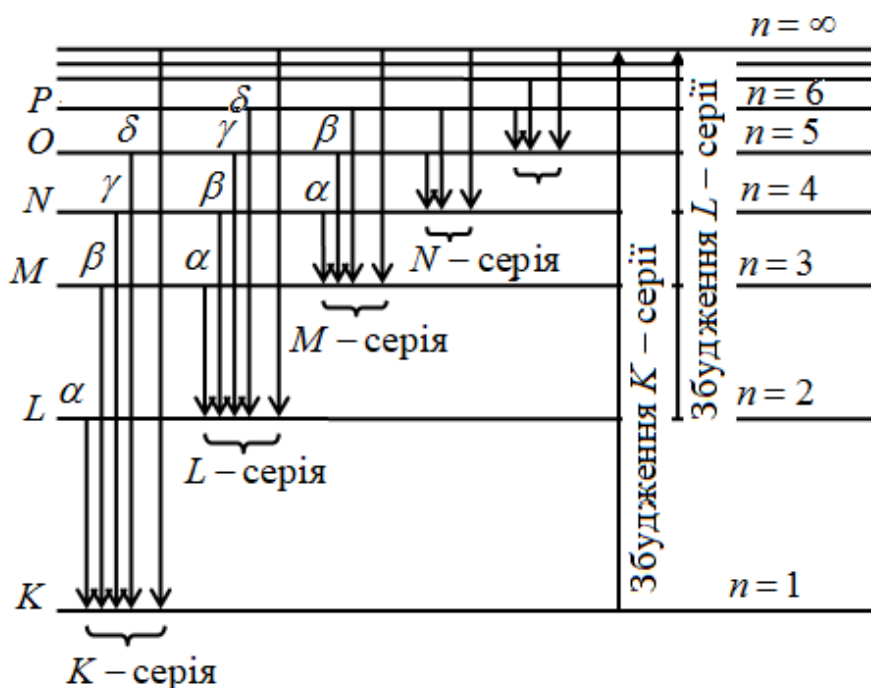


Рисунок 19.4

3. Характеристичні спектри складаються із кількох серій: $K, L, M, \dots$. Кожна серія – з небагатьох ліній: $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma, \dots, L_\alpha, L_\beta, L_\gamma, \dots$ тощо у порядку спадання довжини хвилі.

Збудження атома виникає при видаленні одного із внутрішніх електронів (під дією електронів або фотонів досить великої енергії. Якщо виривається один із двох електронів K -рівня ($n=1$), то місце, що звільнилося, може бути зайняте електроном будь-якого вищого рівня: L , M , N . В результаті виникає K -серія. Подібно виникають і інші серії.

K -серія обов'язково супроводжується появою інших серій, оскільки при її випромінюванні звільняються вільні позиції на L , M тощо, які заповнюватимуться електронами з вищих рівнів. Тому умова появи всіх ліній всіх спектральних серій збігається з умовою появи K -серії.

4. Найбільш інтенсивними лініями характеристичного спектра є лінії K -серії:

K_α , потім K_β , K_γ тощо. Відповідні їм довжини хвиль позначають λ_{K_α} , λ_{K_β} , λ_{K_γ} . Таку закономірність в інтенсивності послідовних ліній цієї серії можна пояснити тим, що можливість зайняти вакантне місце на певній оболонці є найбільшою для електрона, розташованого на сусідній (вищій) оболонці. Чим далі знаходиться електрон від оболонки з місцем, що звільнилося, тим менша відповідна ймовірність. Тому число фотонів, що утворюють K_α -лінію, є максимальним. За ним слідує число фотонів, відповідних за K_β -лінію і т. д.

5. При дослідженні рентгенівських спектрів англійський фізик Г. Мозлі встановив закон, який пов'язує частоту ν спектральних ліній з атомним номером Z елемента, що випромінює ці лінії. Було показано, що

$$\sqrt{\frac{\nu}{R}} = \frac{Z - \sigma}{n}, \quad (19.19)$$

де $R = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ – стала Рідберга, σ – стала екранування, n – головне квантове число оболонки.

Більш зручними є такі форми запису **закону Мозлі**:

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right), \quad (19.20)$$

$$\omega = R'(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right), \quad (19.21)$$

де $R = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ і $R' = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ – стали Рідберга для довжин хвиль і частот, відповідно, n_i, n_k – номери оболонок, між якими відбувається перехід електронів.

Стала екранування σ – безрозмірний коефіцієнт, який враховує вплив на окремий електрон решти електронів атома. Для K -серії $\sigma_K = 1$. Крім того, $\sigma = 1$ для легких елементів (тобто розташованих на початку таблиці Менделєєва).

Як впливає із закону Мозлі, довжини хвиль спектральних ліній залежать лише від атомного номера елемента, з якого виготовлений анод рентгенівської трубки, і є індивідуальною характеристикою цього елемента. Знаходження елемента у чистому вигляді або у вигляді хімічної сполуки не впливає на вигляд характеристичного спектра.

19.1.4. Молекули

Молекула – найменша частинка речовини, утворена з двох або більше атомів, з'єднаних хімічними зв'язками, яка є носієм її основних хімічних і фізичних властивостей. Хімічні зв'язки забезпечуються різними взаємодіями зовнішніх валентних електронів атомів. Найчастіше в молекулах зустрічаються два типи зв'язків: іонний (NaCl) і ковалентний (H_2). Електрони внутрішніх оболонок під час утворення молекули не змінюють своїх станів.

Молекула є квантовою системою, вона описується рівнянням Шредінгера, що враховує рух електронів і ядер в молекулі. Але таке рівняння і, відповідно, його розв'язок є дуже складними з математичної точки зору, тому від загального запису переходять до іншого, яке описує тільки рух електронів в молекулі, а рух ядер враховується не окремо, а разом з поступальним рухом усієї молекули.

Молекула, як і атом, змінюючи стан електронної оболонки, випромінює фотон. Однак енергія молекули не визначається лише електронною конфігурацією. Ядра молекули можуть коливатись відносно центру інерції, а

молекула може обертатися як ціле. Ці рухи роблять свій внесок у загальний баланс енергії. У першому наближенні *енергію ізольованої молекули* можна представити у вигляді

$$E = E_{\text{ел}} + E_{\text{кол}} + E_{\text{об}}, \quad (19.22)$$

де $E_{\text{ел}}$ – енергія електронної конфігурації, обумовлена рухом електронів відносно ядер; $E_{\text{кол}}$ – коливальна або вібраційна енергія, що відповідає коливанням молекули; $E_{\text{об}}$ – обертальна або ротаційна енергія, пов’язана з обертанням молекули. Кожна з цих енергій може приймати лише дискретний ряд значень, що визначаються квантовим числом.

Експериментальні дані свідчать, що

$$E_{\text{ел}} \gg E_{\text{кол}} \gg E_{\text{об}}, \quad (19.23)$$

що призводить до того, що коливальні рухи ядер розщеплюють електронні рівні, а обертальні рухи, своєю чергою, розщеплюють коливальні рівні.

Коливальна енергія може бути розрахована за формулою для квантового гармонійного осцилятора:

$$E_v = \hbar \omega_0 \left(V + \frac{1}{2} \right), \quad (19.24)$$

де $V = 0, 1, 2, \dots$ – коливальне квантове число, для якого є правило відбору $\Delta V = \pm 1$; ω_0 – частота власних коливань молекули.

Обертальна енергія молекули;

$$E_r = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2I}, \quad (19.25)$$

де $J = 0, 1, 2, \dots$ – обертальне квантове число, для якого діє правило відбору $\Delta J = \pm 1$; I – момент інерції молекули відносно осі, що проходить через центр мас.

Якщо ввести величину, яка називається обертальна стала $B = \frac{\hbar^2}{2I}$, то вираз для обертальної енергії набуде вигляду

$$E_r = BJ(J+1). \quad (19.26)$$

Для двоатомної молекули $I = md^2$, де $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – наведена маса двох

атомів з масами m_1 і m_2 ; d – між'ядерна відстань.

На рис. 19.5 наведена схема енергетичних рівнів двоатомної молекули.

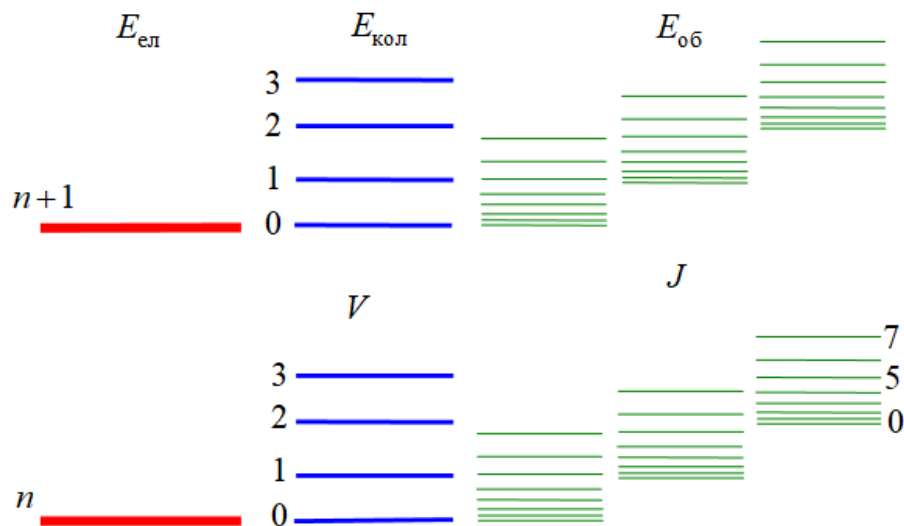


Рисунок 19.5

Кожен із наведених електронних рівнів, позначених n і $n+1$, розщеплюється на чотири коливальні рівні з квантовими числами $V = 0, 1, 2, 3$. Свою чергою, коливальні рівні розщеплюються на вісім обертальних рівнів з квантовими числами $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. На рис. 19.5 рівні різних видів енергії рознесені колонками для кращої деталізації схеми.

При переходах між рівнями поглинається чи випромінюється енергія. Тому енергія переходу

$$\Delta E = \Delta E_{\text{ел}} + \Delta E_{\text{кол}} + \Delta E_{\text{об}}, \quad (19.27)$$

причому

$$\Delta E_{\text{ел}} \gg \Delta E_{\text{кол}} \gg \Delta E_{\text{об}}. \quad (19.28)$$

Сpektри молекул складаються з набору смуг, утворених близько розташованими спектральними лініями. Типове розщеплення смуги спектра молекули азоту на спектральні лінії наведено на рис. 19.6. Тому молекулярні спектри називають **смугастими**.

Фотони, що мають невелику енергію, не змінюючи електронну конфігурацію і коливальну енергію, переводять молекулу з одного обертового стану в інший. Набір спектральних ліній, що відповідають таким переходам, утворює обертові смуги. Такі смуги лежать у далекій інфрачервоній області спектра. Переходи між коливальними рівнями, що вимагають більше енергії, можуть супроводжуватися зміною обертової енергії. Вони формують коливально-обертові смуги спектра, що лежать в інфрачервоній ділянці.



Рисунок 19.6

В області видимого та ультрафіолетового спектрів смуги формуються внаслідок переходів між електронними рівнями, а переходи зі зміною як електронного, так і коливального рівнів формують електронно-коливальні смуги.

Не всі переходи між рівнями допустимі, повинні виконуватись правила відбору. Нагадаємо, що зміни обертових і коливальних квантових чисел при переходах має дорівнювати ± 1 .

Спектри молекул досить складні, водночас вони містять всю повноту інформації про будову молекули.

Якщо на речовину падає монохроматичне випромінювання, то у спектрі розсіяного світла, крім основної незміщеної лінії, з'являються лінії зміщеної частоти, так звані супутники. Частоти супутників є комбінаціями частоти світла, що падає, та частот коливальних та обертових переходів розсіювальних молекул. Це явище, що називається **комбінаційним розсіюванням світла** або ефектом Рамана (за прізвищем індійського вченого, який вперше спостерігав і надав пояснення цьому явищу). Ефект Рамана супроводжується помітною зміною частоти світла, що розсіюється. Завдяки в Якщо джерело випромінює має

лінійний спектр, то при комбінаційному розсіянні у спектрі розсіяного світла виявляються додаткові лінії, число та розташування яких тісно пов'язані з молекулярною будовою речовини. Спектри комбінаційного розсіяння кожної хімічної сполуки настільки специфічні, що можуть застосовуватися для ідентифікації цієї сполуки та виявлення її в сумішах. Якісний та кількісний аналіз за комбінаційними спектрами (рамановську спектроскопію) широко застосовують у аналітичній практиці, особливо під час аналізу сумішей вуглеводнів. Вона є ефективним методом хімічного аналізу, вивчення складу та будови речовин.

19.1.5. Лазери

Лазер (оптичний квантовий генератор) – це пристрій, що генерує когерентні електромагнітні хвилі внаслідок вимушеного випромінювання або вимушеного розсіювання світла активним середовищем, що знаходиться в оптичному резонаторі. Слово лазер є аббревіатурою англійських слів «Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation» – посилення світла вимушеним випромінюванням. Теперішні лазери охоплюють широкий діапазон довжин хвиль від ультрафіолетового випромінювання до субміліметрового випромінювання.

Основними характеристиками випромінювання лазера є когерентність і спрямованість, а головні процеси, що призводять до генерації, – вимушене випромінювання та зворотний зв'язок.

Кожен лазер має три основні компоненти: активне середовище, систему накачування, з допомогою якої створюється активне середовище; оптичний резонатор.

Активне середовище – це середовище, в якому інтенсивність світла, що проходить, посилюється. У звичайному середовищі таке явище неможливе, оскільки кількість атомів, що знаходяться в основному стані, перевищує

кількість атомів у збудженому стані. Тому число фотонів, що поглинаються в поглинутих та випускаються внаслідок спонтанних (мимовільних) процесів, буде переважати число фотонів, випущених при вимушених переходах.

Ситуація змінюється у разі інверсного заселення рівнів енергії атомів. У цьому випадку кількість атомів на збудженому рівні буде більшою, ніж на нижньому рівні. Таке середовище і називається активним середовищем.

Система накачування. Створення активного середовища можливе за допомогою системи накачування. Вона може бути імпульсною або безперервною.

1) в лазері на рубіні (кристал корунду Al_2O_3 з домішкою атомів хрому Cr) накачування відбувається за рахунок потужної імпульсної лампи, яка випромінює в широкому діапазоні частот. Випромінювання переводить атоми хрому в збуджені стани 2, що формують широку смугу поглинання (рис. 19.7, а), з якої здійснюються переходи в основний стан 1 і переходи на метастабільний рівень 3. На цьому рівні час життя (перебування) електронів значно більший, ніж на збудженому, що призводить до накопичення атомів та створенню інверсної населеності на метастабільному і основному рівнях. Випромінювання лазера відповідає переходам з метастабільного на основний рівень.

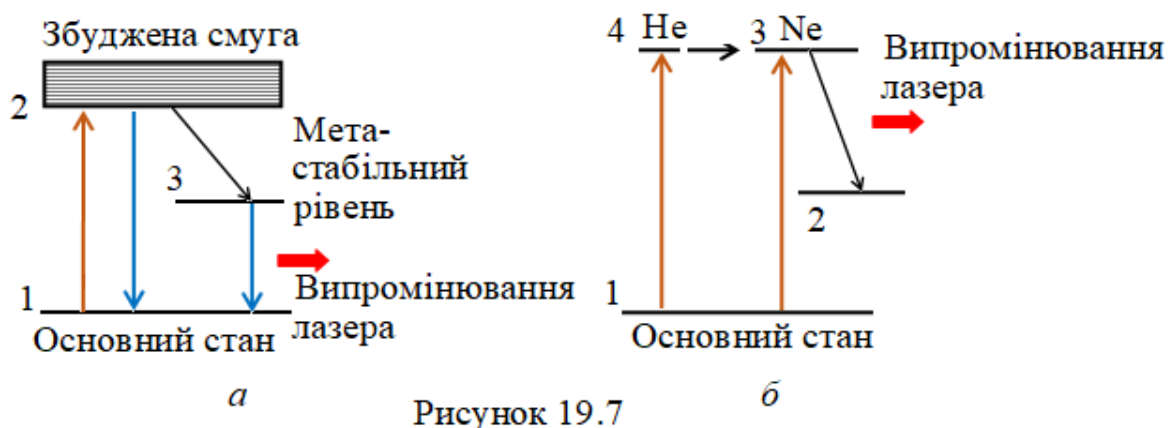


Рисунок 19.7

2) Безперервне накачування здійснюється в чотирирівневій системі гелій-неонового лазера внаслідок дії електричного розряду. Під електричним розрядом у газах розуміють протікання електричного струму в газах, що супроводжується

зміною стану газу – газ іонізується і стає здатним проводити електричний струм. Електрони, що прискорюються електричним полем, при зіткненнях передають енергію атомам і переводять їх у збуджений стан. В електричному розряді частина атомів неону (Ne) переходить на збуджені рівні енергії 3 та 2 атома неону (рис. 19.7, б). Потім вони переходять назад, не створюючи інверсного заселення верхніх рівнів енергії.

Наявність атомів гелію (He) кардинально змінює ситуацію. Це зв'язане з тим, що перший збуджений рівень атома He (рівень 4, рис. 19.8) збігається за енергією зі збудженим рівнем 3 атома неону. Тому внаслідок зіткнень зі збудженими атомами гелію кількість атомів неону на рівні 3 зростає. За таких зіткнень енергія атомів гелію передається атомам неону. При цьому досягається інверсна заселеність рівнів 2 та 3 (число атомів неону на рівні 3 перевищує число атомів неону на рівні 2). Саме перехід $2 \rightarrow 3$ й використовується для лазерного випромінювання.

Оптичний резонатор. Фотони, що були отримані внаслідок вимушених переходів, можуть мати різні напрямки руху, що перешкоджає отриманню певної спрямованості випромінювання в просторі. Для того, щоб створити умови для посилення світла, необхідно визначити напрямок поширення випромінювання та змусити випромінювання проходити активне середовище в цьому напрямку велику кількість разів. Саме для цього застосовується оптичний резонатор – пристрій, в якому збуджуються стоячі або біжучі електромагнітні хвилі оптичного діапазону. Оптичний резонатор, наприклад, може складатися з двох плоских паралельних дзеркал, одне з яких повністю відбиває випромінювання, що падає на нього, а інше є напівпрозорим (рис. 19.8).

Фотони, напрям руху яких не збігається з віссю резонатора (вона перпендикулярна площині дзеркал), виходять через бічну поверхню резонатора та вкладу у випромінювання лазера не дають. А ті фотони, напрямок поширення яких збігається з напрямком осі внаслідок багаторазового відбиття від дзеркал, проходять активне середовище багаторазово, збільшуючи інтенсивність

лазерного випромінювання. Випромінювання, досягаючи певного значення інтенсивності, виходить із резонатора.

Застосування лазерів. Застосування лазерів є різноманітним. З їх відкриттям у науці з'явилися нові розділи, наприклад, нелінійна оптика, голографія, лазерна хімія, лазерний розподіл ізотопів, лазерна спектроскопія, лазерний термоядерний синтез, лазерні технології тощо. Надстабільні лазери є основою оптичних стандартів частоти, лазерні

сейсмографи та інші точні фізичні прилади. Лазери з частотою, що перебудовується, істотно підвищили роздільну здатність і чутливість спектроскопічних методів аж до спостереження спектрів окремих атомів. Висока концентрація енергії дозволяє нагріти малі кількості речовини до високих температур та розв'язати проблему керованого термоядерного синтезу. Газові лазери використовуються для зварювання, різання та плавлення металів.

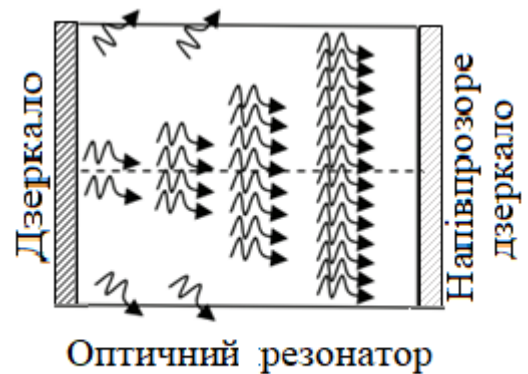


Рисунок 19.8

19.2. Приклади розв'язання задач

Задача 19.2.1

Атоми водню в основному стані в результаті зіткнення з електроном випромінює світло з довжиною хвилі $\lambda = 97,2$ нм. Знайти енергію електрона, що зіткнувся з атомом. Визначити, в який збуджений стан переходить атом водню під час удару електрона.

Дано:	Розв'язання
$\lambda = 97,2$ нм	Атом водню в основному стані може поглинути тільки ту енергію, що дорівнює різниці енергій двох стаціонарних станів. Якщо атом знаходився в основному стані, то отримавши енергію від електрона, він переходить в збуджений стан, тобто електрон атома переходить на більш високий енергетичний рівень. У збудженому стані атом не може перебувати протягом тривалого часу, тому він повертається в основний стан, випустивши надлишок енергії у вигляді кванта світла з енергією $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$.
$E = ? \quad n = ? \quad l = ?$	

Номер енергетичного рівня, на який переходить електрон атома під час збудження, знайдемо, скориставшись формулою Рідберга, вважаючи $n_i = 1$. Для більшої точності підрахунків візьмемо більш точне значення сталої Рідберга $R = 1,09737315 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$.

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right),$$

$$\frac{1}{n_k^2} = 1 - \frac{1}{\lambda R} = 1 - \frac{1}{97,2 \cdot 10^{-9} \cdot 1,09737315 \cdot 10^7} = 0,06248.$$

$$n_k = 4.$$

Отже, завдяки отриманій енергії електрон перейшов на 4 рівень. Це означає, що отримана ним енергія дорівнює енергії кванта, що був випущений атомом при переході в основний стан

$$E = \varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = hcR \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right).$$

Вважаючи на те, що доданок трьох сталих hcR дорівнює 13,6 еВ (енергії іонізації атома водню), то шукана енергія електрона, що зіткнувся з атомом водню, становить

$$E = hcR \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) = \frac{13,6 \cdot 15}{16} \text{ еВ} = 12,75 \text{ еВ} = 2,04 \text{ Дж}.$$

Для визначення збудженого стану електрона в атомі водню нагадаємо, що головному квантовому числу $n=4$ відповідає 4 значення орбітального квантового числа l , а саме, $l=0,1,2,3$ в, відповідно, чотири енергетичні стани $4s, 4p, 4d, 4f$. Але для числа l повинно виконуватись правило відбору $\Delta l = \pm 1$, згідно з яким можливі тільки такі переходи, в яких l змінюється на одиницю. В основному стані, при $n=1$, електрон може знаходитися лише в $1s$ -стані, тому що $l=0$. Тоді за правилом відбору при переході на четвертий рівень орбітальне квантове число $l=1$, що відповідає стану $4p$.

Відповідь: $E = 2,04 \text{ Дж}$; $n = 4$; $l = 1$; $4p$.

Задача 19.2.2

Електрон в атомі водню знаходиться в $4d$ -стані. Знайти його 1) енергію; 2) орбітальний момент імпульсу і можливі проєкції моменту імпульсу на вісь z ; 3) найменший кут, який може утворити вектор моменту імпульсу з напрямком магнітного поля; 4) орбітальний магнітний момент та його проєкції на напрямок магнітного поля.

Дано:	Розв'язання
$4p$	1) Енергія електрона на n -ому енергетичному рівні визначається по формулі
$E_n = ? \quad L_l = ?$	$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ еВ} = -\frac{13,6}{4^2} \text{ еВ} = -0,85 \text{ еВ} = -1,36 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.} \quad (1)$

2) Орбітальний момент імпульсу залежить від квантового числа l . При $n = 4$ число l може набувати наступні значення: $l = 0$ для s -стану, $l = 1$ для p -стану, $l = 2$ для d -стану. Тому для електрона в $4d$ -стані маємо

$$L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)} = \hbar \sqrt{2(2+1)} = \sqrt{6} \hbar = 2,57 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}. \quad (2)$$

У формулі (2) розмірність моменту імпульсу позначена як $\text{Дж} \cdot \text{с}$. Але її можна перетворити на розмірність механічного моменту імпульсу, яку ми використовували в механіці, а саме, $\text{Дж} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$.

Проекція моменту імпульсі електрону на довільну вісь z дорівнює

$$L_{lz} = m\hbar, \quad (3)$$

де m – магнітне квантове число для $l = 2$ набуває значень $m = 0, \pm 1, \pm 2$.

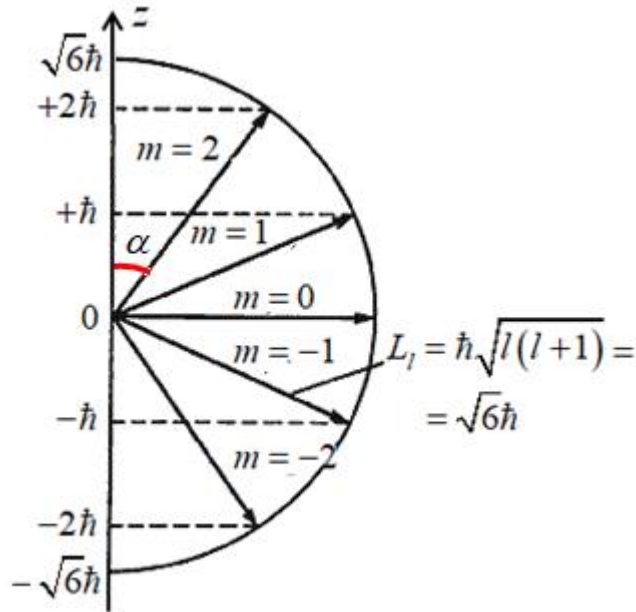
Тому можливі значення проекції орбітального моменту імпульсу електрону становлять

$$L_{lz} = 0; \quad L_{lz} = +\hbar; \quad L_{lz} = -\hbar; \quad L_{lz} = +2\hbar; \quad L_{lz} = -2\hbar. \quad (4)$$

3) Можливі орієнтації проекції вектора орбітального моменту електрона при квантовому орбітальному числі $l = 2$ показані на рисунку. Видно, що вектор моменту імпульсу завжди орієнтований під деяким кутом до магнітного поля, напрямком якого збігається з віссю z . Косинус цього кута можна визначити як

$$\cos \alpha = \frac{L_{lz}}{L_l} = \frac{m\hbar}{\hbar \sqrt{l(l+1)}} = \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}}. \quad (5)$$

Найменший кут $\alpha_{\min}$ утворює з напрямком магнітного поля вектор моменту імпульсу електрону в стані з $m = 2$. Отже,



$$\cos \alpha_{\min} = \frac{2}{\sqrt{2(2+1)}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2}{2,45} = 0,8165,$$

$$\alpha_{\min} = 35,264^\circ.$$

4) Величина орбітального магнітного моменту μ_l набувають дискретних значень згідно з

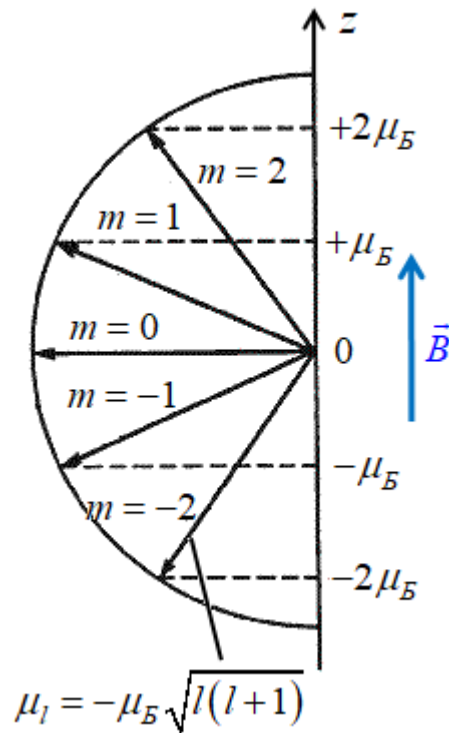
$$\mu_l = -\mu_B \sqrt{l(l+1)},$$

де величина $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 0,927 \cdot 10^{-27} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$ – магнетон Бора, e і m – заряд і маса електрона.

Для електрона в $4d$ -стані орбітальне квантове число $l = 2$, тому орбітальний магнітний момент електрона становить

$$\mu_l = -\mu_B \sqrt{l(l+1)} = -\mu_B \sqrt{2(2+1)} = -\mu_B \sqrt{6} = 0,927 \cdot 10^{-27} \cdot \sqrt{6} = -2,27 \cdot 10^{-27} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}.$$

У зовнішньому магнітному полі магнітний момент d -електрона може приймати тільки $(2l+1) = 5$ орієнтувань відносно осі z (магнітного поля) поля, що показані на рисунку.



Проекції на зовнішнє магнітне поле (довільну вісь z) згідно з формулою

$$\mu_{lz} = -m\mu_B,$$

де $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$.

Тоді,

$$\mu_{lz} = 2\mu_B \quad \text{при } m = -2,$$

$$\mu_{lz} = \mu_B \quad \text{при } m = -1,$$

$$\mu_{lz} = 0 \quad \text{при } m = 0,$$

$$\mu_{lz} = -\mu_B \quad \text{при } m = 1,$$

$$\mu_{lz} = -2\mu_B \quad \text{при } m = 2.$$

Відповідь: 1) $E_n = -1,36 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$; 2) $L_l = 2,57 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$; $L_{lz} = 0$; $L_{lz} = \pm \hbar$;

$L_{lz} = \pm 2\hbar$; 3) $\alpha_{\min} = 35,264^\circ$; 4) $\mu_l = -2,27 \cdot 10^{-27} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$; $\mu_{lz} = 0$; $\mu_{lz} = \pm \mu_B$;

$$\mu_{lz} = \pm 2\mu_B.$$

Задача 19.2.3

Атом водню, що був спочатку в основному стані, поглинув квант світла з енергією $\varepsilon = 10,2$ еВ. Визначити зміну моменту імпульсу орбітального руху електрона. У збудженому атомі електрон знаходиться у p -стані.

Дано:	Розв'язання
$\varepsilon = 10,2$ еВ	Орбітальний момент імпульсу залежить від квантового
$\Delta L_l = ?$	числа l згідно з

$$L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)}. \quad (1)$$

В основному стані $l = 0$, отже, $L_{l1} = 0$; у збудженому p -стані $l = 1$. Тоді,

$$L_{l2} = \hbar \sqrt{1(1+1)} = \hbar \sqrt{2}. \quad (2)$$

Зміна орбітального моменту імпульсу

$$\Delta L_l = L_{l2} - L_{l1} = \hbar \sqrt{2} - 0 = \hbar \sqrt{2}.$$

Підставляючи дані задачі, отримуємо величину зміни орбітального моменту імпульсу

$$\Delta L_l = \hbar \sqrt{2} = 1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 1,414 = 1,48 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

Відповідь: $\Delta L_l = 1,48 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$

Задача 19.2.4

Електрон у збудженому атомі водню знаходиться у $3p$ -стані. Визначити зміну магнітного моменту, зумовленого орбітальним рухом електрона, під час переходу атома в основний стан.

Дано:	Розв'язання
Зр-атом Н	Зміна магнітного моменту це різниця між магнітними
$\Delta\mu_l = ?$	моментами у кінцевому (основному) стані з $l=0$ і початковому (збудженому) р-стані з $l=1$:

$$\Delta\mu_l = \mu_{l2} - \mu_{l1}. \quad (1)$$

Величина магнітного моменту орбітального руху електрона залежить від орбітального квантового числа l згідно з

$$\mu_l = \mu_B \sqrt{l(l+1)}, \quad (2)$$

де $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 0,927 \cdot 10^{-27} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$ – магнетон Бора.

Відповідні значення магнітних моментів становлять для:

$$\begin{aligned} - \quad l=0 \quad \mu_{l2} &= \mu_B \sqrt{l(l+1)} = \mu_B \sqrt{0(0+1)} = 0; \\ - \quad l=0 \quad \mu_{l1} &= \mu_B \sqrt{l(l+1)} = \mu_B \sqrt{1(1+1)} = \mu_B \sqrt{2} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}. \end{aligned}$$

$$\Delta\mu_l = \mu_{l2} - \mu_{l1} = 0 - \mu_B \sqrt{2} = -\mu_B \sqrt{2}.$$

Знак «мінус» вказує на те, що в цьому випадку орбітальний момент зменшився.

Підставляючи числові дані, отримаємо

$$\Delta\mu_l = -\mu_B \sqrt{2} = -0,927 \cdot 10^{-27} \cdot 1,414 = -1,31 \cdot 10^{-27} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$$

Відповідь: $\Delta\mu_l = -1,31 \cdot 10^{-27} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}.$

Задача 19.2.5

Використовуючи принцип Паулі, вказати, яке число електронів в атомі можуть мати однакові квантові числа: 1) n, l, m, m_s ; 2) n, l, m ; 3) n, l ; 4) n .

Дано:	Розв'язання
n, l, m, m_s	Згідно з принципом Паулі в одній багатоелектронній системі не може бути двох і більше електронів, що мають однакову сукупність чотирьох квантових чисел n, l, m, m_s .
$N(n, l, m, m_s) = ?$	
$N(n, l, m) = ?$	Таким чином, у квантовому стані, що характеризується однаковими квантовими числами, може бути або один електрон, або жодного.
$N(n, l) = ?$	
$N(n) = ?$	

$$N(n, l, m, m_s) = 1.$$

Електрони, що знаходяться в станах, які описуються набором трьох квантових чисел n, l, m , відрізняються тільки орієнтацією спінів. Тому

$$N(n, l, m) = 2,$$

оскільки спінове квантове число може набувати лише два значення $m_s = \pm 1/2$.

Число електронів, що мають однакові числа n, l дорівнює числу квантових станів з різними значеннями m і m_s . При визначеному l магнітне квантове число $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ набуває $(2l + 1)$ значень. З урахуванням спіна

$$N(n, l) = 2(2l + 1).$$

Однакові квантові числа n в атомі може мати стільки електронів, скільки різних значень при даному n можуть приймати квантові числа l, m, m_s , тобто

$$N(n) = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l + 1) = 2n^2.$$

Отже, в атомі з однаковим значенням головного квантового числа n може бути $2n^2$ електронів.

Відповідь: $N(n, l, m, m_s) = 1$, $N(n, l, m) = 2$, $N(n, l) = 2(2l + 1)$, $N(n) = 2n^2$.

Задача 19.2.6

Визначити елемент таблиці Менделєєва, якщо у його атомів в основному стані заповнені K -, L -, M -оболонки та $4s$ -, $4p$ -підоболонки. Записати електронну конфігурацію цього елемента.

Дано:	Розв'язання
K -, L -, M -оболонки	За принципом Паулі в кожній оболонці може
$4s$ -, $4p$ -	бути електронів, у підоболонці – $2(2l + 1)$
підоболонки	електронів. У таблиці наведено максимальні числа
$Z = ?$ Електронна	електронів у станах з певними значеннями
конфігурація – ?	головного та азимутального квантових чисел.

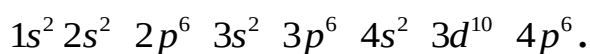
Таблиця 19.3 – Число електронів в підоболонках і оболонках

n	Оболонка	Число електронів в підоболонках					Максимальне число електронів
		s ($l=0$)	p ($l=1$)	d ($l=2$)	f ($l=3$)	g ($l=4$)	
1	K	2	-	-	-	-	2
2	L	2	6	-	-	-	8
3	M	2	6	10	-	-	18
4	N	2	6	10	14	-	32
5	O	2	6	10	14	18	50

У шуканому елементі заповнені K -, L -, M -оболонки, в яких міститься $2+8+18=28$ електронів. В $4s$ -, $4p$ -підоболонках знаходиться ще 8 електронів.

Число електронів в атомі становить $Z = 36$. Отже, це елемент – криптон.

Його електронна конфігурація криптона



Відповідь: криптон ($Z = 36$).

Задача 19.2.7

Заповнена електронна оболонка характеризується квантовим числом $n = 3$.

Вказати число електронів N в цій оболонці, які мають однакові квантові числа: $m_s = -1/2$, $m = 0$.

Дано:

$$m_s = -1/2, \quad m = 0$$

$$N = ?$$

Розв'язання

Для M – оболонки ($n = 3$) орбітальне квантове число

$l = 0, 1, 2$. При цьому квантовому числі магнітне квантове

число набуває $(2l + 1)$ значень. У таблиці наведені значення m і m_s для різних значень l і вказане число електронів у цих станах. Значення m_s позначені стрілками: стрілка ($\uparrow$), що спрямована вгору, відповідає $m_s = 1/2$; стрілка ($\downarrow$), що спрямована донизу – $m_s = -1/2$.

Таблиця 19.5 – Число електронів в різних станах

l		$p \ (l=1)$			$d \ (l=2)$				
m	0	-1	0	1	-	-	0	1	2
m_s	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$
Число електронів	2	6			10				

З таблиці видно, що для $n = 3$ і $l = 0, 1, 2$, магнітне квантове число $m = 0$ для 6 електронів. Половина з них має спин $m_s = +1/2$, а друга половина – $m_s = -1/2$.

Отже, однакові квантові числа $m_s = -1/2$, $m = 0$ мають 3 електрони.

Відповідь: $N = 3$.

Задача 19.2.8

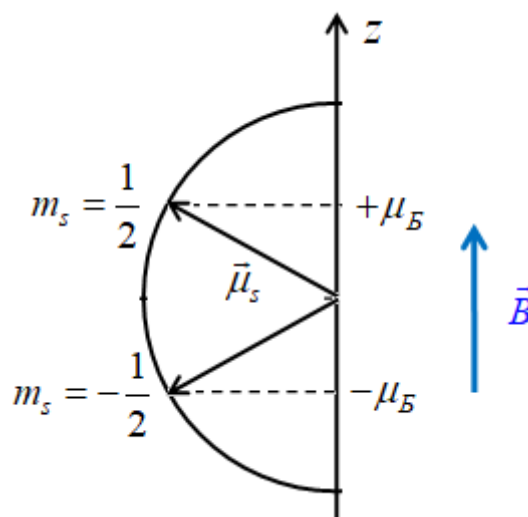
У експерименті Штерна і Герлаха вузький пучок атомів рубідію (1 група в таблиці Менделєєва) в основному стані проходить через неоднорідне магнітне поле і потрапляє на екран, що знаходиться на відстані $x_2 = 20$ см від поля. Визначити силу, що діє на атоми рубідії, якщо відстань між слідами пучків на екрані $b = 4$ см, довжина полюсних наконечників $x_1 = 10$ см і швидкість атомів рубідії $v_0 = 0,5$ км/с.

Дано:	Розв'язання
$x_1 = 10$ см	Кожен електрон багатоелектронного атома має орбітальний і власний механічний і магнітний моменти. Вислідний механічний та магнітний моменти атома складаються з орбітальних та спінових моментів окремих електронів, які підсумовуються за особливими квантовими законами.
$x_2 = 20$ см	
$b = 4$ см	
$v_0 = 0,5$ км/с	
$F = ?$	Сумарний момент повністю заповненої підоболонки дорівнює нулю. Рубідій Rb є лужним металом і належить до 1-ої групи таблиці Менделєєва. Його електронна конфігурація:

$$1s^1 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^1.$$

Очевидно, що оболонки K ($n=1$), L ($n=2$), m ($n=3$) повністю заповнені.

В оболонці N ($n=4$) заповнені підоболонки $4s$ та $4p$. Оскільки сумарний магнітний момент заповнених оболонок і підоболонок дорівнює нулю, магнітний момент атома рубідію визначається магнітним моментом останнього валентного s -електрона на п'ятій оболонці. Орбітальний магнітний момент s -електрона дорівнює нулю, оскільки $l = 0$, тому



магнітний момент усього атома рубідію дорівнює власному моменту μ_s зовнішнього валентного електрона

$$\mu_s = \mu_B \sqrt{3}.$$

У зовнішньому магнітному полі власний магнітний момент може мати лише дві орієнтації $\mu_{sz} = \mp \mu_B$, як показано на рисунку.

У неоднорідному магнітному полі на магнітний момент атома діятиме сила

$$F = \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \vec{\mu}_s \right) = -m_s \mu_B \frac{\partial B}{\partial z} = \pm \mu_B \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (1)$$

де $\frac{\partial B}{\partial z}$ – градієнт магнітної індукції.

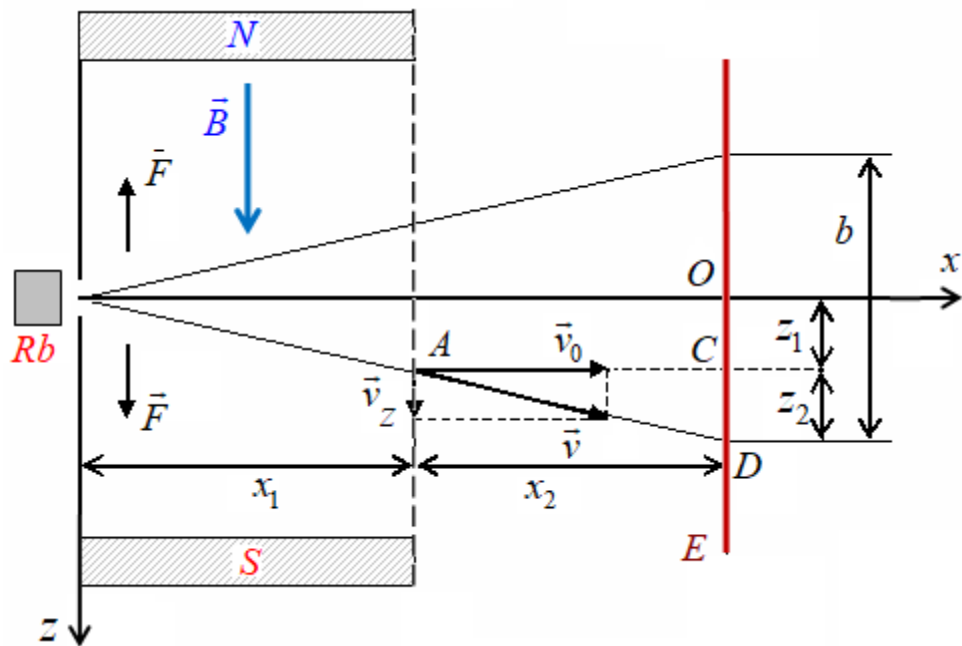
Напрямок сили, що діє на магнітний момент атома, залежить від орієнтації магнітного моменту відносно напрямку магнітного поля $\vec{B}$. З формули (1), якщо проекція магнітного моменту за знаком збігається з напрямком поля (для стану з $m_s = -1/2$), то сила, що діє на магнітний момент, спрямована вздовж осі z в бік зростання магнітного поля. Для магнітних моментів у стані $m_s = 1/2$ сила спрямована в протилежну сторону. Таким чином, пучок атомів рубідію в основному стані в неоднорідному магнітному полі поділяється на два пучки під дією сил, що діють на атоми з різним значенням магнітного спінового числа m_s . Ці сили однакові за величиною і спрямовані у різні сторони, тому відхилення цих пучків від початкового напрямку атомів буде однаковим. Отже, для розв'язання задачі достатньо розглянути рух одного з двох пучків.

Нижче на рисунку наведена схема експерименту Штерна і Герлаха. З нього видно, що відстань між слідами атомних пучків на екрані E становить

$$b = 2(z_1 + z_2), \quad (2)$$

де z_1 – відстань, на яку змістяться атоми під час руху в магнітному полі, а z_2 – відстань, яку проходять атоми вздовж осі, рухаючись від області магнітного поля до екрана.

На ділянці x_1 атоми рубідію рухаються в неоднорідному магнітному полі $\vec{B}$. В результаті їх рух складається з двох незалежних рухів: вздовж осі x атоми



рухаються рівномірно зі швидкістю $\vec{v}_0$, а вздовж осі z – з прискоренням $\vec{a}$ під дією постійної сили $\vec{F}$.

Рівняння руху на ділянці x_1 може бути описано кінематичними рівняннями

$$\begin{cases} x_1 = v_0 t_1, \\ z_1 = \frac{a t_1^2}{2}. \end{cases} \quad (3)$$

З першого рівняння системи (3) час руху дорівнює

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0}, \quad (4)$$

підставляючи який в друге рівняння системи (3), отримуємо

$$z_1 = \frac{a x_1^2}{2 v_0^2}. \quad (5)$$

В точці A z -складова швидкості з врахуванням (4) становить

$$v_z = a t_1 = a \frac{x_1}{v_0}. \quad (6)$$

На ділянці x_2 після виходу з області магнітного поля атоми рухаються рівномірно зі швидкістю $\vec{v}$, яку вони мали в точці A в момент вильоту з поля. Цей рух можна описати кінематичними рівняннями вздовж x - і z - напрямків

$$\begin{cases} x_2 = v_0 t_2, \\ z_2 = v_z t_2. \end{cases} \quad (7)$$

З першого рівняння системи (7) час руху дорівнює

$$t_2 = \frac{x_2}{v_0}. \quad (8)$$

Підставимо (6) і (8) і друге рівняння системи (7) і отримаємо

$$z_2 = v_z t_2 = a \cdot \frac{x_1}{v_0} \cdot \frac{x_2}{v_0} = \frac{ax_1 x_2}{v_0^2}. \quad (9)$$

З врахуванням (5) і (9) рівняння (2) набуває вигляду

$$b = 2(z_1 + z_2) = \frac{2a}{v_0^2} \left(\frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 \right), \quad (10)$$

звідки прискорення атомів становить

$$a = \frac{bv_0^2}{2 \left(\frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 \right)}. \quad (11)$$

Сила, що діє на атоми, за 2-м законом Ньютона

$$F = ma = m \frac{bv_0^2}{2 \left(\frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 \right)}. \quad (12)$$

Враховуючи те, що номер рубідію в таблиці Менделєєва $Z=37$, а атомна одиниця маси $1 \text{ а.о.м.} = 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$, маса атома рубідію становить

$$m = 37 \cdot 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 5,92 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

Тоді, підставляючи дані задачі в (12), отримаємо величину шуканої сили

$$F = \frac{mbv_0^2}{2 \left(\frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 \right)} = \frac{5,92 \cdot 10^{-26} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 500^2}{2 \left(\frac{0,1^2}{2} + 0,1 \cdot 0,2 \right)} = 1,18 \cdot 10^{-20} \text{ Н}.$$

Відповідь: $F = 1,18 \cdot 10^{-20} \text{ Н}$.

Задача 19.2.9

При спостереженні нормального ефекту Зеемана в магнітному полі з індукцією $B = 1 \text{ Тл}$ ширина інтервалу між компонентами спектральної лінії, що розщепилася, $\Delta\lambda = 4 \cdot 10^{-8} \text{ м}$. Обчислити довжину хвилі спектральної лінії.

Дано:	Розв'язання
$B = 1 \text{ Тл}$	Лінії в лінійчатих оптичних спектрах розщеплюються на компоненти, коли речовина знаходиться в магнітному полі. Чим більша напруженість магнітного поля, тим сильніше розщеплення. Це явище називається ефектом Зеемана.
$\Delta\lambda = 4 \cdot 10^{-8} \text{ м}$	
$\lambda = ?$	

Залежно від числа ліній у мультиплеті розрізняють простий (нормальний) та складний (аномальний) ефекти. Нормальним ефектом Зеемана називається розщеплення спектральних ліній на три компоненти. Слід зазначити, що при спостереженні в перпендикулярному до поля напрямку оптична лінія розщеплюється на 3 лінійно поляризовані лінії: крайні – перпендикулярно до магнітного поля, середня – паралельно до нього, а при спостереженні у напрямку магнітного поля середня лінія зникає, а дві крайні лінії поляризовані циркулярно: одна — за годинниковою стрілкою, інша — проти неї. У випадку аномального ефекту Зеемана лінії розщеплюються на більше ніж 3 компоненти.

Нормальний ефект Зеемана можна пояснити у межах так званого одночастинкового наближення (припущення, коли квантову систему можна описати, як систему окремих електронів, що рухаються в усередненому потенціальному полі).

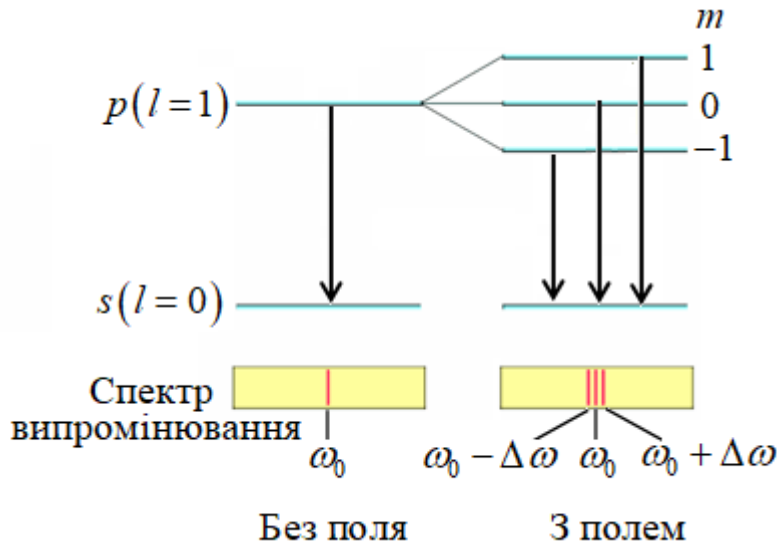
Зеемановське розщеплення пояснюється тим, що в магнітному полі проєкція магнітного моменту атома може мати тільки $(2l + 1)$ орієнтацій. Магнітний момент у зовнішньому магнітному полі має додаткову потенціальну енергію

$$\Delta E = -(\vec{\mu}, \vec{B}) = -\mu_z B = m\mu_B B, \quad (1) \text{де}$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – магнітне квантове число.

Отже, кожен енергетичний рівень, що відповідає орбітальному числу l , розщеплюється на $(2l+1)$ рівновіддалених підрівнів. Магнітне поле знімає виродження по магнітному квантовому числу m .

На рисунку показано розщеплення рівнів і спектральних ліній для переходу між станами $l=1$ і $l=0$ (для $p \rightarrow s$ переходу). У відсутності поля спостерігається одна спектральна лінія частоти ω_0 , а при включенні поля з'являються ще дві симетрично розташовані лінії з частотами $\omega_0 - \Delta\omega_0$ і $\omega_0 + \Delta\omega_0$.



Зміщення спектральної лінії:

$$\Delta\omega_0 = \frac{\mu_B B}{\hbar} = \frac{e\hbar}{2m_e} \cdot \frac{B}{\hbar} = \frac{e}{2m_e} \cdot B. \quad (2)$$

При нормальному ефекті Зеемана зміщення спектральної лінії залежить від квантових чисел l і m .

Врахуємо, що

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}, \quad (3)$$

тоді зміна довжини хвилі спектральної лінії

$$\Delta\lambda = -\frac{2\pi c}{\omega^2} \Delta\omega. \quad (4)$$

Знак «мінус» показує, що зі збільшенням частоти довжина хвилі зменшується і навпаки.

$$|\Delta\lambda| = -\frac{2\pi c}{\omega^2} \cdot \frac{e}{2m_e} \cdot B = \frac{2\pi c e B \lambda^2}{2 \cdot (2\pi c)^2 \cdot m_e} = \frac{e B \lambda^2}{4\pi c m_e}. \quad (5)$$

Отже, довжина хвилі спектральної лінії із (5) становить

$$\lambda = \sqrt{\frac{4\pi c m_e \Delta\lambda}{e B}}. \quad (6)$$

Підставивши числові значення, отримаємо

$$\lambda = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 4 \cdot 10^{-8}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1}} = 2,93 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Відповідь: $\lambda = 2,93 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$

Задача 19.2.10

Визначити напругу на рентгенівській трубці з нікелевим антикатодом, якщо різниця довжин хвиль між K_α -лінією та короткохвильовою межею суцільного рентгенівського спектра $\Delta\lambda = 8,4 \cdot 10^{-11} \text{ м.}$

Дано:	Розв'язання
$\Delta\lambda = 8,4 \cdot 10^{-11} \text{ м}$	При бомбардуванні антикатада прискореними електронами в рентгенівській трубці виникає поряд з характерним суцільний рентгенівський спектр.
$U = ?$	

Короткохвильова межа суцільного спектра визначається співвідношенням

$$eU = \frac{hc}{\lambda_m}, \quad (1)$$

де U – напруга на рентгенівській трубці.

Згідно з умовою задачі різниця між довжинами хвилі K_{α} -випромінювання і суцільного рентгенівського спектра λ_m становить

$$\Delta\lambda = \lambda_{K\alpha} - \lambda_m = 8,4 \cdot 10^{-11} \text{ м.} \quad (2)$$

Виразимо довжину хвилі K_{α} -лінії за допомогою закону Мозлі

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right), \quad (3)$$

враховуючи, що $R = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$, для Ni $Z = 28$, коефіцієнт екранування для K -серії $\sigma = 1$, для α -лінії $n_i = 1$, $n_k = 2$

$$\frac{1}{\lambda_{K\alpha}} = 1,1 \cdot 10^7 \cdot (28 - 1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{1,1 \cdot 10^7 \cdot 27^2 \cdot 3}{4} = 6,01 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1}.$$

$$\lambda_{K\alpha} = 1,66 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Тоді,

$$\lambda_m = \lambda_{K\alpha} - \Delta\lambda = 1,66 \cdot 10^{-10} - 8,4 \cdot 10^{-11} = 8,227 \cdot 10^{-11} \text{ м.} \quad (4)$$

З формули (1) з врахуванням (4) шукана напруга становить

$$U = \frac{hc}{e\lambda_m} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 8,227 \cdot 10^{-11}} = 1,51 \cdot 10^4 \text{ В.}$$

Відповідь: $U = 1,51 \cdot 10^4 \text{ В.}$

Задача 19.2.11

За якої найменшої напруги на рентгенівській трубці починають з'являтися лінії K -серії ванадію ($Z = 23$)?

Дано:	Розв'язання
$Z = 23$	Характеристичне рентгенівське випромінювання виникає
$U = ?$	при електронних переходах між внутрішніми оболонками багатоелектронних атомів.

Якщо під впливом зовнішнього електрона або високоенергетичного фотона з K -оболонки ($n=1$) видалити один із двох електронів, то на його місце може перейти електрон з більш віддалених від ядра L -, M -, N -оболонки. Ці переходи супроводжуватимуться випромінюванням рентгенівських квантів спектральних ліній K -серії: $K_\alpha (L \rightarrow K)$, $K_\beta (M \rightarrow K)$, $K_\gamma (N \rightarrow K)$ тощо. K -серія обов'язково супроводжується іншими серіями, тому що при її випусканні з'являються вакансії на оболонках L , M і інших, які заповнюватимуться електронами, що знаходяться на вищих рівнях. Енергія рентгенівських квантів дорівнює різниці енергій початкового та кінцевого стану атомів. Частоту (або довжину хвилі) рентгенівського випромінювання можна обчислити за формулою, яка називається законом Мозлі

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right), \quad (1)$$

де $R = 1,07 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ – стала Рідберга, Z – атомний номер елемента, n_i і n_k – головні квантові числа оболонок, між якими відбувається перехід, σ – стала екранування, фізичний сенс якої полягає в тому, що на електрон, який здійснює перехід, діє заряд ядра, ослаблений екранувальною дією інших електронів. Для K – серії $\sigma = 1$; для L -серії $\sigma \approx 7,5$.

Квант енергії характеристичного випромінювання K -серії

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = hcR(Z - 1)^2 \cdot \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) = 13,6 \cdot (Z - 1)^2 \cdot \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) \text{ еВ}. \quad (2)$$

Поклавши $n_i = 1$, $n_k = \infty$ в (2), знайдемо енергію випромінювання атома, що відповідає переходу зовнішнього електрона на K -оболонку

$$\varepsilon = hcR(Z - 1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty} \right) = hcR(Z - 1)^2 = 13,6(Z - 1)^2 \text{ еВ}. \quad (3)$$

Очевидно, що таку ж енергію повинен поглинути атом при зворотному процесі вибивання електронів з K -оболонки, що необхідно для появи ліній K -серії. Цю енергію атом отримує при ударі електрона з кінетичною енергією, яку він отримав внаслідок роботи eU електричного поля, де він рухався від катода

до антикатада рентгенівської трубки. Різниця потенціалів буде мінімальною, якщо вся енергія електрона поглинається атомом

$$eU_{\min} = \varepsilon. \quad (4)$$

Отже, якщо підставити (3) в (4), отримаємо

$$U_{\min} = \frac{hRc}{e}(Z-1)^2 = 13,6(Z-1)^2 \text{ В},$$

звідки

$$U_{\min} = 13,6 \cdot (23-1)^2 = 6,5 \cdot 10^3 \text{ В}.$$

Відповідь: $U_{\min} = 6,5 \cdot 10^3 \text{ В}$.

Задача 19.2.12

Знайти сталу екранування для L -серії рентгенівського випромінювання, якщо відомо, що при переході електрона в атомі вольфраму ($Z=74$) з M - на L -оболонку спостерігається рентгенівське випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 143 \text{ нм}$.

Дано:	Розв'язання
$\lambda = 143 \text{ нм}$	При переході з M -оболонки ($n_k = 3$) на L -оболонку ($n_i = 2$)
$M \rightarrow L$	випромінюється фотон рентгенівського випромінювання,
$\sigma = ?$	довжину хвилі якого зв'язана з параметрами переходу електрона між оболонками законом Мозлі
	$\frac{1}{\lambda} = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right). \quad (1)$

Якщо підставити $\lambda = \lambda_{M\alpha}$, $Z = 74$, сталу Рідберга $R = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ і номери оболонок $n_i = 2$ та $n_k = 3$, то формула (1) набуває вигляду

$$\frac{1}{\lambda_{M\alpha}} = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{5R \cdot (Z - \sigma)^2}{36},$$

$$(74 - \sigma)^2 = \frac{36}{5R\lambda_{M\alpha}},$$

звідки стала екранування становить

$$\sigma = 74 - \frac{6}{\sqrt{5R\lambda_{M\alpha}}} = 74 - \frac{6}{\sqrt{5 \cdot 1,1 \cdot 10^7 \cdot 143 \cdot 10^{-12}}} = 6,34.$$

Відповідь: $\sigma = 6,34$.

Задача 19.2.13

При переході електрона в атомі з L - на K -оболонку випромінюється рентгенівське випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 78,8$ нм. Який це атом?

Дано:	Розв'язання
$\lambda = 78,8$ нм	Довжина хвилі фотона, який випромінюється при переході на
$L \rightarrow K$	оболонку, що розташована ближче до ядра атома, описується
$Z = ?$	законом Мозлі

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right). \quad (1)$$

Якщо здійснюється перехід з L - на K -оболонку, то $n_i = 1$ і $n_k = 2$, а фотон належить до K_{α} -серії $\lambda = \lambda_{K\alpha}$, для якої стала екранування $\sigma = 1$. Тоді формула (1) має вигляд

$$\frac{1}{\lambda_{K\alpha}} = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3R(Z - \sigma)^2}{4}. \quad (2)$$

Шуканий номер елементу в таблиці Менделєєва з (2) дорівнює

$$Z = 1 + \sqrt{\frac{4}{3R\lambda_{K\alpha}}} = 1 + \sqrt{\frac{4}{3 \cdot 1,1 \cdot 10^7 \cdot 78,8 \cdot 10^{-12}}} = 1 + 39 = 40.$$

Отже, елемент антикатада цирконій Zr.

Відповідь: $Z = 40$, цирконій Zr.

Задача 19.2.14

Знайти порядковий номер легкого елемента, у якого в спектрі поглинання рентгенівського випромінювання різниця частот K - і L -країв поглинання $\Delta\omega = 3,26 \cdot 10^{19} \text{ c}^{-1}$.

Дано:	Розв'язання
$\Delta\omega = 3,26 \cdot 10^{19} \text{ c}^{-1}$	Застосуємо закон Мозлі для частот
$Z = ?$	$\omega = R'(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right), \quad (1)$

записавши його для країв поглинання K - і L -серій (граничних ліній спектральних серій) з урахуванням того, що для легких елементів стала екранування $\sigma = 1$, стала Рідберга $R' = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}$, а границям серій відповідають переходи з рівня $n_k = \infty$ на рівень $n_i = 1$ для K -серії та $n_i = 2$ для L -серій, відповідно

$$\omega_K = R'(Z - 1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty} \right) = R'(Z - 1)^2, \quad (2)$$

$$\omega_L = R'(Z - 1)^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{1}{4} R'(Z - 1)^2. \quad (3)$$

Запишемо різницю частот з рівнянь (2) і (3) і прирівняємо її різниці, що задана в задачі

$$\Delta\omega = \omega_K - \omega_L. \quad (4)$$

$$\Delta\omega = \omega_K - \omega_L = R'(Z - 1)^2 - \frac{1}{4} R'(Z - 1)^2 = \frac{3R'(Z - 1)^2}{4}. \quad (5)$$

З (5) номер елемента в таблиці Менделєєва становить

$$Z = \sqrt{\frac{4\Delta\omega}{3R'}} + 1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 6,85 \cdot 10^{18}}{3 \cdot 2,07 \cdot 10^{16}}} + 1 = 21 + 1 = 22.$$

Отже, шуканий елемент з $Z = 22$ – титан.

Відповідь: $Z = 22$, титан.

Задача 19.2.15

При напрузі на рентгенівській трубці $U = 30 \text{ кВ}$ різницю між частотою короткохвильової межі суцільного рентгенівського спектра і частотою дорівнює $\Delta\omega = 3,26 \cdot 10^{-19} \text{ с}^{-1}$. Визначити номер елемента з якого виготовлений антикатод.

Дано:	Розв'язання
$U = 30 \text{ кВ}$	Частота, що відповідає межі суцільного спектра гальмівного рентгенівського випромінювання
$\Delta\omega = 3,26 \cdot 10^{-19} \text{ с}^{-1}$	
$Z = ?$	$\omega_m = \frac{eU}{h} = \frac{2\pi eU}{h}. \quad (1)$

Частота фотона K_α -серії в характеристичному рентгенівському спектрі згідно із законом Мозлі дорівнює

$$\omega_{K\alpha} = R'(Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3R'(Z-1)^2}{4}. \quad (2)$$

Різниця відповідних частот з формул (1) і (2) становить

$$\Delta\omega = \omega_m - \omega_{K\alpha} = \frac{2\pi eU}{h} - \frac{3R'(Z-1)^2}{4}. \quad (3)$$

Номер елемента, з якого виготовлений антикатод, з формули (3)

$$Z = \sqrt{\frac{4}{3R'} \left(\frac{2\pi eU}{h} - \Delta\omega \right)} + 1. \quad (4)$$

Підставляння числових даних дає

$$Z = \sqrt{\frac{4}{3 \cdot 2,07 \cdot 10^{16}} \left(\frac{2\pi \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^4}{6,63 \cdot 10^{-34}} - 3,26 \cdot 10^{19} \right)} + 1 = 29 + 1 = 30 .$$

Отже, антикатод рентгенівської трубки виготовлений з цинку.

Відповідь: $Z = 30$, цинк.

19.3. Задачі для самостійної роботи

19.3.1. Визначте, у скільки разів орбітальний момент імпульсу L_l електрона, що знаходиться в h -стані, більше, ніж для електрона в p -стані.

Відповідь: $\frac{(L_l)_h}{(L_l)_p} = 3,87$.

19.3.2. Електрон в атомі водню знаходиться у p -стані. Знайти орбітальний момент імпульсу L_l електрона.

Відповідь: $L_l = 1,48 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$

19.3.3. Визначити можливі значення проекції моменту імпульсу орбітального руху електрона в атомі на напрямок зовнішнього магнітного поля, якщо електрон знаходиться в d -стані

Відповідь: $L_{lz} = 0; \pm 1,05 \cdot 10^{-34}; \pm 2,10 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$

19.3.4. $1s$ – електрон атому водню, поглинувши фотон з енергією 12,1 еВ, перейшов в збуджений стан з максимально можливим орбітальним квантовим числом. Визначити зміну моменту імпульсу орбітального руху електрона.

Відповідь: $L_l = 2,57 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$

19.3.5. Заповненій електронній оболонці відповідає число $n = 3$. Вказати число електронів в цій оболонці, які мають однакові квантові числа:

1) $m_s = \pm 1/2$; 2) $m = -2$; 3) $m_s = -1/2, m = 0$; 4) $m_s = +1/2, l = 2$.

Відповідь: 1) $N = 9$; 2) $N = 2$; 3) $N = 3$; 4) $N = 5$.

19.3.6. Знайти число електронів в атомі, у якого в основному стані заповнені: K - і L -оболонки, $3s$ -підоболонка і наполовину $3p$ -підоболонка. Що це за атом?

Відповідь: $Z = 15$; фосфор (P).

19.3.7. Визначити довжину хвилі і енергію фотона K_α – лінії рентгенівського спектру, що випромінює вольфрам при бомбардуванні його швидкими електронами.

Відповідь: $\lambda = 2,3 \cdot 10^{-11} \text{ м}; E_\phi = 54,1 \text{ кеВ}.$

19.3.8. Визначити напругу на рентгенівській трубці з нікелевим анодом, якщо різниця довжини хвилі між K_α -лінією і короткохвильовою межею суцільного спектру дорівнює 84 пм

Відповідь: $\underline{U} = 15,1$ кВ.

19.3.10. Визначити порядковий номер елемента в періодичній системі елементів Менделєєва, якщо довжина хвилі K_α характеристичного рентгенівського випромінювання становить $\lambda_{K\alpha} = 72$ пм.

Відповідь: $Z = 42$, молібден (Mo).

19.3.11. Визначити довжину хвилі самої довгохвильової лінії K -серії характеристичного рентгенівського спектру, якщо анод рентгенівської трубки виготовлений із платини ($Z = 78$). Сталу екранування прийняти рівну одиниці.

Відповідь: $\lambda_K = 20,4$ пм.

19.3.12. Визначити сталу екранування σ для L -серії рентгенівського випромінювання, якщо при переході електрона в атомі вольфраму с M -оболонки на L -оболонку довжина хвилі випущеного фотона складає $\lambda = 140$ пм.

Відповідь: $\sigma = 5,63$.

19.3.13. В атомі вольфраму електрон перейшов з M -оболонки на L -оболонку. Вважаючи сталу екранування $\sigma = 5,63$. Визначити енергію фотона, що випромінюється.

Відповідь: $\varepsilon = 8,88$ кеВ.

19.3.14. Вузький пучок атомів з масою m зі швидкістю v_0 та пропускається через неоднорідне магнітне поле, в якому на них діє сила F_z , що перпендикулярна напрямку їх руху. Протяжність області поля x_1 , відстань від магніту до екрана x_2 . Визначити кут відхилення сліду пучка атомів на екрані від положення при вимкненому магнітному полі.

Відповідь: $z = F_z \frac{x_1(x_1 + 2x_2)}{2mv_0^2}$.

19.3.15. Вузький пучок атомів срібла під час проходження магнітного поля з неоднорідністю $\frac{\partial B_z}{\partial z} = 1 \frac{\text{кТл}}{\text{м}}$ протяжністю $x_1 = 4$ см розщепився на два пучки. Екран для спостереження встановлено на відстані $x_2 = 10$ см, швидкість атомів $v_0 = 0,5 \text{ км/с}$. Визначити відстань b між компонентами розщепленого пучка на екрані.

Відповідь:
$$b = \mu_B \left| \frac{\partial B_z}{\partial z} \right| \cdot \frac{x_1 (x_1 + 2x_2)}{2mv_0^2}.$$

20. ЯДЕРНА ФІЗИКА. РАДІОАКТИВНІСТЬ

20.1. Теоретичні відомості

20.1.1. Склад і характеристики атомного ядра

Ядром називається центральна частина атома, в якій переважно зосереджена його маса. Дослідами Резерфорда з проходження α -частинок через металеву фольгу було виявлено, що атомні ядра мають розміри $\sim 10^{-14} - 10^{-15}$ м, в той час, як лінійні розміри атомів $\sim 10^{-10}$ м.

Ядро має позитивний електричний заряд і воно складається з елементарних частинок – протонів та нейтронів, які називають **нуклонами**.

Протон має позитивний електричний заряд, що дорівнює за абсолютною величиною заряду електрона або так званому елементарному заряду e ,

$$q_p = e = 1,6021766 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

і масу

$$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ кг},$$

яка перевищує масу електрона $m_p \approx 1836 m_e$.

В атомній фізиці застосовують дві позасистемні одиниці маси:

1) **атомну одиницю маси**, що позначається 1 а.о.м. (або 1 u – універсальна атомна одиниця), яка дорівнює 1/12 маси ізотопу вуглецю ^{12}C

$$1 \text{ а.о.м.} = 1 u = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

2) **енергетичний еквівалент маси** – кожному значенню маси за формулою Ейнштейна $E = mc^2$ відповідає повна енергія. Співвідношення між атомною одиницею маси та її енергетичним еквівалентом

$$1 \text{ а.о.м.} = 1 u = 931,494 \text{ Мев}.$$

Використовуючи ці одиниці, **масу протона** можна записати як

$$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1,007276 \text{ а.о.м.} = 938,272 \text{ Мев}.$$

Нейтрон не має електричного заряду $Z=0$, а його маса близька до маси протона:

$$m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

і становить $m_n \approx 1838,7 m_e$.

$$m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1,008665 \text{ а.о.м.} = 939,57 \text{ MeV}.$$

У вільному стані нейтрон нестабільний і мимовільно (спонтанно) розпадається, перетворюючись на протон й випромінюючи електрон і нейтрино (нейтрино – фундаментальні частинки, що не мають заряду і мають вкрай малу масу):

$$n \rightarrow p + e + \nu.$$

Зарядове число Z дорівнює кількості протонів в ядрі та визначає його заряд Ze . Оскільки атом є нейтральним, то число Z визначає і число електронів в атомі. Від числа ж електронів залежить їх розподіл по станах в атомі, від якого, своєю чергою, залежать хімічні властивості атома. Отже, заряд ядра визначає особливості даного хімічного елемента, тобто визначає число електронів в атомі, конфігурацію їх електронних оболонок, величину і характер електричного поля всередині атома.

Масове число A визначає число нуклонів в ядрі. Число нейтронів в ядрі $N = A - Z$.

Символічно ці характеристики ядра позначають так: ${}_Z^A X$.

Наприклад, ${}_1^2\text{H}$, ${}_2^4\text{He}$, ${}_{92}^{238}\text{U}$.

Відповідно до загальноприйнятої термінології конкретні атоми із заданим числом протонів і нейтронів в ядрі називають **нуклідами**.

Ізотопи – ядра з однаковим зарядовим числом Z , але різним масовим числом A .

Наприклад, ізотопи урану: ${}_{92}^{235}\text{U}$ і ${}_{92}^{238}\text{U}$; ізотопи водню: ${}_1^1\text{H}$ – звичайний водень – протій, ${}_1^2\text{H}$ – важкий водень – дейтерій (D), ${}_1^3\text{H}$ – тритій (T).

Ізобари – ядра з однаковим масовим числом A .

Наприклад, ізотопи аргону і кальцію ${}^{40}_{18}\text{Ar}$ і ${}^{40}_{20}\text{Ca}$.

Ізотони – ядра з однаковою кількістю нейтронів $N = A - Z$.

Наприклад, ізотопи вуглецю та азоту ${}^{13}_6\text{C}$ і ${}^{14}_7\text{N}$.

Ізмери – ядра з однаковими Z і A , але різними періодами напіврозпаду.

Наприклад, у бромі ${}^{80}_{35}\text{Br}$ є два ізмери з періодами напіврозпаду 18 хв і 4,4 години.

Розміри атомного ядра залежать від його масового числа. Середня густина нуклонів для ядер з $A > 10$ є практично однаковою, об'єм є пропорційним масовому числу, а лінійний розмір

$$r \approx 1,3 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3} \text{ м} = 1,3 \cdot A^{1/3} \Phi,$$

де Φ – Фермі – позасистемна одиниця довжини, $1 \Phi = 1 \cdot 10^{-15} \text{ м}$.

Густина ядерної речовини надзвичайно велика порівняно з густиною звичайних речовин і становить $\sim 10^{17} \text{ кг/м}^3$.

20.1.2. Ядерні сили. Дефект маси та енергія зв'язку ядра

В атомних ядрах між нуклонами діють сильні зв'язки, які називають **ядерними силами**, яку, своєю чергою, мають наступні властивості.

1) Ядерні сили є **короткодійними**: при збільшенні відстані між нуклонами дія ядерних сил швидко зменшується і на відстані понад $2,2 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ стають практично рівними нулю. На відстані $1,5 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ тяжіння змінюється відштовхуванням. Довжина дії ядерних сил становить $(1,5 - 2) \cdot 10^{-15} \text{ м}$, завдяки чому ядра є досить стійкими утвореннями.

2) Ядерні сили характеризуються **зарядовою незалежністю**, вони однаково діють між частинками з позитивним, негативним зарядом і нейтральними частинками. Це означає, що вони мають неелектростатичну природу.

3) Ядерні сили залежать від взаємної орієнтації нуклонів, що взаємодіють, а саме, від орієнтації спінів. Наприклад, ядро важкого водню-дейтерію (дейтрон

${}^2\text{H}$) утворюється з нейтрона і протона тільки в тому випадку, якщо їх спіни є паралельними один одному.

4) Ядерні сили *не є центральними*; їх потенціал не має сферичної симетрії.

5) Ядерні сили мають властивість *насичення*. Ця властивість виявляється в тому, що нуклони в ядрі взаємодіють лише з обмеженим числом найближчих до них сусідніх нуклонів. Властивістю насичення пояснюється залежність енергії зв'язку ядра від масового числа.

Масу ядер можна з великою точністю визначити методами мас-спектрометричного аналізу, в яких за допомогою магнітних і електричних полів пучки заряджених частинок поділяються відповідно до своїх питомих зарядів q/m . Було встановлено, що маса ядра $m_{\text{я}}$ є меншою за суму мас частинок, які входять до нього. Оскільки кожній зміні маси відповідає зміна енергії за формулою $\Delta E = \Delta mc^2$, то це означає, що під час утворення і поділу ядра має виділятися або витрачатися деяка енергія.

Дефектом маси Δm ядра називають величину

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}} \cong [Zm_H + (A - Z)m_n] - m_a, \quad (20.1)$$

де m_p , m_n і $m_{\text{я}}$ – маси протона, нейтрона і ядра, відповідно.

Енергією зв'язку $E_{\text{зв}}$ ядра називають роботу, яку треба витратити для того, щоб розділити дане ядро на складові частини та віддалити їх одну від одної на таку відстань, на якій вони б практично не взаємодіяли.

$$E_{\text{зв}} = c^2 \{ [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}} \}. \quad (20.2)$$

Оскільки в довідковій літературі наведено не маси ядер, а маси нейтральних атомів, що виражені в атомних одиницях маси, то у формулі (20.2) можна замінити масу протона на масу нейтрального атома водню ${}^1_1\text{H}$ $m_p = m_H$, а масу ядра – на масу атома $m_{\text{я}} = m_a$. Тоді формула (20.2) набуває вигляду

$$E_{\text{зв}} = c^2 \{ [Zm_H + (A - Z)m_n] - m_a \}. \quad (20.3)$$

З огляду на те, що при дефекті маси $\Delta m = 1$ а.о.м енергія зв'язку дорівнює $\sim 931,5$ MeB/а.о.м., енергія зв'язку ядра в MeB становить

$$E_{\text{зв}} \approx \Delta m (\text{а.о.м.}) \cdot 931,5 \left(\frac{\text{MeB}}{\text{а.о.м.}} \right). \quad (20.4)$$

Енергію зв'язку, яка припадає на один нуклон, тобто $E_{\text{зв}}/A$, називають **питомою енергією** зв'язку нуклонів у ядрі.

Питома енергія залежить від масового числа (рис. 20.1). Найсильніше пов'язані нуклони в ядрах з $A = 50 - 60$ (тобто від *Cr* до *Ni*). Зі збільшенням A питома енергія зв'язку зменшується і для найважчого природного елементу – урану – складає 7,5 MeB/нуклон. Подібна залежність питомої енергії від масового числа робить енергетично можливими два процеси отримання ядерної енергії:

- 1) **злиття (синтез)** легких ядер в одне ядро;
- 2) **розщеплення (поділ)** важких ядер на декілька легших.

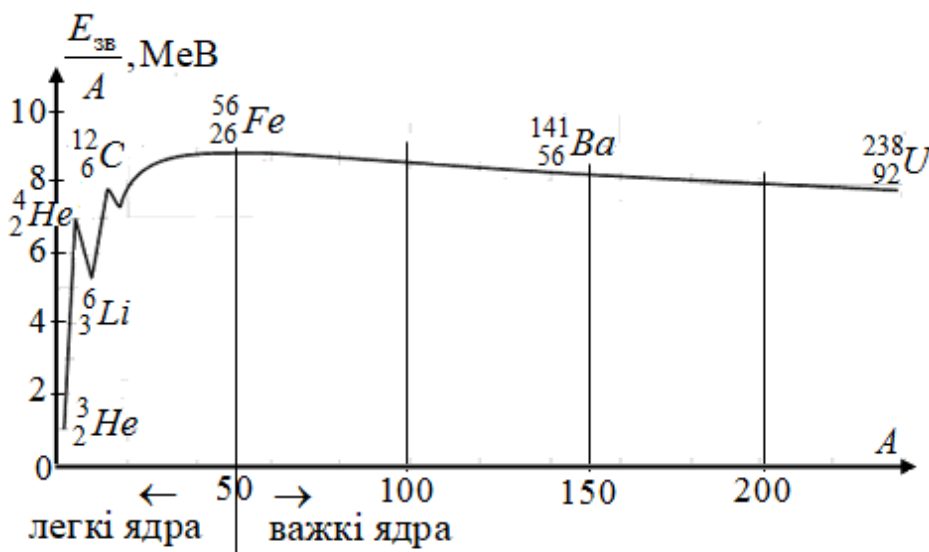


Рисунок 20.1

Обидва процеси супроводжуються виділенням великої кількості енергії (для першого $\sim$ сотень MeB, для другого $\sim$ десятків MeB). Наприклад, якщо з'єднати легкі ядра у більш важке, наприклад, ядро дейтерію ${}^2_1\text{H}$ і ядро тритію ${}^3_1\text{H}$ в ядро гелію ${}^4_2\text{He}$, то виділиться енергія, яка є рівною 17,6 MeB (на один нуклон

припадає енергія, яка є рівною 3,5 MeV). Якщо здійснити поділ ядра урану ${}_{92}^{235}\text{U}$ на два ядра, близьких по масовому числу до Fe , то при кожному такому поділі виділиться енергія, яка дорівнює 200 MeV, а на один нуклон припадає енергія, яка дорівнює 1,25 MeV.

20.1.3. Моделі атомного ядра

Ядерні моделі – спрощені теоретичні описи атомних ядер, засновані на поданні ядра у вигляді об'єкта із заздалегідь відомими характерними властивостями. У ядерній фізиці використовують кілька моделей, які пояснюють окремі особливості ядра. Така обставина спричинена серйозними труднощами побудови повної теорії ядра. Кожна модель описує свою сукупність властивостей ядра та своє коло явищ і містить довільні параметри, значення яких підбираються так, щоб отримати згоду з експериментом.

Однією з перших була запропонована **краплинна модель**, в якій атомне ядро розглядалося як сферична крапля ядерної рідини, що не стискається, і яка має радіус $R \sim 1,3 \cdot 10^{-15} \text{ м}$. Така модель є найбільш обґрунтованою для ядер з великими масовими числами A . За винятком легких ядер, концентрації нуклонів, густина речовини в ядрі та середня відстань між нуклонами практично однакові у всіх ядрах. Це дозволяє вважати ядра нестисливими. Нестисливість «ядерної рідини» відображає той факт, що між нуклонами існує дуже сильна взаємодія. Краплинна модель дозволила пояснити напівемпіричну формулу енергії зв'язку частинок в ядрі, а також механізми ядерних реакцій, особливо реакції поділу ядер.

Згідно з **оболонковою моделлю** в ядрах атомів є досить багато вільного місця. Тому нуклони в ядрах перебувають не в хаотичному русі, а рухаються на певних нуклонних оболонках, подібно до електронних енергетичних рівнів в атомах. Однак, на відміну від атома, в якому є виділений силовий центр – ядро і в якому діють електромагнітні сили з близьким радіусом дії, для нуклонів такого центра

в ядрі немає. Вважається, що нуклони на нуклонних оболонках рухаються в самоузгодженому полі інших нуклонів. В цій моделі ядра були пояснені спіни та парність основних і деяких збуджених станів атомних ядер.

Крапельна й оболонкова моделі не лише суперечать одна одній, а й доповнюють одна одну. Кожна із цих моделей описує властивості ядер, які зовсім не пояснюються іншою моделлю.

Всі переваги крапельної та оболонкової моделі будови атомних ядер були об'єднані у так звану *узагальнену* модель, в якій вважається, що в ядрі існує достатньо стійкий остов, який складається із замкнутих оболонок. Зовнішні нуклони розглядаються в цій моделі незалежними, і вони рухаються в полі остова. На відміну від оболонкової моделі тут допускається деформація остова під дією зовнішніх нуклонів. Узагальнена модель пояснила існування несферичних ядер, їх обертальні та коливальні значення енергій. Узагальнена модель будови ядра атома поділяє ядерні рівні на одночастинні та колективізовані, обумовлені рухом остова, а також дає можливість розрахувати спіни кожного такого рівня.

20.1.4. Радіоактивність. Типи радіоактивного випромінювання

Радіоактивністю називається спонтанне перетворення нестійких ізотопів одного хімічного елемента в ізотопи іншого елемента, що супроводжується випусканням елементарних частинок або ядер. Радіоактивність, що спостерігається у наявних природних умовах ядер, називають ***природною***, а радіоактивність ядер, що були отримані в результаті ядерних реакцій, – ***штучною радіоактивністю***. Принципової різниці між природною і штучною радіоактивностями не існує, тому що властивості того або іншого ізотопу не залежать від засобу його утворення, а тому не залежать від цього і закони його радіоактивного розпаду. Необхідною умовою можливості радіоактивного

розпаду є його енергетична вигідність – маса радіоактивного ядра повинна перевищувати суму мас кінцевого ядра і частинок, що вилітають при розпаді.

Існує три основних типи радіоактивного розпаду.

1. **Альфа-розпад** – нестабільне (материнське) ядро спонтанно (самовільно) розпадається на α -частинку (ядро нукліда ${}^4_2\text{He}$) і дочірнє ядро (рис. 20.2).



де X і Y – символи материнського й дочірнього ядер, відповідно.

α -розпад зазвичай супроводжується випромінюванням дочірнім ядром γ -променів. Кінетична енергія α -частинок, що вилітають, становить декілька МеВ. В повітрі при нормальному тиску пробіг α -частинок дорівнює кільком сантиметрам (їхня енергія витрачається на утворення іонів на своєму шляху). Це випромінювання відхиляється електричним і магнітним полем (оскільки α -частинки мають позитивний заряд) (рис. 20.3). Воно має високу іонізаційну і низьку проникаючу здатність (поглинається шаром алюмінію товщиною ~ 50 мкм) (рис. 20.4) α -розпад спостерігається переважно для важких ядер із $Z > 83$.

Приклад: ${}_{92}^{238}\text{U} \rightarrow {}_{90}^{234}\text{Th} + {}_2^4\text{He}$.

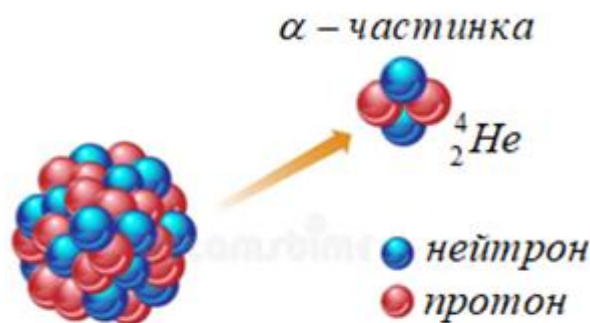
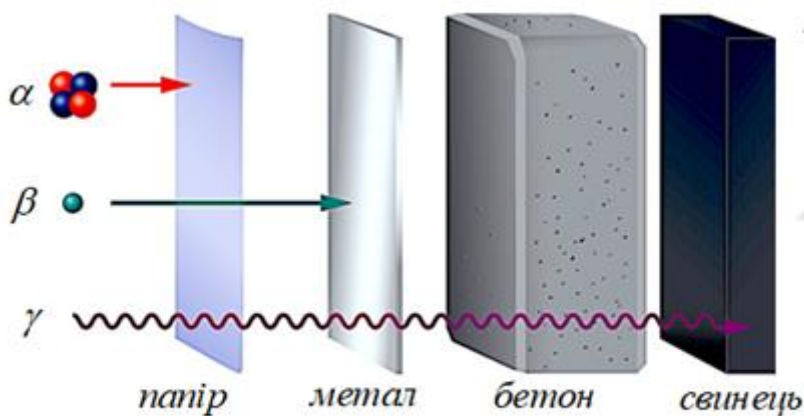
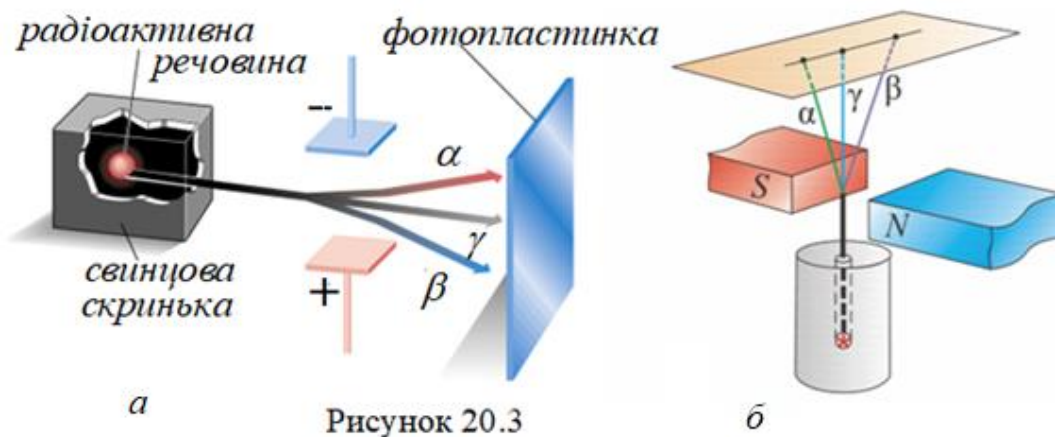


Рисунок 20.2

α -частинка утворюється лише в момент радіоактивного розпаду ядра. Залишаючи ядро, вона змушена долати потенціальний бар'єр, висота якого перевищує її енергію. Це відбувається завдяки тунельному ефекту, коли

частинка може подолати потенціальний бар'єр у разі, коли її повна енергія (що залишається при тунелюванні незмінною) менше висоти цього бар'єру.



2. Бета-розпад — спонтанний процес, під час якого ядро перетворюється в інше ядро з тим же самим масовим числом A , але з зарядовим числом Z , яке відрізняється від початкового на ± 1 . Цей розпад пов'язаний з тим, що відбувається випромінювання електрона (позитрона) або захоплення електрона з оболонки атома.

1) **електронний β^- -розпад**: ядро випромінює **електрон** і зарядове число ядра збільшується на одиницю (рис. 20.5).



Під час β^- -розпаду випромінюється маленька частинка, яку називають **антинейтрино** $\tilde{\nu}$, також можуть випромінюватися γ -промені.

Приклад: ${}_{90}^{234}\text{Th} \rightarrow {}_{91}^{234}\text{Pa} + {}_{-1}^0e + \tilde{\nu}$.

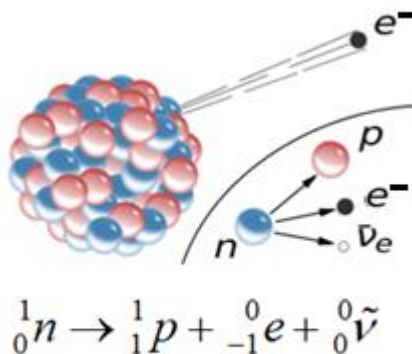


Рисунок 20.5

2) **позитронний β^+ -розпад**: ядро випромінює **позитрон** і зарядове число ядра зменшується на одиницю (рис. 20,6).

$${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-1}^AY + {}_{+1}^0e + \nu. \quad (20.7)$$

Позитрон – античастинка по відношенню до електрону; вона має заряд $+e$ і масу, яка дорівнює масі електрону. До того ж під час β^+ -розпаду випромінюється нейтрино ν , і можуть випромінюватися γ -промені.

Приклад: ${}_{7}^{13}\text{N} \rightarrow {}_{6}^{13}\text{C} + {}_{+1}^0e + \nu$.

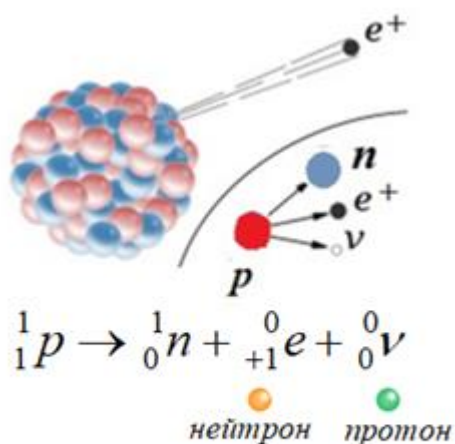


Рисунок 20.6

β -випромінювання відхиляється електричним і магнітним полем, його іонізаційна здатність є значно ($\sim$ у 100 разів) меншою, ніж для α -частинок. Воно поглинається шаром алюмінію товщиною ~ 2 мм.

Під час β -розпаду виділяються частинки нейтрино та антинейтрино. Ці дуже маленькі частинки (нейтрино – з італ. «маленька нейтральна частинка») з нульовим електричним зарядом. Гіпотеза про їх існування дозволила сформулювати теорію β^- -розпаду і пояснити, звідки береться електрон в ядрі. Було припущено, що в ядрі один з нейтронів розпадається на протон і електрон з одночасним утворенням антинейтрино:

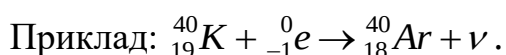


Під час цього процесу виконуються закони збереження електричних зарядів, імпульсу і масових чисел. До того ж це перетворення є енергетично можливим, оскільки маса спокою нейтрона перевищує масу атома водню, тобто протона та електрона разом узятих. Різниця в масах відповідає енергії, яка дорівнює 0,782 МеВ. За рахунок цієї енергії може відбуватися спонтанне перетворення нейтрона в протон; енергія розподіляється між електроном і антинейтрино.

Аналогічно записується реакція, яка є супутньою β^+ -розпаду, коли один з протонів перетворюється у нейтрон, випромінюючи при цьому позитрон і нейтрино:



3) **електронне захоплення** (K -захоплення): ядро поглинає один із K -електронів, рідше – один із L або M -електронів (L -захоплення або M -захоплення) (рис. 20.7).



Під час K -захоплення місце в електронній оболонці, яке звільнив захоплений електрон, заповнюється електронами з розташованих вище оболонок. При цьому випромінюються рентгенівські промені.

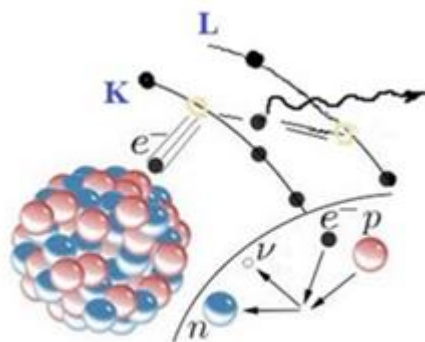


Рисунок 20.7

Рівняння (20.5) – (20.8) є виразами **правила зміщення**, яке дозволяє встановити тип ядра, що виникає в результаті розпаду материнського ядра.

3. Гамма-випромінювання. Випромінювання збудженим ядром при переході його в нормальний стан γ -квантів короткохвильового електромагнітного випромінювання, які мають енергію від 10 кеВ до 5 МеВ і довжину хвилі $\lambda < 10^{-10}$ м. Спектр цього випромінювання є дискретним, що свідчить про дискретність енергетичних рівнів ядра. γ -випромінювання не відхиляється електричним і магнітним полем, має слабку іонізаційну і дуже велику проникаючу здатність (рис. 20.8).

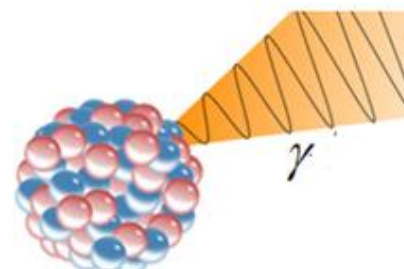


Рисунок 20.8

Ядра, які виникають в результаті радіоактивного розпаду, можуть бути, своєю чергою, також радіоактивними, що призводить до утворення ланцюжка, або ряду радіоактивних перетворень. Процес закінчується утворенням стабільного (нерадіоактивного) елемента. Сукупність елементів, що утворюють ланцюжок, називають **радіоактивним рядом** або **радіоактивним сімейством**.

Радіоактивні ряди (сімейства) – це групи генетично зв'язаних радіонуклідів, в яких кожен наступний радіонуклід утворюється в результаті α – або β^- –розпаду попереднього. Кожен радіонуклід має свого родоначальника – радіонуклід з найбільшим для даного ряду періодом

напіврозпаду T . Значення T кожного члена ряду значно менше значення T материнського ядра.

Можливі 4 різних видів радіоактивних рядів, масові числа яких або діляться на 4 без залишку (ряд $4n$), або в залишку залишається 1, 2 або 3 (відповідно, ряди $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$). Родоначальниками трьох рядів виступають природні найтриваліші радіонукліди ^{232}Th (ряд $4n$), ^{238}U (ряд $4n+2$) і ^{235}U (ряд $4n+3$), значення періодів напіврозпаду яких можна порівняти з віком Землі. Ці радіоактивні ряди завершуються стабільними нуклідами свинцю: відповідно ^{208}Pb , ^{206}Pb , та ^{207}Pb . Родоначальник радіоактивного ряду $4n+1$ – це ^{237}Np , значення T якого значно менше віку Землі, тому у природі членів цього ряду немає (вони повністю розпалися); ряд закінчується стабільним нуклідом ^{209}Bi .

20.1.5. Закон радіоактивного розпаду

Теорія радіоактивного розпаду будується на припущенні, що спонтанний розпад атомних ядер підпорядковується статистичним законам. Оскільки окремі радіоактивні ядра розпадаються незалежно одне від одного, то можна вважати, що число ядер dN , які розпалися в середньому за інтервал часу від t до $t + dt$, є пропорційним проміжку часу dt і числу N ядер, що не розпалися, до моменту часу t :

$$dN = -\lambda N dt. \quad (20.11)$$

Рівняння (20.11) є **закон радіоактивного розпаду** (в диференціальній формі). Знак «мінус» взятий для того, щоб показати, що dN – приріст числа ядер, які не розпалися, тобто загальне число радіоактивних ядер у процесі розпаду зменшується, λ – **стала розпаду** – величина, що є постійною для кожної радіоактивної речовини.

$$[\lambda] = \text{с}^{-1}.$$

Період напіврозпаду T – час, протягом якого розпалася половина початкової кількості ядер.

$$\begin{aligned}\frac{N_0}{2} &= N_0 e^{-\lambda T}, \\ e^{\lambda T} &= 2, \\ T &= \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}.\end{aligned}\tag{20.12}$$

Якщо розділити змінні в (20.11), то це рівняння набуває вигляду

$$\frac{dN}{N} = \lambda dt \tag{20.13}$$

Інтегрування (20.13) дає **закон радіоактивного розпаду** (в інтегральній формі):

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{20.14}$$

де N_0 – **вихідна (початкова)** кількість ядер у початковий момент, N – кількість ядер, що **не розпалися** (ті, які залишилися) у момент часу t .

Кількість ядер, які **розпалися** за час t , визначається співвідношенням

$$N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}). \tag{20.15}$$

Звичайно, формулу (20.11) використовують для випадків, коли проміжок часу dt значно менший періоду напіврозпаду T , тобто можна вважати, що число ядер, що не розпалися, залишається практично незмінним і дорівнює початковій кількості. Формула (20.14) застосовується в тому разі, коли проміжок часу t і період напіврозпаду є величинами одних порядків.

Радіоактивний розпад має статистичний характер. Не можна визначити, коли саме розпадеться певне ядро, можна лише зазначити, з якою ймовірністю воно розпадеться за певний проміжок часу. Це означає, якщо багаторазово повторювати досліди з радіоактивним препаратом, що містить досить велике число ядер N_0 , то за проміжок часу від 0 до t розпадеться однакова частина ядер $\Delta N/N$. Ця величина, що характеризує відносну частоту події, а саме, розпаду ядра, приймається за ймовірність P розпаду ядра протягом певного проміжку часу.

$$P = \frac{\Delta N}{N_0} = \frac{N_0 - N}{N_0},$$

де N – число ядер, що не розпалися до моменту часу t .

Якщо підставити замість N його вираз з закону радіоактивного розпаду в інтегральній формі (20.14), то отримаємо **ймовірність розпаду**

$$P = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (20.16)$$

При експоненційному законі радіоактивного розпаду в будь-який момент часу t є відмінна від нуля ймовірність знайти ядра, що не розпалися.

Час життя цих ядер перевищує t . Навпаки, інші ядра, що розпалися до цього часу, прожили різний час, менший за t .

Середній час життя τ радіоактивного ядра – це проміжок часу, протягом якого число ядер зменшується в $e = 2,71826$ разів.

$$\begin{aligned} e &= \frac{N_0}{N_\tau} = \frac{N_0}{N_0 e^{-\lambda \tau}} = e^{\lambda \tau}, \\ \lambda \tau &= 1, \\ \tau &= \frac{1}{\lambda}, \\ T &= \tau \cdot \ln 2 = 0,693\tau. \end{aligned} \quad (20.17)$$

Активністю A нукліда в радіоактивному джерелі називають число розпадів, які відбуваються в ядрах зразка протягом 1 секунди,

$$A = \lambda N. \quad (20.18)$$

Активність є характеристикою всієї речовини, а не одного окремого ядра. Активність, яка пов'язана з кількістю ядер в радіоактивному джерелі, змінюється з часом за законом

$$A = A_0 e^{-\lambda t}. \quad (20.19)$$

Одиницею активності є Беккерель (Бк).

1 Беккерель дорівнює активності нукліда, за якої протягом 1 секунди відбувається 1 розпад.

Часто використовується і позасистемна одиниця – Кюрі (Ки).

$[A] = 1 \text{ Беккерель} = 1 \text{ Бк} = 1 \text{ розпад/с}; 1 \text{ Кюри} = 1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}.$

20.1.6. Ядерні реакції і їх класифікації

Ядерною реакцією називається процес перетворення ядра, що супроводжується генерацією нових частинок. Ядерна реакція виникає під дією γ -випромінювання, або в результаті взаємодії двох ядер, або ядра і частинки при їх зближенні до відстаней $\sim 10^{-15} \text{ м}$, на яких починає проявлятися дія ядерних сил.

Ядерні реакції можна **класифікувати**:

1. По енергіях частинок, що беруть участь в ядерних реакціях:

- низько енергетичні ($< 1 \text{ кеВ}$), в основному, реакції за участю нейтронів;
- середньо енергетичні ($1 \text{ кеВ} - 1 \text{ МеВ}$), що проходять під дією нейтрино, заряджених частинок і γ – квантів;
- високо ($1 - 100 \text{ МеВ}$) і надвисоко ($> 100 \text{ МеВ}$) енергетичні, під час яких відбувається дезінтеграція ядер на нуклони і народження нових елементарних частинок.

2. За природою частинок, які їх викликають, ядерні реакції поділяються та такі, що відбуваються під дією:

- нейтронів;
- заряджених частинок: протонів, α – частинок, дейтронів, багатозарядних іонів тощо;
- γ – квантів.

3. За характером перетворення

- кулонівське перетворення ядра;
- поділ ядер;
- синтез ядер;
- процеси множинного народження частинок.

4. По виду ядер, що беруть участь в ядерній реакції:

- на легких ядрах ($A < 50$);
- на середніх ($50 < A < 100$);
- на важких ($A > 100$).

5. По тепловому ефекту реакції:

- екзотермічні (екзоенергетичні) – з виділенням енергії;
- ендотермічні (ендоенергетичні) – з поглинанням енергії.

Найбільш поширеним типом ядерних реакцій є процес, який відбувається за схемою

$$x + X \rightarrow Y + y, \quad (20.20)$$

де X – початкове ядро-мішень, Y – кінцеве ядро віддачі, x – частинка-снаряд, y – частинка-продукт. У ролі частинки-снаряда найчастіше виступають нейтрон n , протон p , дейтрон 2_1H , α – частинка або γ – квант.

Якщо E_0 і E'_0 – суми енергій спокою вихідних частинок і продуктів реакції, а K і K' – сумарні кінетичні енергії вихідних частинок і продуктів реакції, то згідно із законом збереження енергії

$$E_0 + K = E'_0 + K'. \quad (20.21)$$

Звідси спад сумарної енергії спокою $(E_0 - E'_0)$ дорівнює приросту сумарної кінетичної енергії $(K' - K)$.

Енергією реакції називають величину Q , яка дорівнює

$$Q = E_0 - E'_0 = K' - K. \quad (20.22)$$

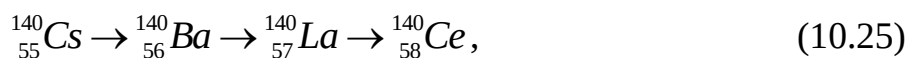
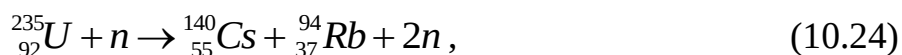
Реакції з $Q > 0$ – **екзоенергетичні** – з виділенням енергії, з $Q < 0$ – **ендоенергетичні** – з поглинанням енергії.

Це ж саме можна записати через маси або дефекти мас нуклідів:

$$Q = \left\{ \begin{aligned} &(m_a + m_x) - (m_b + m_y) \\ &(\Delta_a + \Delta_x) - (\Delta_b + \Delta_y). \end{aligned} \right. \quad (20.23)$$

20.1.7. Ланцюгова ядерна реакція. Ядерний синтез

Дослідами було виявлено, що під час опромінення урану нейтронами утворюються елементи із середини періодичної системи Менделєєва (барій, лантан). Було припущено, що ядро урану, яке захопило нейтрон, поділяється на дві приблизно рівні частини, які називають *уламками поділу*. Цей процес протікає до тих пір, доки не утворяться стабільні продукти реакції – церій і цирконій:



Було встановлено, що ядра урану здатні й до *спонтанного поділу*. Під час усіх інших перетворень атомне ядро випромінює частинки, які є істотно меншими ніж його маса і розміри. При спонтанному поділі ядро атома поділяється на дві рівні частини. Ця особливість спонтанного поділу дозволяє отримати абсолютно нову і дуже цінну інформацію про атомне ядро.

Отже, існує принципова можливість вилучення величезної енергії в процесі поділу ізотопів урану і деяких інших елементів (${}_{92}^{235}\text{U}$, ${}_{94}^{239}\text{Pu}$, ${}_{92}^{233}\text{U}$ та ін.). Сам по собі поділ ядра є екзотермічною реакцією, яка супроводжується виділенням значної кількості тепла. При поділі утворюються два (іноді більше) ядра, випромінюються нейтрони та деякі інші частинки. При поділі урану ${}_{92}^{235}\text{U}$, в результаті зіткнення з нейтроном, звільняється 2 або 3 нейтрона. Нейтрони мають енергії близькі 2 МеВ і швидкості $\sim 2 \cdot 10^7$ м/с. Час, який протікає між випромінюванням нейтрона і захопленням його новим ядром, що поділяється, дуже малий, тому процес протікає занадто швидко. За сприятливих умов ці нейтрони можуть потрапити на інші ядра урану і викликати їх поділ. На цьому етапі з'являється від 4 до 9 нейтронів, які, своєю чергою, викликають розпади

нових ядер урану. Такий лавиноподібний процес називається **ланцюговою реакцією** (рис. 20.9).

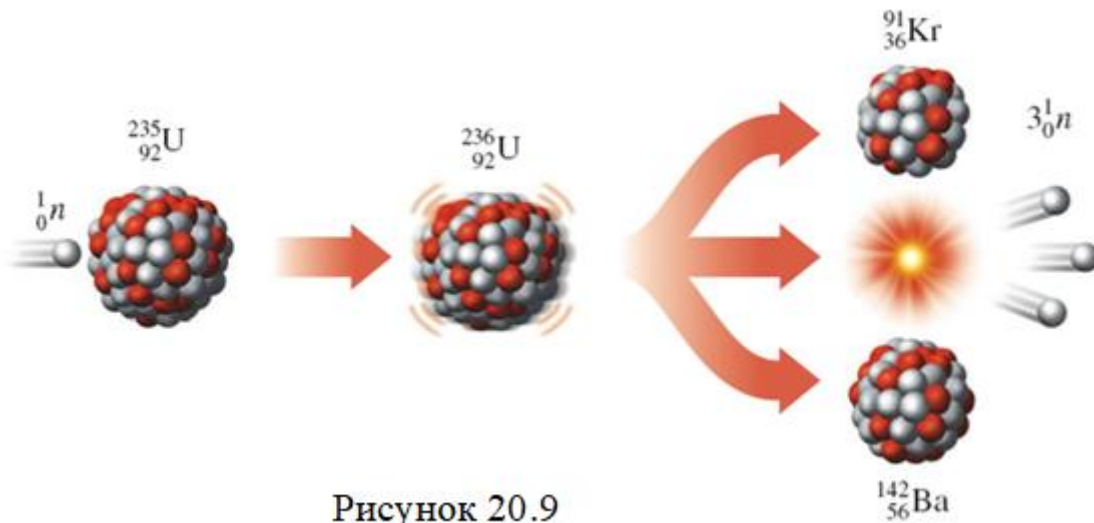


Рисунок 20.9

Ланцюгова реакція в урані може бути здійснена **двома способами**. Для практичного здійснення ланцюгової реакції по **першому типу** (атомна бомба) необхідно виконати цілий ряд умов:

1) оскільки в природному урані міститься лише 0,72% ізоотопу $^{235}_{92}\text{U}$, тому необхідним є **збагачення** природного урану;

2) треба, щоб маса урану $^{235}_{92}\text{U}$ була більшою за деяке критичне значення (так званої **критичної маси**), тому що в протилежному випадку більшість випромінених нейтронів вилітає, не викликаючи поділу;

3) з'єднання двох частин, сумарна маса яких є більшою за критичну, має відбуватися дуже швидко і дуже щільно, інакше ядерний заряд розлетиться на частини до того, як встигне прореагувати основна маса речовини, що поділяється.

Ланцюгова реакція **другого типу** використовується в **ядерних реакторах** – пристроях, у яких здійснюється керований ланцюговий процес поділу атомних ядер важких елементів (рис.20.10). Речовина, що поділяється, це природний уран, збагачений ізоотопом $^{235}_{92}\text{U}$. Речовину, що поділяється, розміщують невеликими порціями, між якими розташовують **сповільнювачі** (речовини, в яких сповільнюються нейтрони – графіт, берилій, ядра важкого водню дейтерію

– дейтрони). Пристрій, який автоматично керує стрижнями-сповільнювачами, дозволяє підтримувати потужність, що розвивається в реакторі, на заданому рівні.

Ядерні реактори мають різне призначення і застосовуються для різних цілей:

- енергетичні – для отримання електричної та теплової енергії (знаходяться в основному на атомних станціях);
- транспортні – для постачання енергії у двигуни транспортних засобів (підводні човни, надводні судна, космічні апарати);
- експериментальні та дослідницькі реактори – для науково-дослідних робіт;
- промислові – збройові реактори використовуються для виробництва ядерних збройових матеріалів. Також до промислових відносять реактори, що використовуються для опріснення морської води.



Рисунок 20.10

Ще одним типом ядерних реакцій є **ядерний синтез** – злиття легких ядер в одне ядро, яке супроводжується виділенням великої кількості енергії (рис. 20.11). Оскільки для синтезу ядер необхідні дуже високі температури, то цей процес називається **термоядерною реакцією**. Реакції, що відбуваються за участю дейтерію і тритію, мають резонансний характер. Саме вони використовуються у так званій **водневій бомбі**, запалом для якої служить атомна бомба, під час вибуху якої досягаються температури $\sim 10^7$ К. Реакція синтезу дейтрона (${}^2_1\text{H}$) і

ядра тритію (${}^3_1\text{H}$) (20.27) супроводжується виділенням $\sim 17,6$ MeV енергії, що складає $\sim 3,5$ MeV на 1 нуклон (поділ урану дає $\sim 0,85$ MeV на 1 нуклон).

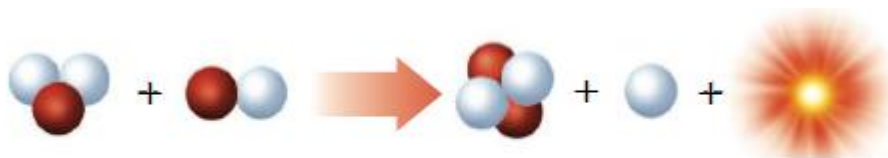


Рисунок 20.11

В бомбі термоядерні реакції мають неконтрольований характер. Здійснення ж контрольованого термоядерного синтезу може відкрити величезні можливості для отримання енергії.

Основною перешкодою до протікання реакції синтезу є наявність кулонівського бар'єра, який повинні подолати ядра для того, щоб зблизитися до відстаней на яких ядра вступають в сильну взаємодію. Тому ядра повинні мати високі кінетичні енергії, отримати які можна шляхом розігріву до дуже високих температур. Якщо необхідна температура буде розвиватися в самому процесі синтезу, то реакція може бути *самонідтримною*. Завдяки цьому термоядерні реакції інтенсивно протікають у Всесвіті, виступають джерелом енергії Сонця та інших зірок

20.1.8. Іонізуючі випромінювання. Дозиметрія

Іонізуюче випромінювання – будь-яке випромінювання, взаємодія якого із середовищем призводить до іонізації атомів і молекул, і зрештою, до утворення електричних зарядів різних знаків. До іонізуючих випромінювань відносяться: електромагнітне випромінювання, потоки α -частинок, електронів, позитронів, протонів, нейтронів та інших заряджених і нейтральних частинок. Заряджені частинки іонізують атоми речовини безпосередньо при зіткненнях, якщо їхня кінетична енергія достатня для іонізації. При проходженні через середовище потоків нейтральних частинок (нейтронів) або фотонів (квантів рентгенівського

та γ -випромінювання) іонізація обумовлена вторинними зарядженими частинками, що виникають в результаті взаємодії первинних частинок із середовищем.

Іонізуючі випромінювання відіграють велику роль у різних фізичних та хімічних процесах, у біології, медицині, сільському господарстві та промисловості. Іонізуюче випромінювання має досить вражаючу дію для живих істот, яка проявляється як на рівні молекул і клітин, так і на рівні окремих органів і всього організму. При великих дозах організм гине, при менших – виникає променева хвороба.

Дія радіації може бути **прямою** (коли частинки або γ -фотони безпосередньо впливають на молекули) або **непрямою** (якщо в реакцію з молекулами вступають продукти радіолізу води, що міститься в тканинах).

Дозиметрія – розділ прикладної ядерної фізики, що розглядає іонізуюче випромінювання, фізичні величини, що характеризують поле випромінювання або взаємодію випромінювання з речовиною, а також принципи та методи визначення цих величин. Дозиметрія має справу з такими фізичними величинами іонізуючого випромінювання, які визначають його хімічну, фізичну та біологічну дію. Найважливіша властивість дозиметричних величин – встановлений зв'язок між вимірюваною фізичною величиною та очікуваним радіаційним ефектом. Методи дозиметрії засновані на кількісному визначенні змін, спричинених в речовині або в живому організмі випромінюванням (радіаційних ефектів).

Поглинена доза D_0 – це величина, що визначається енергією іонізуючого випромінювання, що поглинається одиницею маси речовини за час опромінення. Вона визначає іонізаційні ефекти, спричинені випромінюванням в речовині. Доза, поглинена за одиницю часу, називається **потужністю дози**.

Одиниця поглиненої дози – 1 **Грей** – це доза опромінення, за якої опроміненій речовині масою 1 кг передається енергія іонізуючого випромінювання, яка є рівною 1 Дж.

$$[D_0] = \Gamma p = \text{Дж/кг}.$$

Експозиційна доза (доза опромінення) оцінюється по іонізуючій дії випромінювання на повітря. За одиницю дози опромінення прийнятий **1 Кл/кг** – та експозиційна доза фотонного випромінювання, за якої сумарний заряд іонів одного знаку, вироблених в 1 кг опроміненого повітря, дорівнює 1 Кл.

Широко розповсюджена позасистемна одиниця експозиційної дози **Рентген** (Р), а поглиненої дози – **рад** (rad – radiation absorbed dose):

$$1 \text{ Р} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг}; 1 \text{ рад} = 0,01 \text{ Гр}.$$

Досвід показує, що дія ядерних випромінювань на тканини живого організму визначається не лише дозою опромінення, але й природою іонізуючих частинок. Важкі частки (α -частинки, нейтрони, протони, швидкі іони) спричиняють більше фізіологічних порушень, ніж легкі (β -, γ -, РГ-промені). Особливо небезпечними є сильно проникаючі потоки нейтронів. Виходячи з цього, для оцінки біологічного впливу враховують ефективність відповідного виду випромінювання.

Еквівалентна доза (біологічна доза) D_6 – добуток поглиненої дози D_0 на коефіцієнт K :

$$D_6 = D_0 \cdot K, \quad (10.26)$$

де K – коефіцієнт, який визначається з досліду і називається **коефіцієнтом якості випромінювання** або **відносною біологічною ефективністю** (ВБЕ). Він показує, у скільки разів дія даного випромінювання на живу тканину перевищує дію γ - або РГ-променів. Чим коефіцієнт K більше, тим небезпечніше випромінювання.

Еквівалентна доза вимірюється в **Зівертах** і **берах** (біологічний еквівалент рентгену): $1 \text{ Зіверт} = 1 \text{ Зв} = 100 \text{ бер}$, $1 \text{ бер} = 1 \text{ rem}$ (Roentgen equivalent man). Біологічний еквівалент рентгену (бер) - це позасистемна одиниця вимірювання еквівалентної дози іонізуючого випромінювання. Вона показує, яка кількість будь-якого іонізуючого випромінювання еквівалентна за своєю біологічною дією дозі в 1 рентген (Р) рентгенівського або гамма-випромінювання.

Існують *природні* та *штучні* джерела випромінювань.

Природний фон (рис. 20.12) створюють космічне випромінювання, випромінювання від радіоактивних речовин, що знаходяться у земній корі. Людина піддається опроміненню двома способами. Радіоактивні речовини можуть бути поза організмом і опромінювати тіло зовні; у цьому випадку говорять про *зовнішнє* опромінення. Або радіоактивні речовини можуть опинитися в повітрі, в їжі або воді та потрапити всередину організму. Таке опромінення називають *внутрішнім*. Наприклад, у тілі людини є калій, 0,0119% його становить радіоактивний ізотоп ^{40}K .



Рисунок 20.12

Зовнішнє опромінювання зв'язане з місцем на Землі, де існує підвищений природний фон завдяки певним радіоактивним породам, а також з космічним випромінюванням.

Космічне випромінювання – переважно випромінювання від Сонця (сонячна радіація), що складається на 99% з протонів (протонне випромінювання) і 1% з ядер атомів гелію (альфа-випромінювання). Але завдяки магнітному полю Землі та атмосфері до поверхні Землі замість космічного випромінювання, що

складається з вкрай небезпечних протонного та альфа- випромінювань, доходять потоки менш небезпечних частинок з меншими енергіями – це потоки електронів, фотонів і мюонів. У результаті еквівалентна доза радіації, що отримується людиною від космічного випромінювання, становить $\sim 0,4$ мЗв/рік.

Інші випромінювання від радіоактивних природних ізотопів становлять:

- радіоактивний ізотоп ^{40}K (β^- і γ -випромінювання) – засвоюється разом із харчовими продуктами та питною водою. Міститься в кількості 0,0119% від усього калію в організмі людини. Річна доза $\sim 0,17$ мЗв/рік;
- вуглець ^{14}C – засвоюється разом із продуктами харчування і міститься в організмі людини. Річна доза $\sim 0,012$ мЗв/рік.
- радон ^{222}Ra та ^{220}Ra (α -випромінювання) та їх продукти радіоактивного розпаду. Містяться в газах, що підіймаються з надр землі. Може міститись у водопровідній воді, якщо вона береться з джерел, розташованих глибоко під землею (артезіанські джерела). Більшу частину дози опромінення від радону людина отримує, перебуваючи в закритому приміщенні, що не провітрюється. Річна доза $\sim 1,8$ мЗв/рік.
- використання паливних копалин. Вугілля містить незначну кількість природних радіонуклідів, які після його спалювання концентрується в зольному пилу і надходить у довкілля з викидами, попри вдосконалення систем очищення.
- використання фосфатів, які використовують головним чином для виробництва добрив. Більшість родовищ фосфатів містить уран. У процесі видобутку та переробляння також виділяється радон, та й самі добрива містять радіонукліди, що проникають у ґрунт і далі в біологічні ланцюжки.

До основних техногенних (штучних) радіоактивних джерел відносять наслідок випробувань ядерної зброї, промислові відходи, атомні електростанції (АЕС), медичне обладнання, предмети старовини, об'єкти, що були вивезені із "заборонених" зон (наприклад, зони після аварії Чорнобильської АЕС). Основний внесок у дозу від джерел, створених людиною, вносить зовнішнє

радіоактивне опромінення при діагностиці та лікуванні. У розвинених країнах на кожну тисячу населення припадає від 300 до 900 таких обстежень на рік, не враховуючи масової флюорографії та рентгенологічних обстежень зубів. Середня ефективна еквівалентна доза, що отримується від усіх джерел опромінення в медицині, у промислово розвинених країнах становить близько 1 мЗв/рік на кожного жителя, тобто. приблизно половину середньої дози від природних джерел.

Ці дози вважаються безпечними у тому сенсі, що медики не виявляють наслідків опромінення, ні негайних, ні віддалених. В цілому, наразі безпечною дозою опромінення для населення вважається доза ~ 5 мЗв/рік.

20.1.9. Захист від іонізуючого випромінювання

Захист від іонізуючих випромінювань може здійснюватися шляхом використання таких принципів:

- використання джерел з мінімальним випромінюванням шляхом переходу на менш активні джерела, зменшення кількості ізотопів;
- скорочення часу роботи з джерелом іонізуючого випромінювання;
- віддалення робочого місця від джерела випромінювання;
- екранування джерела іонізуючого випромінювання.

Будь-які матеріали в той чи іншій мірі стримують іонізуюче випромінювання (проникаючу радіацію). Чим більше між людиною і потоком іонізуючого випромінювання шарів, тим більше людина захищена. Шар половинного ослаблення – шар матеріалу, який наполовину зменшує рівень радіації.

1) α -частинки добре поглинаються тонким шаром речовини (у тому числі повітря). Необхідно остерігатися потрапляння α -активних речовин всередину організму (з повітрям, їжею), а також гальмівного РГ-випромінювання, яке збуджується взаємодією α -частинок з речовиною.

2) Для захисту від γ і РГ-випромінювання використовують товсті поглинальні екрани зі свинцю, заліза, бетону і цегли.

3) Оскільки нейтрони, проникаючи в речовину, збуджують у ній наведену α -, β -і γ -радіоактивність, то для захисту від них на атомних реакторах розміщують багатошарові екрани зі спеціально підібраних речовин.

Радіоактивне забруднення середовища може утримуватися на місцевості досить довго, якщо час життя штучних радіоізотопів, які утворилися, є досить великим. До того ж, радіоактивні продукти можуть розноситися вітром і водою на великі відстані. Особливу небезпеку становить β -активний стронцій $^{90}_{38}\text{Sr}$ ($T = 28$ років), який, потрапляючи в організм людини і накопичуючись у кістковій тканині, стає джерелом тривалого опромінення кісткового мозку.

20.2. Приклади розв'язання задач

Задача 20.2.1

Знайти енергію зв'язку ядра, яке має однакову кількість протонів та нейтронів, а радіус – у півтори рази менший, ніж радіус ядра ^{27}Al .

Дано:

$$m_p = 1,007276 \text{ а.о.м}$$

$$m_n = 1,008665 \text{ а.о.м.}$$

$$Z = N$$

$$\frac{r_{\text{Al}}}{r} = 1,5$$

$$E_{\text{зв}} = ?$$

Розв'язання

Якщо вважити, що ядра мають сферичну форму, то залежність радіуса ядра від його масового числа визначається формулою $r \approx 1,3 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3} \text{ м}$.

У відповідності до неї радіус ядра ^{27}Al , масове число якого 27, є

$$r_{\text{Al}} = 1,3 \cdot 10^{-15} \cdot 27^{1/3} = 3 \cdot 1,3 \cdot 10^{-15} \text{ м.} \quad (1)$$

А радіус невідомого ядра

$$r = 1,3 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3} \text{ м.} \quad (2)$$

Поділимо (1) на (2) і використаємо умову задачі щодо співвідношення радіусів.

$$\frac{r_{\text{Al}}}{r} = \frac{3 \cdot 1,3 \cdot 10^{-15}}{1,3 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3}} = \frac{3}{A^{1/3}} = 1,5. \quad (3)$$

З рівняння (3) $A = 8$, а з огляду на те, що $Z = N$, порядковий номер ядра є $Z = A - N = 4$. Тому шукане ядро є ядром ізотопу берилію ^8_4Be .

Енергію зв'язку будемо шукати в позасистемних одиницях Мегаелектронвольтах (MeV) за формулою

$$E_{\text{зв}} \approx \Delta m (\text{а.о.м.}) \cdot 931,5 \left(\frac{\text{MeV}}{\text{а.о.м.}} \right), \quad (4)$$

де Δm – дефект маси, який дорівнює

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}}. \quad (5)$$

Для розрахунку потрібна маса ядра ізотопу берилію, яка згідно з табличними даними становить $m_{\text{я}} = 8,00530510 \text{ а.о.м.}$

Тоді величина дефекту маси є

$$\begin{aligned} \Delta m &= [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}} = 4(m_p + m_n) - m_{\text{я}} = \\ &= 4(1,00728 + 1,00867) - 8,00530510 = 5,85 \cdot 10^{-2} \text{ а.о.м.} \end{aligned} \quad (6)$$

Підставимо результат (6) в формулу (4) і отримаємо шукану енергію зв'язку

$$E_{\text{зв}} \simeq 5,85 \cdot 10^{-2} \cdot 931,5 = 54,5 \text{ MeV.}$$

Відповідь: $E_{\text{зв}} = 54,5 \text{ MeV.}$

Задача 20.2.2

Визначити енергію, що виділяється при утворенні двох α -частинок в результаті синтезу ядер ${}^2\text{H}$ і ${}^6\text{Li}$, якщо відомо, що енергії зв'язку на один нуклон в ядрах ${}^2\text{H}$, ${}^4\text{He}$ і ${}^6\text{Li}$ дорівнюють 1,11, 7,08 та 5,33 MeV, відповідно.

Дано:

$$\left(\frac{E_{\text{зв}}}{A}\right)_H = 1,11 \text{ MeV}$$

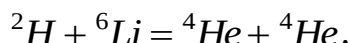
$$\left(\frac{E_{\text{зв}}}{A}\right)_{He} = 7,08 \text{ MeV}$$

$$\left(\frac{E_{\text{зв}}}{A}\right)_{Li} = 5,33 \text{ MeV}$$

$$E = ?$$

Розв'язання

Реакція процесу синтезу, що заданий в задачі, є



При взаємодії з дейтерієм ${}^2\text{H}$ ядро літію руйнується, на що витрачається енергія зв'язку, але при цьому виникають два ядра гелію і вивільняється енергія

$$E = 2\left(\frac{E_{\text{зв}}}{A}\right)_{He} \cdot A_{He} - \left(\frac{E_{\text{зв}}}{A}\right)_H \cdot A_H - \left(\frac{E_{\text{зв}}}{A}\right)_{Li} \cdot A_{Li}. \quad (1)$$

З врахуванням того, що ядро гелію складається з 4 нуклонів $A_{He} = 4$, ядро дейтерію – з двох нуклонів $A_H = 2$, а ядро літію – з шести нуклонів $A_{Li} = 6$, формула (1) набуває вигляду

$$E = 2 \cdot 7,08 \cdot 4 - 1,11 \cdot 2 - 5,33 \cdot 6 = 56,34 - 2,22 - 31,98 = 22,44 \text{ Мев.}$$

Відповідь: $E = 22,44 \text{ Мев.}$

Задача 20.3.3

Визначити енергію ядерної реакції ${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow 2 {}^4_2\text{He}$. Виділяється чи поглинається енергія у цій реакції?

Дано:	Розв'язання
${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow 2 {}^4_2\text{He}$	Маси частинок (в атомних одиницях маси – а.о.м.),
$\Delta E = ?$	що беруть участь в реакції, становлять $m_{Li} = 7,01600$
	а.о.м., $m_H = 1,00783$ а.о.м., $m_{He} = 4,00260$ а.о.м.

Маса частинок, що вступили до реакції,

$$m_1 = m_{Li} + m_H = 7,01600 + 1,00783 = 8,02383 \text{ а.о.м.}$$

Маса частинок після реакції

$$m_2 = 2m_{He} = 2 \cdot 4,00260 = 8,0052 \text{ а.о.м.}$$

Дефект маси реакції (різниця між сумарною масою окремих частинок до реакції і масою ядра/продуктів після реакції)

$$\Delta m = m_1 - m_2 = 8,02383 - 8,0052 = 0,01863 \text{ а.о.м.}$$

З огляду на те, що дефект маси $\Delta m > 0$, маса зменшилася в ході реакції, а різниця мас перетворилася на енергію, $Q = \Delta m c^2 > 0$. Отже, ядерна реакція здійснюється з виділенням енергії (екзоенергетична реакція). Для отримання енергії в одиницях СІ виразимо дефект маси у кілограмах

$$\Delta m = 0,01863 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} = 3,094 \cdot 10^{-29} \text{ кг.}$$

$$\Delta E = \Delta mc^2 = 3,094 \cdot 10^{-29} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 2,78 \cdot 10^{-12} \text{ Дж.}$$

Відповідь: $\Delta E = 2,78 \cdot 10^{-12} \text{ Дж.}$

Задача 20.3.4

Які кількість ядер з $N_0 = 10^6$ ядер радону розпадеться за час $t = 1$ доби, якщо період напіврозпаду становить $T = 3,82$ діб?

Дано:	Розв'язання
$N_0 = 10^6$	Згідно із законом радіоактивного розпаду кількість ядер, що не розпалися за час t дорівнює
$t = 1$ доба	
$T = 3,82$ діб	$N = N_0 e^{-\lambda t}.$
$N - N_0 = ?$	Відповідно, кількість ядер, що розпалися за цей час, є різницею між тим, що було спочатку, і тим, що залишилося (не розпалося)

$$N_0 - N = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N_0 (1 - e^{-\lambda t}).$$

Беручи до уваги, що стала розпаду λ пов'язана з періодом напіврозпаду T ,

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T},$$

а табличне значення періоду напіврозпаду радону $T = 3,82$ діб, отримаємо

$$N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}) = 10^6 \left(1 - e^{-\frac{\ln 2 \cdot 1}{3,82}} \right) = 1,66 \cdot 10^5.$$

Відповідь: $N_0 - N = 1,66 \cdot 10^5.$

Задача 20.3.5

Яка частина ядер радіоактивного кобальту $^{58}_{27}\text{Co}$ розпадеться за $t = 20$ діб, якщо період напіврозпаду становить $T = 72$ доби?

Дано:	Розв'язання
$t = 20$ діб	Кількість ядер, що розпадеться за час t , за законом
$T = 72$ доби	радіоактивного розпаду становить
$\frac{N_0 - N}{N_0} = ?$	$N_0 - N = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N_0 (1 - e^{-\lambda t}),$ де N_0 і N – кількості ядер, що було спочатку, і яка не розпалася, λ – стала розпаду, яка зв'язана з періодом напіврозпаду

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}.$$

Якщо треба знайти частину ядер, що розпалися, то треба визначити відношення кількості ядер, що розпалися, до вихідної кількості ядер

$$\frac{N_0 - N}{N_0} = \frac{N_0 - N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t}}{N_0} = \frac{N_0 \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} t}\right)}{N_0} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} t} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{72} \cdot 20} = 0,175.$$

Відповідь: $\frac{N_0 - N}{N_0} = 0,175.$

Задача 20.3.6

Визначити період напіврозпаду радіонукліда, якщо за $t = 1$ добу з $N_0 = 10^6$ ядер розпадається $N_0 - N = 1,75 \cdot 10^5$ ядер.

Дано:

$$t = 1 \text{ доба}$$

$$N_0 = 10^6$$

$$N_0 - N = 1,75 \cdot 10^5$$

$$T = ?$$

Розв'язання

Якщо за 1 добу розпалося $1,75 \cdot 10^5$ ядер, то це означає, що кількість ядер, які не розпалися, складає

$$N = 10^6 - 1,75 \cdot 10^5 = 8,25 \cdot 10^5.$$

Згідно із законом радіоактивного розпаду кількість ядер, що не розпалися, пов'язана з початковою кількістю ядер $N_0 = 10^6$ виразом

$$N = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t}, \quad (1)$$

звідки

$$\frac{N_0}{N} = e^{\frac{\ln 2}{T} t}. \quad (2)$$

Якщо прологарифмувати обидві частини рівняння (2), то цей вираз набуває вигляду

$$\frac{\ln 2}{T} t = \ln \frac{N_0}{N}. \quad (3)$$

З рівняння (3) шуканий період напіврозпаду становить

$$T = \frac{\ln 2 \cdot t}{\ln(N_0/N)} = \frac{0,693 \cdot 24 \cdot 3600}{\ln(10^6/8,25 \cdot 10^5)} = 3,11 \cdot 10^5 \text{ с.}$$

Відповідь: $T = 3,11 \cdot 10^5 \text{ с.}$

Задача 20.3.7

Визначити сталу розпаду λ та середній час життя τ радону, якщо відомо, що число ядер радону зменшується за $t = 1$ добу на 18,2 %.

Дано:

$t = 1$ доба

$$\frac{N_0 - N}{N_0} \cdot 100\% = 18,2\%$$

$\lambda = ?$

Розв'язання

Кількість ядер, що розпалися, відносно початкової кількості ядер становить

$$\frac{N_0 - N}{N_0} = 0,182. \quad (1)$$

Кількість N ядер, що не розпалися, підставимо в (1) із закону радіоактивного розпаду

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (2)$$

і отримаємо

$$\frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - \frac{N}{N_0} = 1 - \frac{N_0 e^{-\lambda t}}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} = 0,182,$$

$$e^{-\lambda t} = 1 - 0,182 = 0,818,$$

$$-\lambda t = \ln 0,818,$$

звідки стала розпаду становить

$$\lambda = -\frac{\ln 0,818}{24 \cdot 3600} = 2,33 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}.$$

Середній час життя τ – це період часу, протягом якого кількість ядер, що були в наявності, скорочується в e разів. Тоді із закону (2) радіоактивного розпаду

$$\frac{N_0}{N} = e^{\lambda \tau} = e.$$

Отже, середній час життя дорівнює

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2,33 \cdot 10^{-6}} = 4,3 \cdot 10^5 \text{ с} = 119,3 \text{ год.}$$

Відповідь: $\lambda = 2,33 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$; $\tau = 4,3 \cdot 10^5 \text{ с} = 119,3 \text{ год.}$

Задача 20.3.8

Під час визначення періоду напіврозпаду недовгочасного радіоактивного ізотопу використано лічильник імпульсів. За час $\Delta t = 1$ хвилині на початку спостереження ($t = 0$) було нараховано $\Delta n_1 = 250$ імпульсів, а через $t = 1$ годину – $\Delta n_2 = 92$ імпульсів. Визначити сталу радіоактивного розпаду λ і період напіврозпаду T ізотопу.

Дано:

$$\Delta t = 1 \text{ хв}$$

$$t = 1 \text{ год}$$

$$\Delta n_1 = 250$$

$$\Delta n_2 = 92$$

$$\lambda = ? \quad T = ?$$

Розв'язання

Число імпульсів Δn , яке лічильник реєструє за час Δt , є пропорційним кількості ядер, що розпалися $\Delta n = k \cdot \Delta N$.

На початку спостереження була кількість N_0 ядер, через час $\Delta t = 1$ хв залишилося $N_{\Delta t}$ ядер, що не розпалися. Отже, за час $\Delta t = 1$ хв кількість ядер, що розпалися, становить

$$\Delta N_1 = N_0 - N_{\Delta t} = N_0 - N_0 e^{-\lambda \Delta t} = N_0 (1 - e^{-\lambda \Delta t}),$$

а кількість зареєстрованих імпульсів дорівнює

$$\Delta n_1 = k N_0 (1 - e^{-\lambda \Delta t}). \quad (1)$$

Під час повторного вимірювання (через $t = 1$ година) початкове число ядер становило N_t , через $\Delta t = 1$ хв залишилося $N_{t+\Delta t}$ ядер, що не розпалися. Отже, за 1 хвилину під час другого вимірювання кількість ядер, що розпалася, становить

$$\Delta N_2 = N_t - N_{t+\Delta t} = N_t - N_t e^{-\lambda \Delta t} = N_t (1 - e^{-\lambda \Delta t}),$$

а кількість зареєстрованих імпульсів дорівнює

$$\Delta n_2 = k \Delta N_2 = k N_t (1 - e^{-\lambda \Delta t}), \quad (2)$$

при цьому N_t і N_0 пов'язані один з одним згідно із законом радіоактивного розпаду:

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Поділимо (1) на (2) і визначимо співвідношення зареєстрованих імпульсів за однакові проміжки часу, які дорівнюють одній хвилині

$$\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = \frac{kN_0(1 - e^{-\lambda \Delta t})}{kN_t(1 - e^{-\lambda \Delta t})} = \frac{N_0}{N_t} = \frac{N_0}{N_0 e^{-\lambda t}} = e^{\lambda t}. \quad (3)$$

Прологарифмуємо вираз (3) та підставимо числові дані з умови задачі

$$\lambda t = \ln \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2},$$

звідки стала розпаду дорівнює

$$\lambda = \frac{\ln(\Delta n_1/\Delta n_2)}{t} = \frac{\ln(250/92)}{3600} = 2,78 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}.$$

Період напіврозпаду становить

$$T = \frac{\ln 2}{2,78 \cdot 10^{-4}} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ с} = 41,6 \text{ хв} = 0,693 \text{ год.}$$

Відповідь: $\lambda = 2,78 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$; $T = 2,5 \cdot 10^3 \text{ с} = 41,6 \text{ хв} = 0,693 \text{ год.}$

Задача 20.3.9

Визначте вік мінералу в роках, якщо в ньому на один атом урану ${}^{238}_{92}\text{U}$ припадає один атом свинцю. Вважати, що в момент утворення мінералу, свинець в мінералі був відсутній. Свинець утворився лише в результаті радіоактивного розпаду урану. Період напіврозпаду урану ${}^{238}_{92}\text{U}$ становить $T = 4,5 \cdot 10^9$ років.

Дано:	Розв'язання
${}^{238}_{92}\text{U}$	Радіоізотопне датування – один з методів визначення віку різних об'єктів, у складі яких є радіоактивний ізоотоп.
$T = 4,5 \cdot 10^9$ років	Основою метода є визначення того, яка частка цього ізоотопу встигла розпастися за час існування зразка. За цією
$t = ?$	

величиною, знаючи період напіврозпаду даного ізоотопу, можна розрахувати вік зразка. Використовуються різні радіоізотопні методи, які підходять для різних матеріалів, різних інтервалів віку та мають різну точність. Одним із найстаріших і добре розроблених способів радіоізотопного датування є уран-свинцевий метод, який дозволяє отримати точність 0,1% і навіть краще при датуванні зразків, які близькі до віку Землі, і зразки молодші за мільйон років. Використовуються два ізоотопи урану, ланцюжки розпаду яких закінчуються різними ізоотопами свинцю. Всі ці перетворення йдуть у багато стадій, але проміжні нукліди розпадаються набагато швидше за материнські.

Для радіоізотопного датування вибирають породи, подібні до гранітів, які виникли шляхом кристалізації рідини. Наприклад, при кристалізації циркону (ZrSiO_4) атоми ізоотопу урану ${}^{238}_{92}\text{U}$ можуть в кристалічній решітці замінювати атоми цирконію. Далі атоми ${}^{238}_{92}\text{U}$ розпадаються, перетворюючись у результаті свинець ${}^{206}_{92}\text{Pb}$. Зрозуміло, що для правильного датування необхідно знати початковий вміст породи ізоотопу свинцю ${}^{206}_{92}\text{Pb}$. Його можна врахувати, припускаючи, що співвідношення концентрацій ізоотопів ${}^{206}_{92}\text{Pb}$ і ${}^{204}_{92}\text{Pb}$ в цирконі та навколишніх породах, що не містять уран, однаково. Тоді з надлишку ізоотопу свинцю ${}^{206}_{92}\text{Pb}$ в цирконі відносно до навколишньої породи можна визначити його частку, що перетворилася з урану. Далі робиться припущення, що не було забруднення зразків свинцем, наприклад, з ґрунтових вод або вихлопу автомобілів, так само як і не було вимивання урану, і по відношенню до

концентрацій ізотопів $^{206}_{92}\text{Pb}$ і $^{238}_{92}\text{U}$ визначається вік кристалів циркону і, як результат, самої породи в цілому.

Із закону радіоактивного розпаду $N = N_0 e^{-\lambda t}$ відношення кількості ядер, що не розпалися, до початкової кількості ядер є

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}.$$

Прологарифмуємо (1) і знайдемо час t

$$t = \frac{\ln(N_0/N)}{\lambda} = \frac{\ln(N_0/N)}{\ln 2} \cdot T.$$

Якщо на один атом урану припадає один атом свинцю, а за умовою задачі в момент утворення мінералу свинець був відсутній, це означає, що в зразку містяться рівні кількості свинцю й урану. Іншими словами, половина ядер наявного урану перетворилася в процесі радіоактивного розпаду у свинець. Можна відразу зробити висновок, що минув час, який дорівнює періоду напіврозпаду, оскільки за визначенням це саме той період часу, протягом якого розпадається половина наявної речовини.

До того ж самого результату можна прийти шляхом обчислень, поклавши $N = N_0/2$. Тоді

$$t = \frac{\ln(N_0/N)}{\ln 2} \cdot T = \frac{\ln(2N_0/N_0)}{\ln 2} \cdot T = T = 4,5 \cdot 10^9 \text{ років.}$$

Відповідь: $t = 4,5 \cdot 10^9$ років.

Задача 20.3.10

Визначити активність радіоактивного препарату радію, маса якого $m = 1\text{г}$.

Для радію ^{226}Ra період напіврозпаду $T = 1590$ років.

Дано:	Розв'язання
$m = 1\text{ г}$	Період напіврозпаду T зв'язаний зі сталою розпаду λ
$T = 1590$ років	по формулі
$A = ?$	$\lambda = \frac{\ln 2}{T}. \quad (1)$

а активність препарату визначається як

$$A = \lambda N, \quad (2)$$

де N – число радіоактивних ядер, яке дорівнює числу атомів радію в препараті масою m .

$$N = \frac{m}{M} N_A, \quad (3)$$

де N_A – стала Авогадро, а M – молярна маса радію.

Підставляючи (1) і (3) в (2), отримаємо шукану активність препарату. Слід пам'ятати, що для розрахунків період напіврозпаду треба виражати у секундах.

$$A = \lambda N = \frac{\ln 2}{T} \frac{m}{M} N_A = \frac{0,693 \cdot 10^{-3} \cdot 6,022 \cdot 10^{23}}{(1590 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600) \cdot 226 \cdot 10^{-3}} = 3,68 \cdot 10^{10} \text{ Бк.}$$

Відповідь: $A = 3,68 \cdot 10^{10}$ Бк.

Задача 20.3.11

Визначити сталу розпаду, середній час життя і період напіврозпаду радіонукліда, активність якого зменшилася в 1,07 разів за 100 днів.

Дано:	Розв'язання
$\frac{A_0}{A_t} = 1,07$	Активність A радіонукліда – це величина, що дорівнює числу розпадів, які відбуваються в ядрах зразка протягом 1
$t = 100$ днів	секунди. Ця величина залежить від кількості ядер, які розпадаються. Тому
$\lambda = ? \quad \tau = ?$	
$T = ?$	

$$\frac{A_0}{A_t} = \frac{\lambda N_0}{\lambda N} = \frac{N_0}{N} = \frac{N_0}{N_0 e^{-\lambda t}} = e^{\lambda t}. \quad (1)$$

З огляду на те, що за умовами задачі $\frac{A_0}{A_t} = 1,07$, рівняння (1) набуває вигляду

$$e^{\lambda t} = 1,07,$$

звідки

$$\lambda t = \ln 1,07.$$

$$\lambda = \frac{\ln 1,07}{t} = \frac{6,76 \cdot 10^{-2}}{100 \cdot 24 \cdot 3600} = 7,83 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}.$$

Середній час життя τ – це проміжок часу, протягом якого число ядер зменшується в $e = 2,71826$ разів.

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{7,83 \cdot 10^{-9}} = 1,28 \cdot 10^8 \text{ с} \approx 1480 \text{ діб}.$$

Період напіврозпаду це проміжок часу, за який розпадається половина початкової кількості ядер.

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{7,83 \cdot 10^{-9}} = 8,85 \cdot 10^7 \text{ с} = 1024 \text{ діб}.$$

Відповідь: $\lambda = 7,83 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}$; $\tau = 1,28 \cdot 10^8 \text{ с}$; $T = 1024 \text{ діб}$.

Задача 20.3.12

Ядро радону ${}^{220}_{86}\text{Rn}$, що знаходилося у стані спокою, випустило α -частинку зі швидкістю $v = 1,6 \cdot 10^7 \text{ м/с}$. В яке ядро перетворилося ядро радону? Яку швидкість воно отримало в результаті віддачі?

Дано:	Розв'язання
$m_{\alpha} = 4 \text{ а.о.м.}$	Відповідно до правила зміщення для α -розпаду з
$v = 1,6 \cdot 10^7 \text{ м/с}$	врахуванням того, що α -частинка – це ядро гелію ${}^4_2\text{He}$
${}^A_Z\text{X} = ? \quad v_1 = ?$	отримуємо
	${}^{220}_{86}\text{Ra} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^{216}_{84}\text{X}.$

В Періодичній таблиці елементів на 86 позиції знаходиться елемент полоній.

Отже, результатом ядерного перетворення є ізотоп ${}^{216}_{84}\text{Po}$.

Швидкість ядра радону знайдемо за допомогою закону збереження імпульсу. До випромінювання α -частинки ядро радону знаходилося у стані спокою. тому його імпульс дорівнював нулю. В результаті ядерного процесу ядро радону розділилося на два уламки. Тому, коли α -частинка масою $m_{\alpha} = 4 \text{ а.о.м.}$ зі швидкістю v вилетіла з ядра, то ядро полонію $m_{\text{Po}} = 216 \text{ а.о.м.}$ почало рухатися зі швидкістю v_1 .

$$0 = m_{\alpha}v - m_{\text{Po}}v_1,$$

звідки швидкість ядра полонію становить

$$v_1 = \frac{m_{\alpha}v}{m_{\text{Po}}} = \frac{4 \cdot 1,6 \cdot 10^7}{216} = 2,96 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

Відповідь: $v_1 = 2,96 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$

Задача 20.3.13

Визначити вік древніх дерев'яних предметів, у яких питома активність ${}^{14}_6\text{C}$ становить 3/5 питомої активності цього ж нукліду в щойно зрубаних деревах.

Дано:

$$\frac{A}{A_0} = \frac{3}{5}$$

$$t = ?$$

Розв'язання

Радіовуглецевий аналіз – один із видів радіоізотопного датування, який визначає вік, перш за все, органічних матеріалів за допомогою вимірювання вмісту радіоактивного ізотопу вуглецю $^{14}_6\text{C}$.

У ході аналізу вивчають радіовуглецевий ізоотп $^{14}_6\text{C}$ з періодом напіврозпаду $T = 5730$ років, який безперервно утворюється у верхніх шарах атмосфери Землі з азоту $^{14}_7\text{N}$ під дією космічного випромінювання. Завдяки вітрам і океанським течіям рівноважна концентрація $^{14}_6\text{C}$ у різних місцях земної кулі однакова і дорівнює приблизно 15 розпадів за хвилину на кожен грам вуглецю у складі живих організмів. Поки організм живий, у результаті процесів обміну концентрація $^{14}_6\text{C}$ у ньому залишається постійною через круговорот речовин у природі. Після смерті організму засвоєння $^{14}_6\text{C}$ припиняється, і його кількість починає спадати за законом радіоактивного розпаду. Таким чином, знаючи кількість радіоактивного ізотопу вуглецю, яке було спочатку в живому організмі, по відношенню до інших стабільних ізотопів, можна визначити, скільки часу пройшло з моменту смерті організму. Щоб визначити кількість, що залишилася, застосовують спеціальні методи хімічного та фізичного аналізу, за підсумками яких визначають вік зразка. Радіовуглецевий аналіз вважають ефективним, оскільки він дозволяє досить точно визначити вік біологічних організмів, які існували до 50 тис. років тому.

За умовами задачі

$$\frac{A}{A_0} = \frac{\lambda N}{\lambda N_0} = \frac{N_0 e^{-\lambda t}}{N_0} = e^{-\lambda t} = \frac{3}{5} = 0,6,$$

$$-\lambda t = \ln 0,6,$$

$$t = -\frac{\ln 0,6}{\lambda} = -\frac{\ln 0,6}{\ln 2} T = \frac{0,51 \cdot 5730}{0,693} = 4217 \text{ років.}$$

Відповідь: $t = 4217$ років.

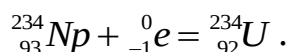
Задача 20.3.14

Ядро нептунію ${}^{234}_{93}\text{Np}$ захопило електрон з K -оболонки атома (K -захоплення) і випустило α -частинку. Ядро якого елемента утворилося в результаті цих перетворень?

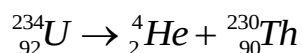
Дано:	Розв'язання
${}^{234}_{93}\text{Np}$	При K -захопленні із найближчої до ядра електронної оболонки (K -оболонки) атома електрон захоплюється ядром.
${}^A_Z\text{X} = ?$	Внаслідок цього протон в ядрі перетворюється на нейтрон.

Ще при K -захопленні з ядра вилітає нейтрино, проте для розв'язання цієї задачі це істотної ролі не грає.

Загальна кількість нуклонів у ядрі не змінюється, а зарядове число зменшиться на одиницю. Тому проміжне ядро матиме зарядове число $93 - 1 = 92$, масове число залишиться колишнім – 234. За таблицею Д. І. Менделєєва визначаємо, що проміжним ядром є ізоотп урану ${}^{234}_{92}\text{U}$.

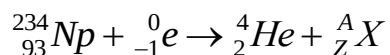


Проміжне ядро випустило α -частинку. Оскільки α -частинка (ядро атома ізоотпу гелію ${}^4_2\text{He}$) містить два протони і два нейтрони, то проміжне ядро ${}^{234}_{92}\text{U}$ при акті випромінювання α -частинки зменшить зарядове число на дві одиниці та масове число на чотири одиниці.

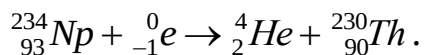


Таким чином, кінцеве ядро матиме $Z = 90$ і $A = 230$, що відповідає ізоотпу торію ${}^{230}_{90}\text{Th}$.

До того ж висновку можна дійти, написавши рівняння цих радіоактивних перетворень у такому вигляді



і прорахувавши «нижні індекси» (зарядові числа Z) і «верхні індекси» (масові числа A): її суми в лівій і правій частинах рівняння повинні бути рівними



Відповідь: ${}_{90}^{230}\text{Th}$.

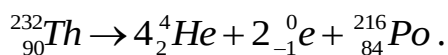
Задача 20.3.15

У який елемент перетвориться ${}_{90}^{232}\text{Th}$ після чотирьох α - і двох β^- -розпадів?

Дано:	Розв'язання
${}_{90}^{232}\text{Th}$	Запишемо рівняння радіоактивних перетворень:
${}_Z^AX = ?$	${}_{90}^{232}\text{Th} \rightarrow 4{}_2^4\text{He} + {}_{82}^{216}\text{Pb},$
	${}_{82}^{216}\text{Pb} \rightarrow 2{}_{-1}^0e + {}_{84}^{216}\text{Po}.$

Результатом ланцюжка перетворень буде полоній ${}_{84}^{216}\text{Po}$.

Якщо стає питання знайти кінцевий результат перетворень, а проміжні ізотопи не цікавлять, то можна усе записати в один рядок



Відповідь: ${}_{84}^{216}\text{Po}$.

20.3. Задачі для самостійної роботи

20.3.1. Визначити дефект маси ядра ізотопу неону $^{20}_{10}\text{Ne}$.

Відповідь: $\Delta m = 2,882 \cdot 10^{-28}$ кг.

20.3.2. Обчислити енергію зв'язку нейтрону в ядрі $^{14}_7\text{N}$, якщо відомо, що енергії зв'язку ядер $^{13}_7\text{N}$ і $^{14}_7\text{N}$ дорівнюють 94,10 і 104,66 МеВ.

Відповідь: $E_{\text{зв}} = 10,56$ МеВ.

20.3.3. Знайти енергію, необхідну для поділу ядра $^{16}_8\text{O}$ на α -частинку та ядро $^{12}_6\text{C}$, якщо відомо, що енергії зв'язку ядер $^{16}_8\text{O}$, $^{12}_6\text{C}$ і ^4_2He дорівнюють 127,62, 92,16 та 28,30 МеВ, відповідно.

Відповідь: $E = 7,16$ МеВ.

20.3.4. Ядро полонію $^{210}_{84}\text{Po}$, що покоїлося, викинуло α -частинку з кінетичною енергією 5,3 МеВ. Визначити кінетичну енергію ядра віддачі та повну енергію, що виділилася при розпаді.

Відповідь: $KE = 0,103$ МеВ; $E = 5,4$ МеВ.

20.3.5. Радіоактивний натрій $^{24}_{11}\text{Na}$ розпадається, викидаючи β^- -частинки. Період напіврозпаду натрію становить 14,8 години. Визначити кількість ядер натрію, що розпалися в 1 мг препарату з 10 годин

Відповідь: $\Delta N = 9,3 \cdot 10^{18}$.

20.3.6. За час t_1 початкова кількість радіоактивного ізотопу зменшилася втричі. У скільки разів вона зменшиться за час $t_2 = 2t_1$?

Відповідь: у 9 разів.

20.3.7. Яка частка початкової кількості ядер стронцію $^{90}_{38}\text{Sr}$ а) залишиться через 10 і 100 років; б) розпадеться за одну добу; за 15 років?

Відповідь: а) $n_{10} = 0,78$; $n_{100} = 0,084$; б) $n_1 = 6,8 \cdot 10^{-5}$; $n_{15} = 0,31$.

20.3.8. За який час розпадеться 1/4 початкової кількості ядер радіоактивного

препарату, якщо його період напіврозпаду становить $T = 24$ години?

Відповідь: $t = 9,96$ год.

20.3.9. Визначити кількість радіоактивних ядер у свіжоприготовленому препараті броду $^{82}_{35}\text{Br}$, якщо відомо, що через добу його активність дорівнювала $7,4 \cdot 10^{-9}$ Бк.

Відповідь: $N = 2,3 \cdot 10^{15}$.

20.3.10. Активність радіоактивного препарату за $t_1 = 24$ год зменшилася у 8 разів. Знайти період напіврозпаду T цього препарату. Визначити, яка частина радіоактивних ядер цього препарату розпадеться за проміжок часу, що дорівнює четвертій частині періоду напіврозпаду?

Відповідь: $\frac{\Delta N}{N_0} = 0,16$.

20.3.11. Визначити вік деревини, якщо відомо, що активність зразка ізотопу $^{14}_6\text{C}$ є втричі меншою за активність свіжої деревини. Період напіврозпаду $^{14}_6\text{C}$ прийняти рівним $T = 5730$ років

Відповідь: $t = 9084$ років.

20.3.12. Який ізотоп утворюється з $^{239}_{92}\text{U}$ після двох β^- - і одного α - розпаду?

Відповідь: $^{235}_{92}\text{U}$.

20.3.13. Який ізотоп утворюється з $^{235}_{92}\text{U}$ після трьох α - і двох β^- - розпадів?

Відповідь: $^{226}_{88}\text{Ra}$.

20.3.14. Який ізотоп утворюється з $^{133}_{51}\text{Sb}$ після чотирьох β^- - розпадів?

Відповідь: $^{133}_{35}\text{Br}$.

20.3.15. Який ізотоп утворюється з $^{232}_{90}\text{Th}$ після чотирьох α - і двох β^- - розпадів?

Відповідь: $^{216}_{84}\text{Po}$.

21. ЕЛЕМЕНТИ ФІЗИКИ ТВЕРДОГО ТІЛА

21.1. Теоретичні відомості

Фізика твердого тіла (ФТТ) – розділ фізики конденсованого стану, яка описує фізичні властивості твердих тіл з погляду їхньої атомної будови. ФТТ вивчає склад твердих тіл, їх атомно-електронної структури і встановлює залежності між складом, структурою та різними фізичними властивостями насамперед кристалічних матеріалів – механічними, тепловими, електричними, магнітними, оптичними тощо. ФТТ базується в основному на квантово-механічних підходах, але має крім теоретичної також і практичну, прикладну спрямованість. Розвиток цього напрямку фізики стимулювався широким спектром важливих завдань прикладного характеру, зокрема розвитком напівпровідникової техніки.

21.1.1. Будова твердих тіл. Кристалічні та аморфні тіла. Типи кристалів

Тверде тіло – це такий стан речовини, який характеризується стійкістю форми під зовнішнім впливом. Характер теплового руху структурних одиниць твердого тіла (атомів, іонів, молекул) визначається малими коливаннями щодо деяких фіксованих положень рівноваги. У залежності від розташування атомів в твердому тілі розрізняють аморфні та кристалічні тверді тіла.

В **аморфних** твердих тілах впорядковане розташування атомів спостерігається в межах відстаней, близьких до міжатомних.

Кристал можна уявити як періодично повторювані у просторі однакові елементарні структурні одиниці. При описанні правильної внутрішньої структури кристала звичайно застосовують поняття кристалічної решітки. **Кристалічна решітка** є просторова сітка, у **вузлах** якої розташовані частинки (атоми, іони, молекули), що утворюють кристал. В основі кристалічної решітки

лежить *елементарна кристалічна комірка*, що є паралелепіпедом мінімального об'єму з характерним для цієї решітки розташуванням атомів. Якщо взяти велику кількість однакових кристалічних комірок і впритул укласти їх у певному об'ємі, зберігаючи паралельність ребер та граней, то ми матимемо приклад будови ідеального *монокристала*. Для них характерна сувора повторюваність у всіх напрямках одного й того ж структурного елемента (елементарної комірки) протягом сотень і тисяч періодів кристалічної решітки. Таке правильне чергування атомів називається *далеким порядком*. Основні ознаки далекого порядку – симетрія і закономірність у розташуванні частинок, що повторюється на будь-якій відстані від даного атома.

Кристалічні речовини існують також у формі полікристалів. *Полікристал* відрізняється від монокристала тим, що складається з безлічі дрібних монокристалів, орієнтованих по-різному, іншими словами, полікристал є агрегатом дрібних кристалів (кристалітів). Розміри кристалітів в полікристалах $\sim 10\text{-}10^{-1}$ мкм. Монокристали утворюються лише в особливих умовах росту і мають анізотропію властивостей, тобто демонструють різні властивості вздовж різних напрямків у кристалах. Для полікристалів характерна ізотропність – однаковість фізичних властивостей у всіх напрямках.

Атоми, перебуваючи на вузлах кристалічної решітки, здійснюють коливання біля положень рівноваги, отже, мають кінетичну енергію. Також атоми взаємодіють один з одним, маючи потенційну енергію. Сума цих двох енергій всіх атомів і є повною енергією всього кристала. Для існування стабільного зв'язку між атомами в кристалі необхідно, щоб повна енергія кристала була меншою за повну енергію такої ж кількості окремих атомів, віддалених на нескінченність. Різниця повної енергії ізольованих атомів та повної енергії кристала називається енергією зв'язку. Іншими словами, енергія зв'язку кристала є енергією, яку необхідно витратити на те, щоб поділити його на атоми, що не взаємодіють між собою.

Оскільки енергія всього кристала залежить від кількості атомів, що входять до його складу, то зазвичай використовують *енергію зв'язку*, що припадає на один атом, і виражати її в одиницях еВ/атом. Енергії зв'язку різних кристалів змінюються у досить широких межах і, як правило, набувають значення від 0,01 до 10 еВ/атом.

За типом хімічного зв'язку всі кристали поділяються на:

1) **Іонні кристали** (NaCl, CsCl, KF, KBr)

Іонний (гетерополярний) зв'язок реалізується між різними за властивостями атомами, наприклад, між металами та галогенами. Електростатична взаємодія між позитивними та негативними іонами виникає в результаті прагнення хімічного елемента придбати стійку електронну оболонку внаслідок віддачі або приєднання електронів. В результаті з'являються позитивно заряджені катіони та негативні аніони, рівномірно розподілені в кристалічному просторі іонного кристала. Іонний зв'язок ненаправлений, у цьому типі зв'язку кожен іон у структурі кристала оточує себе наскільки можна максимальною кількістю іонів протилежного знаку. Іонні кристали зазвичай мають порівняно прості, щільно упаковані та високосиметричні, наприклад, кубічні кристалічні решітки. Іонні кристалічні решітки мають солі, луги, оксиди активних металів. Ці кристали є твердими, тугоплавкими, нелеткими та крихкими, добре розчиняються у воді.

2) **Ковалентні кристали** (діамант, кремній Si, германій Ge, арсенід галію GaAs)

Ковалентний (гомеополярний) зв'язок виникає між однаковими або близькими за властивостями атомами. Він обумовлений перекриванням валентних орбіталей атомів і здійснюється за допомогою узагальнених пар електронів, що належать одночасно двом атомам. При цьому кожен з атомів набуває стабільної конфігурації інертного газу. Ковалентний зв'язок строго спрямований і насичений, оскільки кількість електронів, що здійснюють ковалентні зв'язки, у кожного атома обмежена. Тому для структур із подібним типом зв'язку характерні відсутність щільних укладання атомів простих

речовин, високі значення твердості, температури та теплоти плавлення. Енергія чотирьох ковалентних зв'язків атомів вуглецю в алмазі становить близько 7,4 еВ/атом. Ковалентний зв'язок – ознака напівпровідникових кристалів.

3) *Металічні кристали* (Al, Na, Cu, Ag, Au)

Металічний зв'язок, що є характерним для елементів перших груп періодичної системи та інтерметалідів, здійснюється внаслідок взаємодії вільних електронів і позитивно заряджених атомних кістяків. Всі атоми металу віддають свої валентні електрони у загальне користування, тобто всі вільні електрони узагальнюються і легко переміщаються між атомними ядрами, являючи собою своєрідний електронний газ. Це зумовлює сферично-симетричне силове поле, що не має властивості спрямованості. Для структур із металічним зв'язком характерні щільне пакування частинок, оскільки кожен атом прагне оточити себе максимальною кількістю найближчих атомів. Існуванням електронів, що вільно переміщаються, відносно слабо пов'язаних з іонами металу, пояснюється і ряд властивостей, специфічних для металів, таких як висока електропровідність, теплопровідність, ковкість та ін. Енергія металічного зв'язку становить $\sim 1 - 5$ еВ/атом.

4) *ван-дер-ваальсові кристали* (Ne, Ar, Kr)

Ван-дер-ваальсові (молекулярні) кристали утворюються з електрично нейтральних атомів внаслідок диполь-дипольної взаємодії між ними. Під дією цих зв'язків утворюються кристали інертних газів при низьких температурах, утворюючи в усіх випадках щільно упаковані решітки. Ці зв'язки набагато слабші за всі розглянуті вище і тому помітно проявляють себе за відсутності умов для виникнення іонного, ковалентного металевого або водневого зв'язку. Енергія цього зв'язку дуже мала: 0,02 – 0,15 еВ/атом, що призводить до дуже низьких температур плавлення відповідних кристалів

5) *молекулярні кристали з водневими зв'язками* (H_2 , N_2 , H_2O , CO_2 , нафталін, мила, полімери)

В цих кристалах водневий зв'язок утворюється між негативно зарядженими атомами, що вже беруть участь у полярному ковалентному зв'язку з іншими атомами, коли між ними виявляється іон водню. Один з атомів забирає собі електрон водню, перетворюючи його на протон, якому іноді енергетично вигідніше опинитися між двома негативно зарядженими іонами, ніж бути пов'язаним лише з одним із перерахованих атомів. При цьому внаслідок кулонівського притягання негативних іонів до іона водню утворюється порівняно неміцний зв'язок. Енергія зв'язку приблизно в 10 разів перевищує ван-дер-ваальсову і в 10 разів слабша за ковалентну і коливається від 0,1 до 0,5 еВ/атом.

21.1.2. Квантові статистичні розподіли

Тверде тіло є системою, що складається з величезної кількості частинок, для опису стану якої існує два способи: термодинамічний і статистичний.

В основі **термодинамічного** опису стану системи лежить питання про зміну енергії в ній. У загальному випадку закон збереження енергії записується як:

$$dE = TdS - PdV + \mu dN, \quad (21.1)$$

де dE – зміна внутрішньої енергії системи; dN – зміна числа частинок в системі; T і P – температура та тиск; dS та dV – зміна ентропії та об'єму системи; μ – хімічний потенціал системи.

Для замкнутої системи постійного об'єму, яка не отримує і не віддає тепло, зміни ентропії та об'єму $dS = 0$ і $dV = 0$, відповідно. Тоді (21.1) набуває вигляду

$$dE = TdS - PdV + \mu dN, \quad (21.2)$$

звідки хімічний потенціал μ , який є термодинамічною функцією, що описує стан систем зі змінним числом частинок, дорівнює енергії додавання однієї частинки в систему без виконання роботи. Поняття хімічного потенціалу виявляється дуже важливим для аналізу термодинамічної рівноваги систем:

однією з умов рівноваги є рівність хімічного потенціалу для всіх частинок системи.

$$\mu = \frac{dE}{dN}. \quad (21.3)$$

Основною особливістю *статистичних* закономірностей є їх імовірнісний характер.

Статистичний підхід базується на моделі системи, що складається з N частинок. Для її описання застосовують хвильову функцію, статистичний зміст якої полягає в тому, що квадрат модуля хвильової функції визначає густину ймовірності знаходження частки (наприклад, електрона): $|\Psi|^2 = \frac{dw}{dV}$, де dw ймовірність знаходження частки елементі об'єму від V до $V+dV$, тому хвильову функцію, можна знайти можливість будь-якої конфігурації системи мікрочастинок. Крім того, як і у випадку однієї частинки, можна визначити ймовірність будь-якого значення будь-якої механічної величини як у системи в цілому, так і окремої частки, а також обчислити середнє значення механічної величини.

Хвильова функція системи частинок визначається із рішення рівняння Шредінгера. Аналізуючи розв'язання рівняння Шредінгера, можна зробити висновок, що в системі однакових частинок реалізуються лише такі стани, які не змінюються при перестановці частинок місцями (*принцип тотожності однакових частинок*). Цей принцип у квантовій механіці призводить до того, що всі можливі стани системи, утвореної однаковими частинками, поділяються на два типи:

- *симетричні*, які зберігають своє значення при перестановці аргументів:
- *антисиметричні*, які змінюють знак при перестановці аргументів.

Частинки, стан яких описуються симетричними хвильовими функціями, називаються *бозе-частинками* або *бозонами*. Таку назву вони отримали тому, що системи, що складаються з таких частинок, підпорядковуються статистиці Бозе-Ейнштейна. До бозонів відносяться фотони, π - і K - мезони, фонони у

твердому тілі, екситони в напівпровідниках та діелектриках тощо. Важливо, що всі бозе-частинки мають **нульовий** або **цілий спин**.

Частинки, стан яких описуються антисиметричними хвильовими функціями, називаються **фермі-частинками** або **ферміонами**. Системи, що складаються з таких частинок, підпорядковуються статистиці Фермі-Дірака. До фермі-частинок відносяться електрони, протони, нейтрони, нейтрино і всі елементарні частинки та античастинки з **напівцілим спином**.

Для ферміонів виконується **принцип (заборони) Паулі**: у системі тотожних ферміонів не може бути двох частинок, що знаходяться у одному й тому же квантовому стані. Що ж до системи, що складається з бозе-частинок, то принцип симетрії хвильових функцій не накладає будь-яких обмежень на стан системи. В тому самому стані може бути будь-яка кількість тотожних бозе-частинок.

Перелічені особливості у поведінці частинок, пов'язані з нерозрізненістю тотожних частинок у квантовій механіці, виявляються і в статистичних властивостях систем, що складаються з однакових частинок. Це призводить до того, що статистичні розподіли частинок у квантовій механіці відрізняються від статистичних розподілів, відомих з класичної фізики. З іншого боку, статистичні властивості бозе- і фермі-частинок через кардинальні розбіжності у поведінці цих частинок також виявляються різними.

21.1.3. Розподіл Бозе-Ейнштейна

В класичній фізиці, зокрема в молекулярній фізиці, розподіл часток за швидкостями (імпульсами, значеннями кінетичної енергії) описується розподілом Максвелла

$$dN_M = A_M \exp\left(-\frac{KE}{kT}\right) dp_x dp_y dp_z, \quad (21.4)$$

а за значеннями координат і, відповідно, потенціальної енергії – розподілом Больцмана

$$dN_B = A_B \exp\left(-\frac{PE}{kT}\right) dx dy dz, \quad (21.5)$$

де KE і PE – відповідно кінетична і потенціальна енергії, T – температура, k стала Больцмана, A_M і A_B – нормувальні константи.

Зі статистичних розподілів знаходиться найбільш ймовірний розподіл частинок, тобто такий розподіл, який може бути реалізований найбільшою кількістю способів. Згідно з основним постулатом статистичної фізики саме цей розподіл є рівноважним. При цьому вважається, що частинки не взаємодіють між собою (модель ідеального газу), а також, що всі розподіли, які призводять до однієї й тієї ж сумарної енергії частинок, реалізуються з однаковою ймовірністю.

Розглянемо різницю в розподілах класичних і квантових частинок (ферміонів і бозонів) на прикладі розподілу двох частинок за трьома станами (комірками). Класичні частинки, в силу їхньої помітності (відмінності однієї від іншої), відзначимо номерами 1 і 2. Квантові частинки одного сорту принципово тотожні, тому зобразимо їх чорними точками. При цьому фермі-частинки у відповідність до принципу заборони Паулі можуть перебувати в кожній комірці тільки поодиночі, а для бозе-частинок жодних обмежень на розподіл їх по комірцях не накладається. Результати розподілу наведено рис. 21.1.



Рисунок 21.1

Для класичних частинок число можливих розподілів (мікростанів) дорівнює дев'яти, а ймовірність кожного з них становить $1/9$. Для бозе-частинок виходить шість розподілів, а ймовірність кожного з них дорівнює $1/6$. Для фермі-частинок реалізуються лише три розподіли з ймовірністю випадання кожного з них $1/3$.

Якщо ввести величину Z – кількість квантових станів, тоді $\langle n \rangle = \frac{N}{Z}$ визначає середнє число частинок, що припадає на один енергетичний стан.

Вираз

$$\langle n \rangle_{B-E} = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{kT}\right) - 1} \quad (21.6)$$

є **розподілом Бозе-Ейнштейна**, який описує розподіл бозе-частинок за енергіями та визначає середню кількість бозе-частинок, що знаходяться у квантовому стані з енергією E (рис. 21.2). Величину $\langle n \rangle$ називають також **числом заповнення енергетичного рівня з енергією E** .

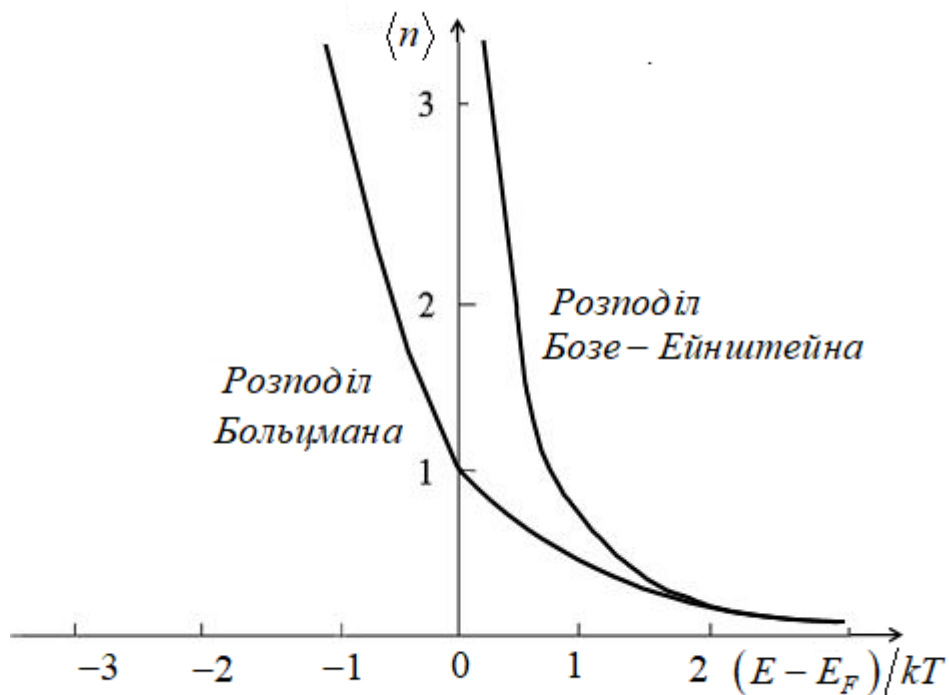


Рисунок 21.2

Важливою особливістю бозе-частинок є те, що їх кількість на одному енергетичному рівні нічим не обмежується і при малих значеннях $\frac{E - \mu}{kT}$ може бути досить великим. Крім того, хімічний потенціал μ для системи бозонів з постійною кількістю частинок є негативним, $\mu < 0$.

Для малого заповнення $\langle n \rangle_{B-E} \ll 1$, тому (21.6) набуває вигляду

$$\langle n \rangle_{B-E} \approx \exp\left(\frac{-E + \mu}{kT}\right) = A \exp\left(-\frac{E}{kT}\right), \quad (21.7)$$

де $A = \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right)$.

Отже, при малих числах заповнення (у разі *розрідженого бозе-газу*) розподіл Бозе-Ейнштейна перетворюється на класичний розподіл Больцмана.

Газ, властивості якого через нерозрізненість тотожних частинок у квантовій механіці відрізняються від властивостей класичного ідеального газу, називається *виродженим газом*. Оскільки розподіл Бозе-Ейнштейна істотно відрізняється від розподілу Больцмана, то газ бозонів є виродженим газом. З рис. 21.2 видно, що при $\frac{E - \mu}{kT} \gg 1$ ці розподіли збігаються. Відмінність між розподілами

виявляється при $\frac{E - \mu}{kT} < 1$. Саме в цьому випадку виявлятимуться властивості бозе-газу, зумовлені квантовою природою його частинок.

Для змінної кількості частинок хімічний потенціал системи бозонів дорівнює нулю, $\mu = 0$, тому рівняння (21.6) набуває вигляду

$$\langle n \rangle_{B-E} = \frac{1}{\exp\left(\frac{E}{kT}\right) - 1}. \quad (21.8)$$

21.1.4. Розподіл Фермі-Дірака

Фермі-частинки, що мають напівцілий спин, підпорядковуються принципу Паулі, згідно з яким в тому ж самому стані одночасно не може бути більше одного ферміону. Для ідеального фермі-газу, тобто системи, що складається із ферміонів, що не взаємодіють, співвідношення

$$\langle n \rangle_{\phi-D} = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{kT}\right) + 1} \quad (21.9)$$

є розподілом Фермі-Дірака, що визначає середнє число фермі-частинок, що знаходяться у квантовому стані з енергією E .

З (21.9) витікає, що $\langle n \rangle_{\phi-D}$ не може бути більше одиниці, оскільки чисельник виразу (21.9) дорівнює одиниці, а знаменнику до одиниці додається позитивна величина - експонента. Це означає, що в одному квантовому стані не може бути більше однієї фермі-частинки, що узгоджується з принципом Паулі. Оскільки $\langle n \rangle_{\phi-D} < 1$, то кажуть, що цей розподіл визначає можливість заповнення енергетичного рівня з енергією E при температурі T .

Хімічний потенціал для фермі-частинок може бути тільки позитивним, $\mu > 0$.

Для малих чисел заповнення, $\exp\left(\frac{E - \mu}{kT}\right) \gg 1$ і $\frac{E - \mu}{kT} \gg 1$, тому розподіл (21.9) набуває вигляду

$$\langle n \rangle_{\phi-D} \approx \exp\left(-\frac{E - \mu}{kT}\right) = A \exp\left(-\frac{E}{kT}\right), \quad (21.10)$$

де $A = \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right)$.

Отже, розподіл Фермі-Дірака при малих числах заповнення (у разі розрідженого фермі-газу) переходить у класичний розподіл Больцмана, аналогічно до розподілу Бозе-Ейнштейна. Це означає, що розріджені квантові

гази, як бозонів, так і ферміонів, є виродженими та підпорядковуються класичній статистиці. І хоча квантова статистика в такому випадку призводить до тих самих результатів, що і класична, квантова природа частинок газу залишається незмінною.

З рис. 21.3 видно, що при $\frac{E - \mu}{kT} \gg 1$ розподіли Больцмана і Фермі-Дірака збігаються, різниця спостерігається для $\frac{E - \mu}{kT} < 1$. Класичні частинки можуть накопичуватися в тому ж самому стані у великій кількості. Для них $\langle n \rangle$ тим більше, що менше енергія стану E . Максимальна кількість фермі-частинок не може перевищувати одиницю, що узгоджується із принципом заборони Паулі.

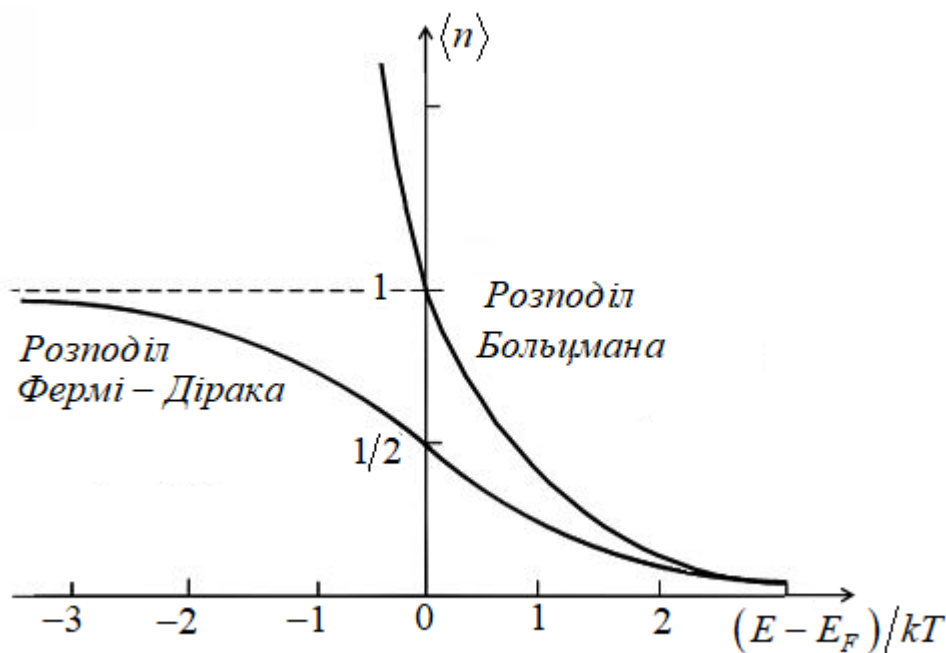


Рисунок 21.3

Хімічний потенціал μ , який має розмірність енергії, у разі фермі-частинок називають енергією Фермі чи рівнем Фермі та позначають E_F . З врахуванням цього (21.9) набуває вигляду

$$\langle n \rangle_{\text{Ф-Д}} = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1}. \quad (21.11)$$

Якщо енергія Фермі при $T=0$ позначити $E_F(0)$, то з аналізу розподілу витікає, що $\langle n \rangle_{\Phi-D} = 1$ при $E < E_F(0)$ та $\langle n \rangle_{\Phi-D} = 0$ при $E > E_F(0)$. Це означає, що усі квантові стани з енергіями $E < E_F(0)$ зайняти ферміонами, а усі стани з $E > E_F(0)$ – вільні. Тоді при $T=0$ енергія Фермі є максимальною енергією, яку можуть мати фермі-частинки (рис. 21.4, а). З підвищенням температури, замість різкого стрибка на графіку з'являється область завширшки декілька kT і перехід від заповнених станів до незаповнених відбувається більш плавно (рис. 21.4, б). Але за будь-якою температурою значення $\langle n \rangle_{\Phi-D}$ при $E = E_F$ дорівнює $\frac{1}{2}$.

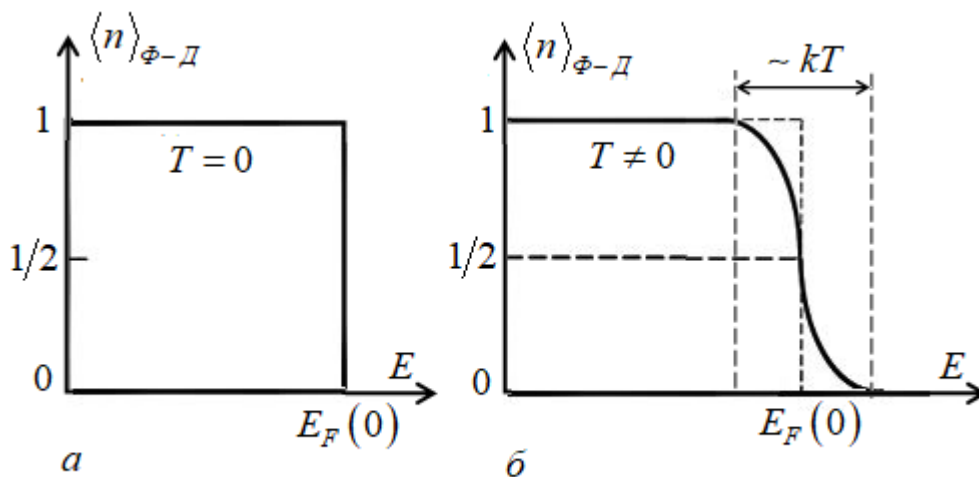


Рисунок 20.4

21.1.5. Електронний газ в металах

Для описання поведінки електронів провідності у металах використовують статистику Фермі-Дірака, скільки електрони є ферміонами – частинками з напівцілим спином. Звичайно застосовують **модель вільних електронів**, згідно з якою при утворенні кристалічної решітки від атомів відщеплюються найслабше пов'язані із нею (валентні) електрони. Такі електрони стають загальними для усіх атомів і можуть вільно переміщатися в кристалі. Вони, на відміну від електронів,

що заповнюють внутрішні електронні оболонки атомів, забезпечують електропровідність металів. Тому їх називають *електронами провідності*.

Слід зазначити, що електрони провідності в металах не є взагалі вільними, вони взаємодіють з іонами, що знаходяться у вузлах кристалічної решітки. Однак у першому наближенні цією взаємодією можна знехтувати та розглядати ідеальний газ вільних електронів, для яких металевий зразок є потенційною ямою.

При $T = 0$ електрони розташовуються на нижніх доступних їм енергетичних рівнях. Відповідно до принципу заборони Паулі у кожному стані може бути не більше одного електрона, але оскільки електрони можуть відрізнятися проєкцією спина ($\pm 1/2$), то на кожному енергетичному рівні буде перебувати по два електрони з різною орієнтацією спинів (рис. 21.5, а).

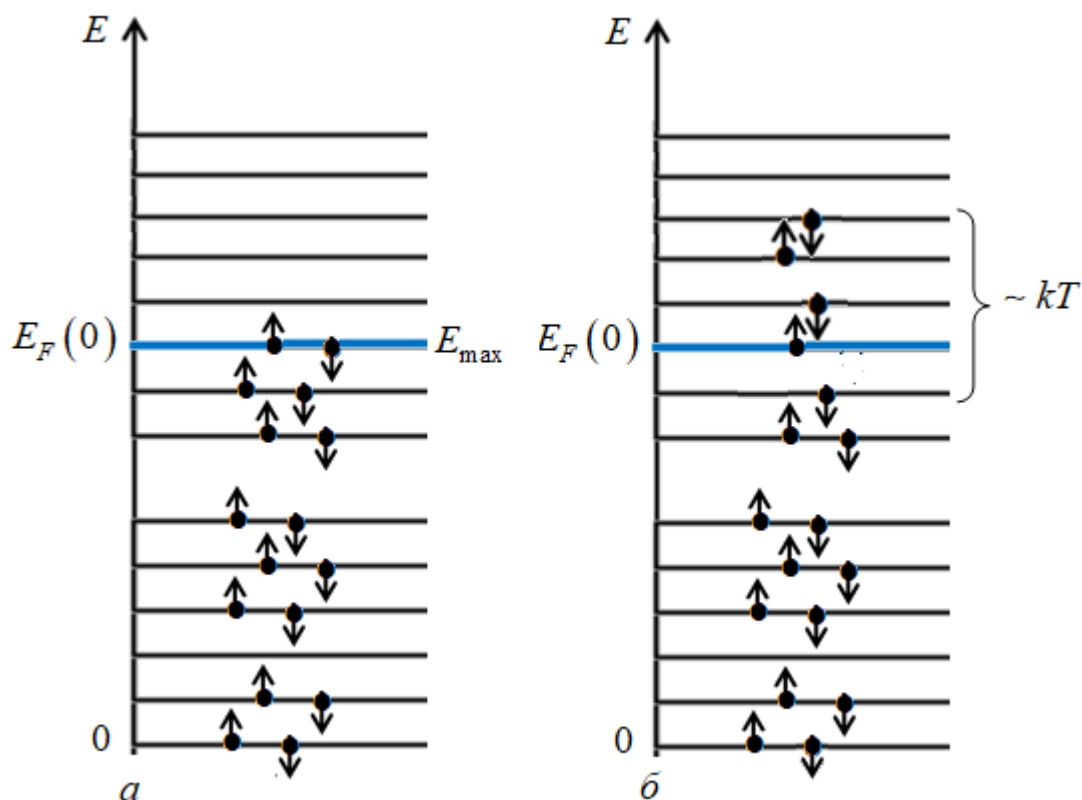


Рисунок 21.5

Два електрони заповнюють найнижчий енергетичний стан. Третій та четвертий електрони знаходяться на першому збудженому енергетичному рівні,

наступна пара електронів – на другому. Якщо число електронів в металі дорівнює N , то при $T = 0$ будуть заповнені перші $N/2$ рівнів з енергією $E \leq E_{\max}$, а інші з $E > E_{\max}$ – залишаться вільними. З розподілу Фермі-Дірака (21.11) витікає, що $E_{\max} = E_F(0)$. Хоча енергія електронів у металі квантується та енергетичний спектр електронів є дискретним, рівні енергії розташовані настільки щільно, що енергетичний спектр електронів можна вважати практично безперервним (*квазінеперервним*).

Якщо *щільність квантових станів* (число станів, що припадає на одиничний енергетичний інтервал) є

$$g(E) = \frac{\sqrt{2}(m_0)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} V \sqrt{E}, \quad (21.12)$$

то повне число вільних електронів в металі

$$N = \int_0^{\infty} g(E) \cdot \langle n \rangle_{\Phi-D} \cdot dE, \quad (21.13)$$

а *концентрація електронів* $n = N/V$ з врахуванням (21.12) становить

$$n = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{2}(m_0)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E} \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1} dE. \quad (21.14)$$

Функція $F(E)$, що входить до (21.14) і дорівнює

$$F(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{\sqrt{2}(m_0)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E} \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1} \quad (21.15)$$

називається *функцією розподілу вільних електронів за енергіями*.

При $T = 0$ розподіл електронів за енергіями визначається виразами

$$dn = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}(m_0)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E} dE, & E < E_F(0), \\ 0, & E > E_F(0). \end{cases} \quad (21.16)$$

Графік залежності функції розподілу від енергії при $T = 0$ показаний на рис. 21.6,а, де площа під кривою $F(E)$ чисельно дорівнює концентрації n вільних електронів в металі.

Енергія Фермі $E_F(0)$ при $T = 0$ становить

$$E_F(0) = \frac{\hbar^3}{2m_0} (3\pi^2 n)^{2/3}. \quad (21.17)$$

і зазвичай є порядку декількох електрон-Вольтів.

Крім енергії Фермі вводиться поняття **температури Фермі**, яка визначається з $kT_F = E_F(0)$ як

$$T_F = \frac{E_F(0)}{k}, \quad (21.18)$$

чисельні значення якої в залежності від металу в сотні разів перевищує кімнатну.

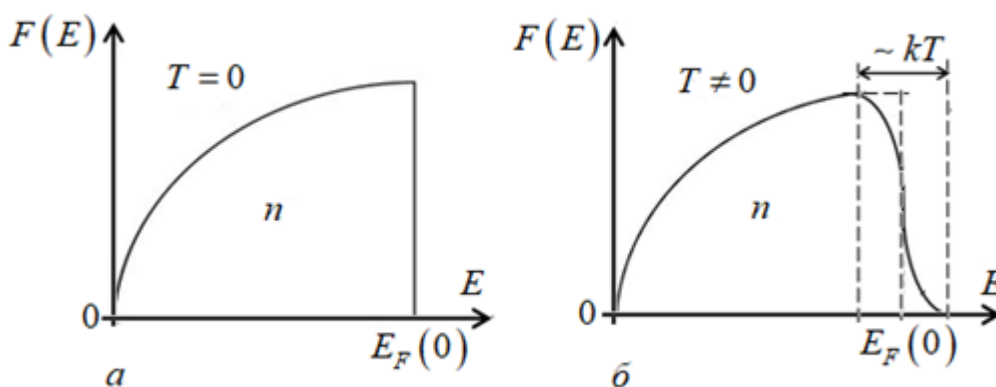


Рисунок 21.6

Отже, усі стани, енергія яких менша за енергію Фермі на величину $\sim kT$, зайняті електронами, а ті, енергія яких перевищує енергію Фермі на величину з $\sim kT$, виявляються вільними. І лише в області енергій шириною $\sim kT$ поблизу енергії Фермі є стани, частково заповнені електронами (рис. 21.5, б). Хоча ширина цієї області, зазвичай, невелика порівняно з енергією Фермі, ця область відіграє дуже значну роль, тому що тільки електрони, що заповнюють стани в цій області, можуть брати участь у різних фізичних процесах, що відбуваються в металах, і тільки їхня енергія може змінюватися в ході цих процесів.

Функція розподілу $F(E)$ при $T > 0$ має вид, показаний на рис. 21.6, б. Енергія Фермі в цьому випадку становить

$$E_F \simeq E_F(0) \cdot \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_F(0)} \right)^2 \right]. \quad (21.19)$$

Поведінку електронів ми описували, застосовуючи наближення виродженого електронного газу, тобто газу, властивості якого істотно відрізняються від властивостей класичного ідеального газу через нерозрізненість тотожних частинок у квантовій механіці. Газ, що складається з квантових частинок, виявляється виродженим тоді, коли середня відстань між частинками стає меншою або порівнянною з довжиною дебройлівської хвилі частинки. Саме з цим пов'язана та обставина, що квантові розподіли Бозе-Ейнштейна та Фермі-Дірака у разі розріджених газів, коли ця умова порушується, переходять у класичний розподіл Больцмана.

Поведінка газу значною мірою залежить від його температури. **Температурою виродження** називається температура, нижче за яку проявляються квантові властивості газу, зумовлені тотожністю його частинок. Для газу, що складається з бозе-частинок, температура виродження визначається як температура, нижче за яку відбувається бозе-конденсація, тобто перехід помітної кількості частинок у стан із нульовою енергією. Для газу, що складається з фермі-частинок, температурою виродження є температура Фермі (21.18). Оскільки температура Фермі для металів має величину $\sim 10^4$ К, то електронний газ в металах виявляється виродженим за всіх температур, за яких метал залишається у твердому стані.

Для звичайних газів, що складаються з атомів або молекул, що є фермі-частинками, температура виродження близька до абсолютного нуля. Тому такі гази у всій області температур до температури зрідження є невиродженими та підпорядковуються класичній статистиці Максвелла-Больцмана.

21.1.6. Теплові властивості твердих тіл

Атоми у твердому тілі здійснюють коливання за будь-яку температуру здійснюють теплові коливання навколо своїх положень рівноваги. При нагріванні тіла теплота, що поглинається, збільшую інтенсивність цих коливань. Основні особливості теплового руху у твердих тілах відстежують по змінах теплоємності в залежності від температури.

Теплоємність – фізична величина, що визначається кількість енергії, що необхідно передати тілу для підвищення його температури на 1 градус. Якщо йдеться про теплоємність одиниці об'єму (c), то це **питома теплоємність**, а якщо 1 молю – **молярна теплоємність** (C). Теплоємність може бути визначена при постійному об'ємі (c_v, C_v) або при постійному тиску (c_p, C_p). Відмінність цих величин пов'язана з витратою енергії на теплове розширення, тому завжди ($C_v < C_p$).

Класична теорія теплоємності ґрунтувалася на теоремі про рівномірний розподіл енергії за ступенями свободи, згідно з якою на кожен ступень вільності в середньому припадає енергія, що дорівнює $\frac{1}{2}kT$, де k – стала Больцмана, а T – абсолютна температура. Оскільки атом (іон, молекула) сприймається як класичний гармонійний осцилятор, що здійснює коливання у трьох напрямках, то його середня енергія теплового руху дорівнює kT . Якщо взяти один моль речовини, що містить число Авогадро N_A атомів, то їх середня енергія теплового руху дорівнюватиме $3N_A kT$, звідки молярна теплоємність (за визначенням) $3N_A k = 3R$, де R – універсальна газова стала. З цього виходить, що теплоємність твердих тіл не повинна залежити від температури.

Отже, вираз для молярної теплоємності при постійному об'ємі

$$C_v = 3R \quad (21.20)$$

має назву **закону Дюлонга і Пті**.

Цей закон підтверджується для багатьох твердих тіл в інтервалі від кімнатних температур і до $\sim 400K$.

Дослідження теплових властивостей в області низьких температур показало, що теплоємність зменшується зі зниженням температури та прагне до нуля при $T \rightarrow 0K$. Крім того, закон Дюлонга і Пті суперечить положенню, що $C_V \rightarrow 0$ при $T \rightarrow 0K$, що випливає із теореми Нернста (8.42). Ці проблеми змогли подолати Ейнштейн і Дебай, спираючись на квантові уявлення.

Модель Ейнштейна: А. Ейнштейн запропонував модель твердого тіла, згідно з якою всі атоми тіла коливаються з однією і тією ж частотою, але замість класичної теореми про рівномірний розподіл енергії за ступенями вільності необхідно використовувати формулу Планка, що враховує квантування енергії. Виходячи з цього, енергія системи з N_0 атомів, яка визначається коливаннями решітки, дорівнює

$$E_{\text{реш}} = \frac{3N_A \hbar \omega}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1}, \quad (21.21)$$

де $\hbar$ – стала Планка.

Тоді теплоємність становить

$$C_V = \frac{3N_A k \left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right)^2}{\left(\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1\right)^2} \exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right). \quad (21.22)$$

В області високих температур (21.22) набуває вид закону Дюлонга і Пті, а при низьких температурах

$$C_V \approx \exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right). \quad (21.23)$$

Обмеженість моделі Ейнштейна полягає в його припущенні рівності частот усіх пружних хвиль у твердому тілі.

Модель Дебая: П. Дебай, базуючись на ідеї Ейнштейна про квантування гармонічних осциляторів згідно з формулою Планка, припустив, що осцилятори коливаються з різними частотами.

Для опису індивідуальних коливань частинок розглядають їх колективний рух у кристалі, як у просторово упорядкованій системі. Такий колективний рух – це **нормальні коливання** (або **власні коливанням**, або **моди**) решітки.

Кожне нормальне коливання несе із собою енергію та імпульс. Нормальне коливання решітки можна уявити як коливання вільного осцилятора, маса якого дорівнює масі атомів твердого тіла, що здійснюють коливання з частотою ω .

Мінімальна порція енергії, яку може поглинути або випустити решітка при теплових коливаннях, відповідає переходу з даного енергетичного рівня на сусідній рівень і дорівнює:

$$\varepsilon_{\phi} = \hbar\omega, \quad (21.24)$$

Цю порцію чи квант енергії теплових коливань решітки називають **фооном**.

Модель Дебая розглядає коливання кристалічної решітки як газ квазічастинок – фононів.

Енергія осцилятора дорівнює

$$E = \frac{9nkT}{\left(\frac{\Theta_D}{T}\right)} \int_0^{\frac{\Theta_D}{T}} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \quad (21.25)$$

де $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$, а Θ_D – характеристична температура Дебая, яка становить

$$\Theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k}. \quad (21.26)$$

де ω_D – максимальна частота коливань атомів твердого тіла, що дорівнює

$$\omega_D = v \cdot \sqrt[3]{\frac{6\pi^2 N}{V}}. \quad (21.27)$$

Температура Дебая – температура, за якої збуджуються всі моди коливань у цьому твердому тілі. Подальше збільшення температури не призводить до

появи нових мод коливань, а лише веде до збільшення амплітуд тих мод коливань, що вже існують, тобто середня енергія коливань зі зростанням температури зростає.

Відповідно до формули (21.25) за високих температур теплоємність $C_V = 3R$, що збігається із законом Дюлонга і Пті (21.20), а за низьких

$$C_V = \frac{12\pi^4 NkT}{5\Theta_D^3} T^3. \quad (21.28)$$

Формула (21.28) виражає **закон кубів Дебая**, згідно з яким при низьких температурах теплоємність твердого тіла зростає пропорційно до куба температури

$$C_V(T) \sim \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3. \quad (21.29)$$

У реальних кристалах при дуже низьких температурах коливання атомів мають ангармонічний характер. Ангармонічні коливання – це періодичні коливання, що не є монохроматичним, тобто в їх спектрі окрім основної частоти присутні частоти, кратних частоті основного тону. Поява ангармонічності призводить до того, що нормальні коливання решітки перестають бути незалежними та при зустрічах взаємодіють один з одним, обмінюючись своєю енергією та змінюючи напрямок свого поширення. Внаслідок протікання таких процесів стає можливою передача енергії від коливання однієї частоти до коливань іншої частоти та встановлення в кристалі теплової рівноваги. Здатність речовини переносити теплову енергію від більш нагрітих до менш нагрітих тіл характеризує **теплопровідність**.

Для кількісної оцінки теплопровідності застосовується **коефіцієнт теплопровідності** κ , який характеризує властивість речовини проводити теплову енергію.

З теорії явищ перенесення коефіцієнт теплопровідності дорівнює

$$\kappa = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle C_V, \quad (21.30)$$

де $\langle v \rangle$ – середня швидкість фононів, $\langle \lambda \rangle$ – середня довжина вільного пробігу фононів, C_V – теплоємність фононного газу одиниці об'єму.

В області високих температур $T > \Theta_D$ концентрація фононів змінюється пропорційно росту температури $n_\phi \sim T$.

При температурах нижче дебаївської $T < \Theta_D$ концентрація фононів різко зменшується при зниженні температури, внаслідок чого довжина їх вільного пробігу різко зростає і при $T < \frac{\Theta_D}{20}$ сягає величини, порівнянної з розмірами кристала.

Подальше зниження температури не змінює $\langle \lambda \rangle$, оскільки вона визначається розмірами кристала. Температурна залежність теплопровідності решітки в цьому діапазоні температур визначається залежністю від температури теплоємності кристала C_V , яка пропорційна T^3 , тому решіткова теплопровідність $\kappa_{\text{реш}} \sim T^3$ (рис. 21.7). У міру збільшення температури зростає концентрація фононів, але підвищення концентрації фононів супроводжується посиленням інтенсивності фонон-фононного розсіювання та зменшенням $\langle \lambda \rangle$, що призводить до падіння

$$\kappa_{\text{реш}} \sim \frac{1}{T}.$$

З ангармонічністю коливань решітки пов'язане **теплове розширення** – збільшення лінійних розмірів і об'єму тіла. Здатність твердого тіла змінювати свої лінійні розміри при нагріванні (охолодженні) характеризується коефіцієнтами лінійного α та об'ємного β розширень

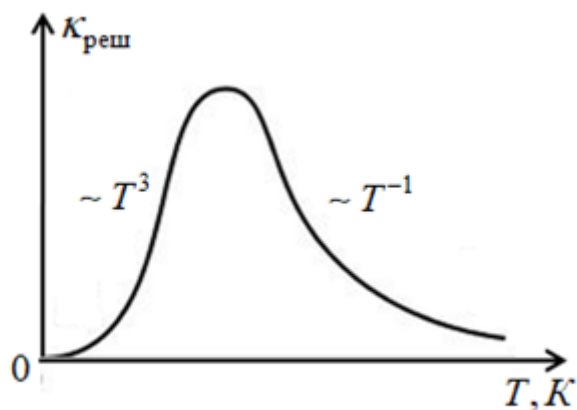


Рисунок 21.7

$$\alpha = \frac{1}{l} \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_p, \quad (21.31)$$

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, \quad (21.32)$$

де l – видовження, V – об’єм тіла, індекс p означає що похідна береться при постійному тиску.

В ізотропному середовищі $\beta = 3\alpha$, тому що коефіцієнти лінійного розширення однакові за всіма напрямками.

В гармонійному наближенні середня відстань між атомами r_0 не залежить від амплітуди коливань, а, отже, і від температури. Як видно із залежності потенційної енергії взаємодії частинок твердого тіла від відстані між ними (рис. 21.8), при абсолютному нулі частинки розташовуються на відстанях r_0 , що відповідають мінімуму енергії взаємодії U_0 . Ці відстані визначають розмір тіла

при $T = 0$. З підвищенням температури частинки починають коливатися навколо положень рівноваги. Коли частинка, що коливається, проходить через положення рівноваги, то її потенційна енергія мінімальна, а кінетична енергія – максимальна. У крайніх положеннях частинка має максимальну потенційну енергію і нульову кінетичну. Підвищення температури тіла призводить до

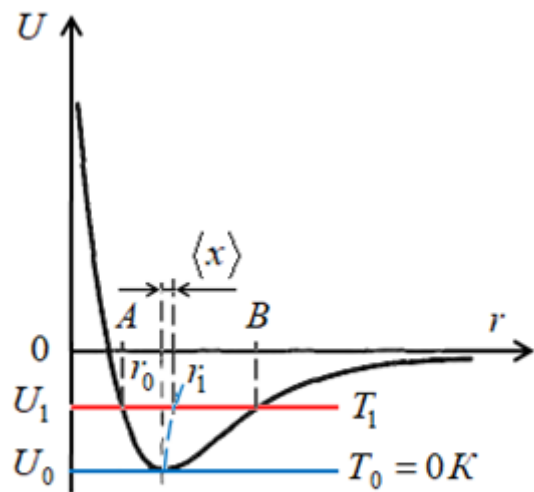


Рисунок 21.8

збільшення максимальної потенціальної енергії і тому кожному значенню потенціальної енергії на кривій відповідає два значення міжатомної відстані (точки A і B для U_1), з яких перше характеризує найбільше зближення, а друге – найбільшу віддаленість двох сусідніх частинок. Середнє положення частинки, що коливається, при даному максимальному значенні потенціальної енергії визначається серединою відповідного горизонтального відрізка. Так, для

температури T_1 середня відстань між частинками дорівнює $r_1 > r_0$, що відповідає збільшенню середньої відстані між частинками на $\langle x \rangle$.

Таким чином, з підвищенням температури збільшується максимальна потенціальна енергія частинок, що коливаються, збільшується амплітуда їх коливань у вузлах решітки та середня відстань між частинками. Усе це зумовлено несиметричністю кривої потенційної енергії взаємодії, тобто ангармонічним характером коливань частинок у вузлах решітки. В підсумку, коефіцієнт лінійного розширення виявляється пропорційним теплоємності тіла.

21.1.7. Зонна теорія твердих тіл

Зонна теорія твердих тіл – це квантова теорія, що описує рух електронів в кристалі. Відповідно до неї енергетичний спектр кристалів складається з зон, що чергуються, з дозволеними та забороненими значеннями енергії. Суворо кажучи, для отримання енергетичного спектра треба для кожного електрона і кожного ядра записати рівняння Шредінгера і додатково врахувати їх взаємодію. Оскільки кристали складаються з великої кількості частинок, то безпосередньо розв'язати таку задачу неможливо. Тому в основу зонної теорії покладені деякі припущення, з застосуванням яких багатеелектронна задача зводиться до задачі про рух одного електрона у зовнішньому самопогодженому періодичному полі з періодом, що дорівнює параметру кристалічної решітки.

В ізольованому атомі електрон може перебувати на певних енергетичних рівнях, які називаються **дозволеними**. Дозволені значення енергії в атомі відокремлені одна від одної широкою областю **заборонених енергій** – **забороненою зоною**, ширина якої ΔE . Якщо кристал складається з N ізольованих атомів, то доки атоми не взаємодіють, їх енергетичні рівні однакові. Заповнення рівнів електронами здійснюється у кожному атомі незалежно від заповнення аналогічних рівнів інших атомах. У міру зближення атомів взаємодія, яка виникає між ними, посилюється, що призводить до того, що

енергетичні рівні зміщуються, розщеплюються та розширюються в зони, утворюючи так званий зонний енергетичний спектр. Замість одного, однакового для усіх N атомів рівня виникає N дуже близьких рівнів. Отже, кожен рівень ізольованого атома розщеплюється в N густо розташованих рівнів, що утворюють смугу або енергетичну зону, що формують зонний енергетичний спектр електронів. Рис. 21.9 демонструє розщеплення енергетичних рівнів для зближення двох, чотирьох і N атомів.

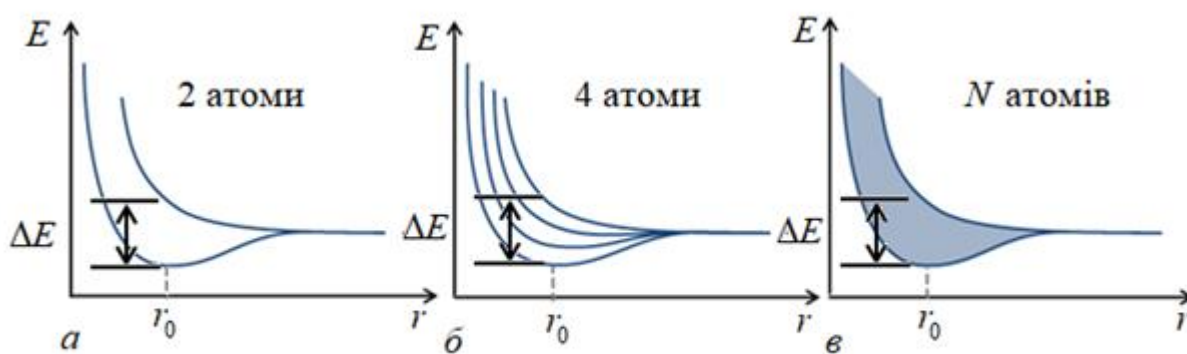


Рисунок 21.9

В ізольованому атомі ширина енергетичного рівня становить $\sim 10^{-7}$ еВ. В кристалі внаслідок проникнення електронів через потенційний бар'єр, що поділяє атоми, виникає зона дозволених значень енергії ~ 1 еВ, що складається з N близько розташованих рівнів, що відрізняються енергіями $\sim 10^{-22}$ еВ. Дозволені енергетичні зони відокремлюються одна від одної зонами заборонених значень енергії, ширина яких сумірна з шириною дозволених зон (рис. 21.10). З ростом енергії ширина дозволених зон збільшується, а заборонених зон зменшується. Дозволені зони в твердому тілі можуть бути по-різному заповнені електронами: у граничних випадках цілком заповнені або повністю вільні. Електрони можуть переходити з однієї дозволеної зони в іншу. Для переходу в сусідню зону, що розташована вище, необхідно затратити енергію, що дорівнює ширині забороненої зони (порядку декількох еВ). Для внутрішньозонових переходів необхідна дуже мала енергія, $\sim 10^{-4} - 10^{-6}$ еВ. Енергія, яка потрібна для внутрішньозонових і міжзонових переходів, може бути отримана за рахунок зовнішнього тепла.

Отже, різниця в електричних властивостях твердих тіл з точки зору зонної теорії пояснюється різним заповненням електронами дозволених зон і шириною заборонених зон. Саме ці фактори є визначальними для того, чи відноситься дане тверде тіло до провідників, напівпровідників чи діелектриків.

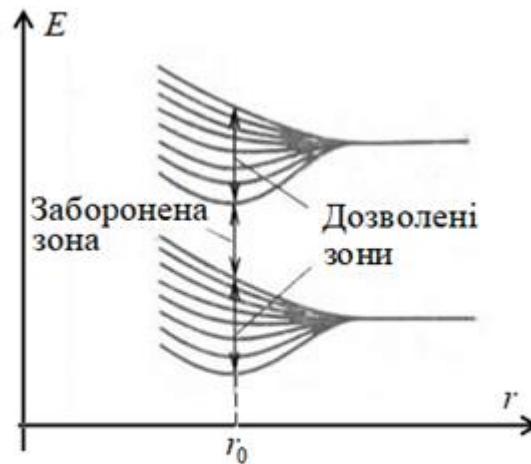


Рисунок 21.10

Залежно від ступеня заповнення зон електронами та ширини забороненої зони можливі чотири випадки (рис. 21.11).

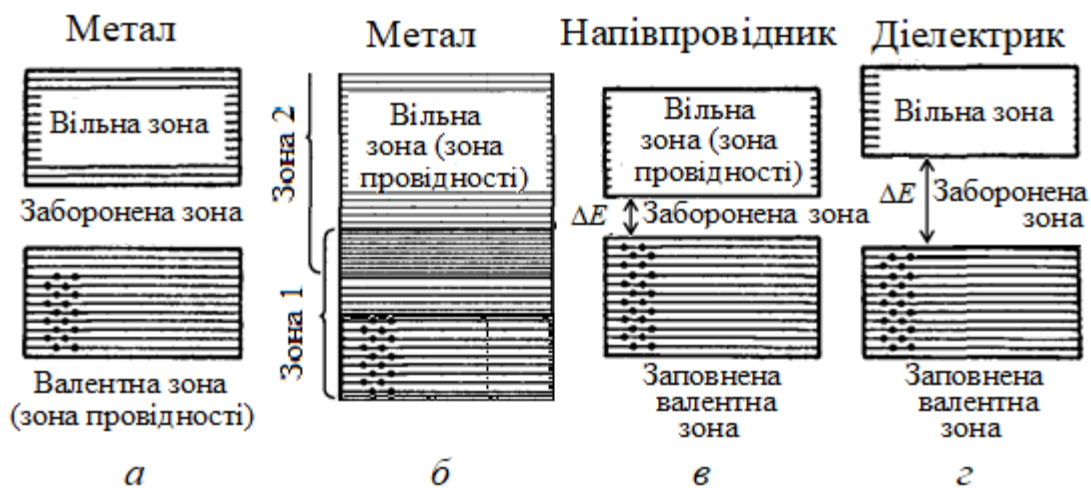


Рисунок 21.11

Зона, утворена рівнями енергії, на яких перебувають валентні електрони в основному стані атома, називається **валентною зоною**. При абсолютному нулі валентні електрони заповнюють попарно нижні рівні валентної зони.

Зона провідності утворена енергетичними рівнями, перебуваючи на яких електрон є усупільненим, тобто не пов'язаним з окремим атомом (зона вільних електронів). Якщо в зоні провідності є електрони, то при накладанні електричного поля по речовині буде протікати струм.

У металах (рис.21.11, а) валентна зона не повністю заповнена електронами. Електронам, що перебувають на верхніх енергетичних рівнях, досить надати енергію $\sim 10^{-23}$ еВ, щоб перевести їх на більш високі рівні, зробити вільними. Енергія теплового руху (kT) становить при 1К величину порядку 10^{-4} еВ, тобто при температурах є вільні електрони. Це означає, що тверде тіло буде провідником, коли валентна зона частково заповнена і є зоною провідності.

У металах (рис. 21.11, б) зона провідності перекривається з валентною зоною. У цьому випадку утворюється широка «гібридна» зона, яку валентні електрони заповнюють лише частково. Вище зайнятих рівнів розташовані вільні рівні й таке тверде тіло, як і у попередньому випадку буде провідником.

У діелектриків (рис. 21.11, в) валентна зона заповнена повністю, ширина забороненої зони велика ($\Delta E \geq 3$ еВ) тепловий рух не може перекинути електрон з валентної зони в зону провідності. Тільки при прикладанні дуже сильних електричних полів можливий перехід електрона в зону провідності (пробій діелектрика при пробивних напругах, що залежать від роду матеріалу і його товщини).

У напівпровідників (рис. 21.11, г) валентна зона заповнена повністю. Ширина забороненої зони невелика ($\Delta E \sim 1$ еВ). При температурах 200–300°С або зовнішніх впливах (наприклад, опромінення світлом) електрони переходять із валентної зони в зону провідності і тоді по напівпровідниках протікає струм.

21.1.8. Власна провідність напівпровідників

Напівпровідники – це значна група речовин, що за своїми електричними властивостями займають проміжне положення між провідниками та

діелектриками. Якщо для провідників питома електропровідність становить $\sigma_m = 10^5 - 10^8 \text{ См/м}$, для діелектриків $\sigma_d = 10^{-8} - 10^{-20} \text{ См/м}$, то для напівпровідників вона знаходиться у досить широких межах $\sigma = 10^{-8} - 10^2 \text{ См/м}$, до того ж вона суттєво залежить від температури, тиску, електричного і магнітного полів, складу речовини тощо.

Оскільки ширина забороненої зони для напівпровідників дуже незначна ($\Delta E \approx 0,05 - 3 \text{ eV}$), то достатньо досить невисокої температури (наприклад, кімнатний), щоб перевести деяку кількість електронів з атомів до зони провідності. Безперервне підвищення температури посилює процес такого переходу та провідність напівпровідника внаслідок цього збільшується.

Отже, електропровідність у напівпровідниках визначається електронами. Вона називається **електронною електропровідністю** або електропровідністю ***n-типу***. В такому випадку електрони, що створюють струм, належать атомам самого напівпровідника, а не атомам домішки, тому таку електропровідність називають **власною**.

Атом, електрон якого перейшов у зону провідності, перетворюється на позитивний іон, який є закріпленим на місці та не в змозі рухатися та брати участь у створенні струму (рис. 20, 12, *а*). Але місце відсутнього електрона може зайняти електрон із сусіднього атома. Внаслідок цього переходу з'явиться недолік електрону в іншого атому. Такий процес може мати місце одночасно в багатьох атомів. коли електрон заповнює дірку в іншому атомі, в результаті чого відповідна дірка перестає існувати, то цей процес називається **рекомбінацією**. Середній час перебування електрона у зоні провідності називається часом життя.

Якщо прикласти електричну напругу, перескок електронів з одних атомів на інші (сусідні) набуде характеру спрямованого переміщення їх в одну сторону. Одночасно з цим позитивно заряджені іони, що утворюються, будуть виникати в напрямку, протилежному руху електронів. Це буде схоже на позитивні заряди, що рухаються, тобто на струм, створюваний позитивними електричними

зарядами, які рухаються в напрямку, протилежному руху електронів (рис. 21.12, б).

Відсутність в атомі електрона в результаті переходу його в зону провідності, називається **діркою**. Електричний струм, що утворюється при русі дірок, називають **дірковим струмом**, а електропровідність, обумовлену дірковим

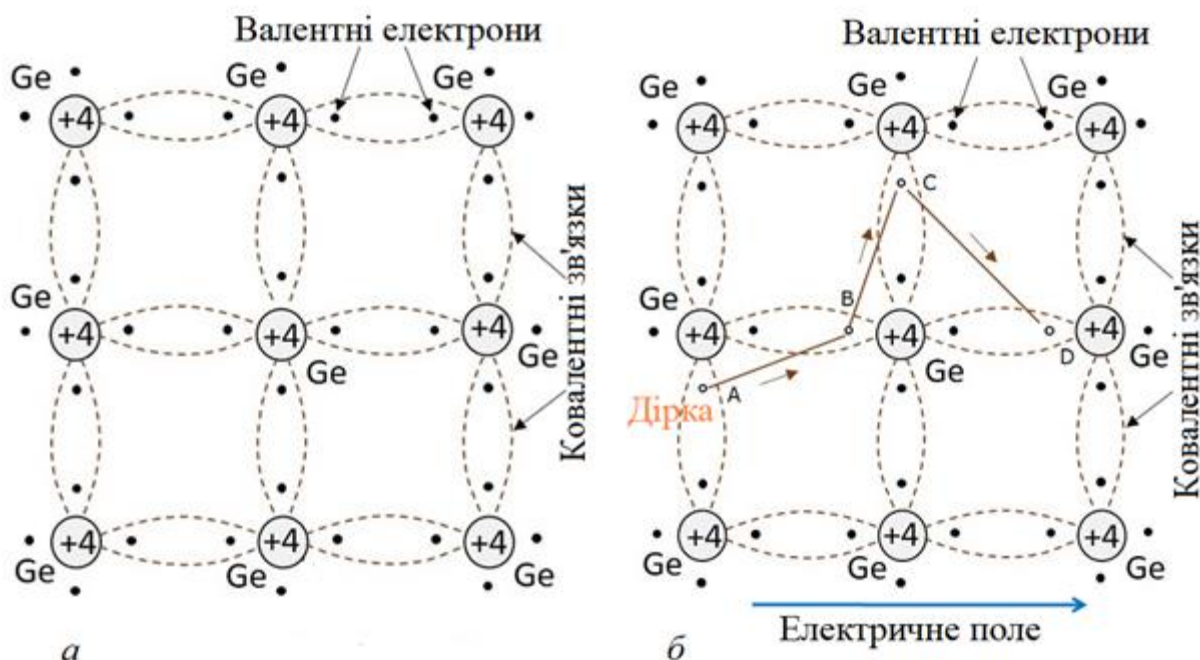


Рисунок 21.12

струмом, – **дірковою електропровідністю** або електропровідністю **p-типу**.

Власна електропровідність характеризується рівною кількістю електронів і дірок – носіїв негативних і позитивних зарядів, тому загальний струм в напівпровіднику є сумою електронного і діркового струмів. Чим вище температура і менше ширина забороненої зони (яка також залежить від температури), тим вище швидкість теплової генерації носіїв заряду (електронів і дірок) і зворотного процесу – рекомбінація носіїв заряду, тобто повернення електронів до валентної зони зі зникненням пари носіїв заряду. Процес утворення пари вільних носіїв заряду – електрона та дірки під дією теплового збудження називається **тепловою генерацією**.

В результаті процесів теплової генерації та рекомбінації в напівпровіднику при будь-якій температурі встановлюється **рівноважна концентрація** електронів і дірок.

У власному напівпровіднику рівень Фермі знаходиться у середині забороненої зони. Оскільки енергія активації, що дорівнює ширині забороненої зони, йде на перехід електрона з верхнього рівня валентної зони на нижній рівень зони провідності та водночас на появу дірки в валентній зоні. Отже, енергія, витрачена на утворення пари носіїв струму, ділиться на дві рівні частини, і таким чином початок відліку для кожного з цих процесів (перехід електрона та поява дірки) має знаходитися в середині забороненої зони. Отже, енергія Фермі для власних напівпровідників дорівнює половині ширини забороненої зони

$$E_F = \Delta E / 2. \quad (21.33)$$

Кількість електронів, що перейшли у зону провідності, та відповідна кількість дірок визначається як

$$n \approx A \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT}\right), \quad (21.34)$$

де n – концентрація носіїв заряду, ΔE – ширина забороненої зони, k – стала Больцмана, A – константа, що залежить від температури T .

Враховуючи те, що ці електрони та дірки є носіями струму, і те, що провідність пропорційна їх числу, то електропровідність власних напівпровідників зростає з температурою за законом:

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right). \quad (21.35)$$

Питома електропровідність в чистому напівпровіднику складається з електронної та діркової провідностей

$$\sigma = \sigma_n + \sigma_p = en(\mu_n + \mu_p), \quad (21.36)$$

де e – заряд електрону, n – концентрація вільних електронів, що дорівнює концентрації вільних дірок, μ_n і μ_p – рухливості електронів і дірок, відповідно. Під *рухливістю* розуміють величину, що дорівнює середній швидкості носіїв заряду в електричному полі.

21.1.9. Домішкова провідність напівпровідників

Домішкова провідність напівпровідників виникає, коли деякі атоми в вузлах кристалічної решітки замінюють атомами, валентність яких відрізняється на одиницю від валентності основних атомів.

Якщо валентність домішки на одиницю більше, ніж валентність основних атомів, наприклад, домішка п'ятивалентного миш'яку As в чотирьохвалентному германію Ge (рис. 21.13,а), то п'ятий валентний електрон As легко відщеплюється від атома за рахунок енергії теплового руху, утворюючи вільний електрон, не утворюючи при цьому дірки. Таким чином, в такому напівпровіднику спостерігається тільки один вид носіїв заряду – електрони, а сам напівпровідник характеризується **електронною провідністю** або **провідністю *n*-типу**. Атоми домішки, що поставляють електрони провідності, називаються **донорами**.

Провідність донорного напівпровідника залежить від рухливості електронів μ_n і визначається як

$$\sigma = en\mu_n. \quad (21.37)$$

Якщо в решітку чотирьохвалентного германію Ge ввести домішковий атом трьохвалентного бору B (рис. 21.13, б), тобто валентність домішки буде на одиницю менше, ніж валентність основних атомів, то трьох валентних електронів буде недостатньо для утворення зв'язків із сусідніми атомами. Тому один із зв'язків виявиться неукомплектованим й буде місцем, здатним захопити електрон. Четвертий електрон може бути захоплений від сусіднього атома Ge. На місці захопленого електрона виникає дірка. Але дірки не залишаються локалізованими, а переміщаються в решітці Ge як вільні позитивні заряди.

Таким чином, в цьому напівпровіднику носіями струму будуть дірки, напівпровідник має **діркову провідність** або **провідність *p*-типу**. Атоми домішки, що викликають виникнення дірок, називаються **акцепторами**.

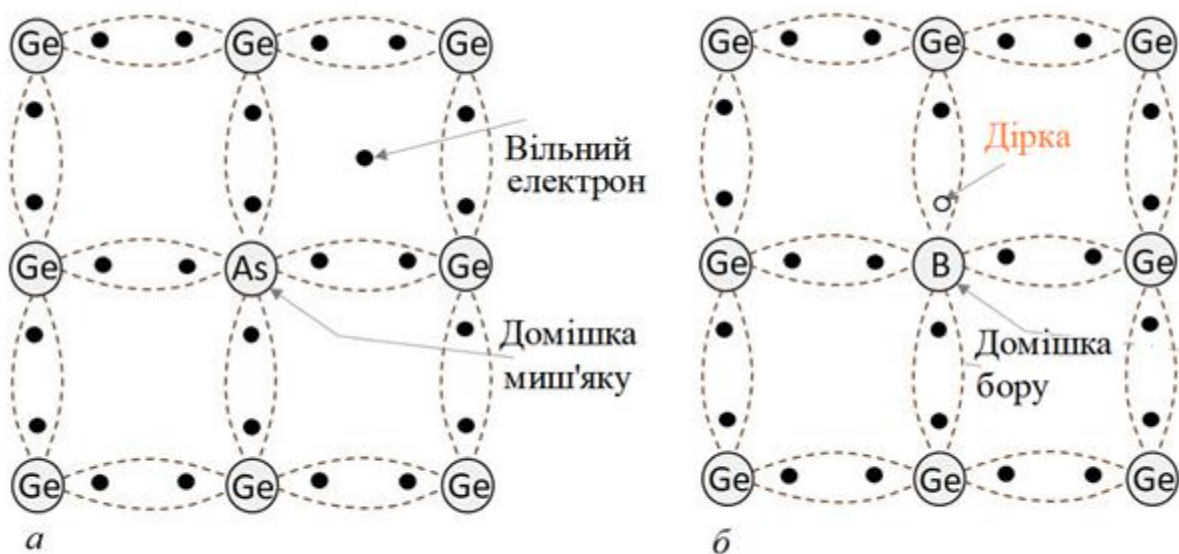


Рисунок 21.13

Зонні діаграми домішкових напівпровідників показані на рис. 21.14. Звичайно відсотковий вміст домішкових атомів незначний, тому відстані між ними відносно великі, тому їх можна розглядати як ізольовані атоми, рівні яких не перетворюються на зони. Ці домішкові рівні зображені на діаграмі штрихами, кожен штрих відповідає атому домішки.



Рисунок 21.14

Донорна домішка характерна тим, що її валентні рівні розташовуються у верхній половині забороненої зони (рис. 21.14, а); всі ці рівні заповнені при $T = 0K$. Акцепторна домішка характерна тим, що валентні рівні розташовуються у нижній половині забороненої зони (рис. 21.14, б); всі ці рівні порожні при

$T = 0K$. Переходи електрона з донорного рівня в зону провідності або валентної зони на акцепторний рівень вимагають порівняно невеликої енергії. Тому домішкова провідність виявляється набагато більшою за власну. Однак цей висновок стосується лише порівняно низьких температур. Річ у тому, що в міру підвищення температури власна провідність зростає безперервно, а домішкова має межу, що відповідає іонізації всіх наявних домішкових атомів. Таким чином, за досить високої температури провідність напівпровідника завжди буває майже власною.

Провідність акцепторного провідника залежить від концентрації p та рухливості μ_p дірок і становить

$$\sigma = e p \mu_p. \quad (21.37)$$

Наявність домішкових рівнів у напівпровідниках суттєво змінює положення рівня Фермі E_F . У напівпровіднику n -типу при $T = 0K$ рівень Фермі E_F розташований посередині між дном зони провідності та донорним рівнем. Зі зростанням температури усе більше число електронів переходить із донорного рівня в зону провідності, але через теплове порушення частина електронів з валентної зони переходить у зону провідності. Тому зі зростанням T рівень Фермі E_F зміщується вниз до середини забороненої зони. У напівпровідників p -типу при $T = 0K$, E_F знаходиться посередині між акцепторним рівнем і стелею валентної зони. Зі зростанням температури рівень Фермі E_F зміщується до середини забороненої зони.

21.1.10. Електронно-дірковий (p - n) перехід

Якщо частина одного монолітного кристала має провідність n -типу, інша частина p -типу, то такий контакт є так званим $p-n$ переходом. Основні носії струму (дірки в p -області та вільні електрони в n -області) дифундують з однієї області в іншу. Внаслідок рекомбінації електронів та дірок між областями p і n

утворюється шар напівпровідника, збіднений носіями струму (*запиральний шар*). Між межами p - n переходу виникає електричне поле, яке називається *потенційним бар'єром p - n переходу*.

Якщо подати так звану зворотню напругу $U_{зв}$ на напівпровідникові контакти («мінус» приєднати до p -області, «плюс» – до n -області), то зовнішнє поле, що створюється джерелом напруги, буде направлено в тому ж напрямку, як і поле p - n переходу, яке змусить основні та неосновні носії заряду прямувати до контактів із протилежним потенціалом (рис. 21.15, *а*). Це призведе до того, що концентрація зарядів біля контактів збільшиться, а поблизу p - n переходу зменшиться. Внаслідок цього потенційний бар'єр розшириться, що призведе до ще більшого блокування носіїв зарядів. Але, навіть за таких умов через бар'єр p - n переходу протікатиме незначний зворотний струм, що створюється неосновними носіями. Струм, що протікає через p - n перехід при зворотній напрузі, називають зворотним струмом ($I_{зв}$). Він за своїм характером є дрейфовим тепловим струмом, який не залежить від зворотної напруги.

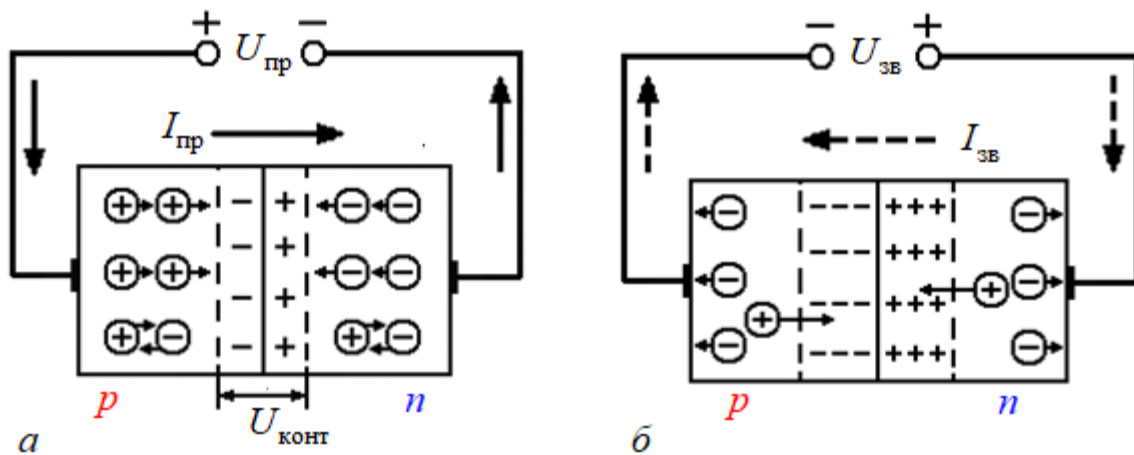


Рисунок 21.15

При поданні прямої напруги $U_{пр}$, коли «мінус» приєднаний до n - області, «плюс» – до p -області, зовнішнє поле спрямовано протилежно до поля p - n переходу (рис. 21.15, *б*). Електрони та дірки, отримавши додаткову енергію, починають цілеспрямовано рухатися до p - n переходу, компенсуючи заряди на ньому. А це означає, що напруга на переході почне зменшуватися і замикальний шар звужуватиметься. При збільшенні зовнішньої прямої напруги потенційний

бар'єр зникає, ширина запирального (збідненого) шару прагне нуля. Подальше збільшення зовнішньої напруги за відсутності збідненого шару p - n переходу призводить до вільної дифузії основних носіїв заряду зі своєї області область з протилежним типом електропровідності. В результаті цього через ланцюг з p - n переходом потече порівняно великий струм, що називається званий прямим струмом ($I_{пр}$), який зі збільшенням прямої напруги зростає.

Вольт-амперна характеристика (ВАХ) p - n переходу є залежністю струму від величини та полярності прикладеної напруги і описується виразом

$$I = I_0 \left[\exp\left(\frac{U}{\phi_T}\right) - 1 \right], \quad (21.38)$$

де I_0 – тепловий зворотний струм, $\phi_T = \frac{kT}{e}$ – температурний потенціал, U – напруга на p - n переході, k – стала Больцмана, T – абсолютна температура; e – заряд електрона.

Права частина ВАХ (рис. 21.16) відповідає прямому відповідає прямому включенню p - n переходу, ліва – зворотному включенню. При прямому включенні, коли $U > 0$, одиницею в рівнянні можна знехтувати, залежність має експоненціальний характер

$$I = I_0 \exp\left(\frac{U}{\phi_T}\right). \quad (21.39)$$

Зі збільшенням прикладеної напруги струм через перехід зростає.

При зворотному включенні ($U < 0$) величиною $\exp\left(-\frac{U}{\phi_T}\right)$, можна знехтувати, зважаючи на її малість, і тоді струм

$$I = I_{зв} \approx -I_0. \quad (21.40)$$

Отже, перехід є нелінійним елементом та має випрямляючі властивості, оскільки опір області переходу дуже залежить від напрямку його включення в електричне коло. Такий контакт двох домішкових напівпровідників з різними типами провідності є основним елементом багатьох приладів та має широке

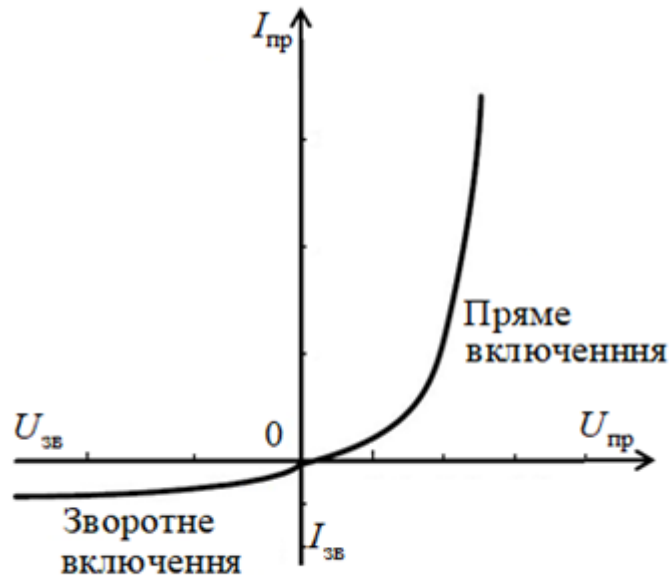


Рисунок 21.16

застосування, серед яких силові випрямлячі (вентилі), високочастотні діоди, стабілізатори напруги, фотодіоди, світлодіоди тощо. Крім того, широко застосовуються більш складні напівпровідникові прилади, які містять два $p-n$ переходи. Прилади, що мають в своєму складі $p-n-p$ і $n-p-n$ переходи, називаються транзисторами. Вони використовуються в електричних схемах, призначених для посилення, генерації, перетворення та комутації сигналів в електричних ланцюгах.

21.2. Приклади розв'язання задач

Задача 21.2.1

Енергія частинки в полі іншої частинки залежить і від відстані між центрами цих частинок згідно з $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^8}$, де α і β – сталі. Знайти 1) відстань, за якої дві частинки утворюють стабільну сполуку; 2) відношення енергії притягнення до енергії відштовхування при стабільній конфігурації; 3) повну потенціальну енергію двох частинок, що утворюють стабільну конфігурацію; 4) відстань, за якою стабільна конфігурація зруйнується.

Дано:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^8}$$

$$r_0 = ? \quad \frac{U_{\text{пр}}}{U_{\text{від}}} = ?$$

$$U_{\text{ст}} = ? \quad r_{\text{max}} = ?$$

Розв'язання

1) Якщо частинки знаходяться далеко одна від одної, то вони поведуться як вільні і не взаємодіють, поки відстань між їхніми центрами набагато більша за суму їх радіусів. При зближенні частинок їх енергія знижується порівняно із повною енергією двох ізольованих частинок

і між ними виникає сила притягнення. Цьому відповідає зменшення потенційної енергії системи. За певної відстані $r = r_0$ енергія сягає мінімуму: частинки утворюють стабільну конфігурацію. Для того, щоб знайти мінімум функції, треба взяти похідну в залежності від відстані між частинками і прирівняти її нулю

$$\frac{dU}{dr} = \frac{d}{dr} \left(-\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^8} \right) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{8\beta}{r^9},$$

$$\frac{\alpha}{r_0^2} - \frac{8\beta}{r_0^9} = 0,$$

$$r_0 = \left(\frac{8\beta}{\alpha} \right)^{1/7}. \quad (1)$$

2) Повна енергія системи може бути описана як сума двох енергій: енергії притягнення $U_{\text{пр}}$, що має негативні значення, та позитивної енергії $U_{\text{від}}$ відштовхування

$$U = U_{\text{пр}} + U_{\text{від}}. \quad (2)$$

Згідно з умовою задачі і з врахуванням (1), енергія притягнення дорівнює

$$U_{\text{пр}} = -\frac{\alpha}{r_0} = -\alpha \left(\frac{\alpha}{8\beta} \right)^{1/7}, \quad (3)$$

а енергія відштовхування

$$U_{\text{від}} = \frac{\beta}{r_0^8} = \frac{\beta}{\left(\frac{8\beta}{\alpha} \right)^{8/7}} = \frac{\beta}{\left(\frac{8\beta}{\alpha} \right) \left(\frac{8\beta}{\alpha} \right)^{1/7}} = \frac{\alpha}{8} \left(\frac{\alpha}{8\beta} \right)^{1/7}. \quad (4)$$

Відношення величин енергій

$$\frac{|U_{\text{пр}}|}{U_{\text{від}}} = \frac{\alpha \left(\frac{\alpha}{8\beta} \right)^{1/7}}{\frac{\alpha}{8} \left(\frac{\alpha}{8\beta} \right)^{1/7}} = 8.$$

Отже, енергія притягнення більше енергії відштовхування в 8 разів.

3) Повна енергія по формулі (8) становить

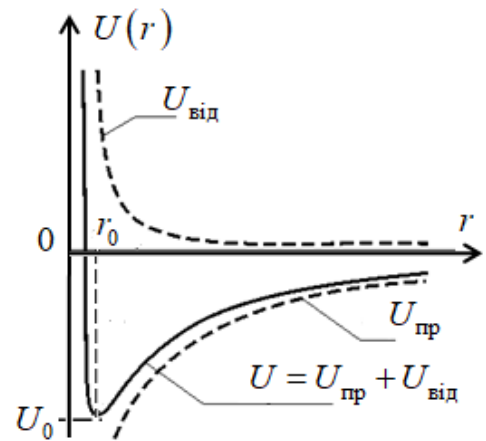
$$U = U_{\text{пр}} + U_{\text{від}} = -\alpha \left(\frac{\alpha}{8\beta} \right)^{1/7} + \frac{\alpha}{8} \left(\frac{\alpha}{8\beta} \right)^{1/7} = -\frac{7\alpha}{8} \left(\frac{\alpha}{8\beta} \right)^{1/7} = -\frac{7\alpha}{8r_0}.$$

4) Зв'язок між частинками буде розірваний при дії максимальної сили F_{max} .

Оскільки сила пов'язана з потенціальною енергією згідно з $F = -\frac{\partial U}{\partial r}$, то з рівняння

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = 0$$

знайдемо відстань, що відповідає максимальній силі



$$\frac{dU}{dr} = \frac{\alpha}{r^2} - 8\frac{\beta}{r^9},$$

$$\frac{d^2U}{dr^2} = \frac{2\alpha}{r_{\max}^3} - \frac{72\beta}{r_{\max}^{10}} = 0$$

Отже, відстань, за якої зв'язок між частинками зникне, дорівнює

$$r_{\max} = \left(\frac{36\beta}{\alpha} \right)^{1/7} = 4,5^{1/7} r_0 = 1,24 r_0.$$

Відповідь: $r_0 = \left(\frac{8\beta}{\alpha} \right)^{1/7}$; $\frac{|U_{\text{пр}}|}{U_{\text{від}}} = 8$; $U = -\frac{7\alpha}{8r_0}$; $r_{\max} = 1,24 r_0$.

Задача 21.2.2

Знайти функцію розподілу Фермі-Дірака при $T \neq 0K$ для електронів, що знаходяться на рівні Фермі.

Дано:	Розв'язання
$T \neq 0K$	Функція розподілу електронів за станами з різною енергією при абсолютному нулі описується наступним виразом

$$\langle n \rangle_{\phi-D} = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{kT}\right) + 1}.$$

Відповідно до принципу Паулі, на кожному енергетичному рівні можуть перебувати два електрони з протилежними спінами. Останнім зайнятим виявиться рівень $N/2$, який називається рівнем Фермі для виродженого електронного газу. Він відповідає максимальній енергії E_F (енергії Фермі), яку може мати електрон в металі при абсолютному нулі температури.

Тоді, якщо вважати, що при $T = 0K$ $\mu = E_F$, функція розподілу матиме такий вигляд:

$$\langle n \rangle_{\Phi-D} = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1}.$$

Досліджуючи властивості цієї функції, отримаємо при абсолютному нулі

$$\langle n \rangle_{\Phi-D} = 1, \text{ якщо } E < E_F$$

$$\langle n \rangle_{\Phi-D} = 0, \text{ якщо } E > E_F.$$

Таким чином, при $T = 0K$ рівень Фермі збігається з верхнім заповненим електронами рівнем $E_F(0)$.

При $T \neq 0K$, незалежно від значення температури, при $E = E_F$ функція

$$\langle n \rangle_{\Phi-D} = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} = \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Отже, при $T \neq 0K$ рівень Фермі збігається з тим енергетичним рівнем, ймовірність заповнення якого дорівнює половині.

Відповідь: $\langle n \rangle_{\Phi-D} = \frac{1}{2}.$

Задача 21.2.3

Визначте функцію розподілу для електронів, що знаходяться на енергетичному рівні E , для випадку $E - E_F \ll kT$, користуючись: 1) статистикою Фермі-Дірака; 2) статистикою Максвелла-Больцмана.

Дано:

$$E - E_F \ll kT$$

Розв'язання

Функція розподілу Фермі-Дірака має вигляд

$$\langle n \rangle_{\Phi-D} = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1},$$

а функція розподілу Максвелла-Больцмана

$$\langle n \rangle_{M-B} = A \exp\left(-\frac{E}{kT}\right).$$

Коли виконується умова $E - E_F \ll kT$ у разі статистики Фермі-Дірака отримуємо

$$\langle n \rangle_{\Phi-D} = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1} \Bigg|_{E - E_F \ll kT} = \frac{1}{2};$$

а при використанні статистики Максвелла-Больцмана

$$\langle n \rangle_{M-B} = A \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) = \exp\left(\frac{E_F}{kT}\right) \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{E - E_F}{kT}\right) \Bigg|_{E - E_F \ll kT} = 1.$$

Відповідь: $\langle n \rangle_{\Phi-D} = \frac{1}{2}; \langle n \rangle_{M-B} = 1.$

Задача 21.2.4

Шматок металу об'ємом $V = 20 \text{ см}^3$ знаходиться за температури $T = 0 \text{ K}$. Визначити число ΔN вільних електронів, імпульси яких відрізняються від максимального імпульсу $p_{\max}$ не більше ніж на $0,1 p_{\max}$. Енергія Фермі $E_F = 5 \text{ eV}$.

Дано:

$$V = 20 \text{ см}^3$$

$$T = 0 \text{ K}$$

$$p_{\max}; 0,1 p_{\max}$$

$$E_F = 5 \text{ eV}$$

$$\Delta N = ?$$

Розв'язання

Для того, щоб встановити розподіл вільних електронів у металі за імпульсами, скористаємося розподілом Фермі для вільних електронів при $T = 0 \text{ K}$

$$dN(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2} dE. \quad (1)$$

Оскільки $dN(E)$ є число електронів в одиниці об'єму, енергії яких укладені в інтервалі значень від E до $E + dE$ ($E < E_F$), то воно має дорівнювати числу

електронів $dN(p)$ в одиниці об'єму, укладених в інтервалі значень імпульсу від p до $p + dp$, тобто

$$dN(p) = dN(E). \quad (2)$$

При цьому треба дотримуватися такої умови. Енергії E повинен відповідати певний імпульс p (який зв'язаний з енергією $E = \frac{p^2}{2m}$), а інтервалу енергії dE

відповідний йому інтервал імпульсів dp , що визначається з $dE = \frac{p}{m} dp$.

Враховуючи, що $E^{1/2} = \frac{p}{(2m)^{1/2}}$, підставимо в праву частину (2) вираз для

розподілу Фермі (1) із заміною E на p і dE на dp , відповідно, і отримуємо

$$dN(p) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \frac{p}{(2m)^{1/2}} \frac{p}{m} dp. \quad (3)$$

Після скорочень і спрощень отримаємо шуканий розподіл вільних електронів у металі за імпульсами при $T = 0K$.

Інтервал значень імпульсів обираємо від $p_{\max} - 0,1p_{\max} = 0,9p_{\max}$ до $p_{\max}$. Тоді число електронів в одиниці об'єму, імпульси яких укладені в вказаний інтервал, можна знайти інтегруванням (3) у відповідних межах

$$\Delta N = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_{0,9p_{\max}}^{p_{\max}} p^2 dp = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} p_{\max}^3 \left[1 - (0,9)^3 \right] = \frac{0,271}{3\pi^2} \frac{p_{\max}^3}{\hbar^2}. \quad (4)$$

Враховуючи, що максимальний імпульс $p_{\max}$ і максимальна енергія електронів у металі E_F при $T = 0K$ пов'язані співвідношенням $p_{\max}^2 = 2mE_F$, знайдемо число ΔN вільних електронів у металі

$$\Delta N = \frac{0,271 \cdot V}{3\pi^2 \hbar^3} (2mE_F)^{3/2} = \frac{0,271 \cdot V}{3\pi^2} \left(\frac{3mE_F}{\hbar^2} \right)^{3/2}. \quad (5)$$

Виразим енергію Фермі в Джоулях, $E_F = 5 \text{ eV} = 8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$, і підставимо дані задачі

$$\Delta N = \frac{0,271 \cdot V}{3\pi^2} \left(\frac{3mE_F}{\hbar^2} \right)^{3/2} = \frac{0,271 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}{3\pi^2} \sqrt{\left(\frac{3 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 8 \cdot 10^{-19}}{1,05 \cdot 10^{-31}} \right)^3} = 2,9 \cdot 10^{23}.$$

Відповідь: $\Delta N = 2,9 \cdot 10^{23}$.

Задача 21.2.5

Оцінити критичну температуру для міді, за якої знімається виродження електронного газу в провіднику, якщо енергія Фермі при $T=0K$ становить $E_F(0)=6,2$ eB.

Дано:	Розв'язання
$E_F(0)=6,2$ eB	При температурах $T \ll T_F$ поведінка електронного газу описується статистикою Фермі-Дірака, а газ вважається виродженим. Основною ознакою виродження
$T_F = ?$	

є незалежність енергії частинки від температури. При $T \geq T_F$ газ описується статистикою Максвелла-Больцмана. Температура, нижче за яку починають проявлятися квантові властивості системи, зумовлені тотожністю частинок, називається температурою виродження. Температура виродження для невзаємодіючих ферм-часток (ідеального фермі-газу) називається температурою Фермі і визначається як

$$T_F = \frac{E_F(0)}{k},$$

де k – стала Больцмана.

Енергія Фермі за умовами задачі

$$E_F(0)=6,2 \text{ eB} = 6,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 9,92 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

Тоді критична температура, за якої знімається виродження, становить

$$T_F = \frac{E_F(0)}{k} = \frac{9,92 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23}} = 7,2 \cdot 10^4 \text{ К.}$$

Зауважимо, що мідь і інші метали в кристалічному стані знаходяться при $T \ll T_F$, і тому електронний газ в металах підпорядковується статистиці Фермі-Дірака і є виродженим.

Відповідь: $T_F = 7,2 \cdot 10^4 \text{ K}$.

Задача 21.2.6

Застосовуючи квантову статистику, знайти число електронів в інтервалі енергій від 0 до E_F при температурі $T = 0 \text{ K}$ і їх концентрацію n .

Дано:	Розв'язання
$0 - E_F$	Число електронів в інтервалі енергій від 0 до E_F
$N = ? \quad n = ?$	визначається формулою

$$N = \int_0^{E_F} g(E) \cdot \langle n \rangle_{\Phi-D} \cdot dE, \quad (1)$$

де

$$g(E) = \frac{\sqrt{2}(m_0)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} V \sqrt{E} \quad (2)$$

– щільність квантових станів – число станів, що припадає на одиничний енергетичний інтервал.

Враховуючи, що при $T = 0 \text{ K}$ функція розподілу за енергіями $\langle n \rangle_{\Phi-D} = 1$, то підставляючи (2) в (1), отримуємо

$$\begin{aligned} N &= \int_0^{E_F} \frac{\sqrt{2}(m_0)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} V \sqrt{E} \cdot dE = \frac{\sqrt{2}(m_0)^{3/2} V}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{E_F} \sqrt{E} \cdot dE = \\ &= \frac{2\sqrt{2}(m_0)^{3/2} V}{3\pi^2 \hbar^3} \Big|_0^{E_F} = \frac{(2m_0 E_F)^{3/2} V}{3\pi^2 \hbar^3}. \end{aligned}$$

Концентрація електронів становить

$$n = \frac{N}{V} = \frac{(2m_0 E_F)^{3/2} V}{3\pi^2 \hbar^3 \cdot V} = \frac{(2m_0 E_F)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}.$$

Відповідь: $N = \frac{(2m_0 E_F)^{3/2} V}{3\pi^2 \hbar^3}; n = \frac{(2m_0 E_F)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}.$

Задача 21.2.7

Знайти максимальну енергію і максимальну швидкість електронів у мідному провіднику при $T = 0K$, вважаючи, що на кожен атом міді припадає по одному вільному електрону.

Дано:	Розв'язання
$T = 0K$	Максимальна енергія, яку може мати електрон при
$E_{\max} = ? \quad v_{\max} = ?$	$T = 0$, це енергія Фермі

$$E_F(0) = \frac{\hbar^3}{2m_0} (3\pi^2 n)^{2/3}.$$

З умови задачі, на один атом міді припадає 1 вільний електрон, тому концентрація електронів

$$n_0 = \frac{\rho N_A}{M},$$

де ρ – густина речовини, M – її молярна маса, N_A – число Авогадро.

Враховуючи, що для міді $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $M = 64 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, а число Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$, концентрація електронів становить

$$n_0 = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{8,9 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{64 \cdot 10^{-3}} = 0,83 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}.$$

Максимальна енергія дорівнює

$$E_{\max} = E_F(0) = \frac{\hbar^3}{2m_0} (3\pi^2 n)^{2/3} = \frac{(1,05 \cdot 10^{-34})^3}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} (3\pi^2 \cdot 0,83 \cdot 10^{29})^{2/3} = 9,9 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Електрони, що мають максимальну енергію, мають і максимальну швидкість.

Тому

$$E_{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2},$$

звідки максимальна швидкість становить

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2E_{\max}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,9 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 4,7 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$$

Відповідь: $E_{\max} = 9,9 \cdot 10^{-19}$ Дж; $v_{\max} = 4,7 \cdot 10^7$ м/с.

Задача 21.2.8

Знайти сумарну кінетичну енергію вільних електронів в 1 см^3 міді при $T = 0\text{K}$, вважаючи, що на кожен атом міді припадає один електрон.

Дано:	Розв'язання
$T = 0\text{K}$	Сумарна кінетична енергія вільних електронів визначається як
$V = 1 \text{ см}^3$	
$E = ?$	$E = \sum_{i=1}^n E_i = n \langle E \rangle, \quad (1)$

де n – число вільних електронів в 1 см^3 , $\langle E \rangle$ – середня кінетична енергія вільного електрона. Середня енергія при $T = 0\text{K}$ дорівнює

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{E_F} E \cdot g(E) dE}{\int_0^{E_F} g(E) dE}. \quad (2)$$

Щільність квантових станів (число станів, що припадає на одиничний енергетичний інтервал)

$$g(E) = \frac{\sqrt{2}(m_0)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} V \sqrt{E} . \quad (3)$$

Підставимо (3) в формулу (2) , проведемо спрощення і отримаємо

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{E_F} E \cdot \frac{\sqrt{2}(m_0)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} V \sqrt{E} dE}{\int_0^{E_F} \frac{\sqrt{2}(m_0)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} V \sqrt{E} dE} = \frac{\frac{\sqrt{2}(m_0)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} V \int_0^{E_F} E^{3/2} dE}{\frac{\sqrt{2}(m_0)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} V \int_0^{E_F} E^{1/2} dE} = \frac{3}{5} E_F .$$

Енергія Фермі для міді становить $E_F = 6,2$ еВ, тому середня енергія дорівнює

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F = \frac{3}{5} \cdot 6,2 = 3,72 \text{ еВ}.$$

Вважаючи, що густина міді $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³, а молярна маса $M = 64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, визначимо число вільних електронів

$$n = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{8,9 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{64 \cdot 10^{-3}} = 0,83 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3} = 0,8 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}.$$

Повна кінетична енергія усіх електронів в 1 см³ по формулі (1) становить

$$E = n \langle E \rangle = 0,8 \cdot 10^{23} \cdot 3,72 = 2,97 \cdot 10^{23} \text{ еВ} = 4,8 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $E = 4,8 \cdot 10^4$ Дж.

Задача 21.2.9

Визначити теплоту Q , що потрібна для нагрівання кристалу міді масою $m = 50$ г від температури $T_1 = 15\text{К}$ до $T_2 = 25\text{К}$. Характеристична температура Дебая $\Theta = 440\text{К}$. Вважати, що виконується умова $T_2 \ll \Theta$.

Дано:	Розв'язання
$m = 50 \text{ г}$	Теплота, що потрібна для нагрівання міді, може бути
$T_1 = 15\text{K} \quad T_2 = 25\text{K}$	знайдена за формулою
$\Theta = 440\text{K}$	$Q = m \int_{T_1}^{T_2} c dT, \quad (1)$
$T_2 \ll \Theta$	
$Q = ?$	де m – маса міді, c – її питома теплоємність.

Питома теплоємність зв'язана з молярною теплоємністю

$$c = C/M, \quad (2)$$

де $M = 64 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса міді.

З врахуванням (2) формула (1) набуває вигляду

$$Q = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} C dT. \quad (3)$$

Якщо виконується умова $T_2 \ll \Theta$, то молярну теплоємність можна виразити за допомогою закону кубів Дебая

$$C = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3, \quad (4)$$

де $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ – універсальна газова стала, Θ – характеристична температура Дебая.

Підставляючи (4) в (3), отримуємо

$$\begin{aligned} Q &= \frac{12\pi^4 R}{5} \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3 dT = \frac{12\pi^4 R}{5} \frac{m}{M} \frac{(T_2^4 - T_1^4)}{\Theta^3} = \\ &= \frac{3\pi^4 \cdot 8,31 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 64 \cdot 10^{-3} \cdot 440^3} (25^4 - 15^4) = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ Дж.} \end{aligned}$$

Відповідь: $Q = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}$.

Задача 21.2.10

При нагріванні зразка з чистого напівпровідника на $\Delta T = 125\text{K}$ від температури $T_1 = 250\text{K}$ його питома електропровідність збільшилася у 800 разів. Як вона зміниться при наступному нагріванні ще на $\Delta T = 125\text{K}$? Знайти ширину забороненої зони цього напівпровідника.

Дано:

$$T_1 = 250\text{K}$$

$$\Delta T = 125\text{K}$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 800$$

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2} = ? \quad \Delta E = ?$$

Розв'язання

Питома електропровідність пропорційна концентрації носіїв струму в чистому напівпровіднику і змінюється в залежності від температури згідно з законом

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT}\right), \quad (1)$$

де ΔE – ширина забороненої зони, k – стала Больцмана, T – абсолютна температура.

Запишемо відношення провідностей для температур T_1 і $T_2 = T_1 + \Delta T$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT_2}\right)}{\sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT_1}\right)} = \exp\left[\frac{\Delta E}{2k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right]. \quad (2)$$

Прологарифмуємо (2) і отримуємо

$$\ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\Delta E}{2k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = \frac{\Delta E \Delta T}{2kT_1 T_2}. \quad (3)$$

Для провідностей при температурах T_2 і $T_3 = T_2 + \Delta T$ можна записати співвідношення, подібне (2), логарифмування якого дає

$$\ln \frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \frac{\Delta E}{2k} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}\right) = \frac{\Delta E \Delta T}{2kT_2 T_3}. \quad (4)$$

Рівняння (3) і (4) об'єднаємо в систему:

$$\begin{cases} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\Delta E \Delta T}{2kT_1T_2}, \\ \ln \frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \frac{\Delta E \Delta T}{2kT_2T_3}. \end{cases} \quad (5)$$

Виразимо ширину забороненої зони ΔE з першого рівняння (5)

$$\Delta E = \frac{2kT_1T_2}{\Delta T} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (6)$$

і підставимо її в друге рівняння системи, враховуючи, що

$$T_3 = T_2 + \Delta T = T_1 + \Delta T + \Delta T = T_1 + 2\Delta T$$

$$\ln \frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \frac{\Delta T}{2kT_2T_3} \frac{2kT_1T_2}{\Delta T} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{T_1}{T_3} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{T_1}{T_1 + 2\Delta T} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (7)$$

Згідно з умовами задачі $T_1 = 250K$, а $\Delta T = 125K$, тому $T_3 = T_1 + 2\Delta T = 2T_1$.

тоді (7) набуває вигляду

$$\ln \frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \frac{T_1}{T_1 + 2\Delta T} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{T_1}{2T_1} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \ln \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}. \quad (8)$$

Підставляючи дані задачі, отримуємо

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} = \sqrt{800} \simeq 28,3.$$

Ширину забороненої зони знайдемо з формули (6)

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{2kT_1T_2}{\Delta T} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{2kT_1(T_1 + \Delta T)}{\Delta T} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 250 \cdot (250 + 125)}{125} \ln 800 = \\ &= 6,92 \cdot 10^{-20} \text{ Дж} = 0,43 \text{ еВ}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{\sigma_3}{\sigma_2} \simeq 28,3$; $\Delta E = 0,43 \text{ еВ}$.

Задача 21.2.11

За якої довжини хвилі напівпровідник германій почне поглинати електромагнітне випромінювання, якщо ширина його забороненої зони становить $\Delta E = 0,75 \text{ eV}$.

Дано:	Розв'язання
$\Delta E = 0,75 \text{ eV}$	Поглинання світла напівпровідником може бути пов'язане з різними процесами: збудженням електронів з
$\lambda = ?$	

валентної зони в зону провідності, зміною коливальної енергії атомів решітки тощо.

Якщо поглинання світла напівпровідником обумовлено переходами електронів із валентної зони до зони провідності за рахунок енергії кванта випромінювання, то поглинання називають власним.

При поглинанні енергія кванта електромагнітного випромінювання передається електрону валентної зони і він має змогу подолати ширину забороненої зони і перейти у зону провідності

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = \Delta E,$$

де h – стала Планка, c – швидкість світла

Тому, довжина хвиля дорівнюватиме

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,75 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,66 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Це довжина хвилі відповідає інфрачервоному випромінюванню.

Відповідь: $\lambda = 1,66 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$

Задача 21.2.12

Питомий опір чистого германію при $T = 300\text{K}$ становить $\rho = 0,47 \text{ Ом} \cdot \text{м}$.
Вважаючи, що рухливість електронів і дірок відповідно дорівнюють $\mu_e = 0,38$ і $\mu_p = 0,18 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$, відповідно, знайти густину носіїв струму.

Дано:	Розв'язання
$T = 300\text{K}$	Питома електропровідність власного напівпровідника, в якому концентрації електронів і дірок дорівнюють одна одній $n_e = n_p = n$, питома електропровідність визначається за формулою
$\rho = 0,47 \text{ Ом} \cdot \text{м}$	
$\mu_e = 0,38$	
$\mu_p = 0,18 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$	
$n = ?$	$\sigma = \sigma_e + \sigma_p = en(\mu_e + \mu_p).$

Зважаючи на те, що електропровідність σ обернено пропорційна питомому опору ρ : $\sigma = \frac{1}{\rho}$, густина носіїв струму (концентрація носіїв струму дорівнює

$$n = \frac{\sigma}{e(\mu_e + \mu_p)} = \frac{1}{\rho e(\mu_e + \mu_p)}.$$

Підстановка даних задачі з врахуванням величини елементарного заряду $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ дає

$$n = \frac{1}{\rho e(\mu_e + \mu_p)} = \frac{1}{0,47 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot (0,38 + 0,18)} = 2,37 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}.$$

Перевірка розмірності:

$$[n] = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{Кл} \cdot \text{м}^2} = \frac{(\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1}) \cdot \text{с}}{(\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}^{-2} \cdot \text{с}^{-3}) \cdot \text{м} \cdot (\text{А} \cdot \text{с}) \cdot \text{м}^2} = \text{м}^{-3}.$$

Відповідь: $n = 2,37 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$.

Задача 21.2.13

Знайти положення рівня Фермі у власному напівпровіднику, для якого концентрації електронів і дірок становлять $n_e = 2 \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{(E_F - E_c)}{kT} \right]$ і

$$n_p = 2 \left(\frac{m_p kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{(E_v - E_F)}{kT} \right], \text{ відповідно.}$$

Дано:

$$n_e = 2 \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{(E_F - E_c)}{kT} \right]$$

$$n_p = 2 \left(\frac{m_p kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{(E_v - E_F)}{kT} \right]$$

$$E_F = ?$$

Розв'язання

Для власного напівпровідника концентрації електронів і дірок дорівнюють одна одній

$$n_e = n_p,$$

а ефективні маси носіїв одного порядку.

Тому рівень Фермі достатньо віддалений від країв зон і напівпровідник буде невідродженим, тобто носії струму підпорядковуються статистиці Максвелла-Больцмана. Прирівняємо задані в задачі концентрації

$$2 \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{(E_F - E_c)}{kT} \right] = 2 \left(\frac{m_p kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{(E_v - E_F)}{kT} \right]. \quad (1)$$

Спростимо рівняння (1) і отримаємо

$$\left(\frac{m_p}{m_e} \right)^{3/2} = \exp \left(\frac{2E_F - E_c - E_v}{kT} \right), \quad (2)$$

де E_F – енергія Фермі, E_c – енергія дна зони провідності, E_v – енергія стелі валентної зони.

Прологарифмуємо (2)

$$\ln \left(\frac{m_p}{m_e} \right)^{3/2} = \frac{2E_F - E_c - E_v}{kT}. \quad (3)$$

Отже, з (3) енергія Фермі дорівнює

$$E_F = \frac{1}{2}(E_c + E_V) + \frac{3}{4}kT \ln\left(\frac{m_p}{m_n}\right).$$

Відповідь: $E_F = \frac{1}{2}(E_c + E_V) + \frac{3}{4}kT \ln\left(\frac{m_p}{m_n}\right).$

Задача 21.2.14

Визначити положення рівня Фермі власному напівпровіднику (германій) при $T = 300\text{ K}$, якщо відомо, що ширина його забороненої зони $\Delta E = 0,665\text{ eV}$, а ефективні маси густини станів для дірок валентної зони та для електронів зони провідності дорівнюють, відповідно, $m_p = 0,388m_0$ $m_e = 0,55m_0$, де m_0 – маса вільного електрона.

Дано:	Розв'язання
$T = 300\text{ K}$	Положення рівня Фермі в напівпровіднику
$\Delta E = 0,665\text{ eV}$	визначається за формулою
$m_p = 0,388m_0$	$E_F = \frac{1}{2}(E_c + E_V) + \frac{3}{4}kT \ln\left(\frac{m_p}{m_n}\right), \quad (1)$
$m_e = 0,55m_0$	де E_F – енергія Фермі, E_c – енергія дна зони
$E_F = ?$	провідності, E_V – енергія стелі валентної зони.

Якщо ввести енергію, що відповідає середині забороненої зони

$$E_i = \frac{E_c + E_V}{2}, \quad (2)$$

то вираз (1) набуває вигляду

$$E_F = E_i + \frac{3}{4}kT \ln\left(\frac{m_p}{m_n}\right). \quad (3)$$

Ефективні густини енергетичних станів в зоні провідності і валентній зоні дорівнюють, відповідно,

$$N_c = 2 \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}, \quad (4)$$

$$N_v = 2 \left(\frac{m_p kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}, \quad (5)$$

коефіцієнт 2 в формулах (4) і (5) враховує те, що на енергетичному рівні можуть знаходитися 2 електрони.

Підставимо дані задачі в вирази (4) і (5)

$$N_c = 2 \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} = 2 \left(\frac{0,55 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{2 \cdot 3,14 \cdot (1,05 \cdot 10^{-34})^2} \right)^{3/2} = 1,04 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3},$$

$$N_v = 2 \left(\frac{m_p kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} = 2 \left(\frac{0,388 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{2 \cdot 3,14 \cdot (1,05 \cdot 10^{-34})^2} \right)^{3/2} = 6,14 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}.$$

Оскільки положення енергетичних рівнів залежить як від температури, так і від концентрацій електронів і дірок, то вираз (3) можна переписати у вигляді

$$E_F - E_V = \frac{\Delta E}{2} + kT \ln \left(\frac{N_v}{N_c} \right) = \frac{0,665 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{2} + 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot \ln \frac{6,14 \cdot 10^{24}}{1,04 \cdot 10^{25}} =$$

$$= 5,32 \cdot 10^{-20} - 2,15 \cdot 10^{-21} = 5,1 \cdot 10^{-20} \text{ Дж} = 0,319 \text{ еВ}.$$

Отже, рівень Фермі у бездомішковому германії за кімнатної температури ($T = 300 \text{ K}$) розташований на 0,319 еВ вище стелі валентної зони.

Відповідь: $E_F - E_V = 0,319 \text{ еВ}$.

Задача 21.2.14

Знайти положення рівня Фермі при $T = 300\text{ K}$ в кристалах германію, що містять $N_{As} = 2 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$ атомів миш'яку і $N_{Ga} = 10^{22} \text{ м}^{-3}$ атомів галію. Ефективна густина станів в зоні провідності в германії $N_c = 1,02 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$.

Дано:	Розв'язання
$T = 300\text{ K}$	П'ятивалентний миш'як у чотиривалентному германії є
$N_{As} = 2 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$	донорною домішкою $N_{As} = N_\delta$, тоді як тривалентний галій є
$N_{Ga} = 10^{22} \text{ м}^{-3}$	акцепторною домішкою $N_{Ga} = N_a$. Вважаючи на те, що
$N_c = 1,02 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$	$N_\delta > N_a$, то такий частково компенсований напівпровідник
$E_F = ?$	виявляє провідність n -типу. Надлишкова концентрація донорів становить
	$N'_\delta = N_\delta - N_a = 2 \cdot 10^{22} - 10^{22} = 10^{22}$.

За умов кімнатної температури усі домішки іонізовані, тому густина енергетичних станів електронів $n \approx N'_\delta$.

Застосуємо формулу для густини енергетичних станів електрону

$$n = N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{kT}\right),$$

де E_F – енергія Фермі, E_c – енергія дна зони провідності, і знаходимо положення рівня Фермі

$$E_c - E_F = kT \ln \frac{N_c}{N'_\delta} = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot \ln \frac{1,02 \cdot 10^{25}}{10^{22}} = 2,87 \cdot 10^{-20} \text{ Дж} = 0,179 \text{ еВ}.$$

Отже, рівень Фермі знаходиться на 0,179 еВ нижче дна зони провідності.

Відповідь: $E_c - E_F = 0,179 \text{ еВ}$.

21.3. Задачі для самостійної роботи

21.3.1. Яка частина η вільних електронів у металі має при абсолютному нулі кінетичну енергію, що перевищує половину максимальної енергії?

Відповідь: $\eta = \frac{\Delta n}{n} = 0,64.$

21.3.2. Концентрація вільних електронів натрію $2,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Визначити температуру Фермі та швидкість електронів на рівні Фермі.

Відповідь: $T_F = 3,6 \cdot 10^4 \text{ К}; V_F = 1,04 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$

21.3.3. Знайти температуру виродження електронного газу в металі, якщо концентрація електронів дорівнює $n = 53 \cdot 10^{27} \text{ м}^{-3}$.

Відповідь: $T_F = 5,924 \text{ К}$

21.3.4. Визначити кількість теплоти ΔQ , необхідну для нагрівання кристала NaCl масою $m = 20 \text{ г}$ на $\Delta T = 2 \text{ К}$, у двох випадках, якщо нагрівання починається від температури: 1) $T_1 = \Theta_D$; 2) $T_2 = 2 \text{ К}$. Характеристичну температуру Дебая для NaCl прийняти $\Theta_D = 320 \text{ К}$.

Відповідь: $\Delta Q = 16,3 \text{ Дж. } \Delta Q = 1,22 \text{ мДж}.$

21.3.5. На нагрівання металічного зразка масою 100 г від 20°С до 50°С витрачено 8300 Дж . Визначити, з якого мета був виготовлений предмет, якщо вказаний інтервал вище за характеристичну температуру.

Відповідь: $M = 9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, берилій.

21.3.6. Знайти характеристичну температуру кристала, якщо його теплоємність при $T_1 = 20 \text{ К}$ $C_1 = 0,054 \text{ кал/моль} \cdot \text{К}$ і при $T_2 = 30 \text{ К}$ $C_2 = 0,18 \text{ кал/моль} \cdot \text{К}$

Відповідь: $\Theta_D = 408,5 \text{ К}.$

21.3.7. При нагрівання 15 г срібла від $T_1 = 10 \text{ К}$ до $T_2 = 20 \text{ К}$ тілу було передано $Q = 1,065 \text{ Дж}$ теплоти. Знайти характеристичну температуру срібла, вважаючи $T_2 \ll \Theta_D$. Молярна маса срібла $M = 107,86 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

Відповідь: $\Theta_D = 212K$.

21.3.8. Чистий кристалічний германій містить $4,5 \cdot 10^{28}$ атомів/м³. При температурі 300 К один атом з кожних $2 \cdot 10^9$ атомів іонізований. Рухливості електронів і дірок за цієї температури відповідно дорівнюють $\mu_e = 0,4$ м²/В·с та $\mu_p = 0,2$ м²/В·с. Визначити питому провідність чистого германію.

Відповідь: $\sigma = 2,16$ Ом⁻¹·м⁻¹.

21.3.9. Напівпровідниковий зразок нагрівають від 0 до 17°C. Приймаючи ширину забороненої зони $\Delta E = 0,72$ еВ, визначити, в скільки разів η зросте його питома електропровідність.

Відповідь: $\eta = 2,4$.

21.3.10. Знайти положення рівня Фермі щодо середини забороненої зони при $T = 300$ К для кристала германію, що містить $5 \cdot 10^{16}$ см⁻³ атомів миш'яку. Ширина забороненої зони германію 0,66 еВ.

Відповідь: на 0,17 еВ вище за середину забороненої зони.

21.3.11. Визначити концентрацію носіїв заряду чистому германії при $T = 300K$. На скільки градусів потрібно підвищити температуру від початкової (300K), щоб кількість електронів провідності у германії збільшилася вдвоє.

Відповідь $\Delta T = 17K$.

21.3.12. Знайти для температури $T = 40$ К концентрацію дірок та питомий опір кремнію, легованого бором до концентрації $N_a = 10^{22}$ м⁻³, якщо ефективна маса густини станів $m_v = 0,56m_e$, положення енергетичного рівня бору $E_a = E_v + 0,045$ еВ, а рухливість дірок $\mu_p = 0,928$ м²/В·с.

Відповідь: $n_p = 1,05 \cdot 10^{20}$ м⁻³; $\rho = 6,4 \cdot 10^{-2}$ Ом·м.

21.3.13. Визначити електропровідність германію, який містить індій у концентрації $2 \cdot 10^{22}$ м⁻³ та сурму у концентрації 10^{21} м⁻³.

Відповідь: $\sigma = 637$ Ом⁻¹·м⁻¹.

21.3.14. Обчислити власну концентрацію носіїв заряду в кремнії при $T = 300\text{ K}$, якщо ширина його забороненої зони $\Delta E = 1,12\text{ eV}$, а ефективні маси станів дорівнюють $m_c = 1,05m_0$, $m_v = 0,56m_0$, $m_e = 0,55m_0$, де m_0 – маса вільного електрона.

Відповідь: $n_i \simeq 7 \cdot 10^{15}\text{ м}^{-3}$.

21.3.15. Обчислити положення рівня Фермі щодо дна зони провідності у напівпровіднику із концентрацією іонізованих донорів $N_d = 10^{23}\text{ м}^{-3}$. При температурі $T = 300\text{ K}$ густина станів біля дна зони провідності становить $N_c = 2,5 \cdot 10^{25}\text{ м}^{-1}$.

Відповідь: $\mu - E_c = -0,143\text{ eV}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кучерук, І. М. Загальний курс фізики. У трьох томах : навч. посіб. Т. 3 : Оптика. Квантова фізика / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук. - 2-ге вид., випр. - К. : Техніка, 2006. - 518 с.
2. Галушак М.О. Курс фізики: підручник : [у 3 кн.] / М. О. Галушак ; Івано-Франків. нац. техн. ун-т нафти і газу. - Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, [201-] - 2019. Кн. 3 : Оптика. Квантова та атомна фізика. - 2019. - 295 с.
3. Збірник задач з фізики: навч. посіб. / Андрейко А. М. [та ін.] ; за ред. І. Є. Лопатинського та А. М. Андрейка. – Львів : Вид-во Нац. ун-ту "Львів. політехніка", 2010. - 316 с.
4. Ігнатенко В.М. Посібник до практичних занять з фізики. Част. 3 / В. М. Ігнатенко, В. Ф. Нефедченко, А. С. Опанасюк. – Суми : Сум. держ. ун-т, 2023. – 296 с.
5. Артеменко Ю.А. Фізика : навч. посіб. для студентів вищ. навч. закл. / Артеменко Ю. А., Любименко О. М. – Луцьк : ДВНЗ "ДонНТУ", 2022. – 259 с.
6. Іщенко Р. М. Збірник задач з фізики : навч. посіб. для студ. вищ. пед. та інж.-техн. навч. закл. / Р. М. Іщенко, Т. Д. Шатній, Г. Л. Ісаєнко ; Нац. трансп. ун-т. - К. : НТУ, 2010. - 188 с.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
14. ХВИЛЬОВА ОПТИКА	5
14.1. Теоретичні відомості	5
14.2. Приклади розв'язання задач	31
14.3. Задачі для самостійної роботи	55
15. ЕЛЕМЕНТИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ	58
15.1. Теоретичні відомості	58
15.2. Приклади розв'язання задач	66
15.3. Задачі для самостійної роботи	84
16. КВАНТОВА ОПТИКА	86
16.1. Теоретичні відомості	86
16.2. Приклади розв'язання задач	104
16.3. Задачі для самостійної роботи	130
17. АТОМНА ФІЗИКА. БОРІВСЬКА ТЕОРІЯ АТОМА	133
17.1. Теоретичні відомості	133
17.2. Приклади розв'язання задач	143
17.3. Задачі для самостійної роботи	159
18. ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ	162
18.1. Теоретичні відомості	162
18.2. Приклади розв'язання задач	171
18.3. Задачі для самостійної роботи	199
19. БУДОВА АТОМІВ І МОЛЕКУЛ	202
19.1. Теоретичні відомості	202
19.2. Приклади розв'язання задач	226
19.3. Задачі для самостійної роботи	250
20. ЯДЕРНА ФІЗИКА. РАДІОАКТИВНІСТЬ	253
20.1. Теоретичні відомості	253
20.2. Приклади розв'язання задач	280
20.3. Задачі для самостійної роботи	297
21. ЕЛЕМЕНТИ ФІЗИКИ ТВЕРДОГО ТІЛА	299
21.1. Теоретичні відомості	299
21.2. Приклади розв'язання задач	335
21.3. Задачі для самостійної роботи	355
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	358

Навчальне видання

ГАЛУЩАК Ірина Володимирівна
ЛЮБЧЕНКО Олена Анатоліївна
МЕНЬШОВ Юрій Валентинович
МАРТИНОВА Катерина Вікторівна
САВЧЕНКО Алла Олександрівна
АЛМАЗОВА Олена Борисівна
ДРОЗДОВА Ганна Анатоліївна
БАГМУТ Олександр Григорович

ПОСІБНИК З ФІЗИКИ

Частина 3

ОПТИКА. АТОМНА І ЯДЕРНА ФІЗИКА

Навчальний посібник у 3-х частинах
для студентів першого бакалаврського рівня освіти
усіх технічних спеціальностей

за редакцією О. А. Любченко

Відповідальна за випуск проф. Любченко О. А.
Роботу до видання рекомендував доц. Дроздов А. М.

В авторській редакції

План 2023 р., поз. 132

Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 22,5.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, м. Харків, вул. Кирпичова, 2

Електронне видання